华章数学译丛

41



# University Calculus

# 托马斯大学微积分


Joel Hass
加州大学戴维斯分校

（美） Maurice D. Weir 著
海军研究生院

George B. Thomas, Jr.
麻省理工学院

李伯民 译





机械工业出版社
China Machine Press

华 章 数 学 译 丛

41

# University Calculus

# 托马斯大学微积分

(美)

Joel Hass
加州大学戴维斯分校

Maurice D. Weir
海军研究生院

George B. Thomas, Jr.
麻省理工学院

著

李伯民 译



机械工业出版社
China Machine Press

《托马斯大学微积分》是受到广泛赞誉的《托马斯微积分》的精编版本. 这个精编版本根据当今大学微积分课程的目标取舍主题，浓缩题材，使其更适于教学和学习. 同时，本书继承和发扬原著的优点：坚持准确性和严谨性，突出应用，强调练习和技能训练，融入现代化技术手段，并且保持良好的可读性.

本书前半部分讨论一元函数的微积分，其中包含对函数的复习；后半部分论述多元函数的微积分.

本书适合作为高等院校理工科本科课程教材或教学参考书，同时也可作为科学技术人员的自学用书.



**本书版权登记号：图字：01-2006-3152**

**图书在版编目(CIP)数据**

托马斯大学微积分/(美)哈斯(Hass, J.)等著；李伯民译. —北京：机械工业出版社，2009.3

(华章数学译丛)

书名原文：University Calculus

ISBN 978-7-111-25134-7

Ⅰ.托…　Ⅱ.①哈…　②李…　Ⅲ.微积分　Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 144658 号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码　100037)

责任编辑：迟振春

北京瑞德印刷有限公司印刷

2009 年 3 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm · 55 印张

标准书号：ISBN 978-7-111-25134-7

定价：118.00 元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换

本社购书热线：(010)68326294

# 译 者 序

呈现在读者面前的这本《托马斯大学微积分》(*University Calculus*)，堪称是与时俱进、精益求精和推陈出新的典范之作.

本书脱胎于著名的《托马斯微积分》(*Thomas' Calculus*)，由麻省理工学院资深老教授 G. B. 托马斯编著. 这本大作是享誉世界的少数经典微积分学教材之一，并且在麻省理工学院和美国其他一些大学长期使用. 该书从 1951 年出版到近期的第 11 版面世，历经半个多世纪的改进，成为美国主流教材之一，其使用经久不衰，充分显示出它的影响力和价值.《托马斯微积分》过去的书名是《微积分和解析几何》(*Calculus and Analytic Geometry*)，自第 10 版更改为现在的名称. 它的内容包括我们通常所说的微积分以及高等微积分的部分预备知识.

《托马斯大学微积分》是《托马斯微积分》的精编版本，为了更好地适应大学微积分教学的需要，作者在全美大学范围内作了调查，新书就是在原书的基础上依据作者征询的意见改写而成的.

微积分诞生于 17 世纪后半叶，成熟于 19 世纪末和 20 世纪初. 在牛顿和莱布尼茨提出最初形态的微积分后，经过 200 余年的发展、改进和完善，于 20 世纪初形成以微积分为核心的现代数学分析的经典理论. 发明微积分是数学史上继创立欧几里得几何学的第二个里程碑，它一方面奠定了现代数学本身的基础，由此开创了数学各个学科分支飞速发展的新时代；另一方面，它成为近 300 年来促进科学技术革命，推动自然科学、工程技术以及人文科学全面进步不可或缺的工具. 不仅如此，微积分还以其唯物辩证和思辨的自然哲学思想，深刻地影响着人们对客观世界的认识和正确思维方式的形成. 发明微积分是人类有史以来取得的最伟大的科学成就之一. 恩格斯曾经精辟地指出："在一切理论成就中，未必有什么像 17 世纪下半叶微积分的发明那样被看成人类精神的最高胜利了."

正是由于微积分在推动社会前进中所起的作用和所处的地位，当今微积分已成为大学教育中理工科以及其他技术学科乃至人文学科一切大学生的必修课程，也是当今广大知识阶层需要掌握的一门学问. 学习微积分学不同于学习读者从中学阶段就接触的算术、代数、三角和几何学，这些课程主要涉及以经验和直觉为基础的空间形式和数量关系的一般演算与推理. 而微积分则不同，它需要建立更深层次的概念和方法. 这也说明为何欧几里得几何学早在公元前两个世纪就建立起完整的演绎体系，而微积分在两千多年之后才被发现，又经过几百年的演变始臻于完备. 由于这种差异，选择学习微积分的教材便成为一个重要问题.

已经出版的微积分学教科书数以千计，经过长期的自然选择过程，也不乏优秀之作，不过普遍适用于一般大学的教材并不多见.《托马斯大学微积分》继承和发扬了《托马斯微积分》的传统优点，融入新材料和新教学思想，整合题材，调整结构，使之更便于组织教学和更易于阅读，可谓"青出于蓝而胜于蓝".

本书集中地展现出诸多令人瞩目的特点.

第一，坚持微积分的如下教学目标：以最快的步伐使学生了解微积分的基本概念，掌握其分析方法和理论基础，获得实际应用能力，为他们尽早进入现代数学、科学技术和其他应用领域做好准备.

第二，力求按照微积分学创建和形成的过程讲述微积分. 从根本上说，数学的概念、方法和

理论来源于实践和经验，微积分更不例外．发明微积分的过程乃是从现实世界的“原型”提炼微积分的概念、方法和理论的过程．微积分往往给初学者带来困难的原因是最后形成的抽象概念和严密理论脱离了现实世界，变得难以理解．本书运用大量富于启发性的实例引领读者进入讨论的主题，从中归纳出定义和定理，然后再把微积分形成的理论和方法付诸应用，展现其“来龙去脉”．在这里，微积分不是神秘的、枯燥乏味的，而是自然的、生动有趣的．

第三，坚持严格性标准．本书虽然不采用纯粹从抽象概念和定义出发推导结论和定理的讲述方式，但是，演绎论证毕竟是建立严密理论系统所必需的．本书非常重视严格性，对于重要的概念和定义给出形式化描述；对于大部分定理和推论给出严格证明，或者指出证明的步骤；对于少数未予证明的定理和推论留作习题让读者证明；只对少数超出本书范围的定理才留待高等微积分教程去证明．

第四，为帮助学生掌握微积分方法和培养解决应用问题的能力，提供了丰富多彩的各类习题．每一节有围绕主题的习题，每一章有指导复习的问题、实习习题以及补充和提高习题．所有这些习题构成一个完备的题库，其中包括各种类型和不同难度的习题，习题总量将近6000道，涉及数、理、化、生、地和天文等自然科学，气象和环境科学，军事和航天技术，医学和生命科学，经济学，材料、能源、交通和工程技术，以及数学本身．不同读者可以选择适合于自己的习题．

第五，注意使微积分同现代计算机工具相结合．部分习题要求使用CAS(计算机代数系统)．CAS是能够进行微积分计算和采用符号形式求微积分的系统，Maple和Mathematica就是这样的数学应用软件系统．这类系统带有各种软件包和图形计算器，具有很强的计算、求解和绘图功能．虽然对于学习微积分而言，使用计算机工具不是必需的，但是在用微积分解决应用问题时这些工具无疑是重要的．

总之，本书目标明确，题材适中，组织严密，深入浅出，非常适于我国大学一般专业作为微积分课程的教材．对于广大自学数学的读者，也是一部优秀的经典读物．

由于译者学识和水平所限，译文难免遗留错误，敬请读者指正．译者对存在的错误承担责任，并力求在日后重印时修改．

译　者

2008年4月

# 前　　言

**概览**　这本《托马斯大学微积分》是《托马斯微积分》更为精炼和步调更快的改进版本，保持了原著坚持高标准和突出应用的特点.

从一本精心编撰的书中浓缩题材是一项艰难的任务. 我们保持《托马斯微积分》中主要思想的谨慎演变，并且拒绝降低其严格性的诱惑. 我们认为，按高标准会激发学生追求卓越才智. 另一方面，具备各种函数的坚实基础，对于理解微积分是极为重要的. 有鉴于此，我们保留了压缩后的第1章，复习各种基本函数. 我们理解某些教授宁愿跳过这种复习，但也相信还有许多学生需要再次阅读这些材料. 第1章不是对微积分的简介，而是对普通学生提供有益的帮助.

当今，越来越多的高中学生熟悉微积分中的术语和运算方法. 然而，当他们进入大学时，对微积分概念的理解通常是非常有限的. 我们认识到这一现实，因此始终专注于各种概念以及它们的应用.

为了达到《托马斯大学微积分》的目标，我们征询了很多同行和评论家们的意见. 他们帮助我们决定哪些主题需要保留，哪些主题应予压缩或者删除. 我们谨以这本新书对他们的精心建议表示感谢.

## 教学法特点

**习题**　习题和例子在学习微积分中扮演着至关重要的角色. 本书收录了出现在《托马斯微积分》以前各版中的许多习题，这些习题是那些版本的重要组成部分. 在每一节，按主题组织和归类从计算问题到应用问题和理论问题的习题. 这种安排使学生有机会培养应用微积分方法的技能以及深化他们对微积分应用的理解.

**严格性**　始终如一地坚持严格性标准. 我们同时给出形式的和非形式的讨论，分清两者之间的差别，而且为学生提供精确的定义和易于理解的证明. 课文的组织使本书的题材可以按非形式的方式讲授，给予教师一定程度的灵活性. 例如，虽然我们并未证明闭有界区间上的连续函数有最大值，但是我们精心地陈述这个定理并用它证明了几个其后的结果.

**艺术性**　我们认识到图形和图解是学习微积分的重要组成部分. 我们格外注意用图形解释相关概念的清晰性. 三维图形在这一点上尤其明显，使我们能更好地表示深度、层次和旋转.

**章后复习问题和研究题目**　除每节后面给出习题之外，每章以复习问题、实习习题以及一系列补充和提高习题终结. 学生研究题目可以从 wps. aw. com/aw_thomas_calculus_11 获得.

**写作习题**　贯穿全书的写作习题要求学生探究微积分各种各样的概念和应用. 另外，每章包含要求学生总结所学知识的问题. 许多这样的问题要求书面描述，以检测对概念的理解.

**答案**　对所有奇数编号的习题提供答案，这些答案的正确性经过认真检查.

**数学上的正确性**　我们仅限于谨慎地讲述真实的和正确的材料. 对于每个定义、定理和系以及证明都作过检查，保证表达的清晰性和推理的正确性.

**行文和应用**　本书继续保持易于阅读、通俗化和数学上丰富多彩的特点. 每个新主题的引入都由鲜明的、易懂的例子和应用诱导.

**技术应用**　依据教师的鉴赏倾向融入有用技术. 每节包含需要使用技术的习题：如果适于用计算器或计算机，则标识记号**T**；如果需要用计算机代数系统（CAS，例如 Maple 或

Mathematica)，则注明**计算机探究**.

## 补充读物

**《大学微积分学生版》**(*Student Edition of University Calculus*)

ISBN 0-321-35014-6

**《教师题解手册》**(*Instructor's Solutions Manual*)

第 1 部分(第 1 ~9 章)，ISBN 0-321-38848-8

第 2 部分(第 10 ~14 章)，ISBN 0-321-38698-1

《教师题解手册》由 William Ardis 等编写，包含对本书全部习题的完整解答.

**《习题答案》**(*Answer Book*)

ISBN 0-321-39423-2

《习题答案》由 William Ardis 等编写，包含对本书大部分习题的简要解答.

**《学生提纲》**(*Student Outlines*)

第 1 部分(第 1 ~9 章)，ISBN 0-321-39551-4

第 2 部分(第 10 ~14 章)，ISBN 0-321-39969-2

《学生提纲》对照课文组织材料，由 Joseph Borzellino 和 Patricia Nelson 编写，它强化重要概念，并且提供对重要的主题、定理和定义以及学习提示和补充实习问题的概述.

**《初期超越函数微积分适用的代数和三角学》**(*Just-in-Time Algebra and Trigonometry for Early Transcendentals Calculus*)，第 3 版

ISBN 0-321-32050-6

锐敏的代数和三角学技巧对掌握微积分至关重要，由 Guntram Mueller 和 Ronald I. Brent 编写的《初期超越函数微积分适用的代数和三角学》(第 3 版)旨在帮助学生在学习微积分时掌握这些技巧. 本书在学生学习中的每一步，向他们展示必需的代数或三角学主题，并指出潜在的难点. 包含代数和三角学主题的易于使用的材料，按学生学习微积分时所需这些主题的次序安排.

## 在线辅助材料

**MyMathLab**

MyMathLab 是为 Addison-Wesley 出版公司的数学和统计学教科书编写的一套易于定制的在线课程的特殊教材. 在 CourseCompass(Pearson Education 的在线教学和学习环境)和 MathXL(我们的在线家庭作业、辅导和评估系统)的支持下，MyMathLab 对教师提供讲授全部或部分在线课程所需的工具，不论学生是在实验室还是在家学习. MyMathLab 提供一个丰富灵活的课程材料套件，具有由算法生成的自由式应答习题的特点，这些材料的利用不受限制. 学生也可使用在线工具，如视频讲座、动画、多媒体教材和 Maple/Mathematica 项目等，独立加深他们对课程的理解和提高学习成绩. 教师可用 MyMathLab 的家庭作业和测验管理器选择和布置与教材直接相关的在线习题，为了增加灵活性，他们还可以创建和布置自己的在线习题并且导入 TestGen 测验. MyMathLab 的在线评分册——特别为数学和统计学设计——自动跟踪学生的家庭作业和测验结果并且使教师控制如何计算最终成绩. 教师还可以把离线(纸和笔记录的)成绩加进评分册计算最终成绩. 具备资格的采纳者可以获取 MyMathLab. 欲了解详细情况请访问我们的网站 www. mymathlab. com 或者同 Addison-Wesley 联系. ⊖

---

⊖ 教辅材料申请和联系方式请见书后所附的“教学支持说明”. ——编辑注

**MathXL**

MathXL是同Addison-Wesley出版公司的数学和统计学教材配套的强大的在线作业、辅导和评估系统. 通过MathXL，教师能够使用以算法方式生成的习题创建、编辑和布置在线家庭作业和测验题，这些习题和测验题在目标层面上同教材相关. 他们也可以创建和布置自己的在线习题和导入TestGen测验题，以增加灵活性. 对所有学生的作业都可在MathXL的在线评分册上进行跟踪. 学生可在MathXL上接受按章测验并收到根据测验结果制定的个性化学习计划. 学习计划指出薄弱环节并直接链接到学生需要学习和重新测验目标的辅导习题. 学生也可以直接从选定习题进入补充的动画和视频剪辑. 具备资格的采纳者可以获取MathXL. 欲了解详细情况请访问我们的网站www. mathxl. com或者同Addison-Wesley联系.

**TestGen**

TestGen使教师能够使用为达到本书全部目标而开发的一个计算机化的题库，建立、编辑、打印和管理测验题. TestGen是基于算法方式的，使教师通过点击一个按钮就能为同样的问题或测验创建多种等价的版本. 教师还可以修改测验库中的问题或添加新问题. 测验题可以在线打印和管理. 这个软件可以从一张双面Windows/Macintosh CD-ROM获取.

## 感谢

我们要感谢Marie Vanisko和Thomas Wegleitner为本书的准确校对. 我们还要对下列审阅者对本书提供的建议和作出的贡献致以诚挚的感谢:

Harry Allen，俄亥俄州立大学
Edoh Amiran，西华盛顿大学
Anthony Bedenikovic，布雷德利大学
Deborah Brandon，卡内基-梅隆大学
Said Fariabi，圣安东尼奥学院
Krystyna Kuperberg，奥布恩大学
Paul Sacks，艾奥瓦州立大学
Stephen Summers，佛罗里达大学
Blake Thornton，华盛顿大学(圣路易斯)
Ilie Ugarcovici，赖斯大学

最后，我们对本书的责任编辑David Chelton提出的意见、建议和给予的鼓励表示感谢.

# 目　录

# 第1章 函　　数

**概述**　函数是学习微积分学的基础．在这一章我们复习函数是什么，如何绘制函数的图形，如何对函数进行组合和变换，以及可以用来对函数分类的方法．我们考察微积分学中出现的主要函数类型，其中包括三角函数、指数函数和对数函数．此外，也要讨论在用计算器和计算机绘制函数图形时可能出现的失误．（对于实数系、笛卡儿坐标、直线、抛物线和圆的复习放在附录中．）

## 1.1　函数及其图形

函数是用数学语言描述现实世界的关键成分．函数可以用方程式、数值表和图形表示，或者用文字描述；本书中我们将采用所有这四种表达函数的方式．这一节复习函数的这些概念．

### 1.1.1　函数，定义域与值域

水的沸点同海拔高度有关（沸点随海拔的升高而下降）．现金投资的回报依赖于投资的持续时间．圆的面积由圆的半径确定．物体在恒定速度下沿直线路径运动的距离取决于经历的时间．

在每种情形下，一个变量（例如 $y$）的值依赖于另一个变量（例如 $x$）的值．我们把这样的事例称为"$y$ 是 $x$ 的函数"，并用记号表示成

$$y = f(x) \qquad (读作“y 等于 f 对 x 的值”)$$

在这种表示法中，符号 $f$ 代表函数，字母 $x$ 代表 $f$ 的输入值的**自变量**，而 $y$ 是**因变量**或 $f$ 在 $x$ 的输出值．

> **定义**　从集合 $D$ 到集合 $Y$ 的**函数**是一个对应规则，对于每个元素 $x \in D$ 确定唯一的（单个）元素 $f(x) \in Y$.

所有可能输入值的集合 $D$ 称为函数的**定义域**．当 $x$ 遍取 $D$ 中的元素时，$f(x)$ 的所有值的集合称为函数的**值域**．值域可能并不包含集合 $Y$ 中的每一个元素．函数的定义域和值域可以为任何对象的集合，不过在微积分学中它们通常是解释为坐标线上的点的实数集合．（在第 11 章至第 14 章讨论的函数，其定义域和值域集合的元素是坐标平面或坐标空间中的点．）

通常，函数用公式表达，以公式描述如何从输入变量计算输出值．例如，公式 $A = \pi r^2$ 是从圆半径 $r$ 计算圆面积 $A$ 的规则（在这个公式中 $r$ 被解释为长度，只能取正值）．当用公式定义函数时，如果定义域没有以显式方式说明或者由上下文限定，那么假定定义域是使公式中 $y$ 取实数值的实数 $x$ 值的最大集合，即所谓的**自然定义域**．如果要用某种方式限定定义域，那么必须予以说明．$y = x^2$ 的定义域是全体实数的集合．例如，为了限制这个函数的自变量 $x$ 取正值，就应该写成"$y = x^2$，$x > 0$"．

对于用公式表示的函数，当改变定义域时，通常也改变函数的值域．$y = x^2$ 的值域是 $[0, \infty)$．"$y = x^2$，$x \geqslant 2$"的值域是全体大于或等于 2 的数的平方值的集合．在集合记号中，这个值域为 $\{x^2 \mid x \geqslant 2\}$ 或 $\{y \mid y \geqslant 4\}$ 或 $[4, \infty)$．

如果函数的值域是实数集，就说函数是**实值的**．一个实变量的许多实值函数的定义域和值域是区间或者若干区间的组合．区间可以取开区间、闭区间或半开区间，也可以是有限区间或者无限区间．

一个函数$f$犹如一台机器，只要从函数定义域中馈送一个输入值$x$，就产生它的值域中的一个输出值$f(x)$（见图 1.1）. 计算器的函数键就是把函数当成机器的例子. 例如，计算器上的$\sqrt{x}$键，只要对计算器输入一个非负数值$x$并按$\sqrt{x}$键，它就给出一个输出值(平方根).

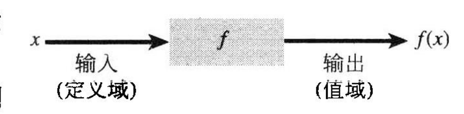



图 1.1 把函数视为一种机器的图形

函数也可以用**箭头图**表示(见图 1.2). 每个箭头使定义域$D$中的一个元素同集合$Y$中一个唯一的元素关联. 在图 1.2 中，箭头表示$f(a)$与$a$关联，$f(x)$与$x$关联，等等. 请注意，一个函数对于定义域中两个不同的输入元素可能具有相同的值(如图 1.2 中的$f(a)$)，但是对每个输入元素$x$只能给定一个输出值$f(x)$.

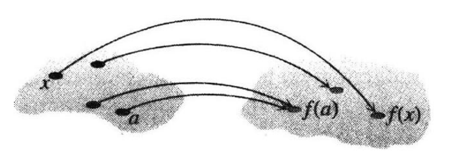



图 1.2 从集合$D$到集合$Y$的函数，对与于$D$中的每个元素给定$Y$中一个唯一的一个元素

**例 1** 验证下列函数的自然定义域和关联的值域.

| 函数 | 定义域 | 值域 |
|---|---|---|
| $y=x^2$ | $(-\infty, \infty)$ | $[0, \infty)$ |
| $y=1/x$ | $(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$ | $(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$ |
| $y=\sqrt{x}$ | $[0, \infty)$ | $[0, \infty)$ |
| $y=\sqrt{4-x}$ | $(-\infty, 4]$ | $[0, \infty)$ |
| $y=\sqrt{1-x^2}$ | $[-1, 1]$ | $[0, 1]$ |

**解** 公式$y=x^2$对于任何实数值$x$给定一个实数值$y$，所以函数的定义域为$(-\infty, \infty)$. $y=x^2$的值域是$[0, \infty)$，因为任何实数的平方是非负实数，而每个非负实数$y$是它自身平方根的平方，即对于$y\geqslant 0$，$y=(\sqrt{y})^2$.

公式$y=\dfrac{1}{x}$对于$x=0$以外的每个实数值$x$给出一个实数值$y$. 我们不能用 0 除任何数. $y=\dfrac{1}{x}$(非零实数的倒数)的值域是全部非零实数的集合，因为$y=\dfrac{1}{(1/y)}$.

公式$y=\sqrt{x}$仅当$x\geqslant 0$时给出一个实数值$y$. $y=\sqrt{x}$的值域是$[0, \infty)$，因为每个非负实数是某个数的平方根(就是说，它是其自身平方的平方根).

在公式$y=\sqrt{4-x}$中，$4-x$不能是负数值. 就是说，$4-x\geqslant 0$，或者$x\leqslant 4$. 公式对全部$x\leqslant 4$给出实数值$y$. $\sqrt{4-x}$的值域是$[0, \infty)$，即全部非负实数的集合.

公式$y=\sqrt{1-x^2}$对闭区间$[-1, 1]$上的每个$x$给出实数值$y$. 在这个定义域之外，$1-x^2$为负数，其平方根不是实数. $1-x^2$在给定定义域上的值从 0 变到 1，而这些值的平方根也是从 0 变到 1. 所以，$\sqrt{1-x^2}$的值域是$[0, 1]$. ■

### 1.1.2 函数的图形

如果$f$是以$D$为定义域的函数，那么，它的**图形**由笛卡儿坐标平面内以$f$的成对输入/输出为坐标的点组成. 用集合记号，图形记为

$$\{(x, f(x)) \mid x\in D\}$$

函数$f(x)=x+2$的图形是以满足$y=x+2$的$(x, y)$为坐标的点的集合. 它的图形是图 1.3 中画出的直线.

函数的图形是显示函数性质的有用图像. 如果$(x, y)$是函数$f$的图形上的一点，那么，$y=f(x)$是其图形在点$x$上的高度. 高度可以取正值或者负值，这取决于$f(x)$的符号(见图 1.4).

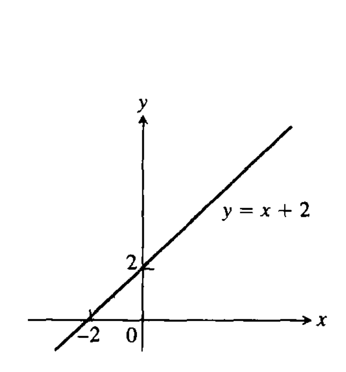



图 1.3　$f(x)=x+2$ 的图形是使 $y$ 值为 $x+2$ 的点 $(x, y)$ 的集合

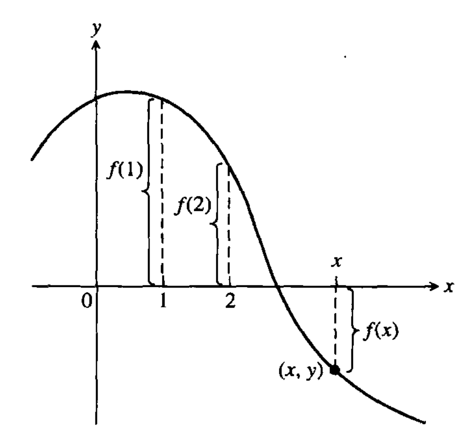



图 1.4　如果点 $(x, y)$ 位于 $f$ 的图形上，那么 $y=f(x)$ 的值是图形在点 $(x, 0)$ 之上的高度（当 $f(x)$ 为负时是在点 $(x, 0)$ 之下的高度）

**例 2**　绘制函数 $y=x^2$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的图形.

**解**　造一个满足方程 $y=x^2$ 的数偶 $(x, y)$ 的数值表如下. 描绘坐标出现在表中的点 $(x, y)$，并且画一条经过这些点的光滑曲线（用它的方程标记）（见图 1.5）.

| $x$ | $y=x^2$ |
|---|---|
| $-2$ | 4 |
| $-1$ | 1 |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| $\frac{3}{2}$ | $\frac{9}{4}$ |
| 2 | 4 |

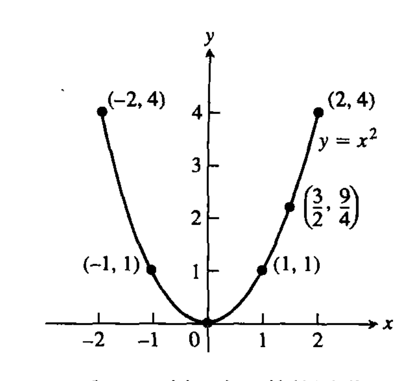
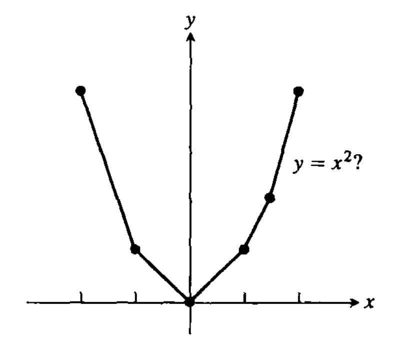
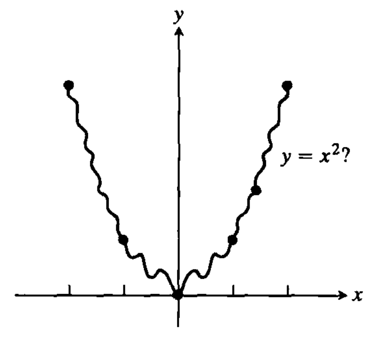



图 1.5　例 2 中函数的图形　■

我们是如何知道 $y=x^2$ 的图形不像下面两幅图形之一的？




为了寻求答案，可以在图中描绘出更多的点. 但是，如何把它们连接起来？基本问题仍然是：如何知道图形确实像我们在各点之间画出的曲线那样？在第 4 章将会看到，这个问题的答案包含在微积

分中. 与此同时，我们将必须确定绘图点，并且以我们能够做到的最佳方式把它们连接起来.

### 1.1.3 用数值表表示函数

我们已经见到如何用公式以代数方式表示一个函数(求面积的函数)，以及用图形以可视方式表示一个函数(例 2 的函数). 表示函数的另外一种方式是通过数值表用**数值方式**表示. 工程师和科学家们经常用数值表表示函数. 用例 2 中介绍的方法，可以在计算机的辅助下从一个特定的数值表画出函数的图形. 仅由数值表中列举值的点构成的图形称为**散布图**.

**例 3** 音乐的音调是可以记录下来的空气中的压力波形. 表 1.1 中的数据给出用音叉产生的一组数据，记录压力波形的位移与以秒计的时间之间的关系. 这个表提供压力函数关于时间的表示. 如果先作一幅散布图，然后连接表中的各个数据点$(t, p)$，就得到如图 1.6 所示的图形.

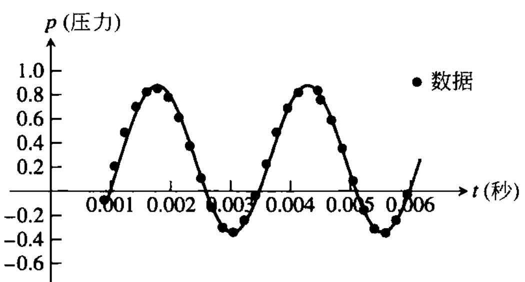



图 1.6　通过描绘点的光滑曲线给出由表 1.1 表示的压力函数的图形(例 3)

**表 1.1　音叉数据**

| 时间 | 压力 | 时间 | 压力 |
|---|---|---|---|
| 0.000 91 | −0.080 | 0.003 62 | 0.217 |
| 0.001 08 | 0.200 | 0.003 79 | 0.480 |
| 0.001 25 | 0.480 | 0.003 98 | 0.681 |
| 0.001 44 | 0.693 | 0.004 16 | 0.810 |
| 0.001 62 | 0.816 | 0.004 35 | 0.827 |
| 0.001 80 | 0.844 | 0.004 53 | 0.749 |
| 0.001 98 | 0.771 | 0.004 71 | 0.581 |
| 0.002 16 | 0.603 | 0.004 89 | 0.346 |
| 0.002 34 | 0.368 | 0.005 07 | 0.077 |
| 0.002 53 | 0.099 | 0.005 25 | −0.164 |
| 0.002 71 | −0.141 | 0.005 43 | −0.320 |
| 0.002 89 | −0.309 | 0.005 62 | −0.354 |
| 0.003 07 | −0.348 | 0.005 79 | −0.248 |
| 0.003 25 | −0.248 | 0.005 98 | −0.035 |
| 0.003 44 | −0.041 | | |

■

### 1.1.4 分段定义的函数

有时，函数在其定义域的不同部分要用不同的公式描述. 一个例子是**绝对值函数**

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

它的图形在图 1.7 中给出. 方程右端意味着当 $x \geqslant 0$ 时函数等于 $x$，当 $x < 0$ 时函数等于 $-x$. 下面是另外几个函数的例子.

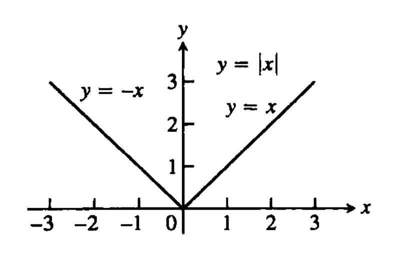



图 1.7　绝对值函数的定义域为$(-\infty, \infty)$，值域为$[0, \infty)$

**例 4** 函数

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

定义在整个实线上，但是在 $x$ 的不同位置，函数值由不同的公式给出. 当 $x<0$ 时，$y=-x$；当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y=x^2$；当 $x>1$ 时，$y=1$. 然而，这个函数恰好是定义域为整个实数集的函数(见图 1.8). ■

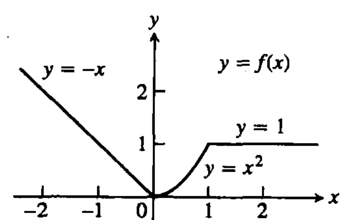



图 1.8　函数 $y=f(x)$ 的图形，在定义域的不同部分用不同的公式(例 4)

**例 5**　对于任何数 $x$，函数值为小于或者等于 $x$ 的最大整数的函数称为**最大整数函数**或者**底整数函数**，用 $\lfloor x\rfloor$ 表示. 图 1.9 显示这个函数的图形. 请注意：

$\lfloor 2.4\rfloor=2$，$\lfloor 1.9\rfloor=1$，$\lfloor 0\rfloor=0$，$\lfloor -1.2\rfloor=-2$，

$\lfloor 2\rfloor=2$，$\lfloor 0.2\rfloor=0$，$\lfloor -0.3\rfloor=-1$，$\lfloor -2\rfloor=-2$

■

**例 6**　对于任何数 $x$，函数值为大于或者等于 $x$ 的最小整数的函数称为**最小整数函数**或者**顶整数函数**，用 $\lceil x\rceil$ 表示. 图 1.10 显示这个函数的图形. 例如，在停车每小时或者不足 1 小时收费 1 美元的停车场，对于正的 $x$ 值，这个函数可以表示停车 $x$ 小时应付的停车费. ■

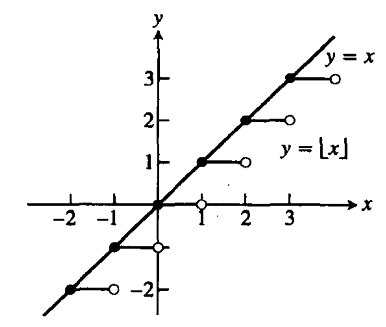



图 1.9　最大整数函数 $y=\lfloor x\rfloor$ 的图形在直线 $y=x$ 上或者位于它的下方，所以它提供 $x$ 的底整数(例 5)

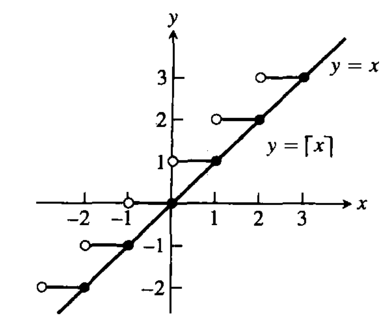
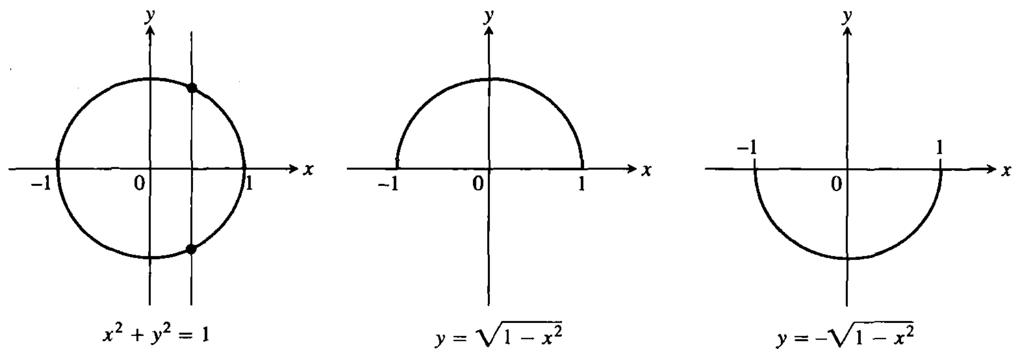



图 1.10　最小整数函数 $y=\lceil x\rceil$ 的图形在直线 $y=x$ 上或者位于它的上方，所以它提供 $x$ 的顶整数(例 6)

### 1.1.5　垂直线检验法

人们所能画出的每一条曲线并非都会成为一个函数的图形. 一个函数 $f$ 对于定义域中的每个 $x$ 只能有一个值 $f(x)$，所以没有任何一条垂直线可能与一个函数的图形相交一次以上. 因此，一个圆就不可能是某个函数的图形，因为有许多垂直线同圆相交两次(见图 1.11a). 如果 $a$ 在函数 $f$ 的定义域中，那么，垂直线 $x=a$ 与 $f$ 的图形在点 $(a, f(a))$ 相交.




a) 圆不是一个函数的图形，它不能通过垂直线检验　b) 上半圆是函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的图形　c) 下半圆是函数 $f(x)=-\sqrt{1-x^2}$ 的图形

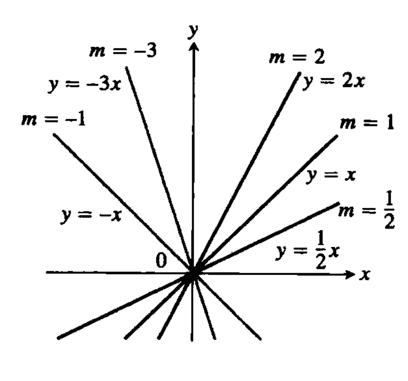
图　1.11

然而，图1.11a中的圆包含$x$的两个函数的图形：上半圆由函数$f(x)=\sqrt{1-x^2}$定义；下半圆由$g(x)=-\sqrt{1-x^2}$定义(见图1.11b和图1.11c).

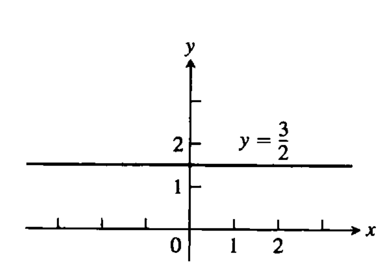
### 1.1.6 函数类型

在微积分中经常会遇到一些重要的函数类型. 我们在这一小节对函数类型加以区分，并且对它们作简要描述.

**线性函数** 形式为$f(x)=mx+b$的函数称为**线性函数**，其中$m$和$b$为常数. 图1.12a表示一组直线$f(x)=mx$，其中$b=0$，所以这些直线通过原点. 函数$f(x)=x$称为**恒等函数**，其中$m=1$，$b=0$. 常值函数是斜率$m=0$时的函数(见图1.12b). 具有正斜率和图形通过原点的线性函数称为比例关系.




a) 通过原点以$m$为斜率的直线




b) 斜率$m=0$的常值函数

图 1.12

> **定义** 说两个变量(相互)**成比例**，是指一个变量总是等于另一个变量的常数倍；也就是说，对于某个非零常数$k$，$y=kx$.

**幂函数** 函数$f(x)=x^a$称为**幂函数**，其中$a$是常数. 下面考察几个重要特例.

**(a)** $a=n$，$n$是正整数.

$f(x)=x^n(n=1, 2, 3, 4, 5)$的图形显示在图1.13中. 这些函数是对$x$的全部实数值定义的. 请注意，当幂$n$增大时，曲线在区间$(-1, 1)$上平缓地向$x$轴靠近，对于$|x|>1$，曲线则更陡峭地提升. 每条曲线都经过点$(1, 1)$和原点.

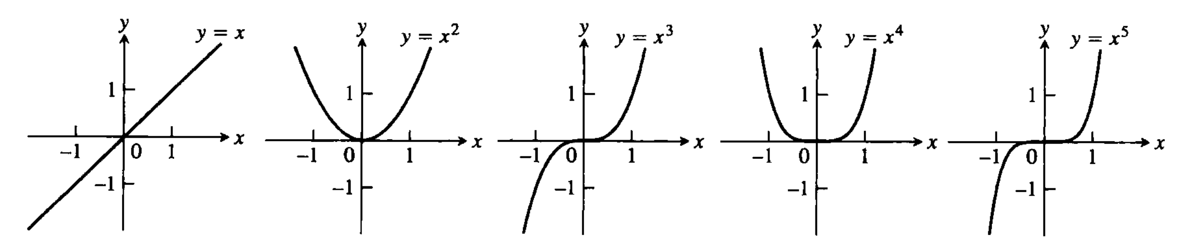



图1.13 定义在$-\infty<x<\infty$上的函数$f(x)=x^n$的图形，$n=1, 2, 3, 4, 5$

**(b)** $a=-1$或$a=-2$.

函数$f(x)=x^{-1}=\dfrac{1}{x}$和$g(x)=x^{-2}=\dfrac{1}{x^2}$的图形显示在图1.14中. 这两个函数是对所有$x\neq0$

定义的(绝不能用0作除数). $y=\frac{1}{x}$的图形是双曲线 $xy=1$, 曲线在远离原点时趋近坐标轴. $y=\frac{1}{x^2}$的图形也趋近坐标轴.

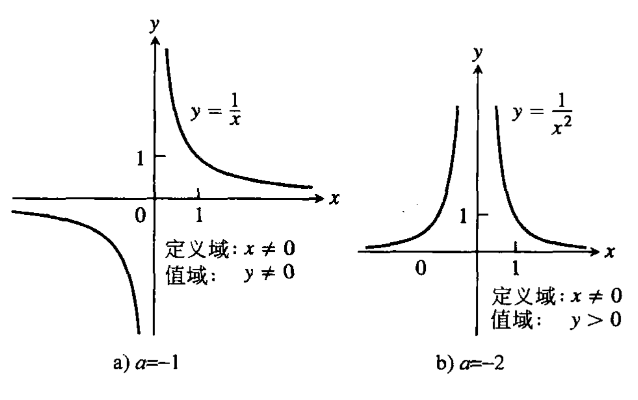
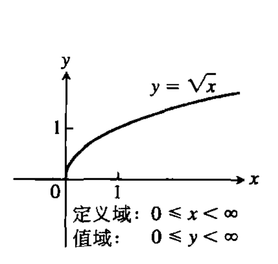
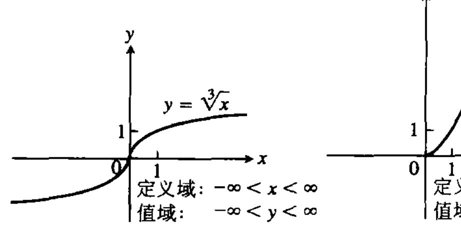


图 1.14　幂函数 $f(x)=x^a$ 的图形

**(c)** $a=\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$.

函数 $f(x)=x^{1/2}=\sqrt{x}$ 和 $g(x)=x^{1/3}=\sqrt[3]{x}$ 分别是**平方根**函数和**立方根**函数. 平方根函数的定义域是 $[0, \infty)$, 立方根函数是对全部实数定义的. 它们的图形以及 $y=x^{3/2}$ 和 $y=x^{2/3}$ 的图形显示在图 1.15 中. (回忆一下, $x^{3/2}=(x^{1/2})^3$, $x^{2/3}=(x^{1/3})^2$.)





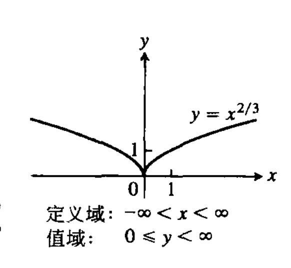


图 1.15　幂函数 $f(x)=x^a$ 的图形: $a=\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$

**多项式**　若

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

则函数 $p$ 是**多项式**, 其中 $n$ 是非负整数, 数 $a_1$, $a_2$, $\cdots$, $a_n$ 为实常数(称为多项式的**系数**). 所有多项式的定义域为 $(-\infty, \infty)$. 若首项系数 $a_n\neq 0$ 且 $n>0$, 则 $n$ 称为多项式的**次数**. $m\neq 0$ 的线性函数是一次多项式. 次数为 2 的多项式通常写成 $p(x)=ax^2+bx+c$, 称为**二次函数**. 与此类似, **三次函数**是次数为 3 的多项式 $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. 图 1.16 显示三个多项式的图形. 在第 4 章要学习绘制多项式图形的方法.

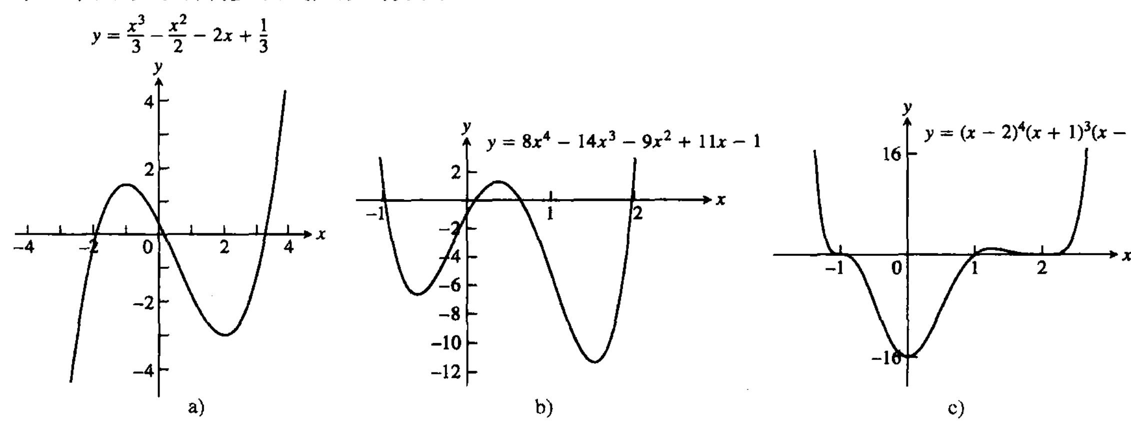


图 1.16　三个多项式函数的图形

**有理函数** **有理函数**是一个商或者比

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 是多项式. 有理函数的定义域是使 $q(x)\neq 0$ 的全部实数的集合. 例如，函数

$$f(x)=\frac{2x^2-3}{7x+4}$$

是以 $\left\{x \mid x\neq -\frac{4}{7}\right\}$ 为定义域的有理函数. 它的图形显示在图 1.17a 中；图 1.17b 和图 1.17c 显示的是另外两个有理函数的图形.

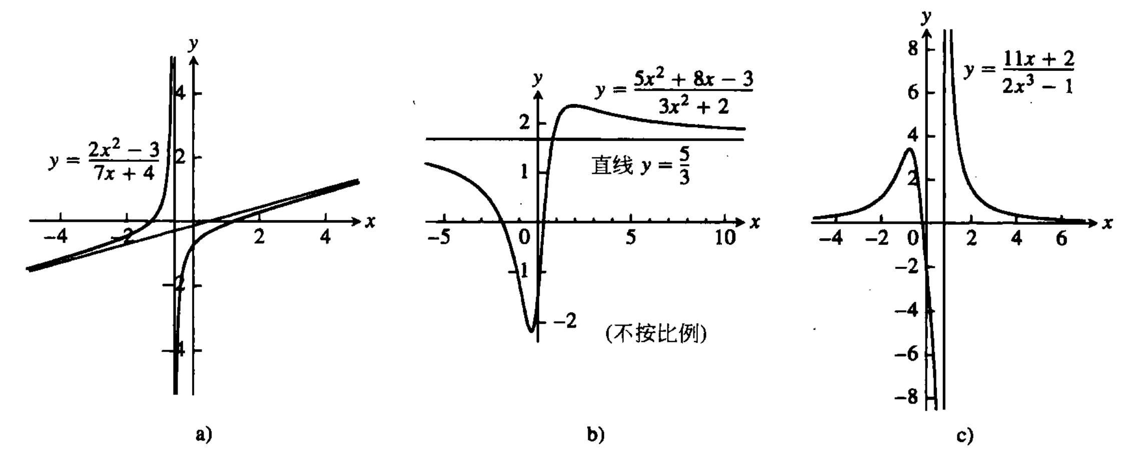



图 1.17 三个有理函数的图形

**代数函数** **代数函数**是对多项式进行代数运算(加、减、乘、除和取根)构成的函数. 有理函数是代数函数的特例. 图 1.18 显示三个代数函数的图形.

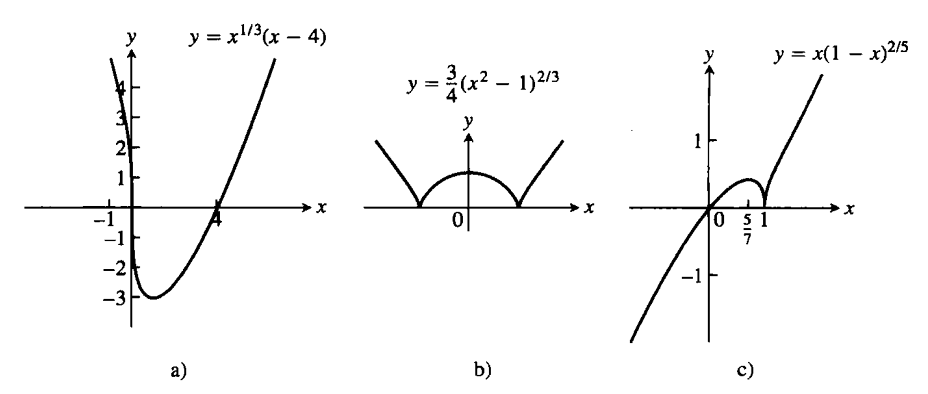



图 1.18 三个代数函数的图形

**三角函数** 我们在 1.3 节复习**三角函数**. 正弦函数和余弦函数的图形显示在图 1.19 中.

**指数函数** 形式为 $f(x)=a^x$ 的函数称为**指数函数**，其中基 $a>0$ 是正常数且 $a\neq 1$. 所有指数函数的定义域为 $(-\infty,\infty)$，值域为 $(0,\infty)$，所以指数函数不会取 0 值. 我们在 1.4 节介绍指数函数. 图 1.20 显示几个指数函数的图形.

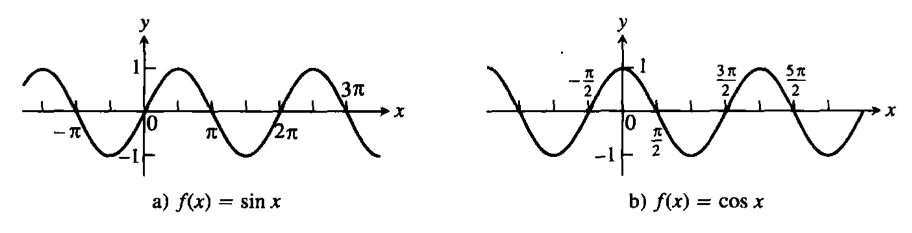



图 1.19　正弦函数和余弦函数的图形

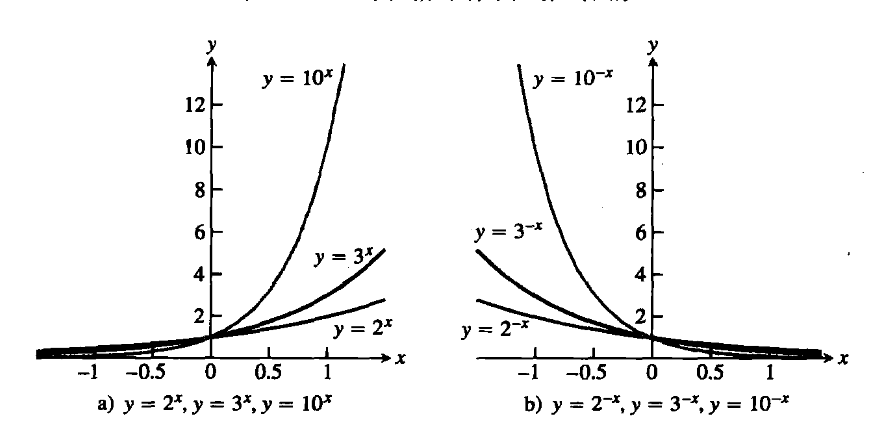



图 1.20　指数函数的图形

**对数函数**　**对数函数**的形式为$f(x)=\log_a x$，其中底$a\neq1$是正值常数. 对数函数是指数函数的反函数. 这两种函数的微分和积分在第3章和第5章讨论. 图1.21显示具有不同底的四个对数函数. 在每种情形，定义域为$(0,\infty)$，值域为$(-\infty,\infty)$.

**超越函数**　**超越函数**是指非代数函数的一类函数. 它们包括三角函数、反三角函数、指数函数和对数函数，以及许多其他的函数. 超越函数的一个特例是**悬链线**. 它的图形具有悬挂线缆的形状，像一条从一个支柱连接到另一个支柱上的电话线或者TV电缆，在自身重量的作用下自由悬垂(见图1.22). 定义这种图形的函数在3.11节讨论.

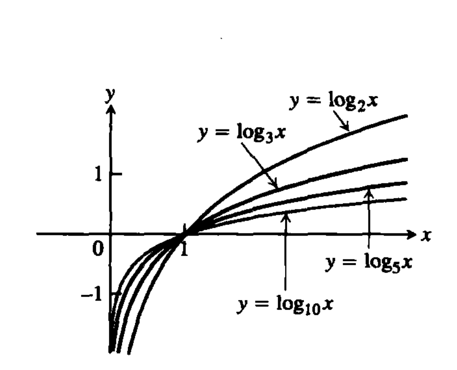



图 1.21　4个对数函数的图形

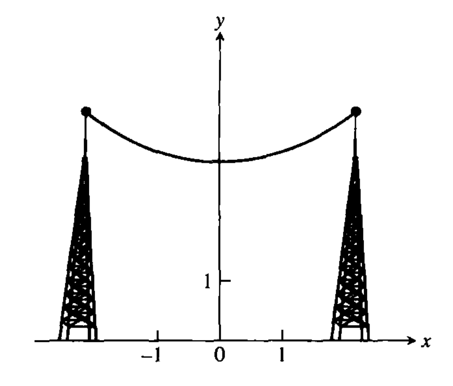



图 1.22　悬链线或者悬挂电缆的图形("悬链"一词来自拉丁语，意为"链条")

### 1.1.7　增函数与减函数

如果一个函数的图形在观察者由左向右移动时上升，就说函数是递增的. 如果函数图形在观察者由左向右移动时下降，就说函数是递减的. 我们在4.3节给出增函数和减函数的形式定

义. 在那里将学习如何寻找函数递增和函数递减的区间. 下面是从图 1.13、图 1.14 和图 1.15 中摘出的一些例子.

| 函　数 | 递增区间 | 递减区间 |
|---|---|---|
| $y=x^2$ | $0\leq x<\infty$ | $-\infty<x\leq 0$ |
| $y=x^3$ | $-\infty<x<\infty$ | 无 |
| $y=1/x$ | 无 | $-\infty<x<0$ 和 $0<x<\infty$ |
| $y=1/x^2$ | $-\infty<x<0$ | $0<x<\infty$ |
| $y=\sqrt{x}$ | $0\leq x<\infty$ | 无 |
| $y=x^{2/3}$ | $0\leq x<\infty$ | $-\infty<x\leq 0$ |

### 1.1.8 偶函数与奇函数：函数的对称性

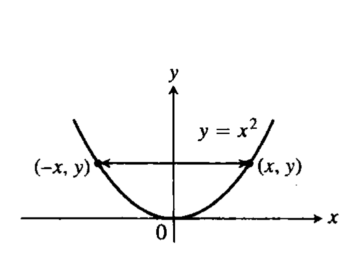
偶函数与奇函数的图形具有特殊的对称性.

> **定义**　对于函数 $y=f(x)$ 的定义域中的每个 $x$，如果有 $f(-x)=f(x)$，那么 $f$ 称为 **$x$ 的偶函数**；如果 $f(-x)=-f(x)$，那么 $f$ 称为 **$x$ 的奇函数**.

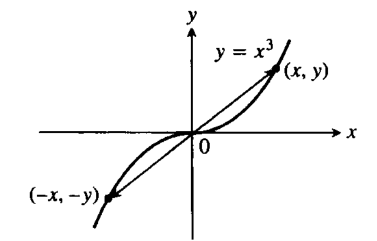
奇函数和偶函数的名称来自 $x$ 的乘幂. 如果 $y$ 是 $x$ 的偶次幂，例如在 $y=x^2$ 或者 $y=x^4$ 中，$y$ 就是 $x$ 的偶函数(因为 $(-x)^2=x^2$，$(-x)^4=x^4$). 如果 $y$ 是 $x$ 的奇次幂，例如在 $y=x$ 或者 $y=x^3$ 中，$y$ 就是 $x$ 的奇函数(因为 $(-x)^1=-x$，$(-x)^3=-x^3$).

偶函数 $f$ 的图形**对 $y$ 轴对称**. 因为 $f(-x)=f(x)$，点 $(x, y)$ 位于 $f$ 的图形上当且仅当点 $(-x, y)$ 位于 $f$ 的图形上(见图 1.23a). 图形经过 $y$ 轴的反射保持不变.

奇函数 $f$ 的图形**对原点对称**. 因为 $f(-x)=-f(x)$，点 $(x, y)$ 位于 $f$ 的图形上当且仅当点 $(-x, -y)$ 位于 $f$ 的图形上(见图 1.23b). 这等价于说，如果绕原点旋转 180° 图形保持不变，那么图形对原点对称. 请注意，这两个定义隐含 $x$ 和 $-x$ 必须在 $f$ 的定义域中.




a) $y=x^2$(偶函数)的图形对 $y$ 轴对称




b) $y=x^3$(奇函数)的图形对原点对称

图 1.23

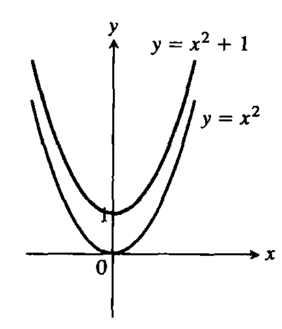
**例 7**

$f(x)=x^2$ 是偶函数：对于所有 $x$，$(-x)^2=x^2$；对 $y$ 轴对称.

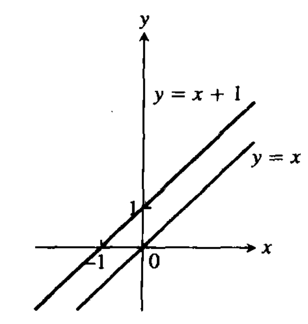
$f(x)=x^2+1$ 是偶函数：对于所有 $x$，$(-x)^2+1=x^2+1$；对 $y$ 轴对称(见图 1.24a).

$f(x)=x$ 是奇函数：对于所有 $x$，$(-x)=-x$；对原点对称.

$f(x)=x+1$ 不是奇函数：$f(-x)=-x+1$，但是 $-f(x)=-x-1$，这两个函数不相等. 它也不是偶函数：对于所有 $x\neq 0$，$(-x)+1\neq x+1$(见图 1.24b).




a) 当对函数 $y=x^2$加常数项1时，所得函数 $y=x^2+1$ 同样是偶函数，它的图形依然对$y$轴对称




b) 当对函数 $y=x$加常数项1时，所得函数 $y=x+1$ 不再是奇函数，对原点的对称性消失

图　1.24　■

## 习题 1.1

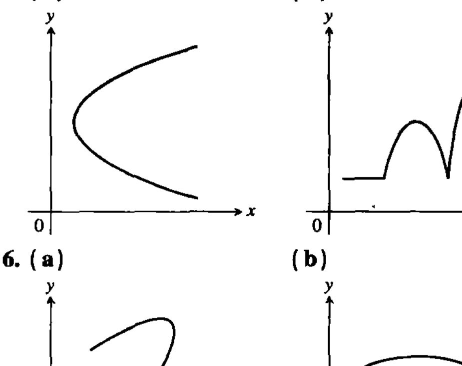
在习题 1 ~ 4 中，求每个函数的定义域和值域.

**1.** $f(x)=1+x^2$.　　**2.** $f(x)=1-\sqrt{x}$.

**3.** $F(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$.　　**4.** $g(z)=\dfrac{1}{\sqrt{4-z^2}}$.

在习题 5 ~ 6 中，哪些图形是 $x$ 的函数的图形，哪些图形不是函数图形？提出答案的理由.

**5.** (a)　　(b)



**6.** (a)　　(b)

**7.** 把等边三角形的面积和周长表示成三角形边长 $x$ 的函数.

**8.** 把正方形的边长表示成正方形对角线长度 $d$ 的函数. 然后把正方形的面积表示成正方形对角线长度 $d$ 的函数.

**9.** 把立方体的边长表示成立方体对角线长度 $d$ 的函数. 然后把立方体的表面积和体积表示成立方体对角线长度 $d$ 的函数.

**10.** 第一象限内的一点 $P$ 位于函数$f(x)=\sqrt{x}$的图形上，把 $P$ 的坐标表示成 $P$ 与原点连线的斜率的函数.

在习题 11 ~ 16 中，求函数的定义域并且画出函数图形.

**11.** $f(x)=5-2x$.　　**12.** $f(x)=1-2x-x^2$.

**13.** $g(x)=\sqrt{|x|}$.　　**14.** $g(x)=\sqrt{-x}$.

**15.** $F(t)=t/|t|$.　　**16.** $G(t)=1/|t|$.

**17.** 画出下列方程的图形，并且说明它们为什么不是 $x$ 的函数的图形.

(a) $|y|=x$.　　(b) $y^2=x^2$.

**18.** 画出下列方程的图形，并且说明它们为什么不是 $x$ 的函数的图形.

(a) $|x|+|y|=1$.　　(b) $|x+y|=1$.

在习题 1 ~ 22 中，画出函数的图形.

**19.** $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

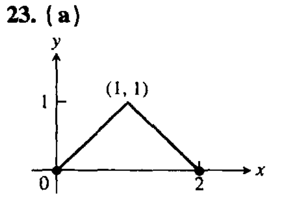
**20.** $g(x)=\begin{cases}1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

**21.** $F(x)=\begin{cases}3-x, & x\leqslant 1,\\ 2x, & x>1.\end{cases}$

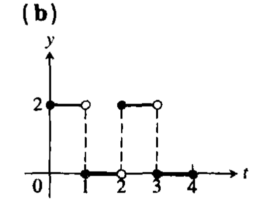
**22.** $G(x)=\begin{cases}1/x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

在习题 23 ~ 26 中，求每个图形代表的函数公式.

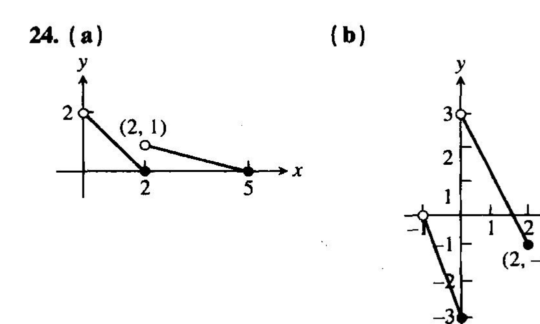
**23.** (a)



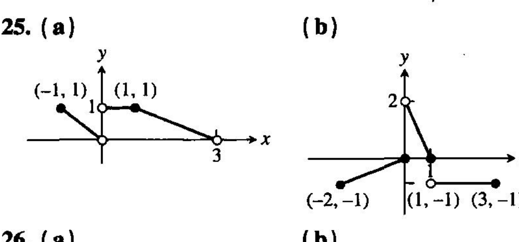

(b)



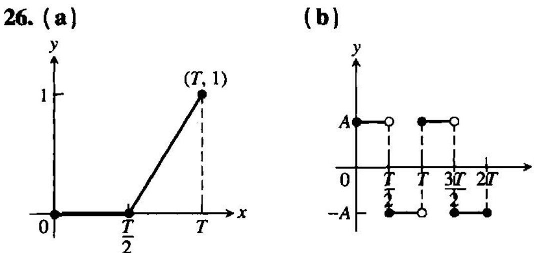
**24.** (a) (b)




**25.** (a) (b)




**26.** (a) (b)




**27.** 当 $x$ 取什么值时

(a) $\lfloor x \rfloor = 0$? (b) $\lceil x \rceil = 0$?

**28.** 什么实数 $x$ 值能够满足方程 $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$?

**29.** $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$ 对于所有实数成立吗？提出答案的理由.

**30.** 画出函数

$$f(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x \geqslant 0 \\ \lceil x \rceil, & x < 0 \end{cases}$$

的图形. $f(x)$ 为何称为 $x$ 的整数部分?

在习题 31 ~ 42 中，画出函数的图形. 如果图形存在对称性，那么是什么对称性？说明函数在哪些区间上是递增的以及在哪些区间上是递减的.

**31.** $y = -x^3$. **32.** $y = -\frac{1}{x^2}$.

**33.** $y = -\frac{1}{x}$. **34.** $y = \frac{1}{|x|}$.

**35.** $y = \sqrt{|x|}$. **36.** $y = \sqrt{-x}$.

**37.** $y = x^3/8$. **38.** $y = -4\sqrt{x}$.

**39.** $y = -x^{3/2}$. **40.** $y = (-x)^{3/2}$.

**41.** $y = (-x)^{2/3}$. **42.** $y = -x^{2/3}$.

在习题 43 ~ 54 中，指出函数是偶函数、奇函数或者既非偶函数也非奇函数. 提出答案的理由.

**43.** $f(x) = 3$. **44.** $f(x) = x^{-5}$.

**45.** $f(x) = x^2 + 1$. **46.** $f(x) = x^2 + x$.

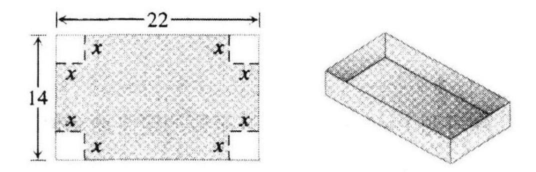
**47.** $g(x) = x^3 + x$. **48.** $g(x) = x^4 + 3x^2 - 1$.

**49.** $g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$. **50.** $g(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$.

**51.** $h(t) = \frac{1}{t - 1}$. **52.** $h(t) = |t^3|$.

**53.** $h(t) = 2t + 1$. **54.** $h(t) = 2|t| + 1$.

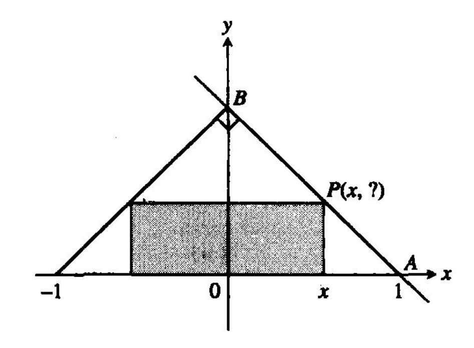
**55.** 取一块大小为 22 英寸乘 14 英寸的矩形硬纸板，在每个角上切去一个边长为 $x$ 的相同方块，再折起四边构成如下图所示的没有顶盖的盒子. 把盒子的容积 $V$ 表示成 $x$ 的函数.




**56.** 附图所示是斜边为 2 单位长的等腰直角三角形的内接矩形.

(a) 把点 $P$ 的 $y$ 坐标表示成 $x$ 的函数（可以从写出直线 $AB$ 的方程着手）.

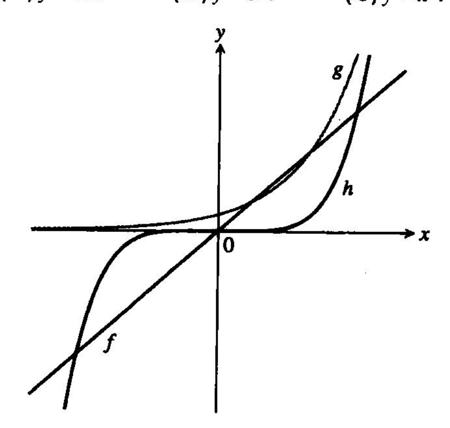
(b) 把矩形的面积表示成 $x$ 的函数.




在习题 57 和 58 中，指出每个函数及其对应的图形. 不要使用绘图工具，并且提出答案的理由.

**57.** (a) $y = x^4$. (b) $y = x^7$. (c) $y = x^{10}$.

**58.** (a) $y=5x$. (b) $y=5^x$. (c) $y=x^5$.




**T59.** (a) 一起画出函数 $f(x)=\frac{x}{2}$ 和 $g(x)=1+\frac{4}{x}$ 的图形，确定满足

$$\frac{x}{2}>1+\frac{4}{x}$$

的 $x$ 值.

(b) 用代数方法证实在(a)中求的值是正确的.

**T60.** (a) 一起画出函数 $f(x)=\frac{3}{x-1}$ 和 $g(x)=\frac{2}{x+1}$ 的图形，确定满足

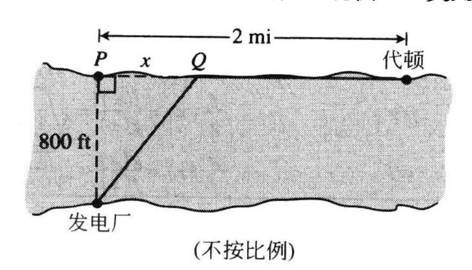
$$\frac{3}{x-1}<\frac{2}{x+1}$$

的 $x$ 值.

(b) 用代数方法证实在(a)中求的值是正确的.

**61.** 对于对 $x$ 轴对称的曲线，点 $(x, y)$ 必须位于曲线上当且仅当点 $(x, -y)$ 位于曲线上. 说明对 $x$ 轴对称的曲线为什么不是一个函数的图形，除非函数是 $y=0$.

**62. 工业成本**　代顿市电力与照明公司在迈阿密河上有一座发电厂，那里的河面宽 800 英尺. 为了架设一条从发电厂到对岸市区下游 2 英里处的新电缆，穿越河面架设电缆每英尺花费 180 美元，沿岸边架设电缆每英尺花费 100 美元.



(不按比例)

(a) 假设电缆从发电厂架设到同对岸点 $P$ 相距 $x$ 英尺的一点. 写出通过距离 $x$ 表示的架设电缆的成本函数 $C(x)$.

(b) 建立一个数值表，由此判别由花费最少的位置点 $Q$ 到点 $P$ 的距离小于 2000 英尺或者大于 2000 英尺.

## 1.2　函数组合及移动图形与改变图形标度

这一节考察通过函数的结合或者变换构成新函数的主要方法.

### 1.2.1　函数的和、差、积及商

同数一样，函数可以相加、相减、相乘和相除(分母为 0 除外)产生新的函数. 如果 $f$, $g$ 为函数，那么对于属于 $f$ 和 $g$ 的定义域的每个 $x$（即对于 $x\in D(f)\cap D(g)$），定义函数 $f+g$, $f-g$ 和 $fg$ 的公式分别为

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$
$$(fg)(x)=f(x)g(x)$$

在 $D(f)\cap D(g)$ 中 $g(x)\neq 0$ 的任何点，也可以用公式

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\quad (\text{其中}, g(x)\neq 0)$$

定义函数 $\frac{f}{g}$.

请注意，在上述几个公式中，左端的 + 号、 - 号、相乘和相除分别表示函数的加法、减法、乘法和除法运算，而右端的 + 号、 - 号、相乘、相除是指实数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的加、减、乘、除.

函数还可以用常数相乘：若 $c$ 是一个实数，则对于 $f$ 的定义域中的所有 $x$，$cf$ 由

$$(cf)(x)=cf(x)$$

定义.

**例 1** 由公式

$$f(x)=\sqrt{x} \quad 和 \quad g(x)=\sqrt{1-x}$$

定义的两个函数，定义域分别为 $D(f)=[0,\infty)$ 和 $D(g)=(-\infty,1]$. 这两个定义域的公共点集合为

$$[0,\infty)\cap(-\infty,1]=[0,1]$$

下表概括两个函数用不同代数组合产生的公式和定义域. 对于乘积函数 $fg$ 也记为 $f\cdot g$.

| 函数 | 公式 | 定义域 |
|---|---|---|
| $f+g$ | $(f+g)(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ | $[0,1]=D(f)\cap D(g)$ |
| $f-g$ | $(f-g)(x)=\sqrt{x}-\sqrt{1-x}$ | $[0,1]$ |
| $g-f$ | $(g-f)(x)=\sqrt{1-x}-\sqrt{x}$ | $[0,1]$ |
| $f\cdot g$ | $(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)=\sqrt{x(1-x)}$ | $[0,1]$ |
| $f/g$ | $\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ | $[0,1)$ ($x=1$ 除外) |
| $g/f$ | $\frac{g}{f}(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ | $(0,1]$ ($x=0$ 除外) |

■

函数 $f+g$ 的图形是在每个点 $x\in D(f)\cap D(g)$ 通过对应的 $y$ 坐标 $f(x)$ 和 $g(x)$ 相加得到的，如图 1.25 所示. 例 1 中 $f+g$ 和 $f\cdot g$ 的图形显示在图 1.26 中.

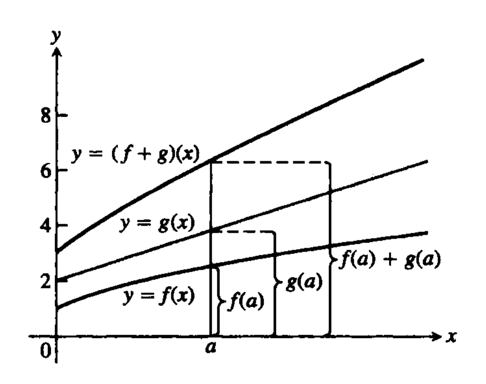



图 1.25 两个函数相加的图形

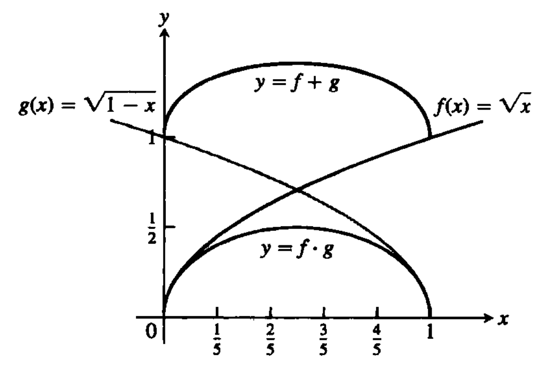



图 1.26 函数 $f+g$ 的定义域是 $f$ 和 $g$ 的定义域的交集合，即 $x$ 轴上两个定义域重叠的区间 $[0,1]$；这个区间也是函数 $f\cdot g$ 的定义域(例 1)

### 1.2.2 复合函数

函数复合是另外一种组合函数的方法.

> **定义** 设 $f$, $g$ 是函数，**复合函数** $f\circ g$ (“$f$ 与 $g$ 复合”)由
>
> $$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$
>
> 定义. $f\circ g$ 的定义域由 $g$ 的定义域中那些使 $g(x)$ 位于 $f$ 的定义域内的数 $x$ 组成.

这个定义表明，只有当 $g$ 的定义域位于 $f$ 的定义域内时，才能构成复合函数 $f\circ g$. 为了求 $(f\circ g)(x)$，需首先求 $g(x)$，然后再求 $f(g(x))$. 图 1.27 把 $f\circ g$ 表示成一个机器图，而图 1.28 则把这个函数复合表示成箭头图.

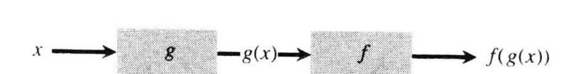



图 1.27　两个函数可以在这样的 $x$ 点复合，只要一个函数在 $x$ 的值位于另一个函数的定义域内；这个函数复合用 $f\circ g$ 表示

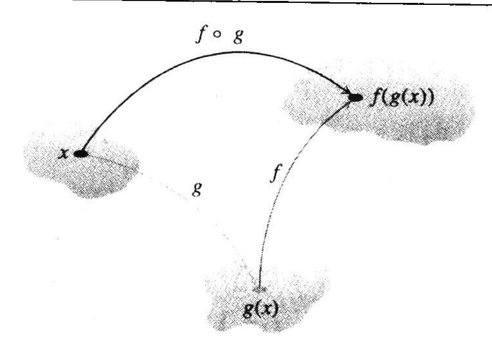



图 1.28　$f\circ g$ 的箭头图

为了计算复合函数 $f\circ g$(如果有定义)，首先求 $f(x)$，然后求 $g(f(x))$．$g\circ f$ 的定义域是 $f$ 的定义域中那些使 $f(x)$ 处于 $g$ 的定义域中的数 $x$ 的集合.

函数 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 通常是完全不同的.

**例 2**　设 $f(x)=\sqrt{x}$，$g(x)=x+1$，求

**(a)** $(f\circ g)(x)$.　　**(b)** $(g\circ f)(x)$.　　**(c)** $(f\circ f)(x)$.　　**(d)** $(g\circ g)(x)$.

**解**

| 复合 | 定义域 |
|---|---|
| **(a)** $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)}=\sqrt{x+1}$ | $[-1,\infty)$ |
| **(b)** $(g\circ f)(x)=g(f(x))=f(x)+1=\sqrt{x}+1$ | $[0,\infty)$ |
| **(c)** $(f\circ f)(x)=f(f(x))=\sqrt{f(x)}=\sqrt{\sqrt{x}}=x^{1/4}$ | $[0,\infty)$ |
| **(d)** $(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(x)+1=(x+1)+1=x+2$ | $(-\infty,\infty)$ |

为看出 $f\circ g$ 的定义域为何是 $[-1,\infty)$，注意 $g(x)=x+1$ 是对所有实数 $x$ 定义的，但是只有 $x+1\geqslant 0$ 的实数属于 $f$ 的定义域，就是说要求 $x\geqslant -1$. ■

请注意，若 $f(x)=x^2$ 而 $g(x)=\sqrt{x}$，则 $(f\circ g)(x)=(\sqrt{x})^2=x$. 但是 $f\circ g$ 的定义域是 $[0,\infty)$ 而不是 $(-\infty,\infty)$.

### 1.2.3　移动函数图形

从现有函数产生新函数另外一种方法是对现有函数的每个输出值或者对它的输入变量，增加一个常数. 新函数图形是原函数图形作如下垂直移动或者水平移动后的图形.

> **移动公式**
>
> 垂直移动：　　$y=f(x)+k$
>
> 如果 $k>0$，$f$ 的图形向上移动 $k$ 个单位；如果 $k<0$，$f$ 的图形向下移动 $|k|$ 个单位.
>
> 水平移动：　　$y=f(x+h)$
>
> 如果 $h>0$，$f$ 的图形向左移动 $h$ 个单位；如果 $h<0$，$f$ 的图形向右移动 $|h|$ 个单位.

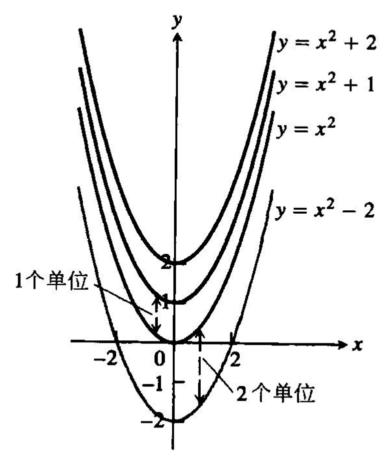



图 1.29　为了向上移动(或者向下移动) $f(x)=x^2$ 的图形，对 $f$ 的公式加正常数或者负常数(例 3(a)和 3(b))

**例 3**

**(a)** 在公式 $y=x^2$ 的右端加 1，得到 $y=x^2+1$，图形向上移动 1 个单位(见图 1.29).

(**b**)在公式 $y=x^2$ 的右端加 $-2$，得到 $y=x^2-2$，图形向下移动 2 个单位(见图 1.29).

(**c**)在 $y=x^2$ 中对 $x$ 加 3，得到 $y=(x+3)^2$，图形向左移动 3 个单位(见图 1.30).

(**d**)在 $y=|x|$ 中对 $x$ 加 $-2$，然后对结果加 $-1$，得到 $y=|x-2|-1$，图形向右移动 2 个单位和向下移动 1 个单位(见图 1.31). ■

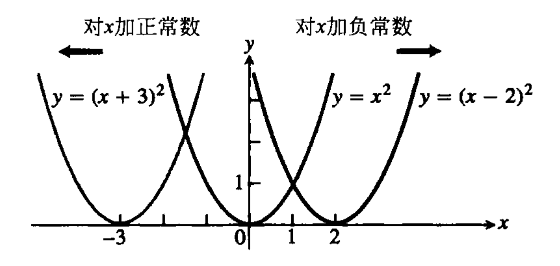



图 1.30 为了向左移动 $y=x^2$ 的图形，对 $x$ 加正常数；为了向右移动图形，对 $x$ 加负常数(例 3(c))

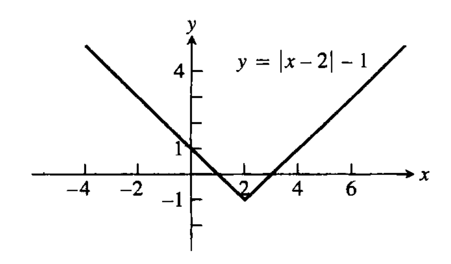



图 1.31 $y=|x|$ 的图形向右移动 2 个单位和向下移动 1 个单位(例 3(d))

### 1.2.4 改变函数图形标度与反射函数图形

改变函数 $y=f(x)$ 的图形标度就是在垂直方向或者水平方向拉长或压缩图形. 改变图形标度的方法是对函数 $f$ 或自变量 $x$ 乘一个相应的常数 $c$. 通过坐标轴反射图形是取 $c=-1$ 的特例.

**改变图形的垂直标度和水平标度以及反射图形的公式**

对于 $c>1$：

$y=cf(x)$ 按系数 $c$ 垂直拉长 $f$ 的图形

$y=\frac{1}{c}f(x)$ 按系数 $c$ 垂直压缩 $f$ 的图形

$y=f(cx)$ 按系数 $c$ 水平压缩 $f$ 的图形

$y=f\left(\frac{x}{c}\right)$ 按系数 $c$ 水平拉长 $f$ 的图形

对于 $c=-1$：

$y=-f(x)$ 通过 $x$ 轴反射 $f$ 的图形

$y=f(-x)$ 通过 $y$ 轴反射 $f$ 的图形

**例 4** 改变 $y=\sqrt{x}$ 的图形标度和反射图形.

(**a**)垂直标度：对 $y=\sqrt{x}$ 右端乘 3，得到 $y=3\sqrt{x}$，按系数 3 垂直拉长图形；若乘 $\frac{1}{3}$，则按系数 3 压缩图形(见图 1.32).

(**b**)水平标度：$y=\sqrt{3x}$ 的图形是按系数 3 水平压缩 $y=\sqrt{x}$ 的图形；$y=\sqrt{\frac{x}{3}}$ 则是按系数 3 水平拉长 $y=\sqrt{x}$ 的图形(见图 1.33). 请注意，$y=\sqrt{3x}=\sqrt{3}\sqrt{x}$，故水平压缩可以对应于一个按不同系数的垂直拉长. 同样，水平拉长可以对应于一个按不同系数的垂直压缩.

(**c**)反射：$y=-\sqrt{x}$ 的图形是 $y=\sqrt{x}$ 通过 $x$ 轴的反射；$y=\sqrt{-x}$ 是 $y=\sqrt{x}$ 通过 $y$ 轴的反射(见图 1.34). ■

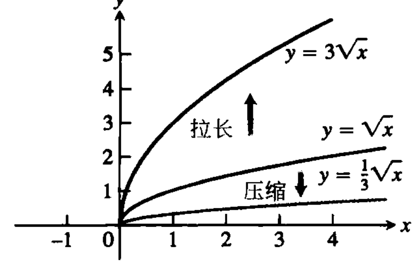



图 1.32 按系数 3 垂直拉长和压缩 $y=\sqrt{x}$ 的图形(例 4(a))

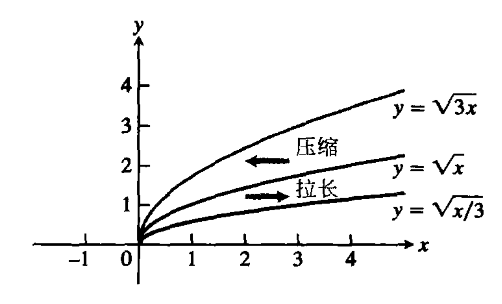



图 1.33　按系数 3 水平拉长和压缩 $y=\sqrt{x}$ 的图形(例 4(b))

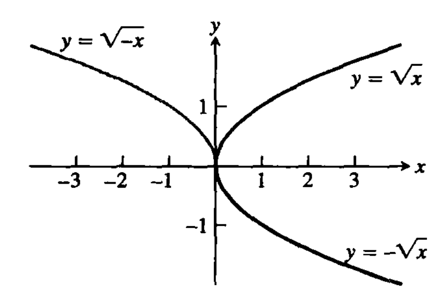
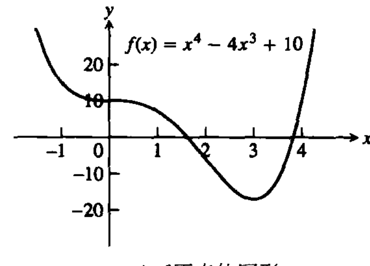



图 1.34　通过坐标轴反射 $y=\sqrt{x}$ 的图形

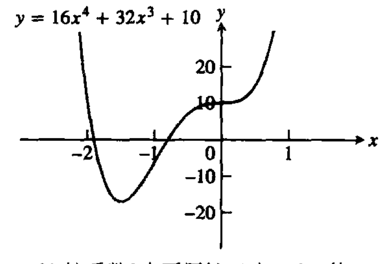
**例 5**　给定函数 $f(x)=x^4-4x^3+10$(见图 1.35a)，求压缩图形和反射图形的公式：

**(a)** 按系数 2 水平压缩图形，再通过 $y$ 轴反射图形(见图 1.35b).

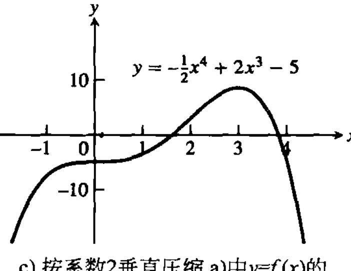
**(b)** 按系数 2 垂直压缩图形，再通过 $x$ 轴反射图形(见图 1.35c).




a) $f$ 原来的图形




b) 按系数2水平压缩 a)中$y=f(x)$的图形，再通过$y$轴反射图形




c) 按系数2垂直压缩 a)中$y=f(x)$的图形，再通过$y$轴反射图形

图　1.35

**解**

**(a)** 在 $f$ 的方程右端用 $-2x$ 代换 $x$，得到公式

$$y=f(-2x)=(-2x)^4-4(-2x)^3+10=16x^4+32x^3+10$$

**(b)** 压缩图形的公式为

$$y=-\frac{1}{2}f(x)=-\frac{1}{2}x^4+2x^3-5$$

■

### 1.2.5　椭圆

在附录 3 中复习圆的方程. 对于以原点为中心和 $r$ 为半径的圆，在标准方程中(见图 1.36a)用 $cx$ 代换 $x$，得到

$$c^2x^2+y^2=r^2 \tag{1}$$

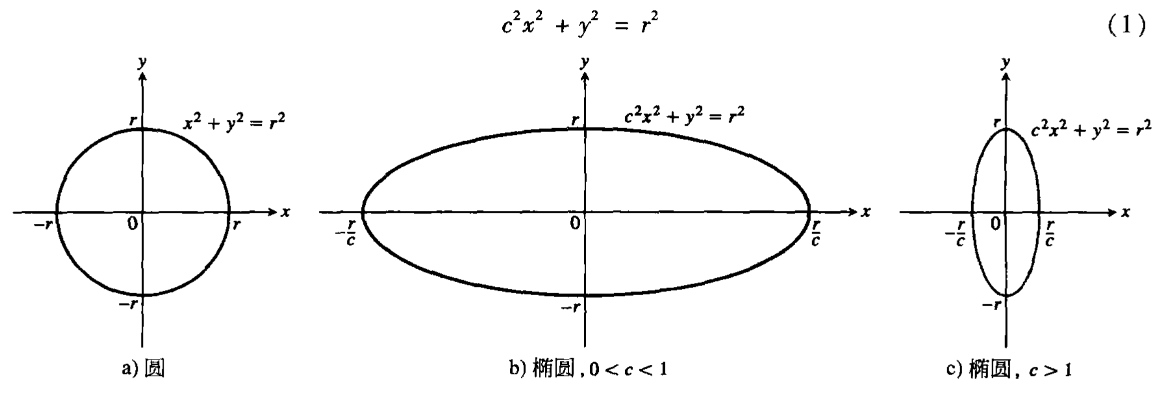



图 1.36　水平拉长或者压缩一个圆产生椭圆的图形

若$0<c<1$，方程(1)的图形是在水平方向拉长圆；若$c>1$，则是在水平方向压缩圆. 在两种情况下，方程(1)的图形都是一个椭圆(见图1.36). 注意，在图1.36中，三幅图形的$y$截距都是$-r$和$r$. 在图1.36b中，连接两点$(\pm r/c, 0)$的线段称为椭圆的**长轴**；连接两点$(0, \pm r)$的线段称为**短轴**. 在图1.36c中，椭圆的长短轴颠倒过来：长轴是连接点$(0, \pm r)$的线段，而短轴是连接点$(\pm r/c, 0)$的线段. 在两种情形下，长轴都是长度较长的那条线段.

如果方程(1)的两端用$r^2$相除，得到

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (2)$$

其中$a=r/c$，$b=r$. 若$a>b$，长轴是水平轴；若$a<b$，长轴是垂直轴. 由方程(2)给出的椭圆以原点为**中心**(见图1.37).

在方程(2)中用$x-h$代换$x$和$y-k$代换$y$，得到

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \qquad (3)$$

方程(3)是中心在$(h, k)$的**椭圆的标准方程**. 在9.4节复习椭圆的几何定义和性质.

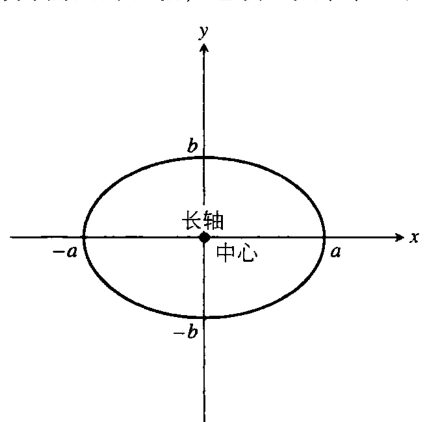



图1.37 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的图形，其中$a>b$，长轴是水平轴

## 习题 1.2

在习题1和2中，求$f$，$g$，$f+g$和$f\cdot g$的定义域和值域.

**1.** $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x-1}$.

**2.** $f(x)=\sqrt{x+1}$，$g(x)=\sqrt{x-1}$.

在习题3和4中，求$f$，$g$，$f/g$和$g/f$的定义域和值域.

**3.** $f(x)=2$，$g(x)=x^2+1$.

**4.** $f(x)=1$，$g(x)=1+\sqrt{x}$.

**5.** 设$f(x)=x+5$，$g(x)=x^2-3$. 求下列复合函数的值或公式：

(**a**) $f(g(0))$. (**b**) $g(f(0))$.
(**c**) $f(g(x))$. (**d**) $g(f(x))$.
(**e**) $f(f(-5))$. (**f**) $g(g(2))$.
(**g**) $f(f(x))$. (**h**) $g(g(x))$.

**6.** 设$f(x)=x-1$，$g(x)=1/(x+1)$. 求下列复合函数的值或公式：

(**a**) $f(g(1/2))$. (**b**) $g(f(1/2))$.
(**c**) $f(g(x))$. (**d**) $g(f(x))$.
(**e**) $f(f(2))$. (**f**) $g(g(2))$.
(**g**) $f(f(x))$. (**h**) $g(g(x))$.

**7.** 设$u(x)=4x-5$，$v(x)=x^2$，$f(x)=1/x$. 求下列复合函数的公式：

(**a**) $u(v(f(x)))$. (**b**) $u(f(v(x)))$.
(**c**) $v(u(f(x)))$. (**d**) $v(f(u(x)))$.
(**e**) $f(u(v(x)))$. (**f**) $f(v(u(x)))$.

**8.** 设$f(x)=\sqrt{x}$，$g(x)=x/4$，$h(x)=4x-8$. 求下列复合函数的公式：

(**a**) $h(g(f(x)))$. (**b**) $h(f(g(x)))$.
(**c**) $g(h(f(x)))$. (**d**) $g(f(h(x)))$.
(**e**) $f(g(h(x)))$. (**f**) $f(h(g(x)))$.

令$f(x)=x-3$，$g(x)=\sqrt{x}$，$h(x)=x^3$，$j(x)=2x$. 把习题9和10中的每个函数表示成包含$f$，$g$，$h$和$j$中一个或者多个函数的复合函数.

**9.** (**a**) $y=\sqrt{x}-3$. (**b**) $y=2\sqrt{x}$.
(**c**) $y=x^{1/4}$. (**d**) $y=4x$.
(**e**) $y=\sqrt{(x-3)^3}$. (**f**) $y=(2x-6)^3$.

**10.** (**a**) $y=2x-3$. (**b**) $y=x^{3/2}$.
(**c**) $y=x^9$. (**d**) $y=x-6$.
(**e**) $y=2\sqrt{x-3}$. (**f**) $y=\sqrt{x^3-3}$.

**11.** 复制并填写下表：

| | $g(x)$ | $f(x)$ | $(f\circ g)(x)$ |
|---|---|---|---|
| (**a**) | $x-7$ | $\sqrt{x}$ | ? |
| (**b**) | $x+2$ | $3x$ | ? |
| (**c**) | ? | $\sqrt{x-5}$ | $\sqrt{x^2-5}$ |
| (**d**) | $\frac{x}{x-1}$ | $\frac{x}{x-1}$ | ? |

| | | | |
|---|---|---|---|
| (e) | ? | $1+\frac{1}{x}$ | $x$ |
| (f) | $\frac{1}{x}$ | ? | $x$ |

**12.** 复制并填写下表：

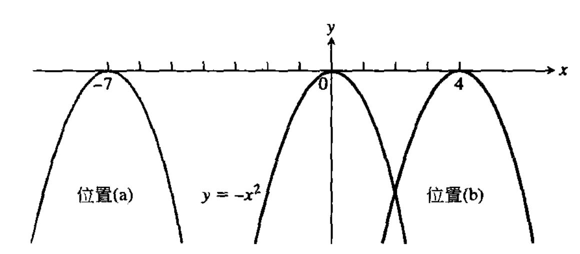
| | $g(x)$ | $f(x)$ | $(f\circ g)(x)$ |
|---|---|---|---|
| (a) | $\frac{1}{x-1}$ | $\lvert x\rvert$ | ? |
| (b) | ? | $\frac{x-1}{x}$ | $\frac{x}{x+1}$ |
| (c) | ? | $\sqrt{x}$ | $\lvert x\rvert$ |
| (d) | $\sqrt{x}$ | ? | $\lvert x\rvert$ |

在习题 13 和 14 中，(**a**)写出 $f\circ g$ 和 $g\circ f$ 的公式，(**b**)求每个函数的定义域，(**c**)求每个函数的值域.

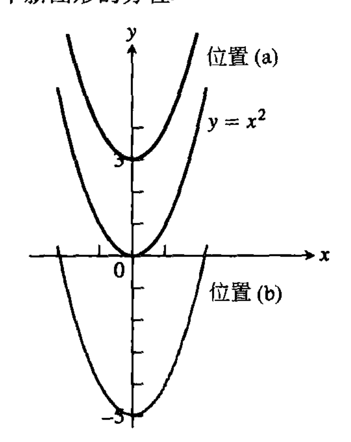
**13.** $f(x)=\sqrt{x+1}$，$g(x)=\frac{1}{x}$.

**14.** $f(x)=x^2$，$g(x)=1-\sqrt{x}$.

**15.** 附图显示 $y=-x^2$ 的图形移动到两处新位置. 写出两个新图形的方程.



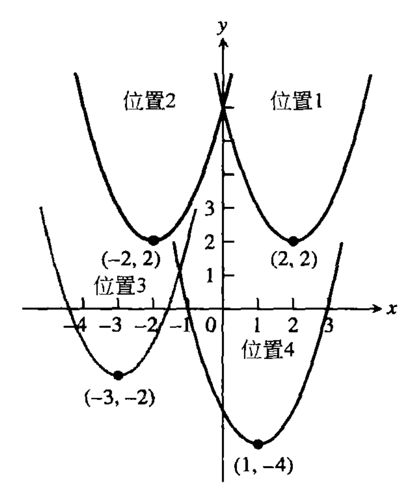

**16.** 附图显示 $y=x^2$ 的图形移动到两处新位置. 写出两个新图形的方程.



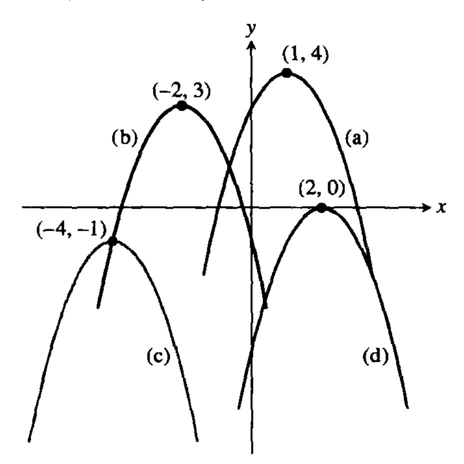

**17.** 指出(a)～(d)中列出的方程在附图中的对应图形：

(**a**) $y=(x-1)^2-4$.　　(**b**) $y=(x-2)^2+2$.

(**c**) $y=(x+2)^2+2$.　　(**d**) $y=(x+3)^2-2$.




**18.** 附图显示 $y=-x^2$ 的图形移动到 4 处新位置. 写出每个新图形的方程.




习题 19～28 指明对给出方程的图形移动多少单位和向什么方程移动. 写出移动后的图形方程. 然后一起画出原图形和移动后图形的草图，并且标明每个图形的方程.

**19.** $x^2+y^2=49$ 下移 3，左移 2.

**20.** $x^2+y^2=25$ 上移 3，左移 4.

**21.** $y=x^3$ 左移 1，下移 1.

**22.** $y=x^{2/3}$ 右移 1，下移 1.

**23.** $y=\sqrt{x}$ 左移 0.81.

**24.** $y=-\sqrt{x}$ 右移 3.

**25.** $y=2x-7$ 上移 7.

**26.** $y=\frac{1}{2}(x+1)+5$ 下移 5，右移 1.

**27.** $y=1/x$ 上移 1，右移 1.

**28.** $y=1/x^2$ 左移 2，下移 1.

在习题 29～48 中，画出函数的图形.

29. $y=\sqrt{x+4}$.

30. $y=\sqrt{9-x}$.

31. $y=|x-2|$.

32. $y=|1-x|-1$.

33. $y=1+\sqrt{x-1}$.

34. $y=1-\sqrt{x}$.

35. $y=(x+1)^{2/3}$.

36. $y=(x-8)^{2/3}$.

37. $y=1-x^{2/3}$.

38. $y+4=x^{2/3}$.

39. $y=\sqrt[3]{x-1}-1$.

40. $y=(x+2)^{3/2}+1$.

41. $y=\dfrac{1}{x-2}$.

42. $y=\dfrac{1}{x}-2$.

43. $y=\dfrac{1}{x}+2$.

44. $y=\dfrac{1}{x+2}$.

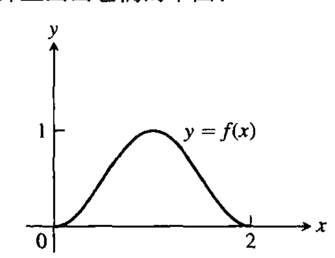
45. $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

46. $y=\dfrac{1}{x^2}-1$.

47. $y=\dfrac{1}{x^2}+1$.

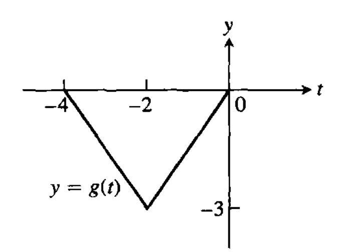
48. $y=\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

49. 附图显示以[0, 2]为定义域和[0, 1]为值域的函数$f(x)$的图形. 求下列函数的定义域和值域，并且画出它们的草图：




(a) $f(x)+2$. (b) $f(x)-1$.
(c) $2f(x)$. (d) $-f(x)$.
(e) $f(x+2)$. (f) $f(x-1)$.
(g) $f(-x)$. (h) $-f(x+1)+1$.

50. 附图显示以[−4, 0]为定义域和[−3, 0]为值域的函数$g(t)$的图形. 求下列函数的定义域和值域，并且画出它们的草图：




(a) $g(-t)$. (b) $-g(t)$.
(c) $g(t)+3$. (d) $1-g(t)$.
(e) $g(-t+2)$. (f) $g(t-2)$.
(g) $g(1-t)$. (h) $-g(t-4)$.

习题51 ~ 60 指明对给定函数进行拉长或者压缩的系数和方向. 求拉长或者压缩后的图形的方程.

51. $y=x^2-1$，以系数 3 垂直拉长.

52. $y=x^2-1$，以系数 2 水平压缩.

53. $y=1+\dfrac{1}{x^2}$，以系数 2 垂直压缩.

54. $y=1+\dfrac{1}{x^2}$，以系数 3 水平拉长.

55. $y=\sqrt{x+1}$，以系数 4 水平压缩.

56. $y=\sqrt{x+1}$，以系数 3 垂直拉长.

57. $y=\sqrt{4-x^2}$，以系数 2 水平拉长.

58. $y=\sqrt{4-x^2}$，以系数 3 垂直压缩.

59. $y=1-x^3$，以系数 3 水平压缩.

60. $y=1-x^3$，以系数 2 水平拉长.

在习题61 ~ 68 中，画出每个函数的图形，画图时不用描点方法，而是从图 1.13 ~ 1.15 中的标准函数之一的图形开始，并且应用一个适当的变换.

61. $y=-\sqrt{2x+1}$.

62. $y=\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}$.

63. $y=(x-1)^3+2$.

64. $y=(1-x)^3+2$.

65. $y=\dfrac{1}{2x}-1$.

66. $y=\dfrac{2}{x^2}+1$.

67. $y=-\sqrt[3]{x}$.

68. $y=(-2x)^{2/3}$.

69. 画出函数 $y=|x^2-1|$ 的图形.

70. 画出函数 $y=\sqrt{|x|}$ 的图形.

习题71 ~ 76 给出椭圆的方程. 把每个方程写成标准形式，并且画出椭圆的草图.

71. $9x^2+25y^2=225$.

72. $16x^2+7y^2=112$.

73. $3x^2+(y-2)^2=3$.

74. $(x+1)^2+2y^2=4$.

75. $3(x-1)^2+2(y+2)^2=6$.

76. $6\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+9\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=54$.

77. 写出椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$左移 4 单位和上移 3 单位后的方程. 画出这个椭圆的草图，并且确定它的中心和长轴.

78. 写出椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{25}=1$右移 3 单位和下移 2 单位后的方程. 画出这个椭圆的草图，并且确定它的中心和长轴.

79. 假定$f$是偶函数，$g$是奇函数，$f$和$g$都定义在整个实直线 **R** 上. 下面定义的函数哪些是偶函数，哪些是奇函数?

(a) $fg$. (b) $f/g$. (c) $g/f$.
(d) $f^2=ff$. (e) $g^2=gg$. (f) $f\circ g$.
(g) $g\circ f$. (h) $f\circ f$. (i) $g\circ g$.

80. 一个函数能否同时成为奇函数和偶函数? 提出

答案的理由.

**T81.** (续例 1)一起画出函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 与 $g(x)=\sqrt{1-x}$，以及它们的(a)和、(b)积、(c)两种差以及(d)两种商的图形.

**T82.** 设 $f(x)=x-7$，$g(x)=x^2$. 一起画出 $f$ 和 $g$ 以及 $f\circ g$ 和 $g\circ f$ 的图形.

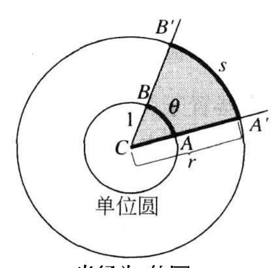
## 1.3 三角函数

本节复习弧度度量和基本三角函数.

### 1.3.1 角

角是用度或者弧度度量的. 在半径为 $r$ 的圆内，圆心角 $A'CB'$ 的**弧度**数定义为圆心角所对弧 $s$ 中包含的“半径单位”的数量. 当用弧度度量时，如果圆心角用 $\theta$ 表示，这就意味着 $\theta=s/r$(见图 1.38)，或者

$$s=r\theta\quad(\theta\text{ 用弧度单位})\qquad(1)$$




半径为r的圆

图 1.38　圆心角 $A'CB'$ 的弧度度量是数 $\theta=s/r$；对于半径 $r=1$ 的单位圆，$\theta$ 是圆心角 $ACB$ 从单位圆切割的弧 $AB$ 的长度

若圆是半径 $r=1$ 的单位圆，则从图 1.38 和公式(1)看出，以弧度度量的圆心角 $\theta$ 就是圆心角从单位圆切割的弧的长度. 因为单位圆旋转一周是 360°或者 $2\pi$ 弧度，故有

$$\pi\text{ 弧度}=180^\circ\qquad(2)$$

和

$$1\text{ 弧度}=\frac{180}{\pi}(\approx 57.3)\text{ 度}\quad\text{或}\quad 1\text{ 度}=\frac{\pi}{180}(\approx 0.017)\text{ 弧度}$$

表 1.2 显示某些基本角度的度度量和等价的弧度度量.

**表 1.2　用度和弧度度量的角**

| 度 | -180 | -135 | -90 | -45 | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 | 120 | 135 | 150 | 180 | 270 | 360 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\theta$(弧度) | $-\pi$ | $\frac{-3\pi}{4}$ | $\frac{-\pi}{2}$ | $\frac{-\pi}{4}$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |

我们说 $xy$ 平面内的一个角处于**标准位置**，是指它的顶点位于原点和起始边半直线在正 $x$ 轴上(见图 1.39). 从正 $x$ 轴按逆时针方向度量的角被赋予正度量值；依顺时针方向度量的角被赋予负度量值.

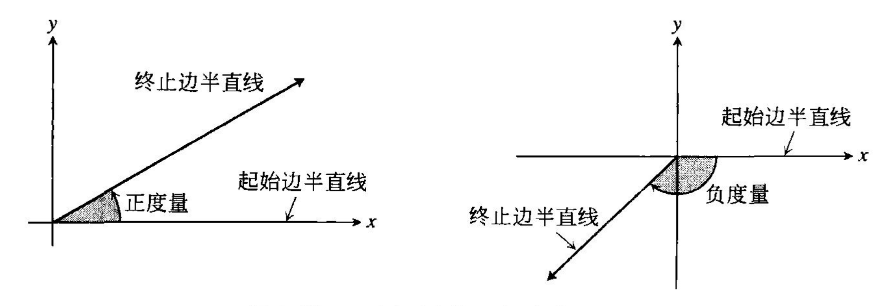



图 1.39　$xy$ 平面内处于标准位置的角

描述逆时针旋转的角可以任意地超出 $2\pi$ 弧度或 360°. 同样，描述顺时针旋转的角可具有各种大小的负度量值(见图 1.40).

**角度惯例：用弧度**　从现在开始，本书假定所有的角用弧度度量，除非另外明确指出用度或

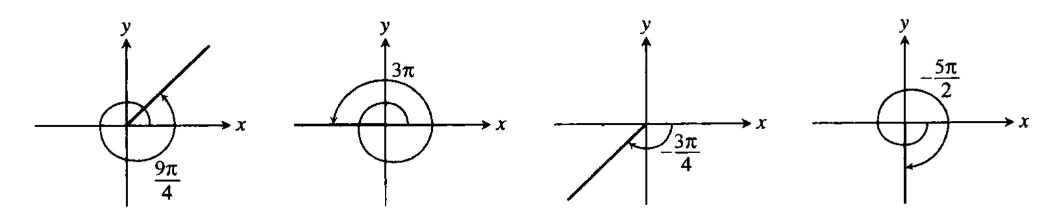
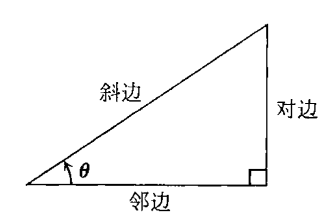



图 1.40　非零弧度度量可以取正值或者负值，并且可以超出 $2\pi$

者某种其他单位. 当我们提到角$\frac{\pi}{3}$时是指$\frac{\pi}{3}$弧度(等于 60°)而不是$\frac{\pi}{3}$度. 在对角进行计算时，要把计算器置于弧度方式.

### 1.3.2　6 个基本三角函数

读者或许熟悉用直角三角形的边定义锐角的三角函数(见图 1.41). 首先通过把角置于半径为 $r$ 的圆内的标准位置，我们把这种定义推广到钝角和负数角. 然后利用终止边半直线与圆的交点 $P(x, y)$ 的坐标定义三角函数(见图 1.42).




$$\sin\theta=\frac{对边}{邻边}\quad \csc\theta=\frac{斜边}{对边}$$
$$\cos\theta=\frac{邻边}{斜边}\quad \sec\theta=\frac{斜边}{邻边}$$
$$\tan\theta=\frac{对边}{邻边}\quad \cot\theta=\frac{邻边}{对边}$$

图 1.41　锐角的三角函数比

**正弦**: $\sin\theta=\frac{y}{r}$　**余切**: $\csc\theta=\frac{r}{y}$

**余弦**: $\cos\theta=\frac{x}{r}$　**正割**: $\sec\theta=\frac{r}{x}$

**正切**: $\tan\theta=\frac{y}{x}$　**余割**: $\cot\theta=\frac{x}{y}$

这些推广定义当角为锐角时同直角三角形时的定义一致.

此外，还要注意下面的定义，只要其中的商是有定义的:

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\qquad \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}\qquad \csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$$

正如读者可以见到的那样，$\tan\theta$ 和 $\sec\theta$ 在 $x=0$ 没有定义. 这意味着当 $\theta$ 为 $\pm\frac{\pi}{2}$，$\pm\frac{3\pi}{2}$，… 时这两个函数没有定义. 同样，$\cos\theta$ 和 $\csc\theta$ 对于 $y=0$ 的 $\theta$ 值(即 $\theta=0$，$\pm\pi$，$\pm2\pi$，…)没有定义.

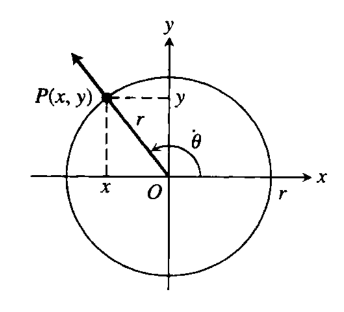



图 1.42　通过 $x$，$y$ 和 $r$ 定义一般角 $\theta$ 的三角函数

对某些角而言，这些三角函数比的精确值可以从图 1.43 的三角形中看出. 例如，

$$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\qquad \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{\pi}{4}=1\qquad \tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\qquad \tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

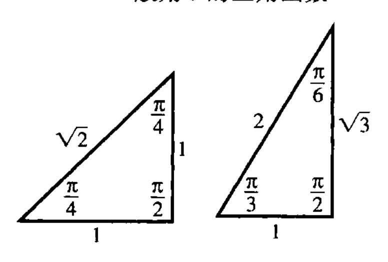



图 1.43　两个常见三角形的弧度角和边长

CAST 规则(见图 1.44)对于记忆基本三角函数何时取正值或者

负值是很有用的. 例如，从图 1.45 的三角形中看出

$$\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2},\quad \tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$$

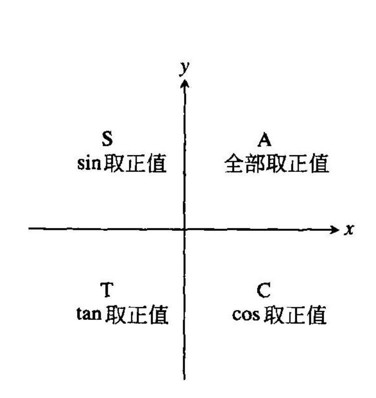



图 1.44　用一句话“All Students Take Calculus”（全体学生学微积分）的首字母记忆的 CAST 规则，说明在每个象限哪些三角函数取正值

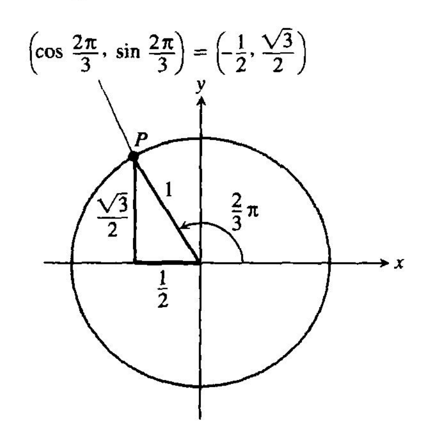



图 1.45　用于计算 $2\pi/3$ 弧度的正弦和余弦的三角形，边长从直角三角形的几何关系得到

我们用类似方法确定显示在表 1.3 中的 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 和 $\tan\theta$ 的值.

**表 1.3　$\sin\theta$，$\cos\theta$ 和 $\tan\theta$ 对于选定 $\theta$ 值的取值**

| 度 | -180 | -135 | -90 | -45 | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 | 120 | 135 | 150 | 180 | 270 | 360 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\theta$(弧度) | $-\pi$ | $\frac{-3\pi}{4}$ | $\frac{-\pi}{2}$ | $\frac{-\pi}{4}$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
| $\sin\theta$ | 0 | $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ | -1 | $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | -1 | 0 |
| $\cos\theta$ | -1 | $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ | 0 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ | -1 | 0 | 1 |
| $\tan\theta$ | 0 | 1 |  | -1 | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |  | $-\sqrt{3}$ | -1 | $\frac{-\sqrt{3}}{3}$ | 0 |  | 0 |

### 1.3.3　三角函数的周期性和图形

当度量的角 $\theta$ 和 $\theta+2\pi$ 处于标准位置时，它们的终止边半直线重合. 因此，两个角有相同的三角函数值：$\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta$，$\tan(\theta+2\pi)=\tan\theta$，等等. 同样，有 $\cos(\theta-2\pi)=\cos\theta$，$\sin(\theta-2\pi)=\sin\theta$，等等. 我们把 6 个基本三角函数的这种重复性质称为周期性.

> **定义**　如果对于每个 $x$ 值，存在一个正数 $p$ 使得 $f(x+p)=f(x)$，就说函数 $f(x)$ 是周期性的. 这种 $p$ 的最小值称为 $f$ 的**周期**.

在坐标平面上画三角函数的图形时，通常用自变量 $x$ 表示 $\theta$. 图 1.46 显示，正切函数和余切函数的周期为 $\pi$，其余

**附注：三角函数的周期性和奇偶性**

周期 $\pi$：$\tan(x+\pi)=\tan x$
$\cot(x+\pi)=\cot x$

周期 $2\pi$：$\sin(x+2\pi)=\sin x$
$\cos(x+2\pi)=\cos x$
$\sec(x+2\pi)=\sec x$
$\csc(x+2\pi)=\csc x$

偶函数：$\cos(-x)=\cos x$
$\sec(-x)=\sec x$

奇函数：$\sin(-x)=-\sin x$
$\tan(-x)=-\tan x$
$\csc(-x)=-\csc x$
$\cot(-x)=-\cot x$

4 个函数的周期为 $2\pi$. 此外，这些函数图形的对称性表明，余弦函数和正割函数是偶函数，其余 4 个函数是奇函数.

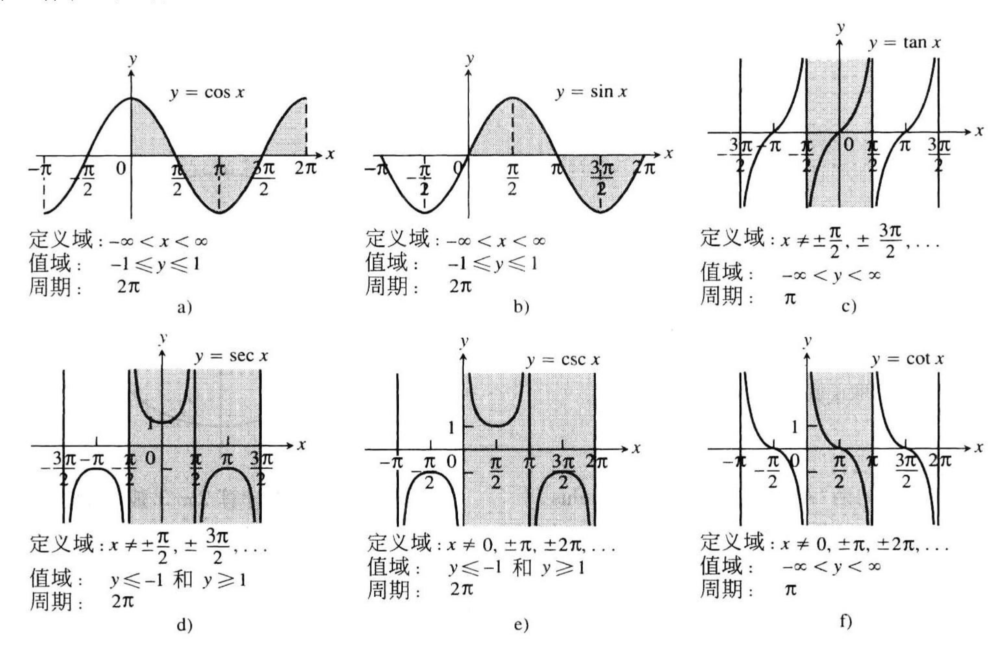



图 1.46 用弧度度量的 6 个基本三角函数的图形，每幅图形的阴影区指示三角函数的周期性

### 1.3.4 三角恒等式

平面内任何点 $P(x, y)$ 的坐标能够通过它离原点的距离 $r$ 和半直线 $OP$ 与正 $x$ 轴形成的角 $\theta$ 表示(见图 1.42). 由于 $x/r = \cos\theta$ 和 $y/r = \sin\theta$，所以

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

当 $r = 1$ 时，对图 1.47 中的参考直角三角形应用勾股定理，可以得到等式

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \qquad (3)$$

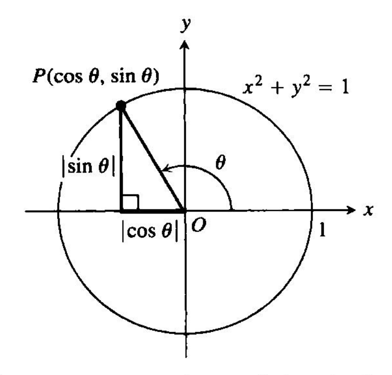



图 1.47 一般角 $\theta$ 的参考三角形

这个等式对于所有 $\theta$ 值成立，是三角学中最常用的恒等式. 分别用 $\cos^2\theta$ 和 $\sin^2\theta$ 除这个恒等式的两端，得到

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

下面的公式对所有角 $A$ 和 $B$ 成立(见习题 53 和 54).

**加法公式**

$$\cos(A + B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$
$$\sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B \qquad (4)$$

对于 $\cos(A-B)$ 和 $\sin(A-B)$ 有类似的公式（见习题35和36）. 本书所需的所有三角恒等式从公式(3)和(4)导出. 例如，在加法公式中用 $\theta$ 代换 $A$ 和 $B$，得到

**倍角公式**

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \tag{5}$$

其他一些公式由公式

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \quad \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$$

组合而成. 把这两个公式相加得到 $2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$；从第一个公式减第二个公式得到 $2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$. 从这个结果推出在积分学中很有用的下述恒等式：

**半角公式**

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \tag{6}$$

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \tag{7}$$

### 1.3.5　余弦定律

若 $a$，$b$，$c$ 是三角形 $ABC$ 的边，$\theta$ 是同 $c$ 边相对的角，则有

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \tag{8}$$

这个公式称为**余弦定律**.

如果引入坐标轴，以 $C$ 为原点和沿三角形的一条边为正 $x$ 轴，如图1.48所示，我们就能看出这个定律为什么成立. $A$ 的坐标是 $(b, 0)$；$B$ 的坐标是 $(a\cos\theta, a\sin\theta)$. 因此，$A$ 和 $B$ 之间距离的平方为

$$\begin{aligned} c^2 &= (a\cos\theta - b)^2 + (a\sin\theta)^2 \\ &= a^2(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1}) + b^2 - 2ab\cos\theta \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \end{aligned}$$

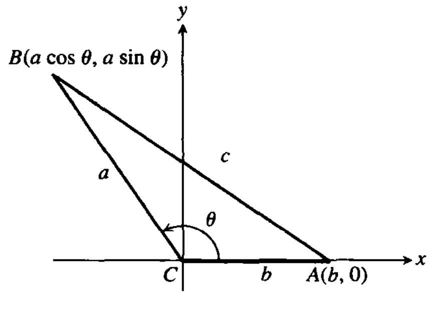
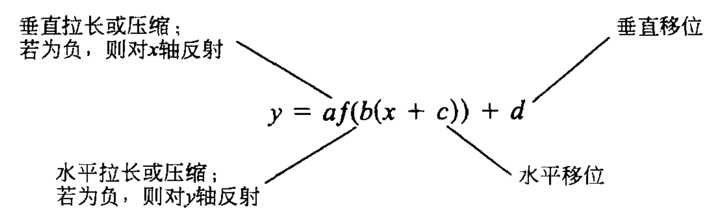



图1.48　$A$ 和 $B$ 之间距离的平方给出余弦定律

余弦定律是对勾股定理的推广. 若 $\theta = \pi/2$，则 $\cos\theta = 0$，即得 $c^2 = a^2 + b^2$.

### 1.3.6　三角函数图形的变换

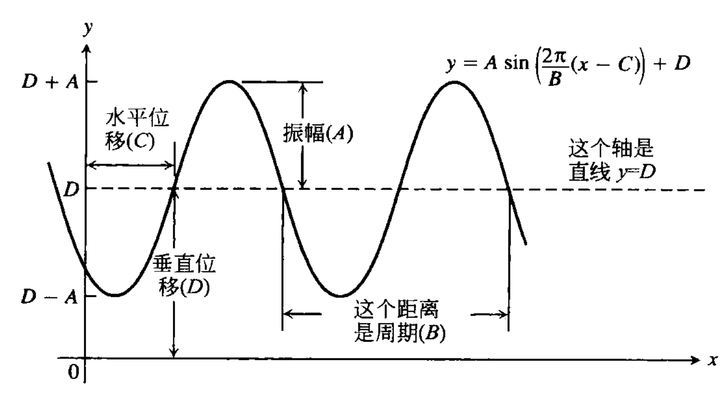
函数图形的移位、拉长、压缩和反射的规则总结在下图中，这些规则适用于本节所讨论的三角函数.



把变换规则应用于正弦函数，给出**一般正弦函数**或者**正弦曲线**的公式

$$f(x) = A\sin\left[\frac{2\pi}{B}(x-C)\right]+D$$

其中$|A|$是振幅，$|B|$是周期，$C$是水平位移，$D$是垂直位移. 下图揭示和给出不同项的图形解释.




## 习题 1.3

**1.** 在半径为 10 m 的圆上，设(**a**)圆心角 $=4\pi/5$ 弧度，(**b**)圆心角 $=110°$. 它们对着的弧长是多少?

**2.** 在半径为 8 的圆上，设一段弧的长度为 $10\pi$. 求这段弧对着的圆心角的弧度和度的度量.

**3.** 在直径为 12 英寸的圆盘周边标出一段弧，使两个端点到圆盘中心的连线构成 80° 角. 达到 1/10 英寸精度的弧长应是多少?

**4.** 把 1 m 直径的轮子在地平面上向前滚动 30 cm，轮子转动的角度是多少? 请用弧度数(按 1/10 弧度的精度)和度数(按度的精度)回答.

**5.** 复制并且填写下面的函数值表. 如果函数在某个给定角度没有定义，填入"UND". 不要使用计算器或者数值表.

| $\theta$ | $-\pi$ | $-2\pi/3$ | 0 | $\pi/2$ | $3\pi/4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | | | | | |
| $\cos\theta$ | | | | | |
| $\tan\theta$ | | | | | |
| $\cot\theta$ | | | | | |
| $\sec\theta$ | | | | | |
| $\csc\theta$ | | | | | |

**6.** 复制并且填写下面的函数值表. 如果函数在某个给定角度没有定义，填入"UND". 不要使用计算器或者数值表.

| $\theta$ | $-3\pi/2$ | $-\pi/3$ | $-\pi/6$ | $\pi/4$ | $5\pi/6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | | | | | |
| $\cos\theta$ | | | | | |
| $\tan\theta$ | | | | | |
| $\cot\theta$ | | | | | |
| $\sec\theta$ | | | | | |
| $\csc\theta$ | | | | | |

在习题 7 ~ 12 中给出三角函数 $\sin x$，$\cos x$ 和 $\tan x$ 之一的值. 如果 $x$ 位于指定区间内，求其他两个三角函数的值.

**7.** $\sin x=\frac{3}{5}$，$x\in\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$.

**8.** $\tan x=2$，$x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

**9.** $\cos x=\frac{1}{3}$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ 0\right]$.

**10.** $\cos x=-\frac{5}{13}$，$x\in\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$.

**11.** $\tan x=\frac{1}{2}$，$x\in\left[\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

**12.** $\sin x=-\frac{1}{2}$，$x\in\left[\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

在习题 13 ~ 22 中，画出函数的图形. 每个函数的周期是什么?

**13.** $\sin 2x$.　　**14.** $\sin(x/2)$.

**15.** $\cos\pi x$.　　**16.** $\cos\frac{\pi x}{2}$.

**17.** $-\sin\frac{\pi x}{3}$.　　**18.** $-\cos 2\pi x$.

**19.** $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.　　**20.** $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

**21.** $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$.　　**22.** $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1$.

在 $ts$ 平面($t$ 为水平轴，$s$ 为垂直轴)内画出习题 23 ~ 26 中函数的图形. 每个函数的周期是什么? 每幅图形有什么对称性?

**23.** $s=\cot 2t$.　　**24.** $s=-\tan\pi t$.

**25.** $s=\sec\left(\frac{\pi t}{2}\right)$.　　**26.** $s=\csc\left(\frac{t}{2}\right)$.

**T27.** (a) 一起画出 $y=\cos x$ 和 $y=\sec x$ 的图形，$-3\pi/2\leqslant x\leqslant 3\pi/2$. 解说 $\sec x$ 同 $\cos x$ 的值和符号相关的性质.

(b) 一起画出 $y=\sin x$ 和 $y=\csc x$ 的图形，$-\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$. 解说 $\csc x$ 同 $\sin x$ 的值和符号相关的性质.

**T28.** 一起画出 $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 的图形，$-7\leqslant x\leqslant 7$. 解说 $\cot x$ 同 $\tan x$ 的值和符号相关的性质.

**29.** 一起画出 $y=\sin x$ 和 $y=\lfloor \sin x\rfloor$ 的图形. $\lfloor \sin x\rfloor$ 的定义域和值域是什么?

**30.** 一起画出 $y=\sin x$ 和 $y=\lceil \sin x\rceil$ 的图形. $\lceil \sin x\rceil$ 的定义域和值域是什么?

在习题 31 ~ 36 中，用加法公式推导恒等式.

**31.** $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin x$.　**32.** $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin x$.

**33.** $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos x$.　**34.** $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos x$.

**35.** $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$ (习题 53 给出一种不同的推导).

**36.** $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$.

**37.** 如果在三角恒等式 $\cos(A-B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ 中取 $B=A$，那么会出现什么结果? 答案同你已知的某些事实相符吗?

**38.** 如果在加法公式中取 $B=2\pi$ 会出现什么结果? 答案同你已知的某些事实相符吗?

在习题 39 ~ 42 中，用 $\sin x$ 和 $\cos x$ 表示给定的函数值.

**39.** $\cos(\pi+x)$.　**40.** $\sin(2\pi-x)$.

**41.** $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)$.　**42.** $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)$.

**43.** 求 $\sin\dfrac{7\pi}{12}$ 的值，把它作为 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 计算.

**44.** 求 $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ 的值，把它作为 $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 计算.

**45.** 求 $\cos\dfrac{\pi}{12}$ 的值.　**46.** 求 $\sin\dfrac{5\pi}{12}$ 的值.

在习题 47 ~ 50 中，求函数的值.

**47.** $\cos^2\dfrac{\pi}{8}$.　**48.** $\cos^2\dfrac{\pi}{12}$.

**49.** $\sin^2\dfrac{\pi}{12}$.　**50.** $\sin^2\dfrac{\pi}{8}$.

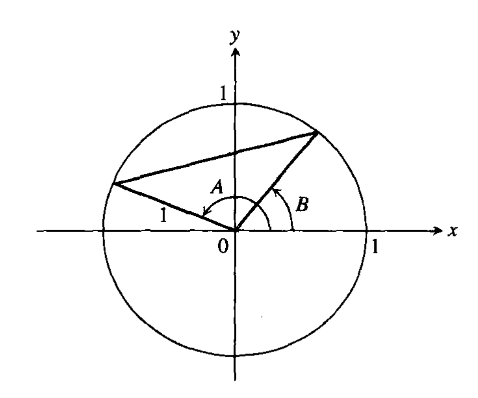
**51. 正切和公式**　两角和的正切的标准公式为

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

试推导这个公式.

**52.** (续习题 51) 推导 $\tan(A-B)$ 的公式.

**53.** 对附图中的三角形，应用余弦定律推导 $\cos(A-B)$ 的公式.




**54.** (a) 对恒等式 $\sin\theta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$ 应用 $\cos(A-B)$ 的公式，求得 $\sin(A+B)$ 的加法公式.

(b) 在习题 35 的 $\cos(A-B)$ 公式中，用 $-B$ 代换 $B$ 推导 $\cos(A+B)$ 的公式.

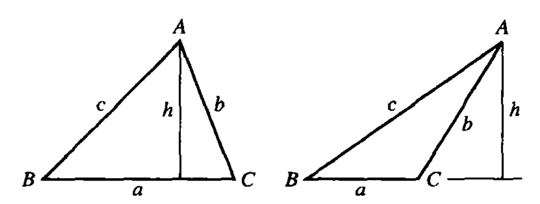
**55.** 设三角形的边 $a=2$，$b=3$，角 $C=60°$. 求边 $c$ 的长度.

**56.** 设三角形的边 $a=2$，$b=3$，角 $C=40°$. 求边 $c$ 的长度.

**57. 正弦定律**　正弦定律表述如下：若 $a$，$b$，$c$ 是三角形三个角的相对边，则

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

利用附图和恒等式 $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ (如果需要的话) 推导这个定律.




**58.** 设三角形的边 $a=2$，$b=3$，角 $C=60°$ (同习题 55 一样). 利用正弦定律求角 $B$ 的正弦值.

**59.** 设三角形的边 $c=2$，角 $A=\pi/4$，角 $B=\pi/3$. 求角 $A$ 的对边 $a$ 的长度.

**T60. 近似公式 $\sin x\approx x$**　如果 $x$ 以弧度度量，当 $x$ 的数值很小时，$\sin x\approx x$. 知道这个近似公式经常是有用的. 在 3.10 节将会看到此公式为什么成立. 如果 $|x|<0.1$，近似公式的误差小于 1/5000.

(a) 把绘图器置于弧度方式，在原点处的视窗中一起绘制 $y=\sin x$ 和 $y=x$ 的图形. 在原点附近观察到什么变化?

(b) 把绘图器置于度方式，再次在原点处的视窗中一起绘制 $y=\sin x$ 和 $y=x$ 的图形. 这时图形同在弧度方式下得到的图形有什么不同?

(c) **弧度方式的快速检验** 核对你的计算器是否处在弧度方式下：对原点附近的 $x$ 值(例如 $x=0.1$)计算 $\sin x$. 如果 $\sin x \approx x$，表明计算器处于弧度方式；否则，计算器不是弧度方式. 试作检验.

在习题 61 ~ 64 中，对正弦函数当作一般正弦函数

$$f(x) = A\sin\left(\frac{2\pi}{B}(x-C)\right)+D$$

确定 $A$，$B$，$C$，$D$，并且画出它们的草图.

**61.** $y=2\sin(x+\pi)-1$.

**62.** $y=\frac{1}{2}\sin(\pi x-\pi)+\frac{1}{2}$.

**63.** $y=-\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)+\frac{1}{\pi}$.

**64.** $y=\frac{L}{2\pi}\sin\frac{2\pi t}{L}$，$L>0$.

**计算机探究**

在习题 65 ~ 68 中，用图形方式考察一般正弦函数

$$f(x) = A\sin\left(\frac{2\pi}{B}(x-C)\right)+D$$

在改变常数 $A$，$B$，$C$，$D$ 的值时的变化. 用一种 CAS(计算机代数系统)或者计算机绘图器执行习题中的处理步骤.

**65. 周期 $B$** 设常数 $A=3$，$C=D=0$.

(a) 对于值 $B=1$，3，$2\pi$，$5\pi$，画出 $f(x)$ 在区间 $-4\pi\le x\le 4\pi$ 上的图形. 描述当周期增加时一般正弦函数的图形发生什么变化.

(b) 图形在 $B$ 取负值时发生什么变化？试用 $B=-3$ 和 $B=-2\pi$ 绘图.

**66. 水平移位 $C$** 设常数 $A=3$，$B=6$，$D=0$.

(a) 对于值 $C=0$，1，2 画出 $f(x)$ 在区间 $-4\pi\le x\le 4\pi$ 上的图形. 描述一般正弦函数的图形当 $C$ 经过正值增加时发生什么变化.

(b) 图形在 $C$ 取负值时发生什么变化？

(c) 对 $C$ 应赋予什么最小正值才能使图不显现水平移位？用一幅图形证实你的答案.

**67. 垂直移位 $D$** 设常数 $A=3$，$B=6$，$C=0$.

(a) 对于值 $D=0$，1，3 画出 $f(x)$ 在区间 $-4\pi\le x\le 4\pi$ 上的图形. 描述一般正弦函数的图形当 $D$ 经过正值增加时发生什么变化.

(b) 图形在 $D$ 取负值时发生什么变化？

**68. 振幅 $A$** 设常数 $B=6$，$C=D=0$.

(a) 描述一般正弦函数当 $A$ 经过正值增加时发生什么变化. 通过对值 $A=1$，5，9 画出 $f(x)$ 的图形证实你的答案.

(b) 图形在 $A$ 取负值时发生什么变化？

## 1.4 指数函数

这一节我们用直观的方法介绍指数函数的基本性质和应用. 在第 5 章将根据微积分的重要概念和结果给出更严格的论述.

### 1.4.1 指数的性质

当一个正数 $P$ 加倍时，它增加 2 倍而变成 $2P$. 如果再加倍，它变成 $2(2P)=2^2P$，第三次加倍给出 $2(2^2P)=2^3P$. 继续用这种方式加倍，导致我们考察函数 $f(x)=2^x$. 这个函数称为指数函数，因为变量 $x$ 出现在 $2^x$ 的指数中. 像 $g(x)=10^x$ 和 $h(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 这样的函数，是另外的指数函数的例子. 一般而言，如果 $a\ne 1$ 是正数，函数

$$f(x) = a^x$$

**是以 $a$ 为基的指数函数.**

**例 1** 设在 2000 年在储蓄账户存入 100 美元，这笔存款以自然增加的利率增值，按每年(一年一次)5.5% 的利率计算复利. 假定对这个账户不再追加存款，也不撤出储金，给出描述这个账户在 $x$ 年后存款额 $A$ 的函数的公式.

**解** 如果 $P=100$，在第一年底账户存款额为原来存入款项加上增加的利息，即

$$P+\left(\frac{5.5}{100}\right)P = (1+0.055)P = (1.055)P$$

在第二年底账户再次获得利息，存款额增加到

$$(1+0.055)\cdot(1.055P) = (1.055)^2P = 100\cdot(1.055)^2 \quad (P=100)$$

继续这个计算过程，在 $x$ 年后账户存款额达到

$$A = 100 \cdot (1.055)^x$$

这是以 1.055 为基的指数函数的倍数. 表 1.4 显示账户头四年自然增加的存款额. 请注意账户每年的存款额总是等于 1.055 乘前一年的值.

表 1.4　储蓄账户存款额的增长

| 年 | 存款额(美元) | 增加值(美元) |
|---|---|---|
| 2000 | 100 | |
| 2001 | $100(1.055) = 105.50$ | 5.50 |
| 2002 | $100(1.055)^2 = 111.30$ | 5.80 |
| 2003 | $100(1.055)^3 = 117.42$ | 6.12 |
| 2004 | $100(1.055)^4 = 123.88$ | 6.46 |

通常，在 $x$ 年后的存款额为 $P(1+r)^x$，其中 $r$ 为利率(用小数表示). ■

对于整数指数和有理数指数，指数函数 $f(x) = a^x$ 的值用下面的算术方法计算. 如果 $x = n$ 是正整数，$a^n$ 由 $a$ 自乘 $n$ 次得到：

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{个因子}}$$

若 $x=0$，则 $a^0=1$；若 $x=-n$，$n$ 为某个正整数，则

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

若 $x=1/n$，$n$ 为某个正整数，则

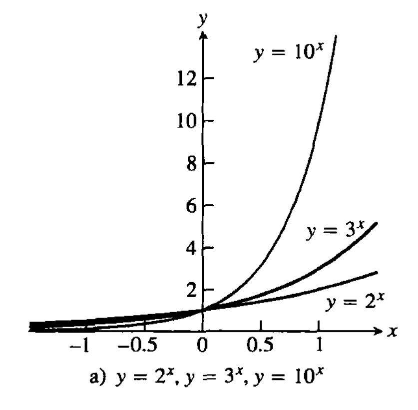
$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

这是正数，当其自乘 $n$ 次时结果为 $a$. 若 $x=p/g$ 是任何有理数，则

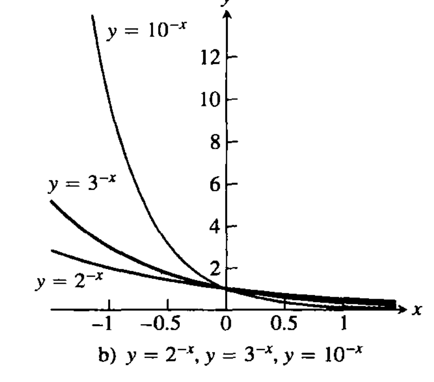
$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$$

如果 $x$ 是无理数，$a^x$ 的含义就不那么清楚了，但是它的值可以考虑通过越来越接近 $x$ 的有理数定义. 这种非形式化方法是建立在指数函数图形的基础上的. 在第 5 章我们将用严格的方法定义 $a^x$ 的值.

在 1.1 节显示过几种指数函数的图形，这里再次把它们展现在图 1.49 中. 这些图形描绘指数函数对所有实数输入 $x$ 的取值. 在无理数 $x$ 处选取函数值使图形不出现“断点”或“跳变”. 当然，这些用词不是严格的数学术语，但是它们足以表达非形式化的概念. 我们的意思是指当 $x$ 为无理数时，选择 $a^x$ 的值使函数 $f(x)=a^x$ 是连续的. 这是在下一章要仔细探讨的一个概念. 这种选择保证当 $a>1$ 时图形保持递增的性质，或者当 $0<a<1$ 时图形保持递减的性质(参见图 1.49).




a) $y=2^x, y=3^x, y=10^x$




b) $y=2^{-x}, y=3^{-x}, y=10^{-x}$

图 1.49　指数函数的图形

指数函数服从大家熟悉的下列指数法则. 当指数为整数或者有理数时，这些法则很容易用代数方法验证. 在第 5 章我们要证明它们对全部实数指数成立.

**指数法则**

若 $a>0$ 且 $b>0$，则下列法则对所有实数 $x$ 和 $y$ 成立：

(1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$　　(2) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$　　(3) $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$

(4) $a^x \cdot a^x = (ab)^x$　　(5) $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

**例 2**

(1) $3^{1.1} \cdot 3^{0.7} = 3^{1.1+0.7} = 3^{1.8}$.

(2) $\dfrac{(\sqrt{10})^3}{\sqrt{10}} = (\sqrt{10})^{3-1} = (\sqrt{10})^2 = 10$.

(3) $(5^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = 5^2 = 25$.

(4) $7^\pi \cdot 8^\pi = (56)^\pi$.

(5) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{1/2} = \dfrac{4^{1/2}}{9^{1/2}} = \dfrac{2}{3}$. ■

### 1.4.2 自然指数函数 $e^x$

对于自然现象、物理现象以及经济现象，用来建立模型的最重要的函数首推**自然指数函数**，它的基是特殊的数 e. e 是一个无理数，它精确到 9 位小数的值是 2.718 281 828. 用这样一个数而不是像比较简单的数 2 或 10 做基，看起来似乎很奇怪. 用 e 做基的有利条件在于它简化微积分中的许多计算.

只要注意图 1.49a，就能看出指数函数的图形随着基的增大而变得更为陡峭. 陡度的概念是通过图形在一点的切线的斜率表达的. 函数图形的切线在下一章确切定义，但是在直观上，图形在一点的切线是一条直线，同图形恰好在那一点相切，像对一个圆的切线. 图 1.50 显示 $y=a^x$ 对于几个 $a$ 值的图形穿过 $y$ 轴时的斜率. 请注意，当 $a=\mathrm{e}$ 时，斜率恰好等于 1. 若 $a<\mathrm{e}$，则斜率小于 1，而当 $a>\mathrm{e}$ 时斜率大于 1. 这是使数 e 在微积分中很有用的性质. $y=\mathrm{e}^x$ 的**图形在它穿过 $y$ 轴时的斜率为 1.**

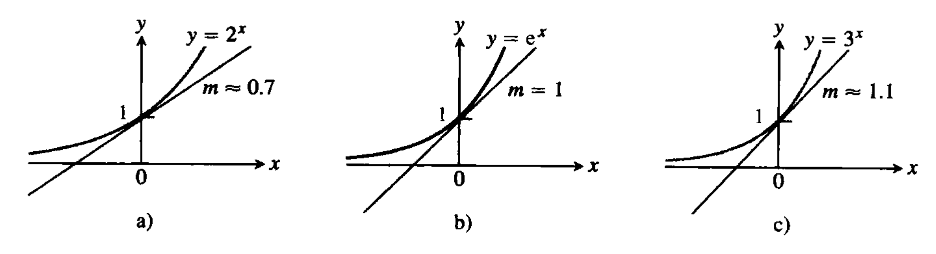
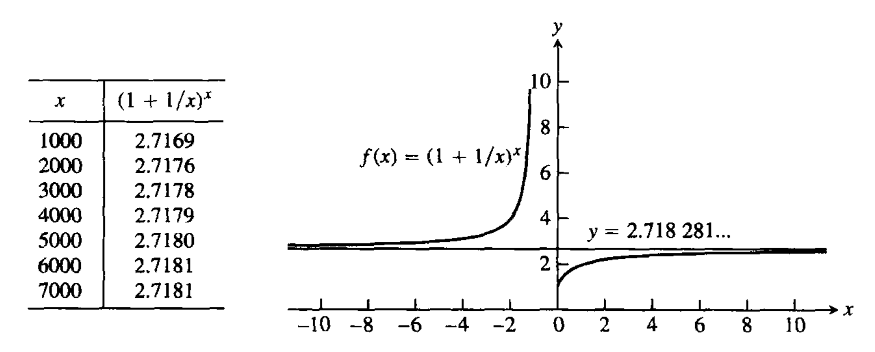



图 1.50 在指数函数中，$y=\mathrm{e}^x$ 的图形具有这样的性质：当它穿过 $y$ 轴时切线的斜率 $m$ 恰好等于 1；对于小于 e 的基(例如 $2^x$)，其斜率更小，而对于大于 e 的基(例如 $3^x$)，其斜率更大

在第 3 章，我们利用这个斜率性质证明，e 是 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 当 $x$ 趋于无穷大时逼近的值. 这个结果提供计算 e 值的一种方法，至少是一种近似方法. 图 1.51 的图形与数值表展现这个表达式的性质，以及当 $x$ 变得越来越大时它如何越来越逼近直线 $y=\mathrm{e}\approx 2.718\,281\,828$（这种极限概念在下一章精确论述）. 对 e 的严格讨论在第 5 章进行.

### 1.4.3 指数增长与指数衰减

指数函数 $y=\mathrm{e}^{kx}$ 被频繁地用于建立指数增长或者指数衰减的模型，其中 $k$ 是非零常数. 函数 $y=y_0\mathrm{e}^{kx}$ 当 $k>0$ 时是一个**指数增长模型**，当 $k<0$ 时是一个**指数衰减模型**. 这里 $y_0$ 代表常数. 指

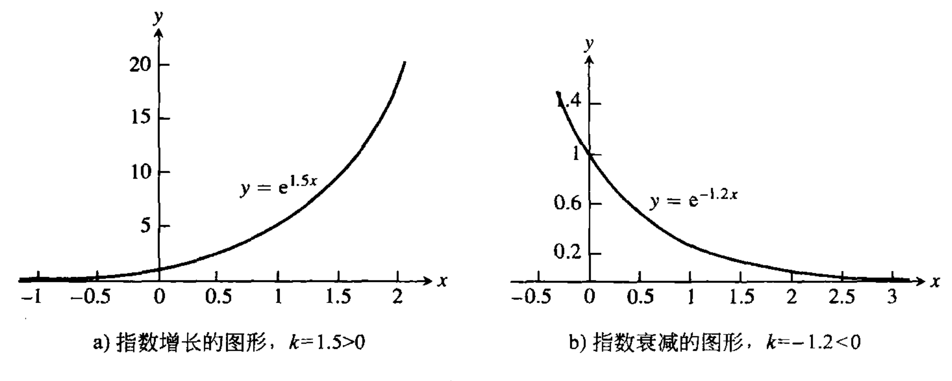


| $x$ | $(1+1/x)^x$ |
|---|---|
| 1000 | 2.7169 |
| 2000 | 2.7176 |
| 3000 | 2.7178 |
| 4000 | 2.7179 |
| 5000 | 2.7180 |
| 6000 | 2.7181 |
| 7000 | 2.7181 |



图 1.51　$f(x)=(1+1/x)^x$ 的图形与数值表，两者表明当 $x$ 越来越大时，$f(x)$ 越来越逼近 $e=2.718\ 281\ 828\cdots$

数增长的一个例子是**连续复利**，用 $y=P\cdot e^{rt}$ 作为模型，其中 $P$ 是最初存款，$r$ 是用小数表示的利率，$t$ 是同 $r$ 的单位一致的时间．指数衰减的一个例子是模型 $y=A\cdot e^{-1.2\times10^{-4}t}$，表示放射性元素碳 14 随时间的衰减．这里 $A$ 是碳 14 原有量，$t$ 是以年为单位的时间．碳 14 衰减用于测定生物体遗体(如甲壳、种子和木器)的年代．图 1.52 显示指数增长和指数衰减的图形．





a) 指数增长的图形，$k=1.5>0$　　b) 指数衰减的图形，$k=-1.2<0$

图　1.52

**例 3**　投资公司经常使用 $y=Pe^{rt}$ 作为计算投资增长的模型．用这个模型跟踪在 2000 年以年利率 5.5% 投资 100 美元的增长情况．

**解**　令 $t=0$ 代表 2000，$t=1$ 代表 2001，等等．指数增长模型为 $y(t)=Pe^{rt}$，其中 $P=100$(原始投资)，$r=0.055$(用小数表示的年利率)，$t$ 是以年为单位的时间．为预测 4 年后的 2004 年账户的储蓄总额，取 $t=4$ 并计算

$$y(4)=100e^{0.055(4)}=100e^{0.22}$$

$$=124.61\text{(准确到计算器的美分值)}$$

这同例 1 每年按复利计算的账户储蓄总额 123.88 美元形成对照．■

**例 4**　实验室试验表明，某些元素的原子以辐射的形式散射它们的部分质量，原子剩余部分重新构成某种新元素的原子．例如，放射性碳 14 衰变成氮；镭最终衰变成铅．如果 $y_0$ 是在时间 0 存在的放射性原子核数目，那么在以后任何时间 $t$ 原子核的数量将是

$$y=y_0e^{-rt},\quad r>0$$

数 $r$ 称为放射性物质的**衰变率**(在 5.6 节将会看到如何推导这个公式)．对于碳 14，当 $t$ 以年为度量单位时，已经从试验测定衰变率大约是 $r=1.2\times10^{-4}$．试预测 866 年后碳 14 剩余量的百分数．

**解** 假设碳 14 原子核初始数量为 $y_0$，866 年后的剩余量是

$$y(866) = y_0 e^{(-1.2\times10^{-4})(866)}$$
$$\approx (0.901)y_0 \text{（计算器计算）}$$

就是说，866 年后剩余的碳 14 大约为原有数量的 90%，所以碳 14 衰变原有原子核数目的 10% 左右. 在下一节的例 6 中，将会见到如何从一种衰变物质的样品中求放射性原子核数目存留一半需要的年数（称为放射性物质的半衰期）. ■

读者可能感到奇怪，为什么要用函数族 $y = e^{kx}$（常数 $k$ 取不同的值）而不用一般的指数函数 $y = a^x$. 我们在下一节将证明，指数函数 $y = a^x$ 同取适当 $k$ 值的 $y = e^{kx}$ 是相等的. 所以，公式 $y = e^{kx}$ 包含全部可能性，并且还会看到它更容易使用.

**习题 1.4**

在习题 1 ~ 6 中，在相应的坐标平面内一起画出给定曲线的草图，并且标出每条曲线的方程.

**1.** $y = 2^x$，$y = 4^x$，$y = 3^{-x}$，$y = (1/5)^x$.

**2.** $y = 3^x$，$y = 8^x$，$y = 2^{-x}$，$y = (1/4)^x$.

**3.** $y = 2^{-t}$，$y = -2^t$.

**4.** $y = 3^{-t}$，$y = -3^t$.

**5.** $y = e^x$，$y = 1/e^x$.

**6.** $y = -e^x$，$y = -e^{-x}$.

在习题 7 ~ 10 中，画出移位后的指数曲线的草图.

**7.** $y = 2^x - 1$ 和 $y = 2^{-x} - 1$.

**8.** $y = 3^x + 2$ 和 $y = 3^{-x} + 2$.

**9.** $y = 1 - e^x$ 和 $y = 1 - e^{-x}$.

**10.** $y = -1 - e^x$ 和 $y = -1 - e^{-x}$.

在习题 11 ~ 20 中，用指数定律简化表达式.

**11.** $16^2 \cdot 16^{-1.75}$.　　**12.** $9^{1/3} \cdot 9^{1/6}$.

**13.** $\dfrac{4^{4.2}}{4^{3.7}}$.　　**14.** $\dfrac{3^{5/3}}{3^{2/3}}$.

**15.** $(25^{1/8})^4$.　　**16.** $(13^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}/2}$.

**17.** $2^{\sqrt{3}} \cdot 7^{\sqrt{3}}$.　　**18.** $(\sqrt{3})^{1/2} \cdot (\sqrt{12})^{1/2}$.

**19.** $\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)^4$.　　**20.** $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$.

在习题 21 ~ 24 中，求每个函数的定义域和值域.

**21.** $f(x) = \dfrac{1}{2 + e^x}$.　　**22.** $g(t) = \cos(e^{-t})$.

**23.** $g(t) = \sqrt{1 + 3^{-t}}$.　　**24.** $f(x) = \dfrac{3}{1 - e^{2x}}$.

**T** 在习题 25 ~ 28 中，利用图形求方程的近似解.

**25.** $2^x = 5$.　　**26.** $e^x = 4$.

**27.** $3^x - 0.5 = 0$.　　**28.** $3 - 2^{-x} = 0$.

**T** 在习题 29 ~ 36 中，利用一个指数模型和绘图计算器估计每题的答案.

**29. 人口增长** 田纳西州诺克斯维尔市有 50 万人口，并且以每年 3.75% 的速率增加. 这个城市的人口大约在什么时候达到 100 万？

**30. 人口增长** 西尔弗-鲁兰镇在 1890 年曾有居民 6250 人，假定人口每年以 2.75% 的速率增加.

(a) 估计这个镇在 1915 年和 1940 年的人口.

(b) 该镇的人口大约在什么时候达到 5 万？

**31. 放射性衰变** 磷 32 的半衰期约为 14 天. 假定开始时有 6.6 克磷.

(a) 把磷 32 的剩余量表示成时间 $t$ 的函数.

(b) 磷 32 的剩余量将在什么时候降低到 1 克？

**32.** 如果约翰在其储蓄账户存入 2300 美元，年复利率为 6%，约翰的账户余额需要多长时间才能达到 4150 美元？

**33. 存款翻番** 如果储蓄的年复利率为 6.25%，确定存款增加一倍需要多长时间.

**34. 存款翻两番** 如果储蓄的连续复利率为 5.75%，确定存款增加两倍需要多长时间.

**35. 霍乱菌的繁殖** 假定霍乱菌落从一个菌株开始繁殖，其数量每半小时增加一倍. 24 小时后将有多少霍乱菌？

**36. 消除疾病** 假定在任何已知的年份，某种疾病的发病率以 20% 的速度降低. 如果现在有 1 万个病例，需要经过多少年才能达到下述目标？

(a) 病例数目减少到 1000 个.

(b) 消除这种疾病，即病例数目小于 1.

## 1.5 反函数与对数函数

使一个函数 $f$ 的作用还原或者颠倒过来的函数称为 $f$ 的*反函数*. 许多常见的函数都存在对应的反函数，尽管不是全部如此. 在这一节讨论自然对数函数 $y = \ln x$，它是指数函数 $y = e^x$ 的反函

数. 我们还要举出几个反三角函数的例子.

### 1.5.1 一对一函数

一个函数是一种对应规则，对于这种规则而言，函数值域中的每个值至少是它的定义域中一个元素的输出. 某些函数对于定义域中一个以上元素赋予值域中同一个值. 例如$f(x)=x^2$对两个数$-1$和1赋予同一个值1；正弦函数在$\frac{\pi}{3}$和$\frac{2\pi}{3}$都取值$\frac{\sqrt{3}}{2}$. 另外一些函数假定在值域中的取值不超过一次. 不同数的平方根和立方总是不相同的. 对于定义域中不同元素取不同值的函数称为一对一函数. 这类函数对于值域中的任何值仅取一次.

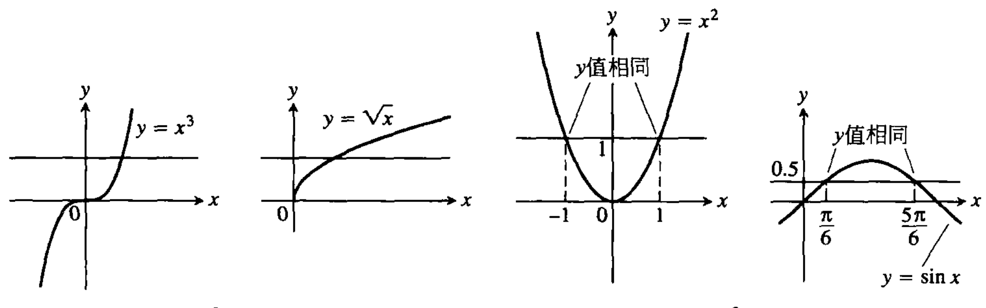
> **定义**　如果函数$f(x)$每当定义域$D$中的$x_1 \neq x_2$时有$f(x_1) \neq f(x_2)$，就说$f$在$D$上是**一对一函数.**

**例1**

**(a)** $f(x)=\sqrt{x}$在任何非负数的定义域上是一对一函数，因为每当$x_1 \neq x_2$时有$\sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2}$.

**(b)** $g(x)=\sin x$在区间$[0,\ \pi]$上不是一对一函数，因为$\sin(\pi/6)=\sin(5\pi/6)$. 然而，正弦函数在区间$[0,\ \pi/2]$上是一对一的，因为在这个区间上它是增函数，对于不同的输入值给出不同的输出值. ■

一对一函数$y=f(x)$的图形同给定的水平直线至多可以相交一次. 如果函数同这样的直线相交一次以上，那么至少有两个不同的$x$值具有相同的$y$值，因此函数不是一对一的(见图1.53b).




a) 一对一：$y=x^3$和$y=\sqrt{x}$在它们的定义域$(-\infty,\ \infty)$和$[0,\ \infty)$上的图形同每条水平直线至多相交一次

b) 非一对一：$y=x^2$和$y=\sin x$在它们的定义域$(-\infty,\ \infty)$上的图形同一条或多条水平直线相交一次以上

图1.53　用水平直线检验函数

> **一对一函数水平直线检验法**　一个函数$y=f(x)$是一对一的，当且仅当函数图形同每条水平直线至多相交一次.

### 1.5.2 反函数

由于一对一函数的每个输出仅来自一个输入，所以函数的作用可以颠倒过来，把一个输出送回它来自的输入.

> **定义**　假定$f$是定义域$D$上的一对一函数，以$R$为值域. 如果$f(b)=a$，**反函数**$f^{-1}$由
> $$f^{-1}(a)=b$$
> 定义. $f^{-1}$的定义域是$R$而值域是$D$.

$f$的反函数记号$f^{-1}$读作"$f$反". $f^{-1}$中的"$-1$"不是指数：$f^{-1}(x)$的含义不是$1/f(x)$. 请注意，$f$和$f^{-1}$的定义域与值域是互换的.

如果应用$f$传送一个输入$x$给输出$f(x)$，并且接着对$f(x)$应用$f^{-1}$，那么正好返回到起始的$x$值. 同样，如果在$f$的值域中取某个$y$值，对它应用$f^{-1}$，然后对结果值$f^{-1}(y)$应用$f$，那么返回到起始的$y$值. 建立一个函数及其反函数的复合函数，其作用同不做任何改变一样.

$$(f^{-1}\circ f)(x) = x, \quad \text{对于} f \text{定义域中的所有} x$$

$$(f\circ f^{-1})(y) = y, \quad \text{对于} f^{-1}\text{定义域(或者} f \text{值域) 中的所有} y$$

只有一对一函数才能有反函数. 原因在于，如果对于两个不同的输入$x_1$和$x_2$有$f(x_1)=y$和$f(x_2)=y$，那么无法对$f^{-1}(y)$赋予一个同时满足$f^{-1}(f(x_1))=x_1$和$f^{-1}(f(x_2))=x_2$的值.

一个区间上的增函数，当$x_2>x_1$时满足$f(x_2)>f(x_1)$，所以是一对一函数并且有反函数. 减函数也有反函数. 既非增函数也非减函数的函数仍然可能是一对一函数并且有反函数，例如定义在$(-\infty,\infty)$上的函数

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

可以用水平直线检验它是一对一的.

### 1.5.3 求反函数

一个函数及其反函数的图形是密切关联的. 为了从函数的图形上读出函数值，可从$x$轴上一点$x$出发，沿垂直线移动到图形上的一点，然后沿水平线移动到$y$轴，读出$y$的值. 通过相反的过程可以从图形上读出反函数的值. 从$y$轴上一点$y$出发，沿水平线移动到图形上的一点，然后沿垂直线移动到$x$轴，读出$x=f^{-1}(y)$的值(见图 1.54).

我们要用位于$x$轴而不是$y$轴上的值作为输入来建立$f^{-1}$的图形，就像通常对函数所作的那样. 为此，我们通过沿45°线$y=x$的反射交换$x$轴和$y$轴. 在这个反射后得到表示$f^{-1}$的图形. 现在可以按通常的方法从图形上读出$f^{-1}(x)$的值，即从$x$轴上的一点出发，沿垂直线移动到图形上的一点，然后沿水平线移动到$y$轴，读出$f^{-1}(x)$的值. 图 1.54 表明$f$和$f^{-1}$图形之间的关系. 两幅图形通过对直线$y=x$的反射而互换.

从$f$到达$f^{-1}$的过程可以概述为两步：

**(1)** 从方程$y=f(x)$求解$x$. 这样得到公式$x=f^{-1}(y)$，其中$x$表示成$y$的函数.

**(2)** 交换$x$和$y$，得到公式$y=f^{-1}(x)$，其中$f^{-1}$表示成通常的函数形式，以$x$为自变量和以$y$为因变量.

**例 2** 求$y=\frac{1}{2}x+1$的反函数，把它表示成$x$的函数.

**解**

**(1)** 求解由$y$表示的$x$：

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$
$$2y = x + 2$$
$$x = 2y - 2$$

**(2)** 交换$x$和$y$：

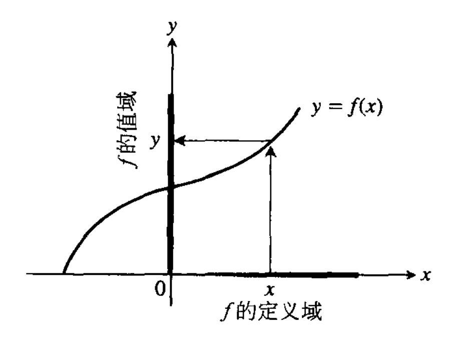
$$y = 2x - 2$$

函数$f(x)=(1/2)x+1$的反函数是函数$f^{-1}(x)=2x-2$. 为了进行检验，我们证明这两个函数的复合给出恒等函数：

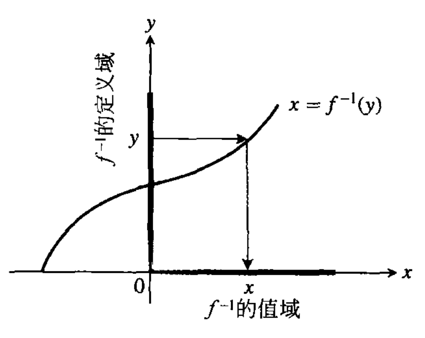
$$f^{-1}(f(x)) = 2\left(\frac{1}{2}x+1\right) - 2 = x + 2 - 2 = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{1}{2}(2x-2)+1 = x-1+1 = x$$

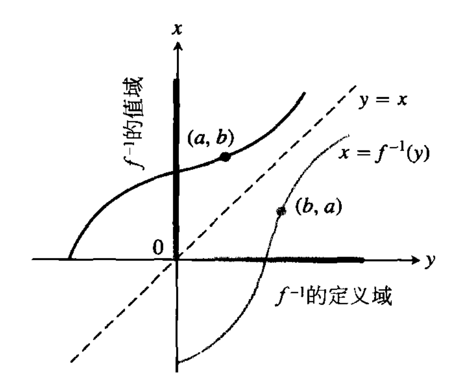
参见图 1.55. ■



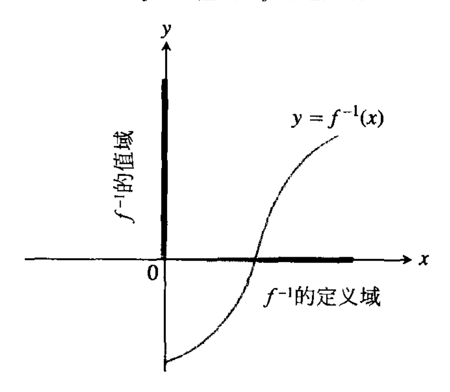

a) 为了求出$f$在$x$的值，从$x$出发沿垂直线移动到曲线，然后沿水平线移动到$y$轴




b) $f$的图形已经是$f^{-1}$的图形，但是$x$和$y$是互换的，为了求出给定$y$值的$x$值，从$y$出发沿水平线移动到曲线，然后沿垂直线移动到$x$轴，$f^{-1}$的值域是$f$的定义域




c) 为了以更常见的方法画同$f^{-1}$的图形，沿直线$y=x$反射坐标系




d) 然后交换字母$x$和$y$，至此就有了$f^{-1}$作为$x$的函数的正规形式的图形

图 1.54　由 $y=f(x)$ 的图形确定 $y=f^{-1}(x)$ 的图形

**例 3**　求函数 $y=x^2$，$x\geqslant 0$ 的反函数，并且把它表示成 $x$ 的函数.

**解**　首先求解由 $y$ 表示的 $x$：

$$y = x^2$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| = x \quad (|x| = x, \text{因为 } x \geqslant 0)$$

然后交换 $x$ 和 $y$，得到

$$y = \sqrt{x}$$

函数 $y=x^2$，$x\geqslant 0$ 的反函数是函数 $y=\sqrt{x}$（见图 1.56）.

请注意，函数 $y=x^2$，$x\geqslant 0$ 的定义域限于非负实数，它是一对一的（见图 1.53a），并且具有反函数. 另一方面，函数 $y=x^2$ 没有对定义域给出限制，它不是一对一的（见图 1.53b），因此没有反函数. ■

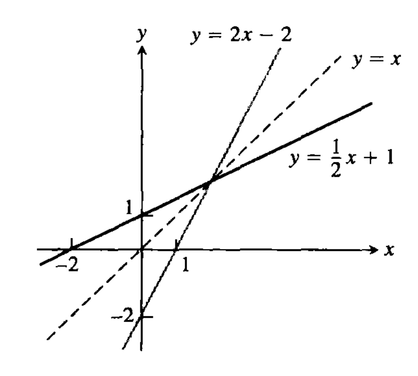



图 1.55　一起画出 $f(x)=(1/2)x+1$ 和 $f^{-1}(x)=2x-2$ 的图形，显示两幅图形对直线 $y=x$ 的对称性（例 2）

### 1.5.4 对数函数

设 $a$ 是不等于 1 的任意正实数，以 $a$ 为基的指数函数 $f(x)=a^x$ 是一对一的. 因此 $a^x$ 有反函数. 它的反函数称为以 $a$ 为底的对数函数.

> **定义** **以 $a$ 为底的对数函数** $y=\log_a x$，是以 $a$ 为基的指数函数 $y=a^x(a>0,\ a\neq 1)$ 的反函数.

$\log_a x$ 的定义域为 $(0,\ \infty)$，$\log_a x$ 的值域为 $(-\infty,\ \infty)$，即 $a^x$ 的定义域.

1.1 节中的图 1.21 显示 $a>1$ 的 4 个对数函数的图形. 图 1.57 显示 $y=\log_2 x$ 的图形. $y=a^x(a>1)$ 的图形对于 $x>0$ 快速增加，所以它的反函数 $y=\log_a x$ 对于 $x>1$ 缓慢增加.

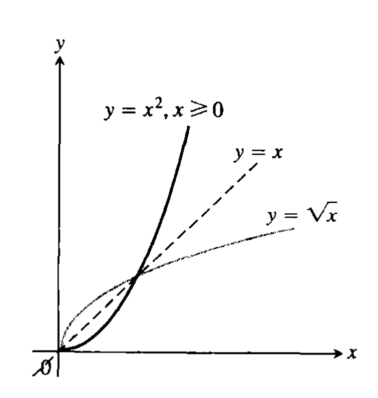



图 1.56 函数 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=x^2(x\geqslant 0)$ 互为反函数(例 3)

图 1.57 $2^x$ 及其反函数 $\log_2 x$ 的图形

由于我们尚无从方程 $y=a^x$ 通过 $y$ 求解 $x$ 的方法，所以没有对给定的 $x$ 值计算对数的显示公式. 但是，通过对直线 $y=x$ 反射指数函数 $y=a^x$ 的图形，可以得到 $y=\log_a x$ 的图形. 图 1.57 显示 $a=2$ 时的图形.

计算机科学中通常用以 2 为底的对数函数. 由于以 e 为底和以 10 为底的对数函数在各种应用中非常重要，计算器中设置有计算它们的专用键. 这两个函数也有自己特殊的记号和名称：

$$\log_e x \text{ 记为 } \ln x$$

$$\log_{10} x \text{ 记为 } \log x$$

函数 $y=\ln x$ 称为**自然对数函数**，而 $y=\log x$ 通常称为**常用对数函数**. 对于自然对数函数，

$$\ln x=y \Leftrightarrow e^y=x$$

特别是，如果设 $x=e$，我们得到

$$\ln e=1$$

这是因为 $e^1=e$.

### 1.5.5 对数函数的性质

**人物传记**[⊖]

约翰·纳皮尔
(John Napier, 1550—1617)

对数函数是由纳皮尔发明的．在现代电子计算机诞生之前，对数函数曾是算术计算中最重要的单项改进．致使对数函数如此重要的原因在于它们具有的性质：对数函数把两个正数的乘法简化成它们的对数的加法，把两个正数的除法简化成它们的对数的减法，把一个数的乘幂简化成它的对数与指数相乘．

我们把这些性质概括为一组运算法则．对这些法则的证明在第4章给出．虽然这里的法则是对所有实数幂 $r$ 提出的，但是当 $r$ 取无理数时，直到第5章才能给出严格的论述．

**自然对数函数的代数性质**

对于任何数 $b>0$ 和 $x>0$，自然对数函数服从下列法则：

(1) 积法则 $\ln bx=\ln b+\ln x$

(2) 商法则 $\ln b/x=\ln b-\ln x$

(3) 倒数法则 $\ln 1/x=-\ln x$（在法则(2)中取 $b=1$）

(4) 幂法则 $\ln x^r=r\ln x$

我们将在第5章证明对数函数的这些代数性质对于任何底数 $a$ 成立．现在说明如何应用这些法则．

**例4**

**(a)** $\ln 4+\ln\sin x=\ln(4\sin x)$（积法则）．

**(b)** $\ln\frac{x+1}{2x-3}=\ln(x+1)-\ln(2x-3)$（商法则）．

**(c)** $\ln\frac{1}{8}=-\ln 8$（倒数法则）．

$=-\ln 2^3=-3\ln 2$（幂法则）． ■

由于 $a^x$ 和 $\log_a x$ 互为反函数，按两种顺序求它们的复合函数都给出恒等函数．

**$a^x$ 和 $\log_a x$ 互为反函数的性质**

**(1)** 基 $a$ $a^{\log_a x}=x,\ \log_a a^x=x,\ a>0,\ a\neq 1,\ x>0$

**(2)** 基 e $e^{\ln x}=x,\ \ln e^x=x,\ x>0$

在等式 $x=e^{\ln x}$ 中用 $a^x$ 代换 $x$，可以把 $a^x$ 改写成 e 的幂：

$$\begin{aligned}a^x&=e^{\ln(a^x)}\text{（在 }x=e^{\ln x}\text{ 中用 }a^x\text{ 代换 }x\text{）}\\&=e^{x\ln a}\text{（对数函数的幂法则）}\\&=e^{(\ln a)x}\text{（指数重新排列）}\end{aligned}$$

因此，指数函数 $a^x$ 当 $k=\ln a$ 时与 $e^{kx}$ 相同．

每个指数函数是自然指数函数的幂函数：

$$a^x=e^{x\ln a}$$

也就是说，$a^x$ 和 $e^x$ 用 $\ln a$ 自乘的结果相同：对于 $k=\ln a$，$a^x=e^{kx}$．

---

⊖ 如果想了解微积分学中更多的历史人物以及重要原理和主题的发展，请访问 http://wps.aw.com/aw_thomas_calculus_11.

例如，

$$2^x = e^{(\ln 2)x} = e^{x\ln 2}, \quad 5^{-3x} = e^{(\ln 5)(-3x)} = e^{-3x\ln 5}$$

再次回到 $a^x$ 和 $\log_a x$ 的性质上来，我们有

$$\begin{aligned}\ln x &= \ln(a^{\log_a x}) \quad (a^x \text{ 和 } \log_a x \text{ 的反函数性质})\\ &= (\log_a x)(\ln a)\ (\text{对数函数的幂法则,取 } r = \log_a x)\end{aligned}$$

把这个等式重写成 $\log_a x = (\ln x)/(\ln a)$，表明每个对数函数是自然对数函数 $\ln x$ 的常数倍. 这使我们可以把 $\ln x$ 的代数性质扩展到 $\log_a x$. 例如，$\log_a bx = \log_a b + \log_a x$.

> **换底公式** 每个对数函数等于自然对数函数的一个常数倍：
>
> $$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (a>0,\ a\neq 1)$$

### 1.5.6 对数函数的应用

我们在 1.4 节考察过指数增长问题和指数衰减问题的例子. 这里应用对数函数的性质给出同这类问题有关的其他问题的答案.

**例 5** 萨娜在一个账户存款 1000 美元，其年复利率为 5.25%. 试问她的账户将在多少年达到 2500 美元?

**解** 从 1.4 节例 1，取 $P=1000$，$r=0.0525$，萨娜的账户在任何以年为单位的时间 $t$ 的存款为 $1000(1.0525)^t$，所以需要求解方程

$$1000(1.0525)^t = 2500$$

因此得到

$$\begin{aligned}(1.0525)^t &= 2.5 \quad (\text{用 1000 相除})\\ \ln(1.0525)^t &= \ln 2.5 \quad (\text{两端取对数})\\ t\ln 1.0525 &= \ln 2.5 \quad (\text{幂法则})\\ t &= \frac{\ln 2.5}{\ln 1.0525} \approx 17.9 \quad (\text{用计算器求出的值})\end{aligned}$$

萨娜账户连同每年利息一并储蓄的存款将在 18 年达到 2500 美元. ■

**例 6** 一种放射性元素的半衰期是其元素样品中放射性原子核的数目衰减一半所需的时间. 一个异乎寻常的事实是半衰期为常数，它不依赖于最初样品中包含的放射性原子核的数目而只同放射性物质本身相关.

为了考察其中原因，令 $y_0$ 为样品中最初包含的放射性原子核的数目. 在以后任意时间 $t$，样品中剩余的原子核数目为 $y=y_0e^{-kt}$. 我们求剩余的放射性原子核为最初数目一半的时间 $t$：

$$\begin{aligned}y_0e^{-kt} &= \frac{1}{2}y_0\\ e^{-kt} &= \frac{1}{2}\\ -kt &= \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \quad (\text{对数的倒数法则})\\ t &= \frac{\ln 2}{k} \qquad (1)\end{aligned}$$

这个 $t$ 值是元素的半衰期. 它仅依赖于 $k$ 的值；原子核的最初数目 $y_0$ 对于半衰期不起任何作用.

钋 210 的实际放射性寿命非常短，以致我们用天数而不是年数来度量它. 在放射性原子核最

初数目为 $y^0$ 的一份钋元素样品中，$t$ 天后剩余的原子核数目为

$$y = y_0 e^{-5\times10^{-3}t}$$

对于这种元素，

$$\begin{aligned}\text{半衰期} &= \frac{\ln 2}{k} \quad (\text{等式(1)})\\ &= \frac{\ln 2}{5\times10^{-3}} \quad (\text{代入钋元素衰变公式中的 } k)\\ &\approx 139 \text{ 天}\end{aligned}$$

■

### 1.5.7 反三角函数

在 1.3 节中复习过一般弧度角的 6 种基本三角函数. 这些函数不是一对一函数(它们的函数值周期性地重复). 然而，可以把它们的定义域限制在使它们成为一对一函数的区间上. 正弦函数的值从 $x = -\pi/2$ 时的 $-1$ 增加到 $x = \pi/2$ 时的 $+1$. 把正弦函数的定义域限制为区间 $[-\pi/2, \pi/2]$，它就成为一对一函数，所以它有反函数 $\sin^{-1}x$(见图 1.58). 对于所有 6 种三角函数的定义域可以作类似的限制.

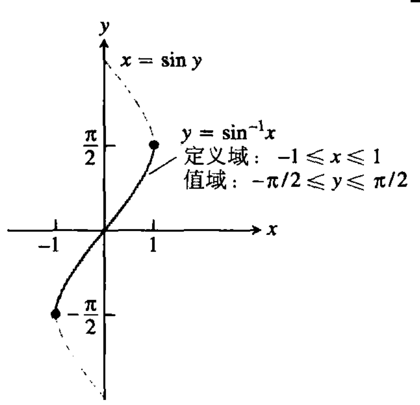
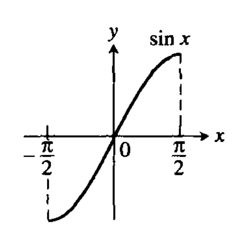
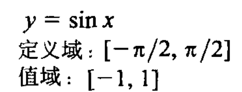


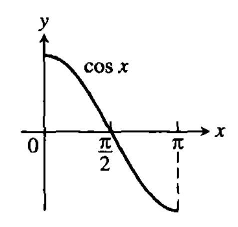

图 1.58　$y = \sin^{-1}x$ 的图形

为使三角函数成为一对一函数，对定义域的限制如下：

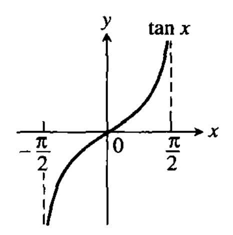


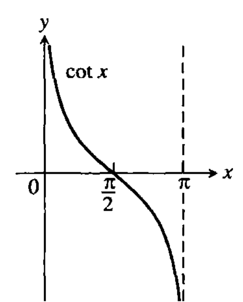
$y = \sin x$
定义域：$[-\pi/2, \pi/2]$
值域：$[-1, 1]$



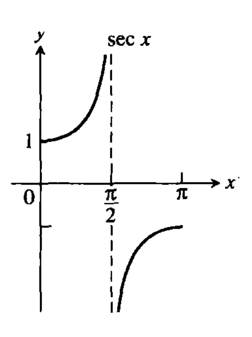

$y = \cos x$
定义域：$[0, \pi]$
值域：$[-1, 1]$



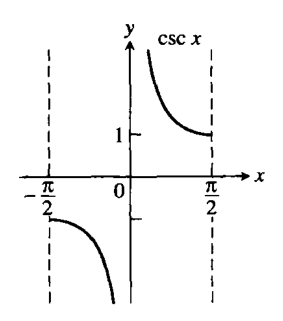

$y = \tan x$
定义域：$(-\pi/2, \pi/2)$
值域：$(-\infty, \infty)$




$y = \cot x$
定义域：$(0, \pi)$
值域：$(-\infty, \infty)$




$y = \sec x$
定义域：$[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$
值域：$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$




$y = \csc x$
定义域：$[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$
值域：$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

由于这些限制定义域的函数如今已是一对一函数，它们有反函数，分别记为

$$y=\sin^{-1}x \quad 或 \quad y=\arcsin x,$$
$$y=\cos^{-1}x \quad 或 \quad y=\arccos x,$$
$$y=\tan^{-1}x \quad 或 \quad y=\arctan x,$$
$$y=\cot^{-1}x \quad 或 \quad y=\operatorname{arccot} x,$$
$$y=\sec^{-1}x \quad 或 \quad y=\operatorname{arcsec} x,$$
$$y=\csc^{-1}x \quad 或 \quad y=\operatorname{arccsc} x.$$

这些方程读作"$y$ 等于 $x$ 的反正弦"或者"$y$ 等于 $\arcsin x$"，等等.

**注意** 上述表达式中的 $-1$ 是指"反函数"，其含义不是倒数. 例如，$\sin x$ 的倒数是 $(\sin x)^{-1}=1/\sin x=\csc x$.

在 3.8 节讨论基本的反三角函数，但是为了解释的目的，在下面考察反正弦函数和反余弦函数.

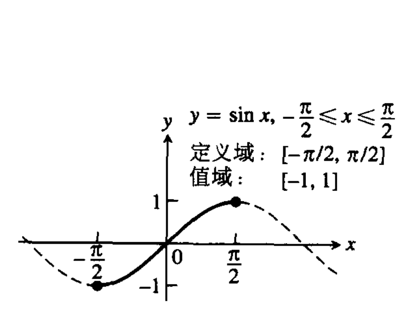
### 1.5.8 反正弦函数与反余弦函数

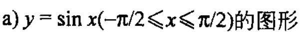
$x$ 的反正弦是区间 $[-\pi/2,\ \pi/2]$ 中的一个弧度角，它的正弦值是 $x$. $x$ 的反余弦是区间 $[0,\ \pi]$ 中的一个弧度角，它的余弦值是 $x$.

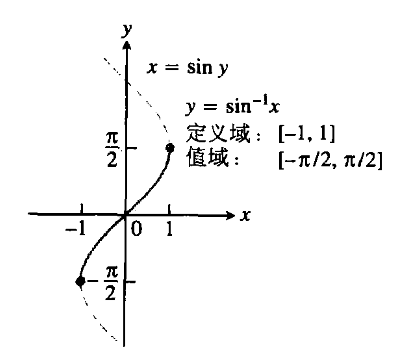
> **定义**
>
> $\boldsymbol{y=\sin^{-1}x}$ 是区间 $[-\pi/2,\ \pi/2]$ 中的数，对于它 $\sin y=x$.
>
> $\boldsymbol{y=\cos^{-1}x}$ 是区间 $[0,\ \pi]$ 中的数，对于它 $\cos y=x$.

$y=\sin^{-1}x$ 的图形(见图 1.59b)对原点对称(它同 $x=\sin y$ 的图形重合). 因此，反正弦函数是奇函数：

$$\sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}x \tag{2}$$





a) $y=\sin x(-\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2)$的图形




b) 它的反函数 $y=\sin^{-1}x$的图形，通过对直线 $y=x$ 反射$y=\sin x$得到，是曲线$x=\sin y$的一部分

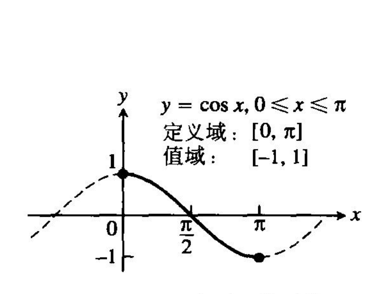
图 1.59

$y=\cos^{-1}x$ 的图形(见图 1.60b)不存在这样的对称性.

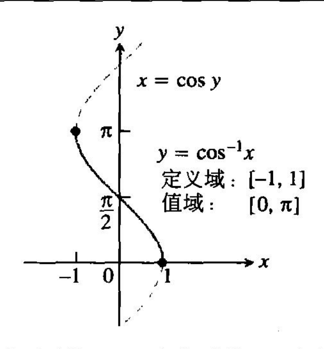
**例 7** 求 **(a)** $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$和 **(b)** $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$的值.

**解** **(a)** 我们看出

$$\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$$




a) $y=\cos x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 的图形



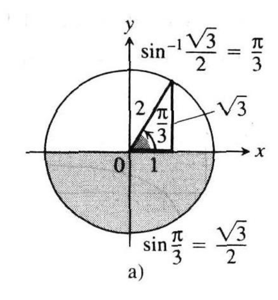

b) 它的反函数 $y=\cos^{-1}x$的图形，通过对直线$y=x$反射$y=\cos x$得到，是曲线$x=\cos y$的一部分

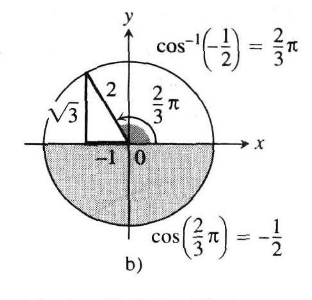
图　1.60

因为 $\sin(\pi/3)=\sqrt{3}/2$，而 $\pi/3$ 属于反正弦函数的值域$[-\pi/2,\ \pi/2]$. 参见图 1.61a.

**(b)** 同样看出
$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$$
因为 $\cos(2\pi/3)=-1/2$，而 $2\pi/3$ 属于反余弦函数的值域$[0,\ \pi]$. 参见图 1.61b. ■

采用例 7 中说明的同样步骤，可以建立下述反正弦函数和反余弦函数的常见值表.




| $x$ | $\sin^{-1}x$ | $\cos^{-1}x$ |
|---|---|---|
| $\sqrt{3}/2$ | $\pi/3$ | $\pi/6$ |
| $\sqrt{2}/2$ | $\pi/4$ | $\pi/4$ |
| $1/2$ | $\pi/6$ | $\pi/3$ |
| $-1/2$ | $-\pi/6$ | $2\pi/3$ |
| $-\sqrt{2}/2$ | $-\pi/4$ | $3\pi/4$ |
| $-\sqrt{3}/2$ | $-\pi/3$ | $5\pi/6$ |

图 1.61　反正弦函数和反余弦函数的值(例 7)

**例 8**　在一架飞机从芝加哥飞往圣路易斯的途中，驾驶员确定在斯普林菲尔德偏离航线 12 英里，如图 1.62 所示. 求航线与原来正确航线的平行线之间的夹角 $a$ 和角 $b$ 及漂移修正角 $c=a+b$.

**解**

$$a=\sin^{-1}\frac{12}{180}\approx 0.067\text{ 弧度}\approx 3.8^\circ$$

$$b=\sin^{-1}\frac{12}{62}\approx 0.195\text{ 弧度}\approx 11.2^\circ$$

$$c=a+b\approx 15^\circ$$
■

图 1.62　漂移修正图示(例 8)，距离舍入到英里(图形不按比例)

### 1.5.9　包含反正弦函数和反余弦函数的恒等式

正如从图 1.63 可以看出的那样，$x$ 的反余弦满足恒等式

$$\cos^{-1}x+\cos^{-1}(-x)=\pi \tag{3}$$

或者

$$\cos^{-1}(-x)=\pi-\cos^{-1}x \tag{4}$$

此外，从图 1.64 中的三角形可以看出，对于 $x>0$，

$$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\pi/2 \tag{5}$$

等式(5)对于区间[ -1，1]中的其他值也成立，不过我们不能从图 1.64 中的三角形得出这个结论. 然而，这是从等式(2)和(4)推出的结果(见习题 70).

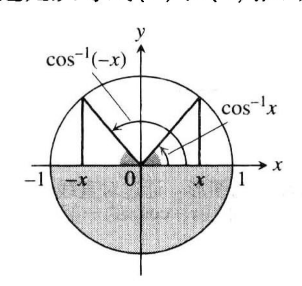



图 1.63　$\cos^{-1}x$ 和 $\cos^{-1}(-x)$ 是补角(所以它们的和等于 $\pi$)

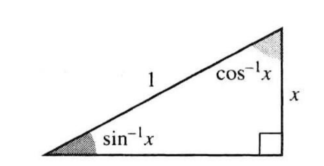



图 1.64　$\sin^{-1}x$ 和 $\cos^{-1}x$ 是余角(所以它们的和等于 $\pi/2$)

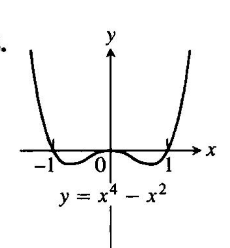
反正切、反余切、反正割和反余割这几种函数在 3.8 节定义. 在那里，利用此处讨论的恒等式推导在微积分中用到的反三角函数的其他性质.

## 习题 1.5

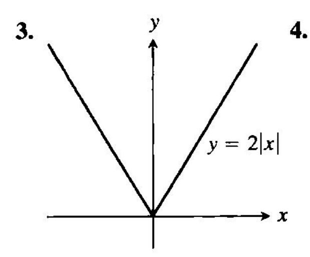
在习题 1 ~ 6 的函数图形中，哪些是一对一的，哪些不是一对一的?

**1.** $y=-3x^3$

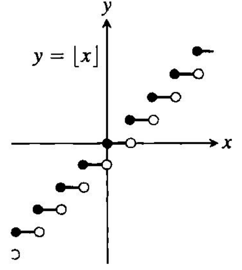
**2.**



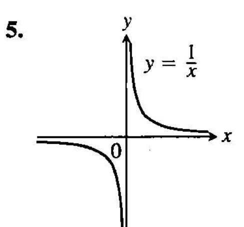

**3.**



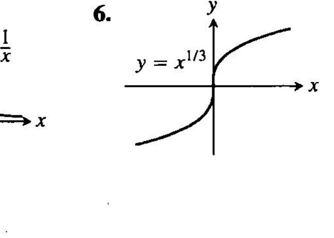

**4.**




**5.**

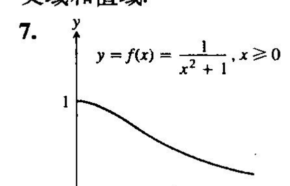



**6.**

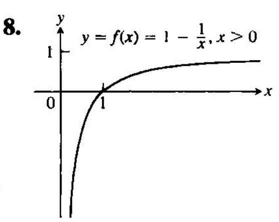



在习题 7 ~ 10 中，各题显示一个函数 $y=f(x)$ 的图形. 复制每题中的图形，并且画出直线 $y=x$. 然后利用对关于直线 $y=x$ 的对称性在图中添加 $f^{-1}$ 的草图(无需求 $f^{-1}$ 的公式). 确定 $f^{-1}$ 的定义域和值域.

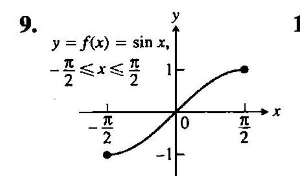
**7.**



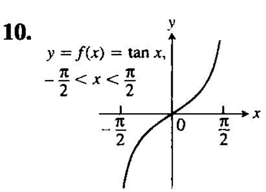

**8.**




**9.**




**10.**




**11.** (a) 画出函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 的图形. 此图形存在何种对称性?

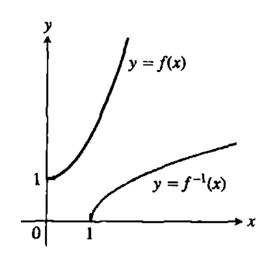
(b) 证明 $f(x)$ 是其自身的反函数. (回忆当 $x\geqslant 0$ 时 $\sqrt{x^2}=x$.)

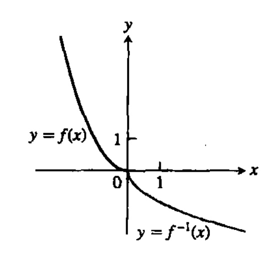
**12.** (a) 画出函数 $f(x)=1/x$ 的图形. 此图形存在什么对称性?

(b) 证明 $f(x)$ 是其自身的反函数.

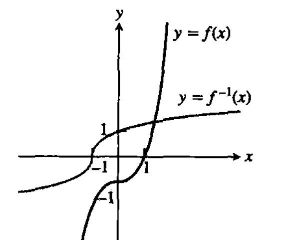
在习题 13 ~ 18 中，每题给出一个函数 $y=f(x)$ 的公式，并且显示 $f$ 和 $f^{-1}$ 的图形. 求每题中 $f^{-1}$ 的公式.

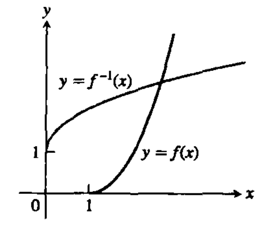
**13.** $f(x)=x^2+1$，$x\geqslant 0$.　　**14.** $f(x)=x^2$，$x\leqslant 0$.



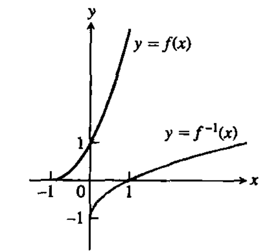



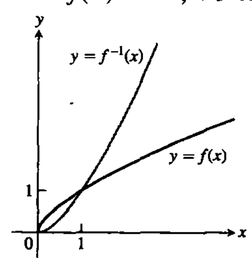

**15.** $f(x)=x^3-1$.　　**16.** $f(x)=x^2-2x+1$，$x\geqslant 1$.




**17.** $f(x)=(x+1)^2$，$x\geqslant -1$.　　**18.** $f(x)=x^{2/3}$，$x\geqslant 0$.




在习题 19～24 中，每题给出一个函数 $y=f(x)$ 的公式. 求每题中的 $f^{-1}(x)$，并且确定 $f^{-1}$ 的定义域和值域. 作为一种检验，证明 $f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x$.

**19.** $f(x)=x^5$.　　**20.** $f(x)=x^4$，$x\geqslant 0$.

**21.** $f(x)=x^3+1$.　　**22.** $f(x)=(1/2)x-7/2$.

**23.** $f(x)=1/x^2$，$x>0$.　　**24.** $f(x)=1/x^3$，$x\neq 0$.

**25.** 用 ln 2 和 ln 3 表示下列对数：

(a) $\ln 0.75$.　　(b) $\ln(4/9)$.

(c) $\ln(1/2)$.　　(d) $\ln\sqrt[3]{9}$.

(e) $\ln 3\sqrt{2}$.　　(f) $\ln\sqrt{13.5}$.

**26.** 用 ln 5 和 ln 7 表示下列对数：

(a) $\ln(1/125)$.　　(b) $\ln 9.8$.

(c) $\ln 7\sqrt{7}$.　　(d) $\ln 1225$.

(e) $\ln 0.056$.

(f) $(\ln 35+\ln(1/7))/(\ln 25)$.

在习题 27 和 28 中，用对数函数的性质简化表达式.

**27.** (a) $\ln\sin\theta-\ln\left(\frac{\sin\theta}{5}\right)$.

(b) $\ln(3x^2-9x)+\ln\left(\frac{1}{3x}\right)$.

(c) $\frac{1}{2}\ln(4t^4)-\ln 2$.

**28.** (a) $\ln\sec\theta+\ln\cos\theta$.

(b) $\ln(8x+4)-2\ln 2$.

(c) $3\ln\sqrt[3]{t^2-1}-\ln(t+1)$.

在习题 29～32 中，求表达式的更简单形式.

**29.** (a) $e^{\ln 7.2}$.　　(b) $e^{-\ln x^2}$.　　(c) $e^{\ln x-\ln y}$.

**30.** (a) $e^{\ln(x^2+y^2)}$.　　(b) $e^{-\ln 0.3}$.　　(c) $e^{\ln \pi x-\ln 2}$.

**31.** (a) $2\ln\sqrt{e}$.　　(b) $\ln(\ln e^e)$.　　(c) $\ln(e^{-x^2-y^2})$.

**32.** (a) $\ln(e^{\sec\theta})$.　　(b) $\ln(e^{(e^x)})$.　　(c) $\ln(e^{2\ln x})$.

在习题 33～38 中，以相应的形式通过 $t$ 或者 $x$ 求解 $y$.

**33.** $\ln y=2t+4$.　　**34.** $\ln y=-t+5$.

**35.** $\ln(y-40)=5t$.　　**36.** $\ln(1-2y)=t$.

**37.** $\ln(y-1)-\ln 2=x+\ln x$.

**38.** $\ln(y^2-1)-\ln(y+1)=\ln(\sin x)$.

在习题 39 和 40 中，求解 $k$.

**39.** (a) $e^{2k}=4$.　　(b) $100e^{10k}=200$.

(c) $e^{k/1000}=a$.

**40.** (a) $e^{5k}=\frac{1}{4}$.　　(b) $80e^k=1$.

(c) $e^{(\ln 0.8)k}=0.8$.

习题 41～44 中，求解 $t$.

**41.** (a) $e^{-0.3t}=27$.　　(b) $e^{kt}=\frac{1}{2}$.　　(c) $e^{(\ln 0.2)t}=0.4$.

**42.** (a) $e^{-0.01t}=1000$.　　(b) $e^{kt}=\frac{1}{10}$.

(c) $e^{(\ln 2)t}=\frac{1}{2}$.

**43.** $e^{\sqrt{t}}=x^2$.　　**44.** $e^{(x^2)}e^{(2x+1)}=e^t$.

在习题 45～48 中，简化表达式.

**45.** (a) $5^{\log_5 7}$.　　(b) $8^{\log_8\sqrt{2}}$.　　(c) $1.3^{\log_{1.3}75}$.

(d) $\log_4 16$.　　(e) $\log_3\sqrt{3}$.　　(f) $\log_4\left(\frac{1}{4}\right)$.

**46.** (a) $2^{\log_2 3}$.　　(b) $10^{\log_{10}(1/2)}$.　　(c) $\pi^{\log_\pi 7}$.

(d) $\log_{11}121$.　　(e) $\log_{121}11$.　　(f) $\log_3\left(\frac{1}{9}\right)$.

**47.** (a) $2^{\log_4 x}$.　　(b) $9^{\log_3 x}$.　　(c) $\log_2(e^{(\ln 2)(\sin x)})$.

**48.** (a) $25^{\log_5(3x^2)}$.　　(b) $\log_e(e^x)$.　　(c) $\log_4(2e^{x\sin x})$.

在习题 49 和 50 中，把各个比表示成自然对数的比，并且化简.

**49.** (a) $\frac{\log_2 x}{\log_3 x}$.　　(b) $\frac{\log_2 x}{\log_8 x}$.　　(c) $\frac{\log_x a}{\log_{x^2} a}$.

**50.** (a) $\frac{\log_9 x}{\log_3 x}$.　　(b) $\frac{\log_{\sqrt{10}} x}{\log_{\sqrt{2}} x}$.　　(c) $\frac{\log_a b}{\log_b a}$.

在习题51～54中，求每个表达式的精确值.

**51.** (a) $\sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$. (b) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(c) $\sin^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$.

**52.** (a) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$. (b) $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

(c) $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

**53.** (a) $\arccos(-1)$. (b) $\arccos(0)$.

**54.** (a) $\arcsin(-1)$. (b) $\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

**55.** 如果$f(x)$是一对一函数，能够对$g(x)=-f(x)$作出什么结论？它也是一对一函数吗？提出答案的理由.

**56.** 如果$f(x)$是一对一函数并且$f(x)\neq0$，能够对$h(x)=1/f(x)$作出什么结论？它也是一对一函数吗？提出答案的理由.

**57.** 假定$g$的值域位于$f$的定义域内，所以复合函数$f\circ g$是有定义的. 如果$f$和$g$都是一对一函数，能够对$f\circ g$作出什么结论？提出答案的理由.

**58.** 如果复合函数$f\circ g$是一对一函数，$g$必定是一对一函数吗？提出答案的理由.

**59.** 求下列函数$f$的反函数$f^{-1}$的公式，并且证实

$$(f\circ f^{-1})(x)=(f^{-1}\circ f)(x)=x$$

(a) $f(x)=\frac{100}{1+2^{-x}}$.

(b) $f(x)=\frac{50}{1+1.1^{-x}}$.

**60. 反函数** 令$y=f(x)=mx+b$，$m\neq0$.

(a) 提出令人信服的论据，表明$f$是一对一函数.

(b) 求$f$的反函数公式. $f$和$f^{-1}$的图形的斜率有什么关系？

(c) 如果两个函数的图形是斜率不等于0的平行线，能够对它们的反函数的图形作出什么结论？

(d) 如果两个函数的图形是斜率不等于0的垂直线，能够对它们的反函数的图形作出什么结论？

**61. 放射性衰变** 某种放射性物质的半衰期为12小时. 假定这种物质最初有8克.

(a) 把物质的剩余量表示为时间$t$的函数.

(b) 什么时候物质将剩余1克？

**62. 存款翻番** 假定按年复利率4.75%储蓄500美元，确定使存款翻番需要多长时间.

**63. 人口增长** 格伦布鲁克市有37.5万人口，并且年增长率为2.25%. 预测该市人口达到100万的时间.

**64. 氡 222** 已知氡222气体的衰变方程为$y=y_0e^{-0.18t}$，$t$以天为单位. 在一份密封的气体样品中，氡的含量大约将需要多长时间下降到它原有值的90%？

**T 65.** 方程$x^2=2^x$有三个解：$x=2$，$x=4$和另外一个解. 通过画图估计这第三个解，达到你所能取得的精确度.

**T 66.** 对于$x>0$，$x^{\ln 2}$同$2^{\ln x}$可能是相同的函数吗？画出两个函数的图形，并且解释从图形中看出的结果.

**67.** 从$y=\ln x$的图形出发，求从下列途径获得的图形的方程：

(a) 下移3个单位.

(b) 右移1个单位.

(c) 左移1个单位，上移3个单位.

(d) 下移4个单位，右移2个单位.

(e) 对$y$轴反射.

(f) 对于直线$y=x$反射.

**68.** 从$y=\ln x$的图形出发，求从下列途径获得的图形的方程：

(a) 按系数2垂直拉长.

(b) 按系数3水平拉长.

(c) 按系数4垂直压缩.

(d) 按系数2水平压缩.

**69.** 证明$\cos(\sin^{-1}x)=\sqrt{1-x^2}$.

**70. 恒等式 $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\pi/2$** 图1.64证实这个恒等式对于$0<x<1$成立. 为了证实它在区间$[-1,1]$的其余部分成立，凭直接计算证明恒等式对于$x=1$，0和$-1$成立. 然后，对于区间$(-1,0)$内的值，令$x=-a$，$a>0$，并且对和式$\sin^{-1}(-a)+\cos^{-1}(-a)$利用恒等式(2)和(4).

## 1.6 用计算器和计算机作图

带绘图软件的计算器或者计算机使我们能够绘制非常复杂的具有高精度的函数图形. 不然，许多这样的函数是不容易作图的. 但是，当用这样的设备绘图时务必小心，我们在这一节讨论其

中牵涉到的某些问题. 在第 4 章将会看到，微积分如何帮助我们确定对函数图形所有重要特征的精确展示.

**绘图窗口**

当用绘图计算器或者计算机作为绘图工具时，图形的一部分显示在一个矩形**显示窗口**或者**视窗**中. 在默认窗口显示的图形经常是不完全的或者带使人产生错觉的画面. 我们把两个坐标轴采用相同单位或标度的窗口称为*正方形窗口*. 这个词并不意味着显示窗口本身呈正方形(通常是矩形)，而是指 $x$ 轴和 $y$ 轴具有相同的单位.

当在默认窗口显示图形时，为了使窗口中能够容纳下图形，对 $x$ 轴和 $y$ 轴可能使用不同的标度单位. 通过指定 $x$ 值的区间 $[a, b]$ 和 $y$ 值的区间 $[c, d]$ 设置视窗. 计算机选择 $[a, b]$ 上等间距的 $x$ 值，然后描绘点 $(x, f(x))$. 当且仅当 $x$ 位于函数的定义域内并且 $f(x)$ 落入区间 $[c, d]$ 内时才在图上画出一点. 然后，在每个描绘点同它下一个相邻点之间画一条短线段. 下面用例子说明这个绘图过程中可能出现的某些常见问题.

**例 1**　在下面的每个显示窗口或者视窗中绘制函数 $f(x) = x^3 - 7x^2 + 28$ 的图形：

**(a)** $[-10, 10] \times [-10, 10]$.　**(b)** $[-4, 4] \times [-50, 10]$.　**(c)** $[-4, 10] \times [-60, 60]$.

**解**

**(a)** 选择 $a = -10$，$b = 10$，$c = -10$ 和 $d = 10$，对窗口指定 $x$ 值的区间和 $y$ 值的值域. 绘制的图显示在图 1.65a中. 从图中看出，窗口截取的是图形的底部，而且 $x$ 值的区间过于大. 让我们试取下一个窗口.

**(b)** 现在见到图形的更多特征(见图 1.65b)，但是图形的顶部没有显示出来，同时，还需要观察图形在 $x = 4$ 右边的部分. 下一个窗口对我们应有所帮助.

**(c)** 图 1.65c 显示这个新视窗中的图形. 注意我们从这个窗口中获得更为完全的图像，它是一幅正常的三次多项式的图形. ■

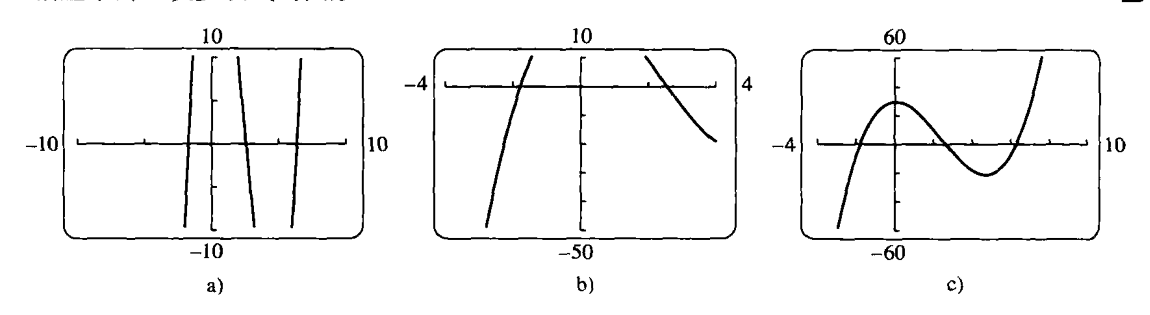



图 1.65　$f(x) = x^3 - 7x^2 + 28$ 在不同视窗中的图形；选择获得清晰图形画面的窗口通常是一个反复试验的过程(例 1)

**例 2**　在显示图形时，$x$ 轴同 $y$ 轴选用的单位可以不同，像在图 1.65b 和图 1.65c 中那样. 结果是使图形变形，以致产生可能使人误解的图像. 通过压缩或拉长一个坐标轴上的单位，使其同另一个坐标轴的标度匹配，可以形成给出真实图形的正方形显示窗口. 许多绘图系统提供把窗口转换成“正方形”的内部函数. 如果读者使用的系统不具备这种功能，那么必须进行某些计算并且以手工方式设置窗口尺寸，使其成为正方形窗口，或者在视窗中给出真实图像的某些预知事实.

图 1.66a 在一个 $[-6, 6] \times [-6, 8]$ 的非正方形窗口上显示两条正交直线 $y = x$ 和 $y = -x + 3\sqrt{2}$ 以及半圆 $y = \sqrt{9 - x^2}$ 的图形. 请注意图形的畸变，两条直线不是垂直的，而且半圆呈现为椭圆形状.

图1.66b 在一个正方形窗口显示同样几个函数，其中 $x$ 轴标度的单位与 $y$ 轴的单位相同. 注意，$[-6, 6]\times[-4, 4]$视窗具有图1.66a 中同样的 $x$ 轴，但是在图1.66b 中 $x$ 轴的标度已经压缩，使窗口成为正方形. 图1.66c 给出一个扩大成正方形$[-3, 3]\times[0, 4]$的窗口. ■

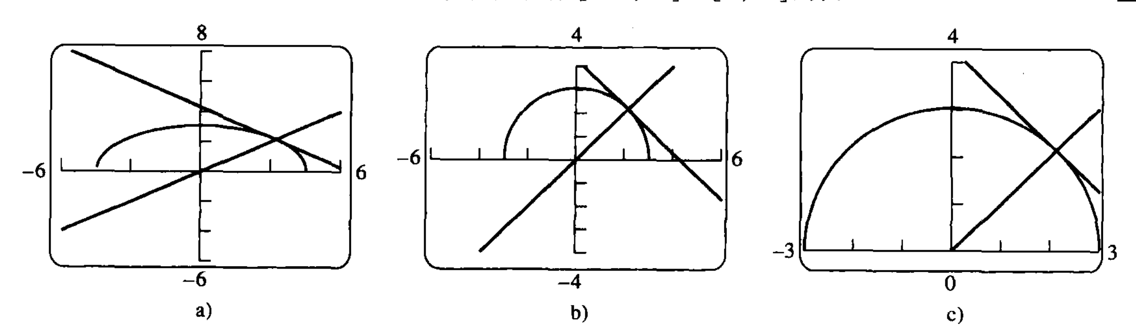



图1.66 垂直线 $y=x$ 和 $y=-x+3\sqrt{2}$ 以及半圆 $y=\sqrt{9-x^2}$ 的图形：在 a) 的非正方形窗口中显现畸变的图形，但是在 b) 和 c) 的正方形窗口中显示清晰的图形(例2)

如果一个有理函数的分母在视窗内的某个 $x$ 值为零值，那么计算器软件或者绘图计算机的软件可能在窗口中产生从顶到底近乎垂直的陡峭线段. 请看下面的例子.

**例3** 绘制函数 $y=\frac{1}{2-x}$ 的图形.

**解** 图1.67a 在我们所用的计算机绘图软件的默认正方形窗口$[-10, 10]\times[-10, 10]$中显示图形. 注意在 $x=2$ 的接近垂直的线段. 其实这不是图形的一部分，$x=2$ 并不属于函数的定义域. 通过反复试验把视窗改变成更小的窗口$[-6, 6]\times[-4, 4]$，就可以消除这个线段，展现出一幅更好的图形(见图1.67b). ■

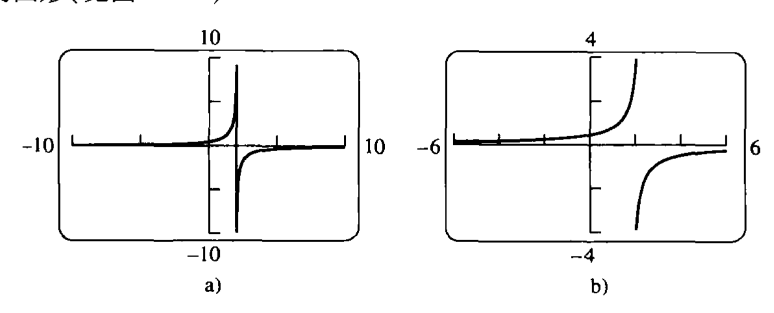



图1.67 函数 $y=\frac{1}{2-x}$ 的图形：当视窗选择不适当时可能出现垂直线段(例3)

有时三角函数的图形出现急剧振荡. 当计算器软件或者计算机软件描绘图形的点并且把它们连接起来时，实际上可能丢失许多取最大值或者最小值的点. 这样产生的图形会严重失真.

**例4** 绘制函数 $f(x)=\sin 100x$ 的图形.

**解** 图1.68a 显示 $f$ 在视窗$[-12, 12]\times[-1, 1]$中的图形. 我们看出，图形显得非常奇特，因为正弦曲线在 $-1$ 和 $1$ 之间应该周期性地振荡. 这样的特性在图1.68a 中没有展现出来. 我们可以取更小的视窗作试验，例如取$[-6, 6]\times[-1, 1]$，但是图形没有获得改进(见图1.68b). 问题在于三角函数 $y=\sin 100x$ 的周期 $2\pi/100\approx0.063$ 非常小. 如果选择很小的视窗$[-0.1, 0.1]\times[-1, 1]$，得到图1.68c 所示的图形. 这个图形展现出正弦曲线预料中的振荡特性. ■

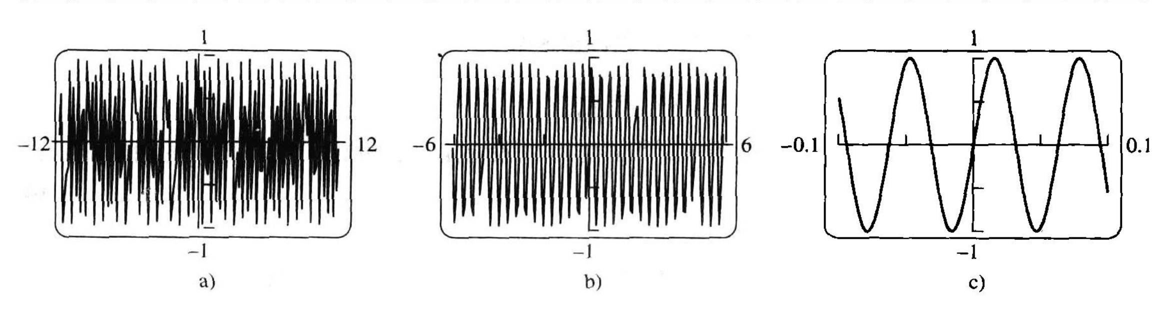



图 1.68　函数 $y=\sin 100x$ 在三个视窗中的图形：由于周期 $2\pi/100\approx0.063$，c)中较小的窗口最好地显示这个剧烈振荡的函数的真实形状(例 4)

**例 5**　绘制函数 $y=\cos x+\frac{1}{50}\sin 50x$ 的图形.

**解**　在视窗[-6，6]×[-1，1]中图形很像余弦函数，图上带有某些细小的明显波动(见图 1.69a)．当我们把窗口明显减至[-0.6，0.6]×[0.8，1.02]时，得到图 1.69b 的图形. 从图中看出第二项$\frac{1}{50}\sin 50x$ 的小幅快速振荡，叠加在正弦曲线相对大的值上.　■

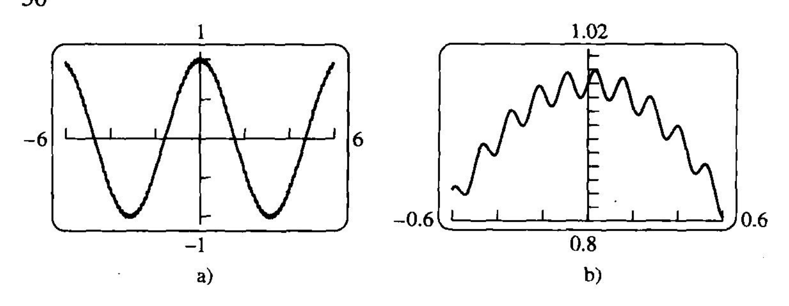



图 1.69　从 b)看出函数 $y=\cos x+\frac{1}{50}\sin 50x$ 在 a)中画出图形的一段精细图像；$\cos x$ 项比$\frac{1}{50}\sin 50x$ 项占明显优势，后一项产生沿余弦曲线的快速振荡；两个视图对于获得图形的清晰概念是必需的

**例 6**　绘制函数 $y=x^{1/3}$的图形.

**解**　某些绘图设备显示如图 1.70a 的图形. 把它同图 1.15 中 $y=x^{1/3}=\sqrt[3]{x}$的图形比较，看出对于 $x<0$ 的左支丢失. 两幅图形差异的原因在于，许多计算器和计算机的软件程序把 $x^{1/3}$作为 $e^{(1/3)\ln x}$计算. 由于对数函数对 $x$ 的负值没有定义，所以计算设备只能产生图形中 $x>0$ 的右支.

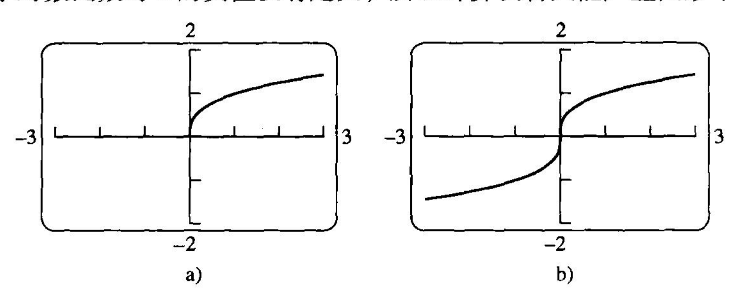



图 1.70　在 a)中 $y=x^{1/3}$图形的左支丢失；在 b)中画函数$f(x)=\frac{x}{|x|}\cdot|x|^{1/3}$的图形获得左右两支（例 6）

为了获得显示两支图形的完整图像，可以画出函数

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \cdot |x|^{1/3}$$

的图形. 除开在 $x=0$ 外，这个函数等于 $x^{1/3}$（$f$ 在 $x=0$ 没有定义，虽然 $0^{1/3}=0$）. $f$ 的图形显示在图 1.70b中. ■

## 习题 1.6

**T** 在习题 1 ~4 中，使用绘图计算器或者计算机，从给定的视窗中确定哪个视窗最适合显示指定函数的图形.

**1.** $f(x)=x^4-7x^2+6x$.

(a) $[-1, 1]\times[-1, 1]$.

(b) $[-2, 2]\times[-5, 5]$.

(c) $[-10, 10]\times[-10, 10]$.

(d) $[-5, 5]\times[-25, 15]$.

**2.** $f(x)=x^3-4x^2-4x+16$.

(a) $[-1, 1]\times[-5, 5]$.

(b) $[-3, 3]\times[-10, 10]$.

(c) $[-5, 5]\times[-10, 20]$.

(d) $[-20, 20]\times[-100, 100]$.

**3.** $f(x)=5+12x-x^3$.

(a) $[-1, 1]\times[-1, 1]$.

(b) $[-5, 5]\times[-10, 10]$.

(c) $[-4, 4]\times[-20, 20]$.

(d) $[-4, 5]\times[-15, 25]$.

**4.** $f(x)=\sqrt{5+4x-x^2}$.

(a) $[-2, 2]\times[-2, 2]$.

(b) $[-2, 6]\times[-1, 4]$.

(c) $[-3, 7]\times[0, 10]$.

(d) $[-10, 10]\times[-10, 10]$.

**T** 在习题 5 ~30 中，对于给定的函数确定适合的窗口，并且用它显示函数的图形.

**5.** $f(x)=x^4-4x^3+15$.  **6.** $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+1$.

**7.** $f(x)=x^5-5x^4+10$.  **8.** $f(x)=4x^3-x^4$.

**9.** $f(x)=x\sqrt{9-x^2}$.  **10.** $f(x)=x^2(6-x^3)$.

**11.** $y=2x-3x^{2/3}$.  **12.** $y=x^{1/3}(x^2-8)$.

**13.** $y=5x^{2/5}-2x$.  **14.** $y=x^{2/3}(5-x)$.

**15.** $y=|x^2-1|$.  **16.** $y=|x^2-x|$.

**17.** $y=\frac{x+3}{x+2}$.  **18.** $y=1-\frac{1}{x+3}$.

**19.** $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}$.  **20.** $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

**21.** $f(x)=\frac{x-1}{x^2-x-6}$.  **22.** $f(x)=\frac{8}{x^2-9}$.

**23.** $f(x)=\frac{6x^2-15x+6}{4x^2-10x}$.  **24.** $f(x)=\frac{x^2-3}{x-2}$.

**25.** $y=\sin 250x$.  **26.** $y=3\cos 60x$.

**27.** $y=\cos\left(\frac{x}{50}\right)$.  **28.** $y=\frac{1}{10}\sin\left(\frac{x}{10}\right)$.

**29.** $y=x+\frac{1}{10}\sin 30x$.  **30.** $y=x^2+\frac{1}{50}\cos 100x$.

**31.** 画出由方程 $x^2+2x=4+4y-y^2$ 定义的圆的下半部分图形.

**32.** 画出双曲线 $y^2-16x^2=1$ 的上半支图形.

**33.** 画出函数 $f(x)=-\tan 2x$ 四个周期的图形.

**34.** 画出函数 $f(x)=3\cot\frac{x}{2}+1$ 的图形.

**35.** 画出函数 $f(x)=\sin 2x+\cos 3x$ 的图形.

**36.** 画出函数 $f(x)=\sin^3 x$ 的图形.

**T** 在用绘图设备时避免不正确连接的另外一种途径是通过使用“点模式”，这种方式仅描绘函数的点. 如果你的绘图工具允许点模式，在习题 37 ~40 中用这种模式描绘函数的图形.

**37.** $y=\frac{1}{x-3}$.  **38.** $y=\sin\frac{1}{x}$.

**39.** $y=x\lfloor x\rfloor$.  **40.** $y=\frac{x^3-1}{x^2-1}$.

**T** 在习题 41 ~50 中，用一种绘图计算器或者计算机绘制指定函数的图形.

**41.** $y=e^x+e^{-x}$.  **42.** $y=e^x-e^{-x}$.

**43.** $y=e^{-x}\sin x$.  **44.** $y=e^{-2x}\cos\frac{x}{2}$.

**45.** $y=e^{x^3-x}$.  **46.** $y=e^{\sin x}$.

**47.** $y=\frac{e^x}{x^2}$.  **48.** $y=xe^{-x}$.

**49.** $y=x\ln x$.  **50.** $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

# 第2章　极限与连续性

**概述**　极限的概念是计算运动物体速度和求曲线切线的基础. 这一章我们先用直观的方法讨论极限，然后给出极限的形式定义. 极限被用来描述函数变化的方式. 有些函数连续地变化，自变量 $x$ 的细小改变仅引起函数 $f(x)$ 的细小变化. 另外一些函数可能出现函数值的跳变、不规则地改变或者趋于无限地增加或减少. 极限的概念给出区分这些性质的精确方法.

## 2.1　曲线的变化率和切线

这一节我们考察曲线的平均变化率和瞬时变化率，这是同曲线上一点 $P$ 的斜率密切相关的概念. 从这些概念自然地引入本章的极限这个主要概念. 在本章末我们再回到曲线瞬时变化率和斜率的主题，以及了解如何通过极限计算它们.

### 2.1.1　平均速率与瞬时速率

人物传记

伽利略·伽利莱
(Galileo Galilei, 1564—1642)

在16世纪晚期，伽利略发现，当物体在接近地面的高度从静止(非运动)状态自由下落时，经过的距离同下落时间的平方成正比. 物体的这种运动称为**自由落体**. 在自由落体运动中，假定忽略空气阻力对减慢物体下落的影响，而重力是作用于下落物体的唯一外力. 如果用 $y$ 表示物体下落 $t$ 秒后经过的以英尺为单位的距离，那么伽利略定律表示为

$$y = 16t^2$$

其中16是比例常数(如果 $y$ 以米为测量单位，这个常数为4.9).

运动物体在时间区间上的**平均速率**由经历的时间除下落的距离求得. 测量单位是长度每单位时间：公里/小时、英尺(米)/秒或者适用于具体问题的测量单位.

**例1**　一块岩石从绝壁顶端坠落，求它的平均速率.

**(a)** 前2秒内的平均速率是多少？

**(b)** 第1秒和第2秒之间的平均速率是多少？

**解**　在给定时间区间内岩石坠落的平均速率等于距离改变量 $\Delta y$ 除以时间区间长度 $\Delta t$. 如果距离测量单位为英尺(ft)，时间测量单位为秒(s)，那么计算公式如下：

**(a)** 前2秒内的平均速率：

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(2)^2 - 16(0)^2}{2 - 0} = 32 \text{ ft/s}$$

**(b)** 第1秒和第2秒之间的平均速率：

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(2)^2 - 16(1)^2}{2 - 1} = 48 \text{ ft/s}$$ ■

下面的例子考察当下落物体的时间区间越来越短时，平均速率会出现什么变化.

**例2**　求坠落岩石在 $t = 1$ 秒和 $t = 2$ 秒的速率.

**解**　计算岩石在长度 $\Delta t = h$ 的时间区间 $[t_0, t_0 + h]$ 上的平均速率，可以用

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(t_0 + h)^2 - 16t_0^2}{h} \tag{1}$$

我们不能用这个公式代入 $h = 0$ 计算在 $t_0$ 时的"瞬时"速率，因为不能用零做除数. 但是，可以用它计算从 $t_0 = 1$ 和 $t_0 = 2$ 开始的越来越短的时间区间上的平均速率. 当进行这样的计算时，得到

表2.1的结果样式.

从 $t_0=1$ 开始的时间区间上的平均速率当区间长度减小时，看起来趋近极限值32. 这个结果暗示岩石在 $t_0=1$ 秒时的下落速率为32 ft/s. 下面用代数方法来证实这一点.

表 2.1 短时间间隔上的平均速率

| 平均速率: $\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{16(t_0+h)^2-16t_0^2}{h}$ | | |
|---|---|---|
| 时间区间的长度 $h$ | 从 $t_0=1$ 开始的长度为 $h$ 的时间区间上的平均速率 | 从 $t_0=2$ 开始的长度为 $h$ 的时间区间上的平均速率 |
| 1 | 48 | 80 |
| 0.1 | 33.6 | 65.6 |
| 0.01 | 32.16 | 64.16 |
| 0.001 | 32.016 | 64.016 |
| 0.0001 | 32.0016 | 64.0016 |

如果设 $t_0=1$，然后展开等式(1)右端的分子并化简，得到

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{16(1+h)^2-16(1)^2}{h}$$

$$=\frac{16(1+2h+h^2)-16}{h}$$

$$=\frac{32h+16h^2}{h}=32+16h$$

对于 $h$ 不为0的值，表达式的右端和左端相等，所以平均速率是 $32+16h$ ft/s. 现在可以看出，平均速率当 $h$ 趋近0时为什么具有极限值 $32+16(0)=32$ ft/s.

同样，在等式(1)中设 $t_0=2$，对于 $h$ 不为0的值，上述步骤产生

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=64+16h$$

当 $h$ 越来越接近0时，在 $t_0=2$ 秒的平均速率具有极限值64 ft/s. ■

### 2.1.2 平均变化率与割线

给定任意函数 $y=f(x)$，我们计算 $y$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上相对于 $x$ 的平均变化率，它等于区间上 $y$ 值的改变 $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$ 除以区间长度 $\Delta x=x_2-x_1=h$.

> **定义** $y=f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上相对于 $x$ 的**平均变化率**为
>
> $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h},\quad h\neq 0$$

从几何上看，$f$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上的变化率是通过点 $P(x_1, f(x_1))$ 和 $Q(x_2, f(x_2))$ 的直线的斜率(见图2.1). 在几何学中，连接一条曲线上的两点的直线是曲线的**割线**. 因此，$f$ 从 $x_1$ 到 $x_2$ 的平均变化率同割线 $PQ$ 的斜率相等. 让我们考察一下，当点 $Q$ 沿曲线趋近点 $P$ 时，即当函数发生变化的区间长度趋近零时，会出现什么情况.

### 2.1.3 曲线的斜率

我们知道一条直线斜率的含义，那就是直线上升或下降的速率，即作为线性函数图形的变化率. 但是，对曲线上的一点 $P$，**曲线的斜率**是指什么？如果曲线在 $P$ 存在一条切线，即一条仅与曲线切触的直线，像圆的切线，那么有理由把切线的斜率当作曲线在点 $P$ 的斜率. 所以，我们需要给出曲线上一点的切线的确切含义.

对圆而言，切触是容易理解的. 直线 $L$ 是圆上点 $P$ 的切线，是指 $L$ 通过 $P$ 并与点 $P$ 处的半径垂直(见图2.2). 这样一条直线恰好同圆切触. 但是，如果说直线 $L$ 是其他曲线 $C$ 上点 $P$ 的切线，那么切触的含义是什么？

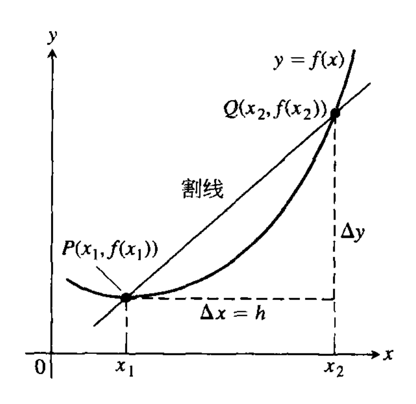



图 2.1 $y=f(x)$ 图形的割线，它的斜率为 $\Delta y/\Delta x$，即区间$[x_1, x_2]$上的平均变化率

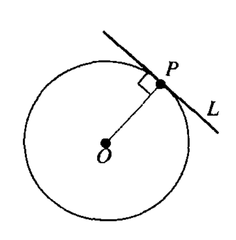



图 2.2 $L$ 是圆在点 $P$ 的切线，如果 $L$ 通过 $P$ 并同半径 $OP$ 垂直

为了定义一般曲线的切触，需要提供一种把割线的特性考虑进去的方法，即考虑经过 $P$ 和邻近点 $Q$ 的割线当 $Q$ 沿曲线向 $P$ 移动时的特性(见图 2.3). 这种方法包含如下步骤：

(1)从能够进行的计算开始，即从计算割线 $PQ$ 的斜率开始.

(2)研究割线 $PQ$ 的斜率当 $Q$ 沿曲线趋近 $P$ 时所取的极限值.

(3)如果极限存在，就把它作为曲线在 $P$ 的斜率，并把通过 $P$ 且具有这个斜率的直线定义为曲线在 $P$ 的切线.

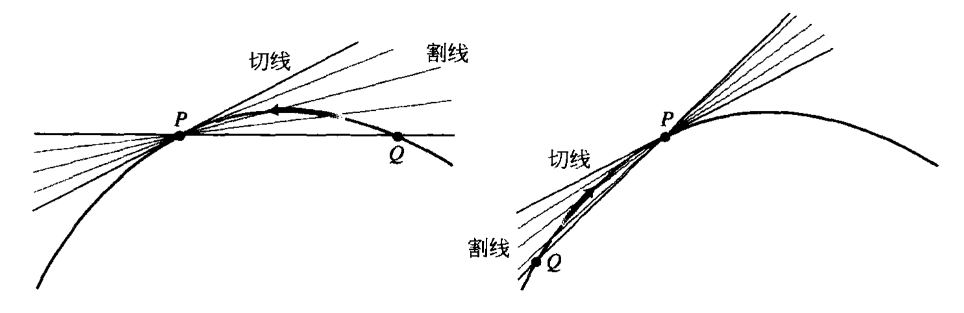



图 2.3 曲线在 $P$ 的切线是通过 $P$ 的直线，它的斜率是割线 $PQ$ 的斜率当 $Q$ 沿曲线任何一侧趋近 $P$ 时的极限

**人物传记**

皮埃尔·德·费马
(Pierre de Fermat, 1601—1665)

这就是我们在上面讨论岩石坠落问题时所采用的步骤. 下面的例子说明切线的几何意义.

**例 3** 求抛物线 $y=x^2$ 在点 $P(2, 4)$ 的斜率. 写出抛物线在这个点的切线方程.

**解** 我们画一条通过点 $P(2, 4)$ 和邻近点 $Q(2+h, (2+h)^2)$ 的割线，然后写出割线 $PQ$ 的斜率表达式，并研究当 $Q$ 沿抛物线趋近 $P$ 时发生的情况：

$$\text{割线斜率} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \frac{h^2+4h+4-4}{h} = \frac{h^2+4h}{h} = h+4$$

若 $h>0$，则 $Q$ 在 $P$ 的右上方，如图 2.4 所示. 若 $h<0$，则 $Q$ 在 $P$ 的右下方(未显示在图中). 在任何一种情况下，当 $Q$ 趋近 $P$ 时 $h$ 趋近零而割线的斜率趋近 4：

当 $h$ 趋近 0 时，和式$(h+4)$趋近极限值 4

我们把 4 作为抛物线在点 $P$ 的斜率.

抛物线在点 $P$ 的切线是通过 $P$ 且斜率为 4 的直线：

$$y = 4 + 4(x - 2) \quad (点斜式方程)$$
$$y = 4x - 4$$

■

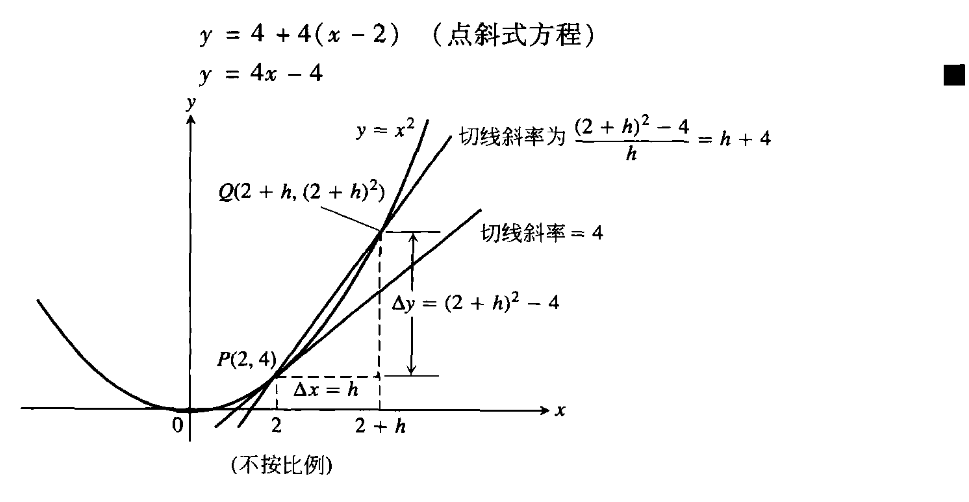



图 2.4 求抛物线 $y=x^2$ 在点 $P(2, 4)$ 的斜率，即割线斜率的极限(例 3)

### 2.1.4 瞬时变化率

例 2 中坠落的岩石在时刻 $t=1$ 和 $t=2$ 的变化率称为**瞬时变化率**. 瞬时变化率同切线的斜率有密切联系，这一点在下面的例子中将会见到.

**例 4** 图 2.5 显示果蝇种群在 50 天内的繁殖试验. 果蝇数量按固定时间区间计数，画出与时间相关的计数值的点，并用光滑曲线连接(图 2.5 中的曲线). 求从第 23 天到第 45 天果蝇的繁殖率.

**解** 在第 23 天有 150 只果蝇，在第 45 天有 340 只果蝇. 因此，在 45 - 23 = 22 天内，果蝇数量增加了 340 - 150 = 190 只. 果蝇种群从第 23 天到第 45 天的平均变化率为

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{340-150}{45-23} = \frac{190}{22} \approx 8.6 \text{ 只果蝇 / 天}$$

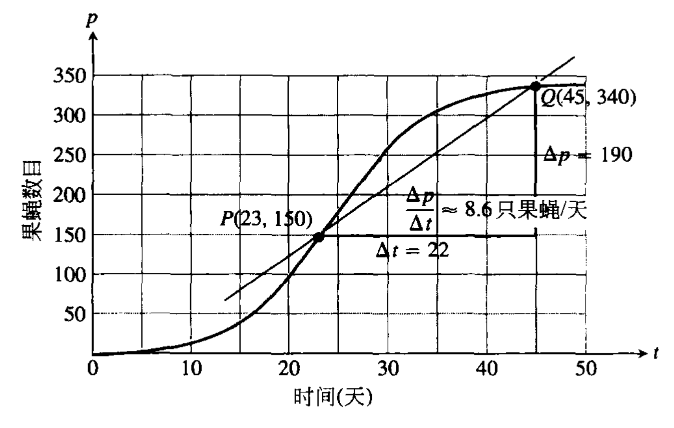



图 2.5 果蝇种群在受控试验中的繁殖：22 天的平均变化率为割线的斜率 $\Delta P/\Delta t$(例 4)

这个平均值是图 2.5 中通过点 $P$ 和 $Q$ 的割线的斜率. ■

在例 4 中计算的是从第 23 天到第 45 天的平均变化率，并未说明果蝇种群在第 23 天的繁殖速率. 为了求这个速率，我们需要考察问题中同这一天更接近的时间区间.

**例 5** 例 4 中果蝇种群在第 23 天数量增加的速率是多少?

**解** 为了回答这个问题，我们考察从第 23 天起果蝇在越来越短的时间区间上的平均变化率. 在几何学术语中，我们通过计算沿曲线趋近 $P$ 的点序列 $Q$ 的割线斜率来求这些变化率(见图 2.6).

表中的值表明，当 $Q$ 的 $t$ 坐标从 45 减至 30 时，割线斜率从 8.6 上升到 16.4，而我们预料当 $t$ 继续接近 23 时斜率会略微升高. 从几何上看，割线围绕 $P$ 旋转并显现趋近图中的粗切线. 这条直线通过点 $A(14, 0)$ 和 $B(35, 350)$，其斜率为

$$\frac{350-0}{35-14} = 16.7 \text{ 只果蝇 / 天(近似值)}$$

| $Q$ | $PQ$ 的斜率 $=\Delta p/\Delta t$(果蝇/天) |
|---|---|
| (45, 340) | $\dfrac{340-150}{45-23}\approx 8.6$ |
| (40, 330) | $\dfrac{330-150}{40-23}\approx 10.6$ |
| (35, 310) | $\dfrac{310-150}{35-23}\approx 13.3$ |
| (30, 265) | $\dfrac{265-150}{30-23}\approx 16.4$ |

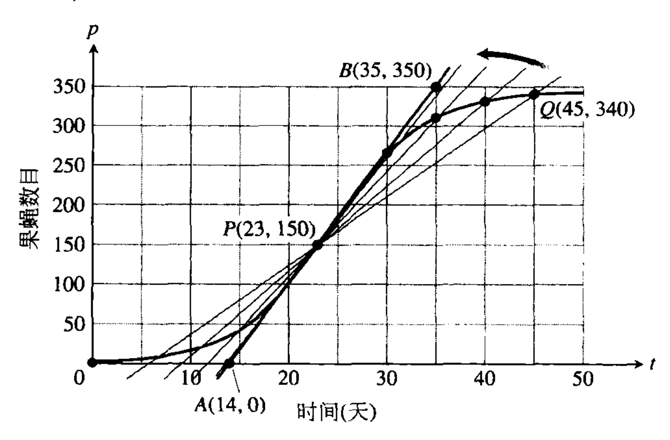



图 2.6 果蝇图上通过点 $P$ 的 4 条割线的斜率和位置(例 5)

在第 23 天果蝇种群大约以 16.7 只果蝇/天的速率增加. ■

上面几个例子隐含了极限的概念. 瞬时变化率是平均变化率的极限值; 曲线上一点的切线的斜率等于相关割线斜率的极限值. 瞬时变化率和割线出现在其他许多地方. 为了从结构上讨论这两个对象, 并加深我们对它们之间的联系的理解, 需要研究如何定义以及确定极限值或者**极限**的过程. 我们从下一节开始对它们进行研究.

## 习题 2.1

在习题 1 ~ 6 中, 求函数在给定区间上的平均变化率.

**1.** $f(x)=x^3+1$.

(**a**) $[2, 3]$. (**b**) $[-1, 1]$.

**2.** $g(x)=x^2$.

(**a**) $[-1, 1]$. (**b**) $[-2, 0]$.

**3.** $h(t)=\cot t$.

(**a**) $[\pi/4, 3\pi/4]$. (**b**) $[\pi/6, \pi/2]$.

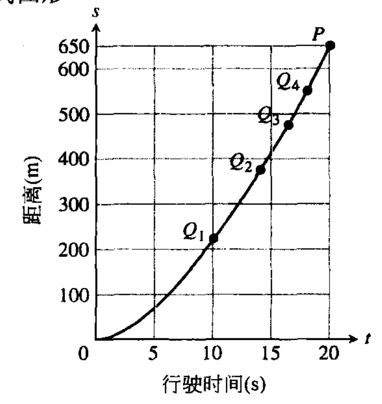
**4.** $g(t)=2+\cos t$.

(**a**) $[0, \pi]$. (**b**) $[-\pi, \pi]$.

**5.** $R(\theta)=\sqrt{4\theta+1}$; $[0, 2]$.

**6.** $P(\theta)=\theta^3-4\theta^2+5\theta$; $[1, 2]$.

**7. 赛车速度** 附图显示赛车从静止状态加速的时间-距离图形.



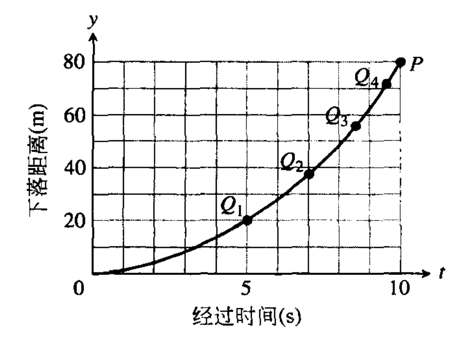

(**a**) 估计割线 $PQ_1$, $PQ_2$, $PQ_3$ 和 $PQ_4$ 的斜率, 并像图 2.6 那样依顺序把它们排列在一个表中. 这些斜率对应的单位时什么?

(**b**) 估计赛车在 $t=20$ s 时的速度.

**8.** 附图显示一个物体从距离月球表面 80 m 的月球着陆舱下落时下落距离对时间的函数曲线.

(**a**) 估计割线 $PQ_1$, $PQ_2$, $PQ_3$ 和 $PQ_4$ 的斜率, 像图 2.6 那样把它们排列在一个表中.

(**b**) 当物体撞击月球表面时, 它的速度是多少?




在习题 9 ~ 16 中, 使用例 3 中的方法求 (**a**) 曲线在给定点 $P$ 的斜率, (**b**) 在点 $P$ 的切线方程.

**9.** $y=x^2-3$, $P(2, 1)$.

**10.** $y=5-x^2$, $P(1, 4)$.

**11.** $y=x^2-2x-3$, $P(2, -3)$.

12. $y=x^2-4x$, $P(1, -3)$.

13. $y=x^3$, $P(2, 8)$.

14. $y=2-x^3$, $P(1, 1)$.

15. $y=x^3-12x$, $P(1, -11)$.

16. $y=x^3-3x^2+4$, $P(2, 0)$.

T17. 一家小公司前5年内每年的营业收益由下表给出：

| 年度 | 收益(美元) | 年度 | 收益(美元) |
|---|---|---|---|
| 2000 | 6 | 2003 | 111 |
| 2001 | 27 | 2004 | 174 |
| 2002 | 62 | | |

(a) 画出表示收益作为年度函数的点，并尽可能用光滑曲线连接它们.

(b) 在2002年和2004年之间，收益的平均增长率是多少？

(c) 通过所画图形估计2002年的变化率.

T18. 对函数 $F(x)=(x+2)/(x-2)$ 造函数表，取 $x=1.2$, $x=11/10$, $x=101/100$, $x=1001/1000$, $x=10\,001/10\,000$ 和 $x=1$.

(a) 对于函数表中每个 $x\neq 1$，求 $F(x)$ 在区间 $[1, x]$ 上的平均变化率.

(b) 在需要时扩充函数表，试确定 $F(x)$ 在 $x=1$ 的平均变化率.

T19. 令 $g(x)=\sqrt{x}$, $x\geqslant 0$.

(a) 求 $g(x)$ 在区间 $[1, 2]$, $[1, 1.5]$ 和 $[1, 1+h]$ 上对 $x$ 的平均变化率.

(b) 在区间 $[1, 1+h]$ 上造函数 $g$ 对 $x$ 的平均变化率数值表，取 $h$ 趋近零的某些值，例如 $h=0.1$, $0.01$, $0.001$, $0.0001$, $0.000\,01$ 和 $0.000\,001$.

(c) 函数表在 $x=1$ 关于 $g(x)$ 对 $x$ 的变化率有什么暗示？

(d) 在区间 $[1, 1+h]$ 上计算 $g(x)$ 对 $x$ 的平均变化率当 $h$ 趋近零时的极限.

T20. 令 $f(t)=\frac{1}{t}$, $t\neq 0$.

(a) 求 $f$ 在下列区间上对 $t$ 的平均变化率：(i)从 $t=2$ 到 $t=3$, (ii)从 $t=2$ 到 $t=T$.

(b) 在区间 $[2, T]$ 上造函数 $f$ 对 $t$ 的平均变化率的数值表，取某些趋近2的 $T$ 值，例如 $T=2.1$, $2.01$, $2.001$, $2.0001$ 和 $2.000\,01$.

(c) 平均变化率数值表在 $t=2$ 关于 $f$ 对 $t$ 的变化率有什么暗示？

(d) 计算 $f$ 在区间 $[2, T]$ 上当 $T$ 趋近2时对 $t$ 的平均变化率的极限. 在代入 $T=2$ 之前必须先做某些代数运算.

## 2.2 函数的极限和极限法则

在2.1节，我们见过求函数的瞬时变化率或曲线的切线时出现的极限. 在这一节我们从极限的非形式定义出发，说明如何计算极限值. 下一节给出极限的严格定义.

### 2.2.1 函数值的极限

历史评述[⊖]

极限

假设 $f(x)$ 定义在包含 $x_0$ 的开区间上，但是在 $x_0$ 可能除外. 如果对于充分接近 $x_0$ 的所有 $x$，$f(x)$ 任意地接近 $L$(按我们想要的程度接近 $L$)，就说当 $x$ 趋近 $x_0$ 时 $f$ 趋近**极限** $L$. 并记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L$$

读作"当 $x$ 趋近 $x_0$ 时 $f(x)$ 的极限是 $L$". 实质上，极限的定义说明只要 $x$ 接近 $x_0$(无论从 $x_0$ 的哪一侧)，$f(x)$ 的值就接近数 $L$. 这个定义是"非形式的"，因为像*任意接近*和*充分接近*这样的说法是不精确的；它们表达的意思同上下文有关. 对于制造活塞的机械师来说，*接近*可能意味着是在几千分之一英寸内. 对于研究遥远的银河星系的天文学家而言，*接近*也许意味着是在几千光年内. 然而，定义是足够明确的，使我们能够认识和计算特定函数的极限. 不过，当我们着手证明关于极限的定理时，将需要在2.3节中给出的精确定义.

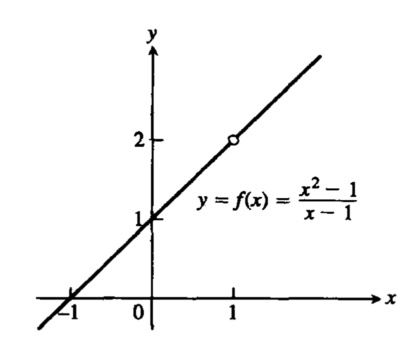
⊖ 如果想了解微积分学中更多的历史人物以及重要原理和主题的演进，请访问 http://wps.aw.com/aw_thomas_calculus_11.

**例 1** 函数$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$在$x=1$附近有何特性?

**解** 给出的公式对于除$x=1$以外的所有实数定义$f$(不能用零相除). 对于任何$x\neq 1$, 可以通过分子的因式分解和消去公因式化简公式:

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1,\quad x\neq 1$$

由此可知$f$的图形是不包含点(1, 2)的直线$y=x+1$. 被排除的点在图2.7中表示为一个"小孔". 尽管$f(1)$没有定义, 显然通过选择足够接近1的$x$, 能够使$f(x)$的值按我们所希望的程度接近2(见表2.2).



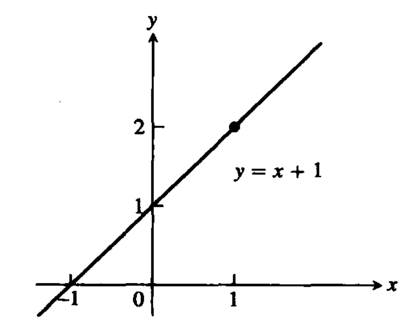




图2.7 $f$的图形除开$x=1$($f$在这个点无定义)外与直线$y=x+1$完全相同(例1)

**表2.2 $x$越是接近1, $f(x)=(x^2-1)/(x-1)$看起来越是接近2**

| 低于1和高于1的$x$值 | $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1(x\neq1)$ | 低于1和高于1的$x$值 | $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1(x\neq1)$ |
|---|---|---|---|
| 0.9 | 1.9 | 0.999 | 1.999 |
| 1.1 | 2.1 | 1.001 | 2.001 |
| 0.99 | 1.99 | 0.999 999 | 1.999 999 |
| 1.01 | 2.01 | 1.000 001 | 2.000 001 |

我们说当$x$趋近1时$f(x)$趋近极限2, 并写成

$$\lim_{x\to1}f(x)=2\quad 或\quad \lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$$ ■

**例 2** 图2.8中的函数$f$当$x\to1$时有极限2, 即使$f$在$x=1$没有定义. 函数$g$当$x\to1$时有极限2, 即使$2\neq g(1)$. 函数$h$是仅有的一个函数, 它在$x\to1$时的极限等于它在$x=1$的值. 对于$h$, 有$\lim_{x\to1}h(x)=h(1)$. 这个极限和函数值的相等是很特别的, 我们在2.6节再讨论它. ■

**例 3**

(**a**)若$f$是**恒等函数**$f(x)=x$, 则对于任意值$x_0$(见图2.9a),

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}x=x_0$$

(**b**)若$f$是**常值函数**$f(x)=k$(取常数值$k$的函数), 则对于任意值$x_0$(见图2.9b),

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}k=k$$

例如,

$$\lim_{x\to3}x=3\quad 和\quad \lim_{x\to-7}(4)=\lim_{x\to2}(4)=4$$

我们在2.3节例3中证明这些结果. ■

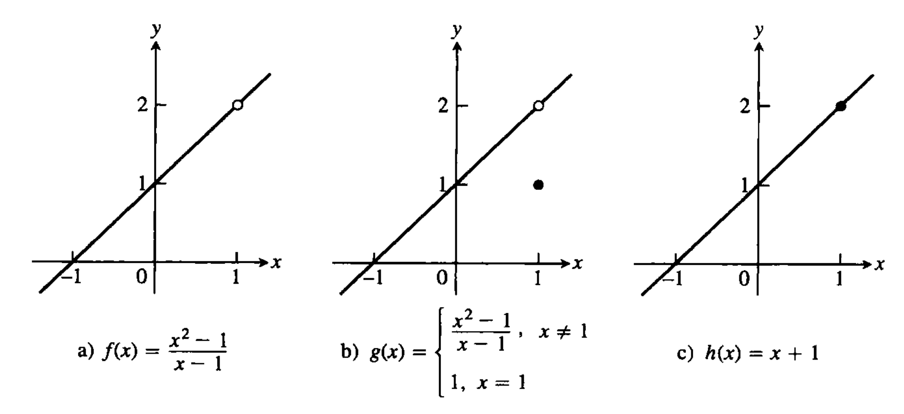



图 2.8 $f(x)$，$g(x)$和 $h(x)$当 $x\to 1$ 时的极限都等于 2，但是唯有 $h(x)$在 $x=1$ 的函数值与极限值相等(例 2)

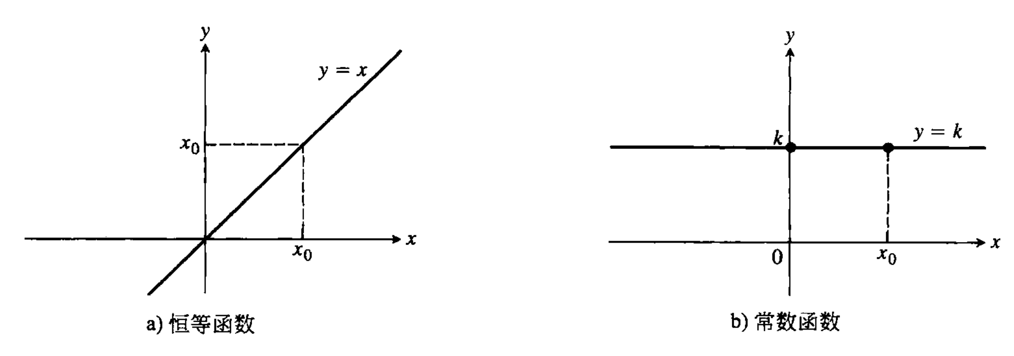



图 2.9 例 3 中的两个函数在所有点 $x_0$ 都存在极限

极限可能不存在的某些情况在图 2.10 中说明，并在下一个例子中描述.

**例 4** 讨论下述函数当 $x\to 0$ 时的特性.

$$(\mathbf{a})\, U(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}\qquad (\mathbf{b})\, g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}\qquad (\mathbf{c})\, f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \sin\frac{1}{x}, & x>0.\end{cases}$$

**解** (a)函数跃变：**单位阶跃函数** $U(x)$当 $x\to 0$ 时不存在极限，因为它的值在 $x=0$ 跃变. 对于任意接近零的负 $x$ 值，$U(x)=0$. 对于任意接近零的正 $x$ 值，$U(x)=1$. 当 $x\to 0$ 时不存在

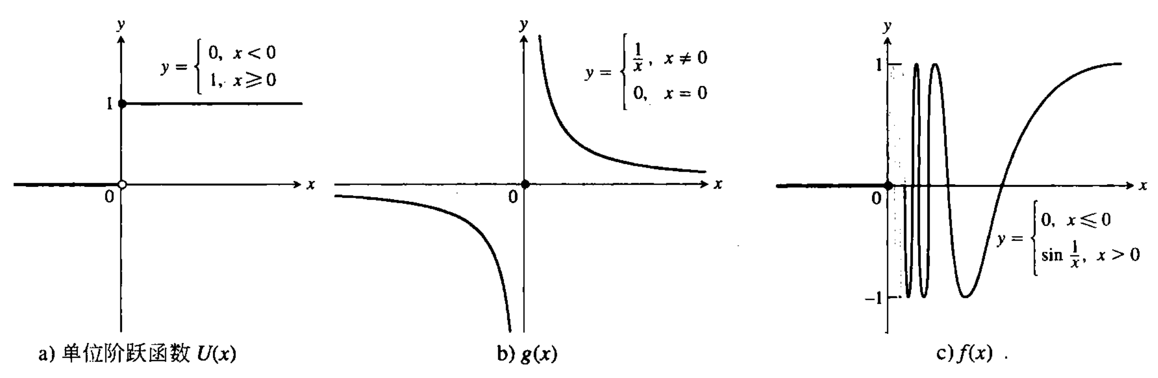



图 2.10 当 $x\to 1$ 时不存在极限的三个函数(例 4)

$U(x)$趋近的单一值$L$(见图2.10a).

(**b**)*函数增长过大而不存在极限*：$g(x)$当$x \to 0$时无极限，因为当$x \to 0$时$g$的值的绝对值任意地增大而不保持同任何固定的实数接近(见图2.10b).

(**c**)*函数振荡过多而不存在极限*：$f(x)$当$x \to 0$时无极限，因为在包含0的每一个开区间内函数的值在$+1$与$-1$之间振荡. 当$x \to 0$时函数值不保持同任何一个数接近(参见图2.10c). ■

### 2.2.2 极限法则

下述定理表明如何计算函数算术组合的极限，其中函数的极限是已知的.

**定理1(极限法则)** 若$L$, $M$, $c$和$k$是实数，并且$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to c} g(x) = M$，则有

(1) *和法则* $\lim\limits_{x \to c}(f(x) + g(x)) = L + M$

两个函数之和的极限等于它们的极限之和.

(2) *差法则* $\lim\limits_{x \to c}(f(x) - g(x)) = L - M$

两个函数之差的极限等于它们的极限之差.

(3) *积法则* $\lim\limits_{x \to c}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

两个函数乘积的极限等于它们的极限的乘积.

(4) *常数倍法则* $\lim\limits_{x \to c}(k \cdot f(x)) = k \cdot L$

常数与函数相乘的极限等于常数与函数极限的相乘.

(5) *商法则* $\lim\limits_{x \to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0$

两个函数之商的极限等于它们的极限之商，假定分母的极限不为零.

(6) *幂法则*

若$r$和$s$是不含公因数的整数，且$s \neq 0$，则

$$\lim_{x \to c}(f(x))^{r/s} = L^{r/s}$$

假定$L^{r/s}$是实数(如果$s$是偶数，我们假设$L > 0$).

函数的有理数幂的极限等于函数极限的幂，假定极限幂是实数.

我们可以确信定理1中各个法则或定律的真实性(虽然这些直观的论断不能作为证明). 如果$x$充分接近$c$，那么从极限的非形式定义看出$f(x)$接近$L$和$g(x)$接近$M$. 因此，有理由认为，$f(x) + g(x)$接近$L + M$，$f(x) - g(x)$接近$L - M$，$f(x)g(x)$接近$LM$，$kf(x)$接近$kL$，以及当$M \neq 0$时$f(x)/g(x)$接近$L/M$. 我们在2.3节依据极限的确切定义证明和法则. 法则(2)~(5)在附录A.5中证明. 法则6在高等微积分学教程中证明.

**例5** 应用观察结果$\lim\limits_{x \to c} k = k$和$\lim\limits_{x \to c} x = c$(例3)以及极限的性质求下面的极限：

(**a**) $\lim\limits_{x \to c}(x^3 + 4x^2 - 3)$. (**b**) $\lim\limits_{x \to c}\dfrac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5}$. (**c**) $\lim\limits_{x \to -2}\sqrt{4x^2 - 3}$.

**解** (**a**)
$$\begin{aligned}\lim_{x \to c}(x^3 + 4x^2 - 3) &= \lim_{x \to c} x^3 + \lim_{x \to c} 4x^2 - \lim_{x \to c} 3 \quad \text{(和法则与差法则)}\\ &= c^3 + 4c^2 - 3 \quad \text{(积法则与常数倍法则)}\end{aligned}$$

(**b**)
$$\begin{aligned}\lim_{x \to c}\frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5} &= \frac{\lim\limits_{x \to c}(x^4 + x^2 - 1)}{\lim\limits_{x \to c}(x^2 + 5)} \quad \text{(商法则)}\\ &= \frac{\lim\limits_{x \to c} x^4 + \lim\limits_{x \to c} x^2 - \lim\limits_{x \to c} 1}{\lim\limits_{x \to c} x^2 + \lim\limits_{x \to c} 5} \quad \text{(和法则与差法则)}\end{aligned}$$

$$=\frac{c^4+c^2-1}{c^2+5}$$ （幂法则或积法则）

(c) $\lim_{x\to -2}\sqrt{4x^2-3}=\sqrt{\lim_{x\to -2}(4x^2-3)}$ （幂法则，$r/s=1/2$）

$=\sqrt{\lim_{x\to -2}4x^2-\lim_{x\to -2}3}$ （差法则）

$=\sqrt{4(-2)^2-3}$ （积法则与常数倍法则）

$=\sqrt{16-3}=\sqrt{13}$ ■

定理 1 的两个推论进一步简化多项式和有理函数的极限计算任务. 为了计算多项式函数当 $x\to c$时的极限，只需在函数公式中用 $c$ 代换 $x$. 为了计算有理函数当 $x\to c$(在点 $c$ 分母不为 0)时的极限，在函数公式中用 $c$ 代换 $x$(参见例 5(a)和 5(b)).

**定理 2（多项式的极限）** 若 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$，则

$$\lim_{x\to c}P(x)=P(c)=a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}+\cdots+a_0$$

**定理 3（有理函数的极限）** 若 $P(x)$和 $Q(x)$是多项式，且 $Q(c)\neq 0$，则

$$\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(c)}{Q(c)}$$

**例 6**

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+4x^2-3}{x^2+5}=\frac{(-1)^3+4(-1)^2-3}{(-1)^2+5}=\frac{0}{6}=0$$ ■

### 2.2.3 用代数方法消去零分母

定理 3 仅当有理函数的分母在极限点 $c$ 不为零时成立. 如果分母为零，消去分子和分母中的公因式后，可能把分式化简为分母在 $c$ 不再为零的分式. 如果出现这种情况，就可以在化简后的分数中用代入法求极限.

> **附注：识别公因式**
>
> 可以证明，若 $Q(x)$是多项式且 $Q(c)=0$，则$(x-c)$是 $Q(x)$的因式. 因此，若 $x$ 的有理函数的分子和分母在 $x=c$ 时均为零，则它们有公因式$(x-c)$.

**例 7** 计算 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}$.

**解** 不能代入 $x=1$ 求极限，因为这使分母为零. 我们检查分子在 $x=1$ 是否也等于零. 事实确实如此，所以分子与分母具有公因式$(x-1)$. 消去$(x-1)$后得到更简单的分式，它在 $x\neq 1$ 的值与原来函数的值相等：

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)}=\frac{x+2}{x},\quad 如果\ x\neq 1$$

利用这个更简单的分式，用代入法求 $x\to 1$ 时的极限：

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x}=\frac{1+2}{1}=3$$

请参见图 2.11. ■

### 2.2.4 用计算器和计算机估计极限

当有理函数的分母为零而不能用定理 1 的商法则时，可以试用计算器或者计算机估计当 $x$ 越来越接近 $c$ 时的极限值. 我们在例 1 中采用过这个方法，但是对于在一点无定义或不存在极限的函数，计算器和计算机可能给出虚假值和错误印象，像下面例子说明的那样.

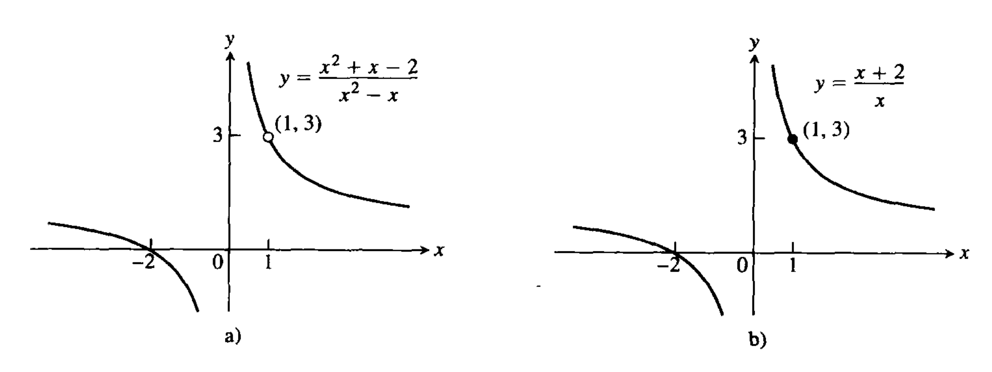



图 2.11 除在 $x=1$ 外，a) 中 $f(x)=(x^2+x-2)/(x^2-x)$ 与 b) 中 $g(x)=(x+2)/x$ 的图形相同（$f$ 在这一点无定义）；两个函数当 $x\to 1$ 时具有相同的极限（例 7）

**例 8** 估计 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$ 的值.

**解** 表 2.3 列出函数在 $x=0$ 附近的若干值. 当 $x$ 经过 $\pm 1$，$\pm 0.5$，$\pm 0.10$ 和 $\pm 0.01$ 趋近 0 时，函数似乎趋近数 0.05.

当取更小的 $x$ 值 $\pm 0.0005$，$\pm 0.0001$，$\pm 0.000\,01$ 和 $\pm 0.000\,001$ 趋近 0 时，函数似乎趋近 0 值.

那么答案是 0.05 或 0 还是某个其他值？我们在下一个例子中解答这个问题.

**表 2.3** $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$ 在 $x=0$ 附近的计算机求值

| $x$ | $f(x)$ | | $x$ | $f(x)$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\pm 1$ | 0.049 876 | 趋近 0.05？ | $\pm 0.0005$ | 0.080 000 | 趋近 0？ |
| $\pm 0.5$ | 0.049 969 | | $\pm 0.0001$ | 0.000 000 | |
| $\pm 0.1$ | 0.049 999 | | $\pm 0.000\,01$ | 0.000 000 | |
| $\pm 0.01$ | 0.050 000 | | $\pm 0.000\,001$ | 0.000 000 | |

■

使用计算器或者计算机可能产生不确定的结果，像上面的例子. 我们不能在计算中代入 $x=0$，同时分子和分母没有明显的公因式（像例 7 那样）. 然而，在某些情况下我们可能用代数方法建立一个公因式.

**例 9** 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$.

**解** 这是在例 8 中考虑过的极限. 如果对分子和分母同乘以表达式 $\sqrt{x^2+100}+10$（从改变分子根式后的符号得到），就能建立一个公因式. 用初等代数对分子进行有理化：

$$\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}=\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+100}+10}{\sqrt{x^2+100}+10}=\frac{x^2+100-100}{x^2(\sqrt{x^2+100}+10)}$$

$$=\frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+100}+10)}\qquad(\text{公因式 } x^2)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+100}+10}\qquad(\text{对于 } x\neq 0 \text{ 消去 } x^2)$$

因此，
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+100}+10}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{0^2+100}+10}\quad(\text{分母在 } x=0 \text{ 不为零,用 } 0 \text{ 代换 } x)$$
$$=\frac{1}{20}=0.05$$

这个计算对于例 8 中不确定的计算机结果提供正确的答案. ■

在求分母变成零的商的极限时，不可能始终依靠代数方法解决问题. 在某些场合，这时可以借助于问题的几何性质(参见 2.4 节定理 7 的证明)或通过微积分方法(在 4.4 节和 4.6 节中说明)求出极限. 下面一个定理也是很有用的.

### 2.2.5 夹层定理

下述定理使我们能够计算各种形式的极限. 这个定理称为夹层定理，因为它涉及的函数 $f$ 的值夹在另外两个函数 $g$ 和 $h$ 的值之间，而这两个函数在点 $c$ 有相同的极限 $L$. 由于函数 $f$ 的值被限制在两个趋近 $L$ 的函数值之间，所以它的值也必定趋近 $L$(见图 2.12). 在附录 A.5 中可以找到定理的证明.

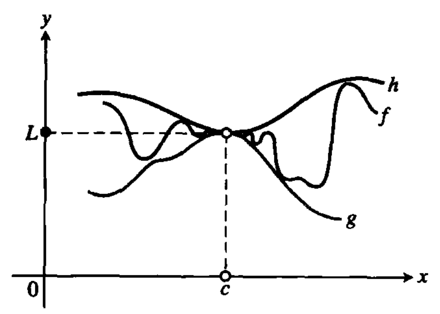



图 2.12 $f$ 的图形夹在 $g$ 和 $h$ 的图形之间

> **定理 4 (夹层定理)** 假设对于包含 $c$ 的某个开区间内的所有 $x$ ($x=c$ 本身可能除外)，有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$. 同时假设 $\lim_{x\to c}g(x)=\lim_{x\to c}h(x)=L$. 那么 $\lim_{x\to c}f(x)=L$.

夹层定理也称为压缩定理或者收缩定理.

**例 10** 假设对于所有 $x\neq 0$ 有
$$1-\frac{x^2}{4}\leqslant u(x)\leqslant 1+\frac{x^2}{2}$$
求 $\lim_{x\to 0}u(x)$，无论 $u$ 是多么复杂的函数.

**解** 由于 $\lim_{x\to 0}(1-(x^2/4))=1$ 和 $\lim_{x\to 0}(1+(x^2/2))=1$，夹层定理蕴涵 $\lim_{x\to 0}u(x)=1$(见图 2.13). ■

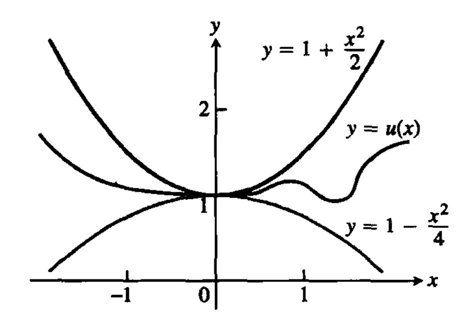
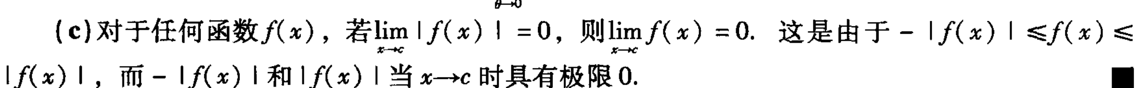



图 2.13 图形位于 $y=1+(x^2/2)$ 和 $y=1-(x^2/4)$ 的图形之间的区域的任何函数 $u(x)$ 当 $x\to 0$ 时具有极限 1(例 10)

**例 11**

**(a)**(参见图 2.14a)由 $\sin\theta$ 的定义(参见 1.3 节)推出，对于所有 $\theta$，有 $-|\theta|\leqslant\sin\theta\leqslant|\theta|$. 由于 $\lim_{\theta\to 0}(-|\theta|)=\lim_{\theta\to 0}|\theta|=0$，故有
$$\lim_{\theta\to 0}\sin\theta=0$$

**(b)**(参见图 2.14b)由 $\cos\theta$ 的定义推出，对于所有 $\theta$，有 $0\leqslant 1-\cos\theta\leqslant|\theta|$，故有 $\lim_{\theta\to 0}(1-\cos\theta)=0$，或者
$$\lim_{\theta\to 0}\cos\theta=1$$


**(c)**对于任何函数 $f(x)$，若 $\lim_{x\to c}|f(x)|=0$，则 $\lim_{x\to c}f(x)=0$. 这是由于 $-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant|f(x)|$，而 $-|f(x)|$ 和 $|f(x)|$ 当 $x\to c$ 时具有极限 0. ■

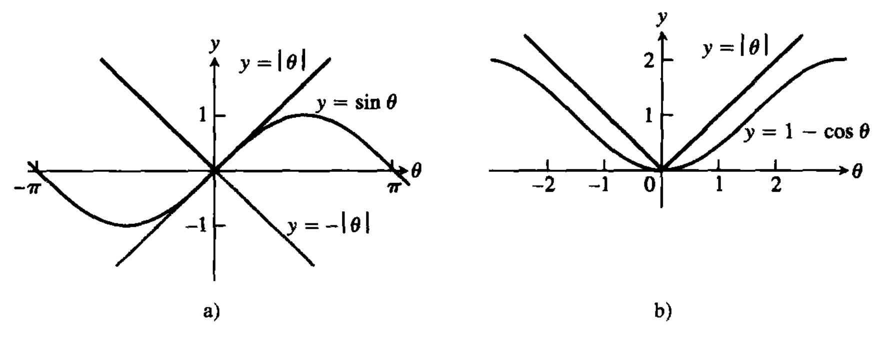



图 2.14　夹层定理显示 a) $\lim_{\theta\to 0}\sin\theta=0$ 和 b) $\lim_{\theta\to 0}(1-\cos\theta)=0$（例 11）

极限的另外一个重要性质由下面的定理给出．在下一节给出定理的证明．

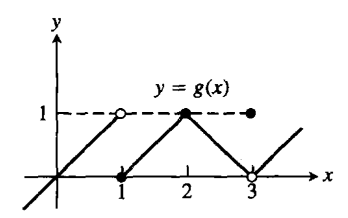
> **定理 5**　如果在包含 $c$ 的某个开区间内（$x=c$ 本身可能除外）有 $f(x)\leqslant g(x)$，且当 $x\to c$ 时 $f$ 和 $g$ 都存在极限，那么
>
> $$\lim_{x\to c}f(x)\leqslant\lim_{x\to c}g(x)$$

在定理 5 的不等式中，如果用严格的小于符号（<）代替小于等于符号（≤），结论不再成立．图 2.14a 表明，对于 $\theta\neq 0$，有 $-|\theta|<\sin\theta<|\theta|$，但是在 $\theta\to 0$ 的极限情况下，等式成立．

## 习题 2.2

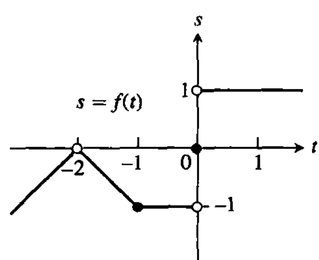
1. 对于本题所画图形的函数 $g(x)$，求下面的极限，或者说明不存在极限的原因．

   (a) $\lim_{x\to 1}g(x)$．　(b) $\lim_{x\to 2}g(x)$．　(c) $\lim_{x\to 3}g(x)$．

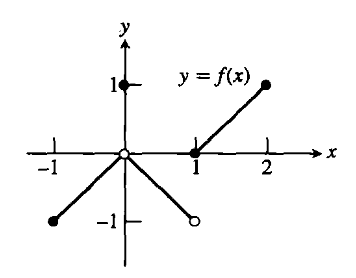



2. 对于本题所画图形的函数 $f(x)$，求下面的极限，或者说明不存在极限的原因．

   (a) $\lim_{t\to -2}f(t)$．　(b) $\lim_{t\to -1}f(t)$．　(c) $\lim_{t\to 0}f(t)$．




3. 关于本题所画图形的函数 $y=f(x)$，下述命题中哪些命题成立，哪些命题不成立？



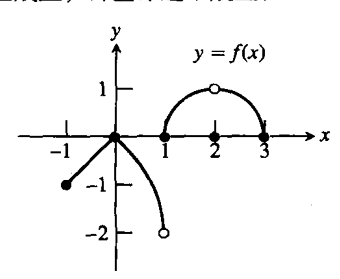

   (a) $\lim_{x\to 0}f(x)$ 存在．　(b) $\lim_{x\to 0}f(x)=0$．

   (c) $\lim_{x\to 0}f(x)=1$．　(d) $\lim_{x\to 1}f(x)=1$．

   (e) $\lim_{x\to 1}f(x)=0$．

   (f) $\lim_{x\to x_0}f(x)$ 在 $(-1,1)$ 中的每个点 $x_0$ 存在．

4. 关于本题所画图形的函数 $y=f(x)$，下述命题中哪些命题成立，哪些命题不成立？



(a) $\lim_{x\to 2} f(x)$ 不存在. (b) $\lim_{x\to 2} f(x)=2$.

(c) $\lim_{x\to 1} f(x)$ 不存在.

(d) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 在 $(-1,1)$ 中的每个点 $x_0$ 存在.

(e) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 在 $(1,3)$ 中的每个点 $x_0$ 存在.

在习题 5 和习题 6 中，说明极限不存在的原因.

5. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$. 6. $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$.

7. 假设函数 $f(x)$ 对于除 $x=x_0$ 外的所有实数值 $x$ 有定义. 关于 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 的存在与否能得出什么结论? 提出答案的理由.

8. 假定函数 $f(x)$ 对于 $[-1,1]$ 中的所有 $x$ 有定义. 关于 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 的存在与否能得出什么结论? 提出答案的理由.

9. 如果 $\lim_{x\to 1} f(x)=5$，那么 $f$ 在 $x=1$ 必然有定义吗? 如果是这样，必定有 $f(x)=5$ 吗? 关于 $f$ 在 $x=1$ 的值能得出什么结论? 予以解释.

10. 如果 $f(1)=5$，那么 $\lim_{x\to 1} f(x)$ 必然存在吗? 如果存在，必定有 $\lim_{x\to 1} f(x)=5$ 吗? 关于 $\lim_{x\to 1} f(x)$ 能得出什么结论? 予以解释.

在习题 11 ~ 28 中，求极限.

11. $\lim_{x\to -7}(2x+5)$. 12. $\lim_{x\to 12}(10-3x)$.

13. $\lim_{x\to 2}(-x^2+5x-2)$. 14. $\lim_{x\to -2}(x^3-2x^2+4x+8)$.

15. $\lim_{t\to 6} 8(t-5)(t-7)$. 16. $\lim_{s\to 2/3} 3s(2s-1)$.

17. $\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x+6}$. 18. $\lim_{x\to 5}\frac{4}{x-7}$.

19. $\lim_{y\to -5}\frac{y^2}{5-y}$. 20. $\lim_{y\to 2}\frac{y+2}{y^2+5y+6}$.

21. $\lim_{x\to -1} 3(2x-1)^2$. 22. $\lim_{x\to -4}(x+3)^{1984}$.

23. $\lim_{y\to -3}(5-y)^{4/3}$. 24. $\lim_{z\to 0}(2z-8)^{1/3}$.

25. $\lim_{h\to 0}\frac{3}{\sqrt{3h+1}+1}$. 26. $\lim_{h\to 0}\frac{5}{\sqrt{5h+4}+2}$.

27. $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3h+1}-1}{h}$. 28. $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{5h+4}-2}{h}$.

在习题 29 ~ 46 中，求极限.

29. $\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-25}$. 30. $\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2+4x+3}$.

31. $\lim_{x\to -5}\frac{x^2+3x-10}{x+5}$. 32. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x-2}$.

33. $\lim_{t\to 1}\frac{t^2+t-2}{t^2-1}$. 34. $\lim_{t\to -1}\frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2}$.

35. $\lim_{x\to -2}\frac{-2x-4}{x^3+2x^2}$. 36. $\lim_{y\to 0}\frac{5y^3+8y^2}{3y^4-16y^2}$.

37. $\lim_{u\to 1}\frac{u^4-1}{u^3-1}$. 38. $\lim_{v\to 2}\frac{v^3-8}{v^4-16}$.

39. $\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$. 40. $\lim_{x\to 4}\frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}}$.

41. $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$. 42. $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$.

43. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+12}-4}{x-2}$. 44. $\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3}$.

45. $\lim_{x\to -3}\frac{2-\sqrt{x^2-5}}{x+3}$. 46. $\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{5-\sqrt{x^2+9}}$.

在习题 47 ~ 54 中，求极限.

47. $\lim_{x\to 0}(2\sin x-1)$. 48. $\lim_{x\to 0}\sin^2 x$.

49. $\lim_{x\to 0}\sec x$. 50. $\lim_{x\to 0}\tan x$.

51. $\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\sin x}{3\cos x}$. 52. $\lim_{x\to 0}(x^2-1)(2-\cos x)$.

53. $\lim_{x\to 0}\sqrt{x+1}\cos^{1/3}x$. 54. $\lim_{x\to 0}\sqrt{1+\cos^2 x}$.

55. 假定 $\lim_{x\to 0} f(x)=1$ 及 $\lim_{x\to 0} g(x)=-5$. 对于下面计算极限的步骤 (a)，(b) 和 (c)，指出使用定理 1 中极限法则的名称:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)-g(x)}{(f(x)+7)^{2/3}}=\frac{\lim_{x\to 0}(2f(x)-g(x))}{\lim_{x\to 0}(f(x)+7)^{2/3}} \quad (a)$$

$$=\frac{\lim_{x\to 0}2f(x)-\lim_{x\to 0}g(x)}{(\lim_{x\to 0}(f(x)+7))^{2/3}} \quad (b)$$

$$=\frac{2\lim_{x\to 0}f(x)-\lim_{x\to 0}g(x)}{(\lim_{x\to 0}f(x)+\lim_{x\to 0}7)^{2/3}} \quad (c)$$

$$=\frac{(2)(1)-(-5)}{(1+7)^{2/3}}=\frac{7}{4}$$

56. 令 $\lim_{x\to 1} h(x)=5$，$\lim_{x\to 1} p(x)=1$ 及 $\lim_{x\to 1} r(x)=2$. 对于下面计算极限的步骤 (a)，(b) 和 (c)，指出使用定理 1 中的极限法则的名称:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5h(x)}}{p(x)(4-r(x))}=\frac{\lim_{x\to 1}\sqrt{5h(x)}}{\lim_{x\to 1}(p(x)(4-r(x)))} \quad (a)$$

$$=\frac{\sqrt{\lim_{x\to 1}5h(x)}}{(\lim_{x\to 1}p(x))(\lim_{x\to 1}(4-r(x)))} \quad (b)$$

$$=\frac{\sqrt{5\lim_{x\to 1}h(x)}}{(\lim_{x\to 1}p(x))(\lim_{x\to 1}4-\lim_{x\to 1}r(x))} \quad (c)$$

$$=\frac{\sqrt{(5)(5)}}{(1)(4-2)}=\frac{5}{2}$$

57. 假定 $\lim_{x\to c} f(x)=5$ 及 $\lim_{x\to c} g(x)=-2$. 求下列极限.

(a) $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$. (b) $\lim_{x\to c} 2f(x)g(x)$.

(c) $\lim_{x\to c}(f(x)+3g(x))$.　(d) $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{f(x)-g(x)}$.

**58.** 假定 $\lim_{x\to 4} f(x)=0$ 及 $\lim_{x\to 4} g(x)=-3$. 求下列极限.

(a) $\lim_{x\to 4}(g(x)+3)$.　(b) $\lim_{x\to 4} x f(x)$.

(c) $\lim_{x\to 4}(g(x))^2$.　(d) $\lim_{x\to 4}\frac{g(x)}{f(x)-1}$.

**59.** 假定 $\lim_{x\to b} f(x)=7$ 及 $\lim_{x\to b} g(x)=-3$. 求下列极限.

(a) $\lim_{x\to b}(f(x)+g(x))$.　(b) $\lim_{x\to b} f(x)\cdot g(x)$.

(c) $\lim_{x\to b} 4g(x)$.　(d) $\lim_{x\to b} f(x)/g(x)$.

**60.** 假定 $\lim_{x\to -2} p(x)=4$, $\lim_{x\to -2} r(x)=0$ 及 $\lim_{x\to -2} s(x)=-3$. 求下列极限.

(a) $\lim_{x\to -2}(p(x)+r(x)+s(x))$.

(b) $\lim_{x\to -2} p(x)\cdot r(x)\cdot s(x)$.

(c) $\lim_{x\to -2}(-4p(x)+5r(x))/s(x)$.

由于形式为

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

的极限同割线、切线和瞬时速率的联系，所以在微积分中频繁出现. 在习题 61～66 中，对于给定的 $x$ 值和函数 $f$ 计算这个极限.

**61.** $f(x)=x^2$, $x=1$.

**62.** $f(x)=x^2$, $x=-2$.

**63.** $f(x)=3x-4$, $x=2$.

**64.** $f(x)=1/x$, $x=-2$.

**65.** $f(x)=\sqrt{x}$, $x=7$.

**66.** $f(x)=\sqrt{3x+1}$, $x=0$.

**67.** 如果对于 $-1\leqslant x\leqslant 1$, 有 $\sqrt{5-2x^2}\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{5-x^2}$, 求 $\lim_{x\to 0} f(x)$.

**68.** 如果对于所有 $x$, 有 $2-x^2\leqslant g(x)\leqslant 2\cos x$, 求 $\lim_{x\to 0} g(x)$.

**69.** (a) 可以证明，不等式 $1-\frac{x^2}{6}<\frac{x\sin x}{2-2\cos x}<1$

对于接近零的所有 $x$ 值成立. 这对于

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2-2\cos x}$$

还可能得出什么结论? 提出答案的理由.

**T** (b) 对于 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 在一起画出 $y=1-(x^2/6)$, $y=(x\sin x)/(2-2\cos x)$ 以及 $y=1$ 的图形. 评述这些图形当 $x\to 0$ 时的特性.

**70.** (a) 假定不等式

$$\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}<\frac{1-\cos x}{x^2}<\frac{1}{2}$$

对于接近 0 的所有 $x$ 值成立(从 8.9 节可以看出的确如此). 这对于

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

还可能得出什么结论? 提出答案的理由.

**T** (b) 对于 $-2\leqslant x\leqslant 2$, 一起画出 $y=(1/2)-(x^2/24)$, $y=(1-\cos x)/x^2$ 以及 $y=1/2$ 的图形. 评述这些图形当 $x\to 0$ 时的特性.

**T** 对于习题 71～80, 你将发现绘图计算器是有用的.

**71.** 令 $f(x)=(x^2-9)/(x+3)$.

(a) 造函数 $f$ 的数值表，取点 $x=-3.1$, $-3.01$, $-3.001$ 等，直到所用计算器能够达到的数值，然后估计 $\lim_{x\to -3} f(x)$. 如果改为在 $x=-2.9$, $-2.99$, $-2.999$, … 计算 $f$, 估计极限能达到什么值?

(b) 通过绘制 $f$ 在 $x_0=-3$ 附近的图形，并用 Zoom 和 Trace 功能键估计当 $x\to -3$ 时图形上的 $y$ 值，支持你在(a)中得出的结论.

(c) 像在例 7 中那样用代数方法求 $\lim_{x\to -3} f(x)$.

**72.** 令 $g(x)=(x^2-2)/(x-\sqrt{2})$.

(a) 造函数 $g$ 的数值表，取点 $x=1.4$, $1.41$, $1.414$ 等 $\sqrt{2}$ 的相继十进制近似值. 估计 $\lim_{x\to\sqrt{2}} g(x)$.

(b) 通过绘制 $g$ 在 $x_0=\sqrt{2}$ 附近的图形，并用 Zoom 和 Trace 功能键估计当 $x\to\sqrt{2}$ 时图形上的 $y$ 值，支持你在(a)中得出的结论.

(c) 用代数方法求 $\lim_{x\to\sqrt{2}} g(x)$.

**73.** 令 $G(x)=(x+6)/(x^2+4x-\sqrt{2})$.

(a) 造函数 $G$ 的数值表，取 $x=-5.9$, $-5.99$, $-5.999$, …. 然后估计 $\lim_{x\to -6} G(x)$. 如果改为在 $x=-6.1$, $-6.01$, $-6.001$, … 计算 $G$, 估计极限能达到什么值?

(b) 通过绘制 $G$ 的图形，并用 Zoom 和 Trace 功能键估计当 $x\to -6$ 时图形上的 $y$ 值，支持你在(a)中得出的结论.

(c) 用代数方法求 $\lim_{x\to -6} G(x)$.

**74.** 令 $h(x)=(x^2-2x-3)/(x^2-4x+3)$.

(a) 造函数 $h$ 的数值表，取 $x=2.9$, $2.99$, $2.999$, …. 然后估计 $\lim_{x\to 3} h(x)$. 如果改为在 $x=3.1$, $3.01$, $3.001$, … 计算 $h$, 估计极限能达到什么值?

(b)通过在 $x_0=3$ 附近绘制 $h$ 的图形，并用 Zoom 和 Trace 功能键估计当 $x\to 3$ 时图形上的 $y$ 值，支持你在(a)中得出的结论.

(c)用代数方法求 $\lim\limits_{x\to 3}h(x)$.

**75.** 令 $f(x)=(x^2-1)/(|x|-1)$.

(a)造函数 $f$ 的数值表，取 $x$ 自上和自下趋近 $x_0=-1$ 时的值. 然后估计 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$.

(b)通过在 $x_0=-1$ 附近绘制 $f$ 的图形，并用 Zoom 和 Trace 功能键估计当 $x\to -1$ 时图形上的 $y$ 值，支持你在(a)中得出的结论.

(c)用代数方法求 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$.

**76.** 令 $F(x)=(x^2+3x+2)/(2-|x|)$.

(a)造函数 $F$ 的数值表，取 $x$ 自上和自下趋近 $x_0=-2$ 时的值。然后估计 $\lim\limits_{x\to -2}f(x)$.

(b)通过绘制 $F$ 在 $x_0=-2$ 附近的图形，并用 Zoom 和 Trace 功能键估计当 $x\to -2$ 时图形上的 $y$ 值，支持你在(a)中得出的结论.

(c)用代数方法求 $\lim\limits_{x\to -2}F(x)$.

**77.** 令 $g(\theta)=(\sin\theta)/\theta$.

(a)造函数 $g$ 的数值表，取 $\theta$ 自上和自下趋近 $\theta_0=0$ 时的值. 然后估计 $\lim\limits_{\theta\to 0}g(\theta)$.

(b)通过绘制 $g$ 在 $\theta_0=0$ 附近的图形，支持你在(a)中得出的结论.

**78.** 令 $G(t)=(1-\cos t)/t^2$.

(a)造函数 $G$ 的数值表，取 $t$ 自上和自下趋近 $t_0=0$ 时的值. 然后估计 $\lim\limits_{t\to 0}G(t)$.

(b)通过绘制 $G$ 在 $t_0=0$ 附近的图形，支持你在(a)中得出的结论.

**79.** 令 $f(x)=x^{1/(1-x)}$.

(a)造函数 $f$ 的数值表，取 $x$ 自上和自下趋近 $x_0=1$ 时的值. $f$ 当 $x\to 1$ 时有极限吗? 如果存在极限，极限值是什么? 如果不存在极限，原因何在?

(b)通过绘制 $f$ 在 $x_0=1$ 附近的图形，支持你在(a)中得出的结论.

**80.** 令 $f(x)=(3^x-1)/x$.

(a)造函数 $f$ 的数值表，取 $x$ 自上和自下趋近 $x_0=0$ 时的值. $f$ 在 $x\to 0$ 时有极限吗? 如果存在极限，极限值是什么? 如果不存在极限，原因何在?

(b)通过绘制 $f$ 在 $x_0=0$ 附近的图形，支持你在(a)中得出的结论.

**81.** 如果对于在 $[-1,1]$ 中的 $x$ 有 $x^4\le f(x)\le x^2$，对于 $x<-1$ 和 $x>1$ 有 $x^2\le f(x)\le x^4$，那么在哪些点 $c$ 上自动得知 $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ 的值? 关于 $f$ 在这些点的极限值能够得出什么结论?

**82.** 假定对于所有 $x\ne 2$ 有 $g(x)\le f(x)\le h(x)$，并假定

$$\lim_{x\to 2}g(x)=\lim_{x\to 2}h(x)=-5$$

关于 $f$，$g$ 和 $h$ 在 $x=2$ 的值能够得出任何结论吗? $f(2)=0$ 能否成立? $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=0$ 能否成立? 提出答案的理由.

**83.** 如果 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-5}{x-2}=1$，求 $\lim\limits_{x\to 4}f(x)$.

**84.** 如果 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$，求

(a) $\lim\limits_{x\to -2}f(x)$. (b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)}{x}$.

**85.** (a)如果 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-5}{x-2}=3$，求 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

(b)如果 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-5}{x-2}=4$，求 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

**86.** 如果 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$，求

(a) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$. (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

**T87.** (a)通过绘制 $g(x)=x\sin(1/x)$ 的图形，估计 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$，当需要时在原点处放大图形.

(b)用一种证明证实在(a)中得出的估计.

**T88.** (a)通过绘制 $h(x)=x^2\cos(1/x^3)$ 的图形，估计 $\lim\limits_{x\to 0}h(x)$，当需要时在原点处放大图形.

(b)用一种证明证实在(a)中得出的估计.

**计算机探究**

在习题 89 ~ 94 中，用一种 CAS(计算机代数系统)执行下列处理步骤:

(a)绘制趋近点 $x_0$ 时的函数图形.

(b)从图形估计极限值.

**89.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}$.

**90.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-x^2-5x-3}{(x+1)^2}$.

**91.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$.

**92.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x^2+7}-4}$.

**93.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$.

**94.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{3-3\cos x}$.

## 2.3 极限的精确定义

现在把注意力转到如何给出极限的精确定义．对于非形式定义中像“任意接近”这样含糊的措词，我们要用能够在任何特定例子中适用的具体条件代替．用精确的定义，可以证明前一节给出的极限性质，并确定许多重要的极限．

为了证明当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 等于数 $L$，必须证明当 $x$ 保持“足够接近”$x_0$ 时 $f(x)$ 同 $L$ 之间的间隔能够达到“像我们选择的那样小”．现在考察一下，如果指定 $f(x)$ 与 $L$ 之间间隙的大小，那么这将会有什么要求．

**例 1** 考虑在 $x_0=4$ 附近的函数 $y=2x-1$．从直观上看，当 $x$ 接近 4 时函数 $y$ 显然接近 7，所以 $\lim\limits_{x\to4}(2x-1)=7$．然而，例如说，$x$ 必须怎样接近 4 方能使 $y=2x-1$ 同 7 之差小于 2 单位？

**解** 我们的问题是：$x$ 取什么值能使 $|y-7|<2$？为了寻求答案，首先通过 $x$ 表示 $|y-7|$：

$$|y-7|=|(2x-1)-7|=|2x-8|$$

于是问题变成：$x$ 取什么值能够满足不等式 $|2x-8|<2$？为求出 $x$，解不等式：

$$\begin{gathered}|2x-8|<2\\ -2<2x-8<2\\ 6<2x<10\\ 3<x<5\\ -1<x-4<1\end{gathered}$$

只要 $x$ 保持在 $x_0=4$ 的 1 单位距离内，就能保持 $y$ 在 $y_0=7$ 的 2 单位距离内（见图 2.15）．■

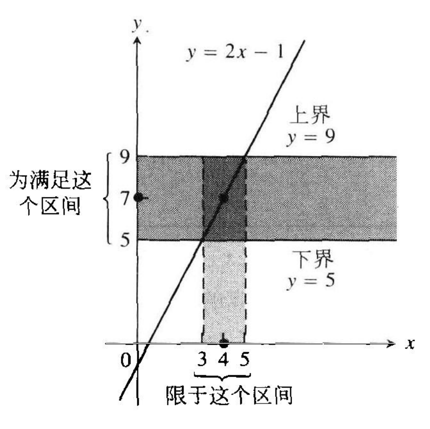



图 2.15 $x$ 保持在 $x_0=4$ 的 1 单位距离内能使 $y$ 保持在 $y_0=7$ 的 2 单位距离内（例 1）

在前面例子中，我们确定 $x$ 必须怎样接近特定的值 $x_0$，以保证某个函数的输出位于围绕极限值 $L$ 的预定区间内．为了证明当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限实际上等于 $L$，必须证明，只要保持 $x$ 足够接近 $x_0$，就能使 $f(x)$ 同 $L$ 之间的间隙小于预先指定的无论怎样小的误差．

### 2.3.1 极限的定义

假设我们当前注视 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的值（不考虑 $x_0$ 的值本身）．当然希望能够断言，只要 $x$ 停留在 $x_0$ 的某个 $\delta$ 距离内，$f(x)$ 就停留在离 $L$ 的十分之一单位距离内（见图 2.16）．但是实质上这是不够的，因为在 $x$ 继续趋近 $x_0$ 的过程中，怎样防止 $f(x)$ 在从 $L-(1/10)$ 到 $L+(1/10)$ 的区间内摆动而不趋向 $L$？

我们可以说误差可能不超过 1/100，1/1000 或 1/100 000．每一次，都要寻找围绕 $x_0$ 的一个新的 $\delta$ 区间，使得只要 $x$ 保持在区间内就能满足新的误差容限．同时，每一次都存在这样的可能性，$f(x)$ 在某个阶段偏离 $L$ 摆动．

本小节后面的图形说明这个问题．可以把这种情况想象成怀疑论者与学者之间的一场争论战．怀疑论者提出 $\varepsilon$ 挑战，证明极限不存在，或者更确切地说存在可疑性．学者对每次挑战的应答是用一个围绕 $x_0$ 的 $\delta$ 区间使函数值保持在 $L$ 的 $\varepsilon$ 距离内．

如何终止这场似乎无休止的接二连三的挑战与应答？办法是证明对于挑战者所能提出的每个误差容限 $\varepsilon$，我们能够找到、计算或想象一个匹配的距离 $\delta$，使得只要 $x$“足够地接近”$x_0$，就能保持 $f(x)$ 在 $L$ 的容限内（见图 2.17）．这就导致我们给出下面极限的精确定义．

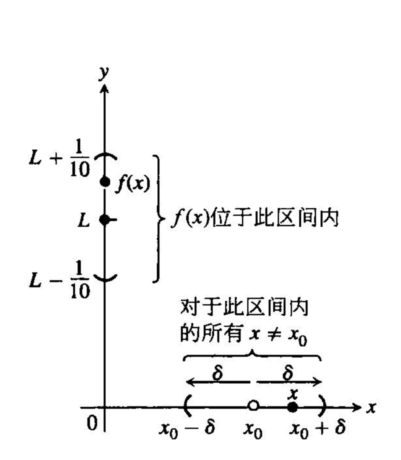



图 2.16 应当如何定义 $\delta>0$，才能使得只要 $x$ 保持在区间$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$内，$f(x)$就能保持在区间$\left(L-\frac{1}{10},\ L+\frac{1}{10}\right)$内

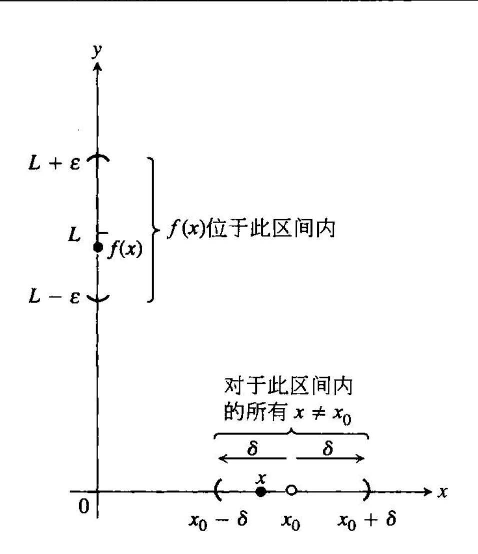



图 2.17 在极限定义中 $\delta$ 和 $\varepsilon$ 的关系

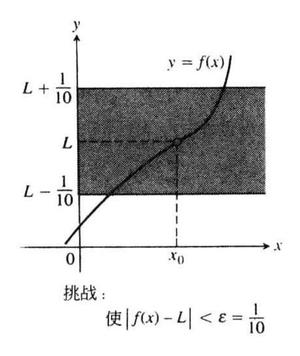
**定义** 令 $f(x)$在围绕 $x_0$ 的一个开区间上定义，在 $x_0$ 本身可能除外. 如果对于每个数 $\varepsilon>0$，存在一个对应的数 $\delta>0$，使得对于所有 $x$，

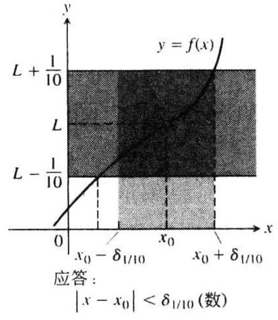
$$0<|x-x_0|<\delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-L|<\varepsilon$$

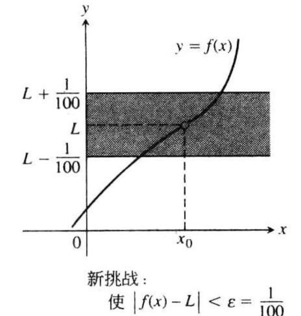
**我们就说 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限为 $L$**，并写成

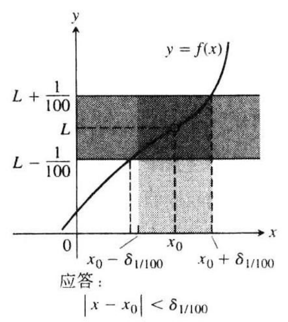
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L$$

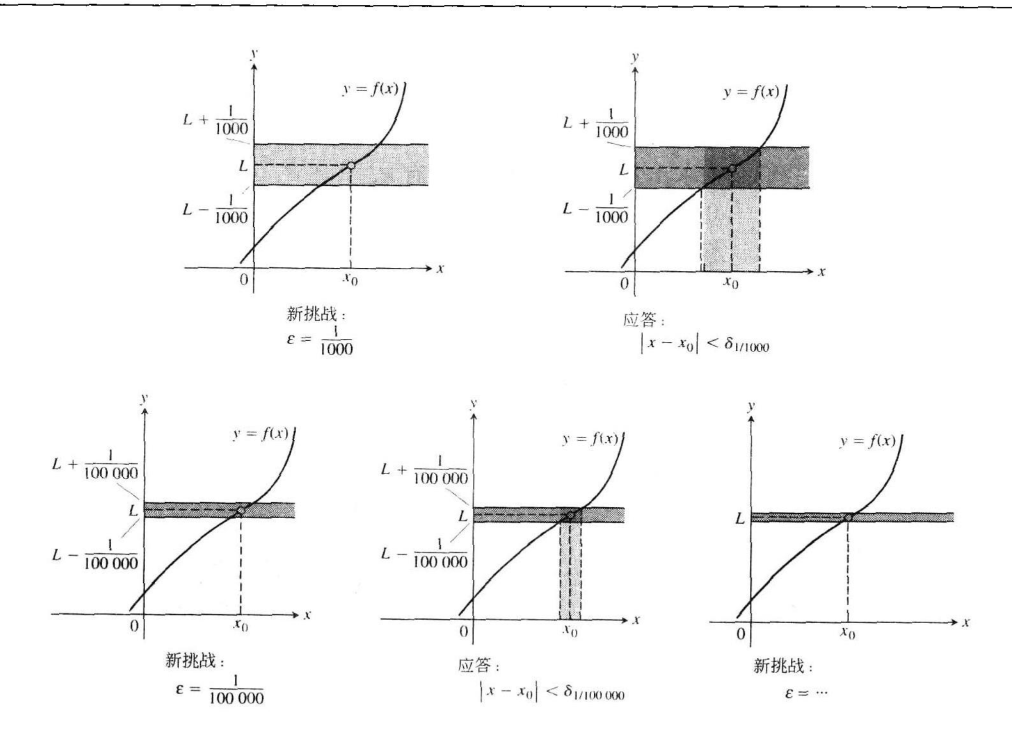
思考极限定义的一种方式是假想正在加工发电机旋转轴使其达到一个接近的容限. 我们可以对直径 $L$ 进行试加工，但是由于无法做到十全十美，必须满足于达到介于 $L-\varepsilon$ 和 $L+\varepsilon$ 之间的某个直径 $f(x)$. $\delta$ 是对 $x$ 的精度控制设定的度量，旋转轴的直径必须保证达到这个精度. 注意，当误差容限变得更严格时，可能必须调整 $\delta$. 就是说，$\delta$ 的取值，即必须达到的精度控制设定，依赖于误差容限 $\varepsilon$ 的值.






## 2.3.2 例子：检验极限定义

极限的形式定义并未告诉如何求函数的极限，但是它使我们能够检验某个推测中的极限是否正确. 下面的例子说明如何利用极限定义证实对于特定函数的极限断言. 不过，极限定义的真正目的不在于做这样的计算，而是证明普遍性定理，使特定极限的计算可能得以简化.

**例 2** 证明$\lim_{x\to 1}(5x-3)=2$.

**解** 在极限的定义中设$x_0=1$，$f(x)=5x-3$，$L=2$. 对于任何给定的$\varepsilon$，必须找到一个适合的$\delta$值，使得当$x\neq 1$和$x$处于$x_0=1$的$\delta$距离内，即只要

$$0<|x-1|<\delta$$

就能断定$f(x)$处于$L=2$的$\varepsilon$距离内，所以

$$|f(x)-2|<\varepsilon$$

我们从$\varepsilon$的不等式反推求$\delta$：

$$|(5x-3)-2|=|5x-5|<\varepsilon$$
$$5|x-1|<\varepsilon$$
$$|x-1|<\varepsilon/5$$

因此可以取$\delta=\varepsilon/5$（见图 2.18）. 若$0<|x-1|<\delta=\varepsilon/5$，则

$$|(5x-3)-2|=|5x-5|$$
$$=5|x-1|<5(\varepsilon/5)=\varepsilon$$

由此证明$\lim_{x\to 1}(5x-3)=2$.

值$\delta=\varepsilon/5$不是唯一的能够从$0<|x-1|<\delta$推出$|5x-5|<\varepsilon$的值，任何更小的正数$\delta$也是如此. 极限定义不要求"最佳的"正数$\delta$，只求一个适合的$\delta$值. ■

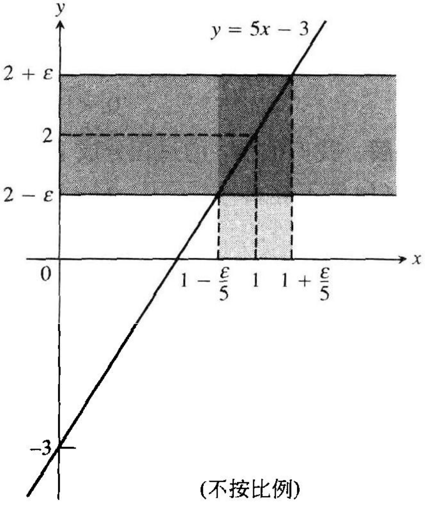



图 2.18 若$f(x)=5x-3$，则$0<|x-1|<\varepsilon/5$保证$|f(x)-2|<\varepsilon$（例 2）

**例 3** 证明：

(a) $\lim_{x \to x_0} x = x_0$.　　　　(b) $\lim_{x \to x_0} k = k$ （$k$ 为常数）.

**解**

(a) 设给定 $\varepsilon > 0$. 我们必须求出 $\delta > 0$，使得对于所有 $x$，

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon$$

如果 $\delta$ 等于 $\varepsilon$ 或更小的正数，蕴涵式成立（见图 2.19）. 这证明 $\lim_{x \to x_0} x = x$.

(b) 设给定 $\varepsilon > 0$，我们必须求出 $\delta > 0$，使得对于所有 $x$，

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |k - k| < \varepsilon$$

由于 $k - k = 0$，可以用任何正数作为 $\delta$ 而蕴涵式成立（见图 2.20）. 这证明 $\lim_{x \to x_0} k = k$. ■

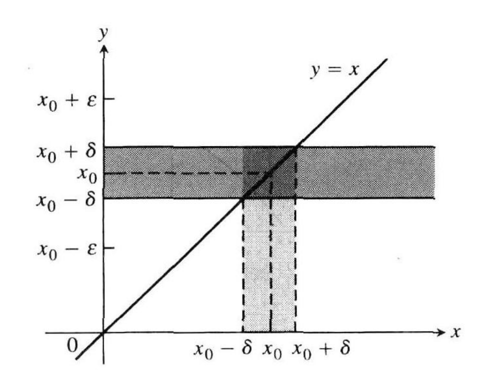



图 2.19 对于函数 $f(x) = x$，我们发现只要 $\delta \leq \varepsilon$，$0 < |x - x_0| < \delta$ 保证 $|f(x) - x_0| < \varepsilon$（例 3(a)）

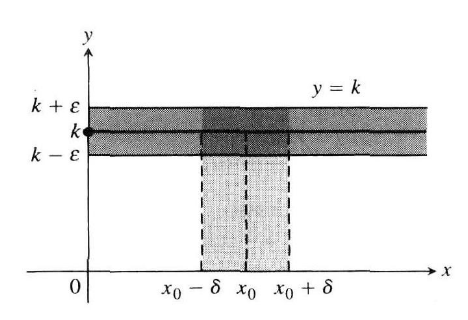



图 2.20 对于函数 $f(x) = k$，我们发现任何正数 $\delta$ 保证 $|f(x) - k| < \varepsilon$（例 3(b)）

### 2.3.3 用代数方法求给定 ε 的 δ

在例 2 和例 3 中，对于满足 $|f(x) - L| < \varepsilon$ 的围绕 $x_0$ 的值区间对于 $x_0$ 是对称的，我们可以取区间长度的一半作为 $\delta$. 如果像通常那样不存在对称性，可以取从 $x_0$ 到较近端点的距离作为 $\delta$.

**例 4** 对于极限 $\lim_{x \to 5} \sqrt{x-1} = 2$，对 $\varepsilon = 1$ 求一个适合的 $\delta > 0$. 就是说，求一个 $\delta > 0$，使得对于所有 $x$，

$$0 < |x - 5| < \delta \Rightarrow \left|\sqrt{x-1} - 2\right| < 1$$

**解** 我们把求 $\delta$ 的过程分成下面的两步.

(1) 解不等式 $\left|\sqrt{x-1} - 2\right| < 1$ 求包含 $x_0 = 5$ 的一个开区间，在区间上不等式对于所有 $x \neq x_0$ 成立：

$$\left|\sqrt{x-1} - 2\right| < 1$$
$$-1 < \sqrt{x-1} - 2 < 1$$
$$1 < \sqrt{x-1} < 3$$
$$1 < x - 1 < 9$$
$$2 < x < 10$$

这个不等式对于开区间 $(2,10)$ 中的所有 $x$ 成立，所以对于这个区间中的所有 $x \neq 5$ 也成立.

(2) 求 $\delta > 0$ 的值以便在区间 $(2,10)$ 内置放中心区间 $5 - \delta < x < 5 + \delta$（中心在 $x_0 = 5$）. 从 5 到 $(2,10)$ 较近端点的距离为 3（见图 2.21）. 如果取 $\delta = 3$ 或任何更小的正数，那么不等式 $0 < |x - 5| < \delta$ 将自动置 $x$ 于 2 和 10 之间，使 $\left|\sqrt{x-1} - 2\right| < 1$（见图 2.22）. 于是

$$0 < |x-5| < 3 \quad \Rightarrow \quad \left|\sqrt{x-1}-2\right| < 1$$ ■

> **对于给定的 $f$，$L$，$x_0$ 和 $\varepsilon>0$，如何用代数方法求 $\delta$**
>
> 求 $\delta>0$，使得对于所有 $x$，
>
> $$0<|x-x_0|<\delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-L|<\varepsilon$$
>
> 这个过程可以分两步完成.
>
> **(1)** 解不等式 $|f(x)-L|<\varepsilon$，求一个包含 $x_0$ 的开区间，在区间上不等式对于所有 $x\neq x_0$ 成立.
>
> **(2)** 求一个值 $\delta>0$，把以 $x_0$ 为中心的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 置放在区间 $(a, b)$ 的内部. 不等式 $|f(x)-L|<\varepsilon$ 对于在这个 $\delta$ 区间内的所有 $x\neq x_0$ 成立.

图 2.21 围绕 $x_0=5$ 的半径为 3 的开区间位于开区间 $(2, 10)$ 内部

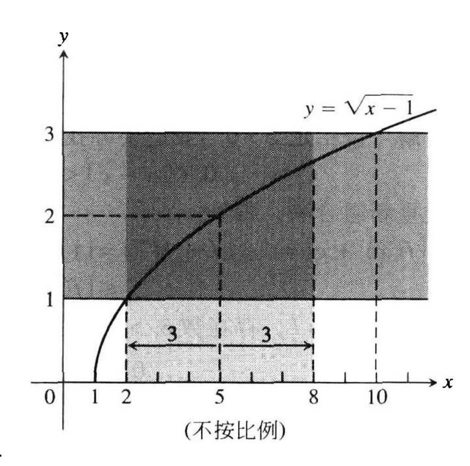



图 2.22 例 4 中的函数和区间

**例 5** 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq 2,\\ 1, & x=2.\end{cases}$ 证明 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=4$.

**解** 我们的任务是证明，对于给定的 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$，使得对于所有 $x$，

$$0<|x-2|<\delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-4|<\varepsilon$$

**(1)** 解不等式 $|f(x)-4|<\varepsilon$ 求一个包含 $x_0=2$ 的开区间，在区间上不等式对于所有 $x\neq x_0$ 成立.

对于 $x\neq x_0=2$，有 $f(x)=x^2$，待求解的不等式是 $|x^2-4|<\varepsilon$：

$$|x^2-4|<\varepsilon$$

$$-\varepsilon<x^2-4<\varepsilon$$

$$4-\varepsilon<x^2<4+\varepsilon$$

$$\sqrt{4-\varepsilon}<|x|<\sqrt{4+\varepsilon} \quad (\text{假设 } \varepsilon<4\text{；参见下式})$$

$$\sqrt{4-\varepsilon}<x<\sqrt{4+\varepsilon} \quad (\text{解不等式得到包含 } x_0=2 \text{ 的一个开区间})$$

不等式 $|f(x)-4|<\varepsilon$ 对于开区间 $(\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon})$ 内的所有 $x\neq x_0$ 成立（见图 2.23）.

**(2)** 求 $\delta>0$ 的值，使中心区间 $(2-\delta, 2+\delta)$ 置于区间 $(\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon})$ 内.

取 $\delta$ 为从 $x_0=2$ 到 $(\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon})$ 较近端点的距离. 换句话说，取 $\delta=\min\{2-\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon}-2\}$，即两个数 $2-\sqrt{4-\varepsilon}$ 和 $\sqrt{4+\varepsilon}-2$ 中的最小值（较小的值）. 如果 $\delta$ 取此数或者任何更小的正数，不等式将自动置 $x$ 于 $\sqrt{4-\varepsilon}$ 和 $\sqrt{4+\varepsilon}$ 之间，使 $|f(x)-4|<\varepsilon$. 对于所有 $x$，

$$0<|x-2|<\delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-4|<\varepsilon$$

这就完成对于 $\varepsilon<4$ 的证明.

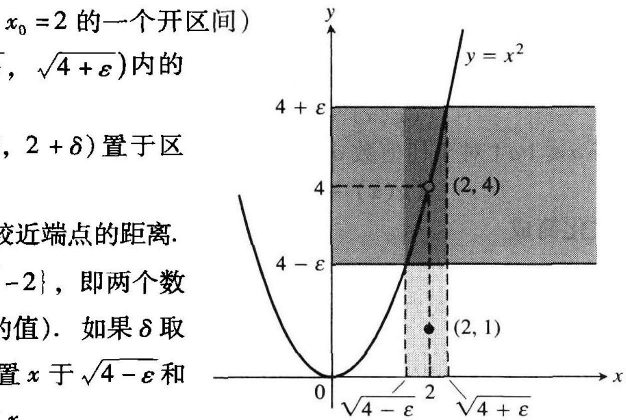



图 2.23 包含 $x_0=2$ 的开区间使例 5 中的函数满足 $|f(x)-4|<\varepsilon$

如果$\varepsilon \geqslant 4$，那么取$\delta$为从$x_0=2$到区间$(0, \sqrt{4+\varepsilon})$的较近端点的距离. 换句话说，取$\delta=\min\{2, \sqrt{4+\varepsilon}-2\}$(参见图2.23). ■

### 2.3.4 用极限定义证明定理

通常我们不凭借极限的形式定义验证特定的极限，像在前面几个例子那样. 相反，我们的兴趣是在证明极限的一般性定理，尤其是2.2节中的定理. 极限定义被用于证明那些定理(见附录A.5). 作为例子，我们证明定理1第(1)部分的和法则.

**例6** 假设$\lim_{x \to c} f(x)=L$，$\lim_{x \to c} g(x)=M$，证明

$$\lim_{x \to c}(f(x)+g(x))=L+M$$

**解** 设给定$\varepsilon>0$. 我们要寻找一个正数$\delta$，使得对于所有$x$，

$$0<|x-c|<\delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)+g(x)-(L+M)|<\varepsilon$$

通过重新组合项，得到

$$\begin{aligned}|f(x)+g(x)-(L+M)| &= |(f(x)-L)+(g(x)-M)| \\ &\leqslant |f(x)-L|+|g(x)-M| \quad (\text{三角不等式} |a+b| \leqslant |a|+|b|)\end{aligned}$$

由于$\lim_{x \to c} f(x)=L$，存在数$\delta_1>0$，使得对于所有$x$，

$$0<|x-c|<\delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x)-L|<\varepsilon/2$$

同样，由于$\lim_{x \to c} g(x)=M$，存在数$\delta_2>0$，使得对于所有$x$，

$$0<|x-c|<\delta_2 \quad \Rightarrow \quad |g(x)-M|<\varepsilon/2$$

令$\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$，即$\delta_1$和$\delta_2$中较小的一个. 若$0<|x-c|<\delta$，则$|x-c|<\delta_1$，所以$|f(x)-L|<\varepsilon/2$，同时$|x-c|<\delta_2$，所以$|g(x)-M|<\varepsilon/2$. 因此

$$|f(x)+g(x)-(L+M)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

这证明$\lim_{x \to c}(f(x)+g(x))=L+M$. ■

我们再证明2.2节中的定理5.

**例7** 假设$\lim_{x \to c} f(x)=L$及$\lim_{x \to c} g(x)=M$，且对于包含$c$的一个开区间上的所有$x$($c$自身可能除外)有$f(x) \leqslant g(x)$，证明$L \leqslant M$.

**解** 用反证法证明. 假定结论相反，即$L>M$. 根据定理1中函数之差的极限性质，

$$\lim_{x \to c}(g(x)-f(x))=M-L$$

因此，对于任何$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得

$$|(g(x)-f(x))-(M-L)|<\varepsilon, \quad \text{只要} 0<|x-c|<\delta$$

根据假设有$L-M>0$，特别取$\varepsilon=L-M$，得到一个数$\delta>0$，使得

$$|(g(x)-f(x))-(M-L)|<L-M, \quad \text{只要} 0<|x-c|<\delta$$

由于$a \leqslant |a|$对于任何数$a$成立，故有

$$(g(x)-f(x))-(M-L)<L-M, \quad \text{只要} 0<|x-c|<8$$

此式化简成

$$g(x)<f(x), \quad \text{只要} 0<|x-c|<\delta$$

但是，这个结果同$f(x) \leqslant g(x)$矛盾. 因此不等式$L>M$必定不成立. 所以$L \leqslant M$. ■

### 习题2.3

在习题1~6中，画出$x$轴上包含点$x_0$的区间$(a, b)$. 试求值$\delta>0$，使得对于所有$x$，

$$0<|x-x_0|<\delta \quad \Rightarrow \quad a<x<b$$

**1.** $a=1$，$b=7$，$x_0=5$.

**2.** $a=1$，$b=7$，$x_0=2$.

**3.** $a=-7/2$，$b=-1/2$，$x_0=-3$.

**4.** $a=-7/2$，$b=-1/2$，$x_0=-3/2$.

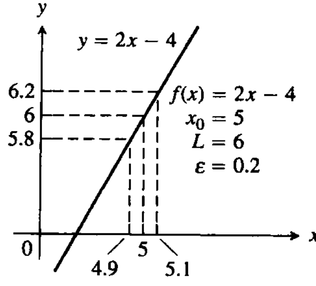
**5.** $a=4/9$，$b=4/7$，$x_0=1/2$.

**6.** $a=2.7591$，$b=3.2391$，$x_0=3$.

在习题 7 ~ 14 中，利用图形求 $\delta > 0$，使得对于所有 $x$，

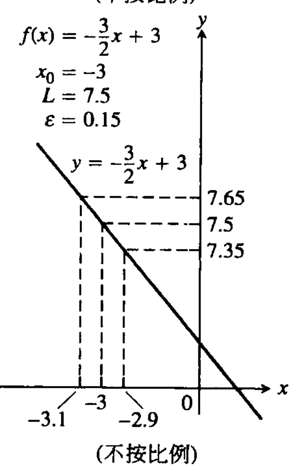
$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

**7.**



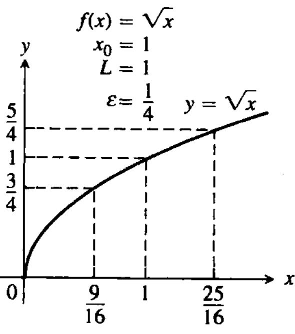

(不按比例)

**8.**

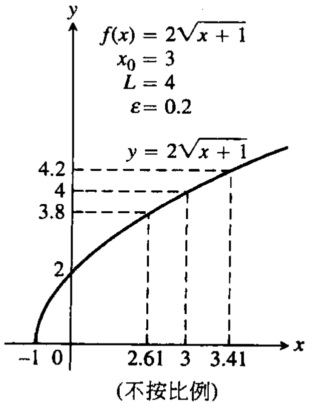



(不按比例)

**9.**

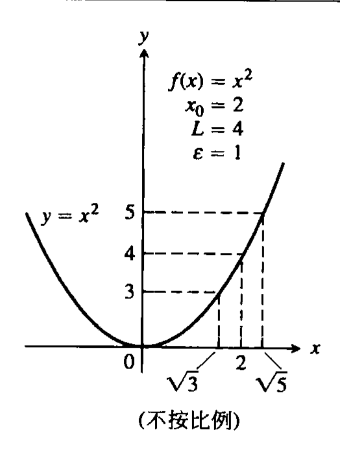



**10.**



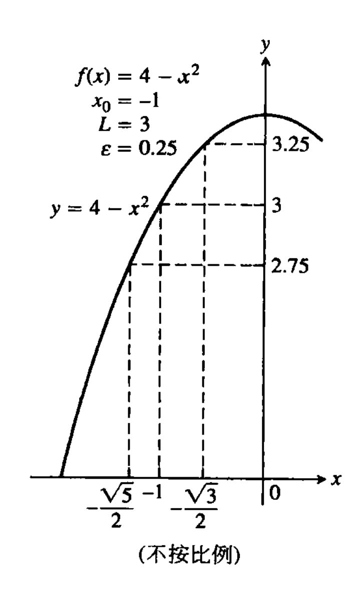

(不按比例)

**11.**



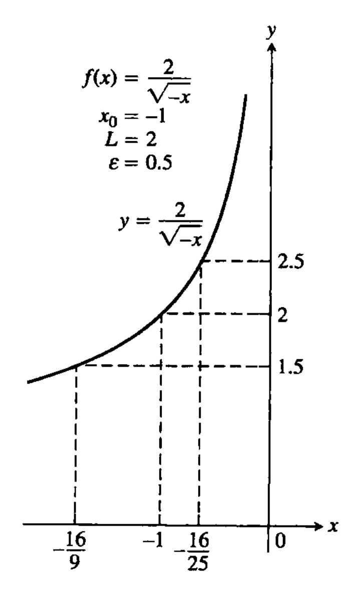

(不按比例)

**12.**

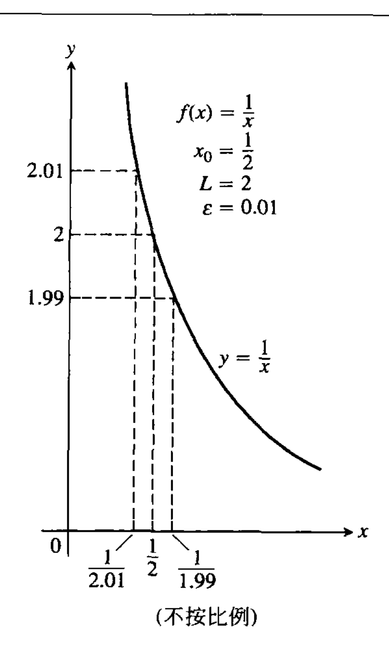



(不按比例)

**13.**



14.



(不按比例)

在习题 15 ~ 30 中，每题给出函数 $f(x)$ 和数 $L$，$x_0$ 以及 $\varepsilon>0$. 在每种情况求一个围绕 $x_0$ 的开区间，使不等式 $|f(x)-L|<\varepsilon$ 在区间上成立. 然后给出值 $\delta>0$，使得对于满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的所有 $x$，不等式 $|f(x)-L|<\varepsilon$ 成立.

**15.** $f(x)=x+1$，$L=5$，$x_0=4$，$\varepsilon=0.01$.

**16.** $f(x)=2x-2$，$L=-6$，$x_0=-2$，$\varepsilon=0.02$.

**17.** $f(x)=\sqrt{x+1}$，$L=1$，$x_0=0$，$\varepsilon=0.1$.

**18.** $f(x)=\sqrt{x}$，$L=1/2$，$x_0=1/4$，$\varepsilon=0.1$.

**19.** $f(x)=\sqrt{19-x}$，$L=3$，$x_0=10$，$\varepsilon=1$.

**20.** $f(x)=\sqrt{x-7}$，$L=4$，$x_0=23$，$\varepsilon=1$.

**21.** $f(x)=1/x$，$L=1/4$，$x_0=4$，$\varepsilon=0.05$.

**22.** $f(x)=x^2$，$L=3$，$x_0=\sqrt{3}$，$\varepsilon=0.1$.

**23.** $f(x)=x^2$，$L=4$，$x_0=-2$，$\varepsilon=0.5$.

**24.** $f(x)=1/x$，$L=-1$，$x_0=-1$，$\varepsilon=0.1$.

**25.** $f(x)=x^2-5$，$L=11$，$x_0=4$，$\varepsilon=1$.

**26.** $f(x)=120/x$，$L=5$，$x_0=24$，$\varepsilon=1$.

**27.** $f(x)=mx$，$m>0$，$L=2m$，$x_0=2$，$\varepsilon=0.03$.

**28.** $f(x)=mx$，$m>0$，$L=3m$，$x_0=3$，$\varepsilon=c>0$.

**29.** $f(x)=mx+b$，$m>0$，$L=(m/2)+b$，$x_0=1/2$，$\varepsilon=c>0$.

**30.** $f(x)=mx+b$，$m>0$，$L=m+b$，$x_0=1$，$\varepsilon=0.05$.

在习题 31 ~ 36 中，每题给出函数 $f(x)$，点 $x_0$ 以及正数 $\varepsilon$. 求 $L=\lim_{x\to x_0}f(x)$. 然后求数 $\delta>0$，使得对于所有 $x$，

$$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

**31.** $f(x)=3-2x$，$x_0=3$，$\varepsilon=0.02$.

**32.** $f(x)=-3x-2$，$x_0=-1$，$\varepsilon=0.03$.

**33.** $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$，$x_0=2$，$\varepsilon=0.05$.

**34.** $f(x)=\dfrac{x^2+6x+5}{x+5}$，$x_0=-5$，$\varepsilon=0.05$.

**35.** $f(x)=\sqrt{1-5x}$，$x_0=-3$，$\varepsilon=0.5$.

**36.** $f(x)=4/x$，$x_0=2$，$\varepsilon=0.4$.

在习题 37 ~ 50 中，证明极限命题.

**37.** $\lim_{x\to4}(9-x)=5$.

**38.** $\lim_{x\to3}(3x-7)=2$.

**39.** $\lim_{x\to9}\sqrt{x-5}=2$.

**40.** $\lim_{x\to0}\sqrt{4-x}=2$.

**41.** $\lim_{x\to1}f(x)=1$，如果 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq1,\\ 2, & x=1.\end{cases}$

**42.** $\lim_{x\to-2}f(x)=4$，如果 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq-2,\\ 1, & x=-2.\end{cases}$

**43.** $\lim_{x\to1}\dfrac{1}{x}=1$.

**44.** $\lim_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{3}$.

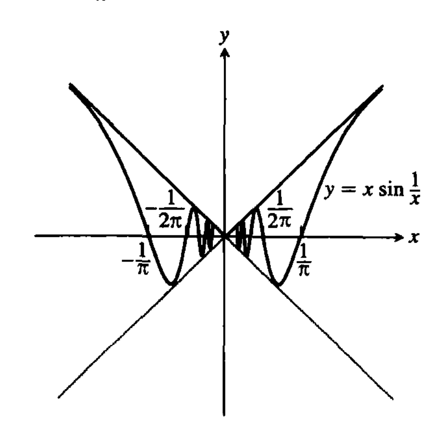
**45.** $\lim_{x\to-3}\dfrac{x^2-9}{x+3}=-6$.

**46.** $\lim_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

**47.** $\lim_{x\to1}f(x)=2$，如果 $f(x)=\begin{cases}4-2x, & x<1,\\ 6x-4, & x\geqslant1.\end{cases}$

**48.** $\lim_{x\to0}f(x)=0$，如果 $f(x)=\begin{cases}2x, & x<0,\\ x/2, & x\geqslant0.\end{cases}$

**49.** $\lim_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

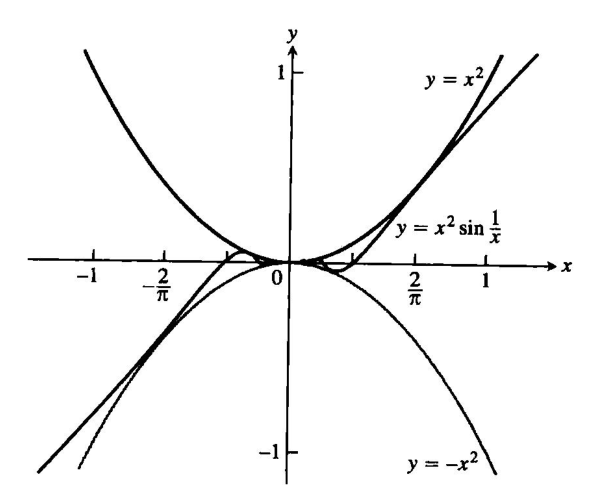



**50.** $\lim_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$.

**51.** 解释 $\lim_{x\to0}g(x)=k$ 的含义.

**52.** 证明：$\lim_{x\to c}f(x)=L$，当且仅当 $\lim_{h\to0}f(h+c)=L$.

**53.** **关于极限的不正确命题** 用例子说明下述命题是不正确的：




"如果当 $x$ 趋近 $x_0$ 时 $f(x)$ 越来越接近数 $L$，那么 $L$ 是 $f(x)$ 当 $x$ 趋近 $x_0$ 时的极限."

解释例子中的函数为什么当 $x \to x_0$ 时不具有作为极限的 $L$ 值.

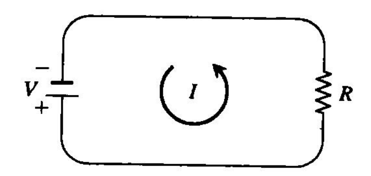
**54. 关于极限的另外一个不正确命题** 用例子说明下述命题是不正确的：

"如果对于给定的任何 $\varepsilon > 0$，存在一个 $x$ 值和数 $L$，使得 $|f(x) - L| < \varepsilon$，那么 $L$ 是 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限."

解释例子中的函数为什么当 $x \to x_0$ 时不存在作为极限的给定 $L$ 值.

**T55. 磨发动机汽缸** 在承接把发动机汽缸横截面积磨到 9 平方英寸之前，需要知道你能够容许距离理想的汽缸直径 $x_0 = 3.385$ 有多大偏差，仍然使汽缸要求的 9 平方英寸面积不超出 0.01 平方英寸误差. 为了求解，令 $A = \pi(x/2)^2$ 并求 $x$ 的区间，你必须把 $x$ 限制在区间中使 $|A - 9| \leqslant 0.01$. 你求得什么区间？

**56. 制造电阻元件** 对于附图所示的电路，欧姆定律表示成 $V = RI$. 在这个等式中，$V$ 是恒定的电压，$I$ 是以安培为单位的电流，$R$ 是以欧姆为单位的电阻. 你的公司要求一家公司为 $V$ 为 120 伏和 $I$ 达到 $5 \pm 0.1$ 安培的电路供应电阻元件. 为使 $I$ 处于 $I_0 = 5$ 的 0.1 安培的范围内，$R$ 必须处于什么区间内？

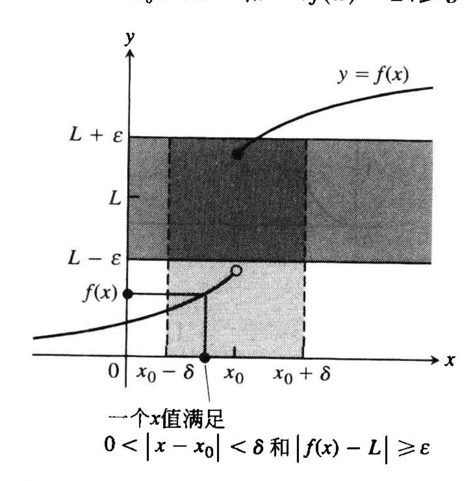



**证明函数 $f(x)$ 的极限不是 $L$** 证明 $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq L$ 的方法如下：提供这样一个 $\varepsilon > 0$，使得不可能存在 $\delta > 0$ 满足条件：对于所有 $x$，

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

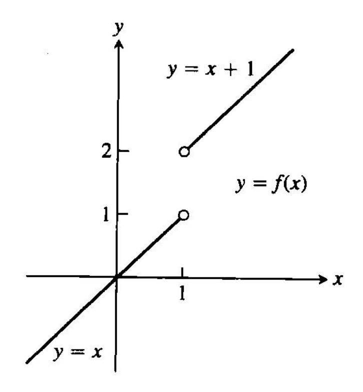
完成这个证明的步骤是，对于候选值 $\varepsilon$，证明对于每一个 $\delta > 0$ 都存在一个 $x$ 值，使得

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad 和 \quad |f(x) - L| \geqslant \varepsilon$$




在习题 57 ~ 60 中，应用上述证明方法.

**57.** 令 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1, \\ x + 1, & x > 1. \end{cases}$




**(a)** 令 $\varepsilon = 1/2$. 证明不存在 $\delta > 0$ 满足下列条件：对于所有 $x$，

$$0 < |x - 1| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 2| < 1/2$$

就是说，对于每个 $\delta > 0$，证明存在一个 $x$ 值，使得

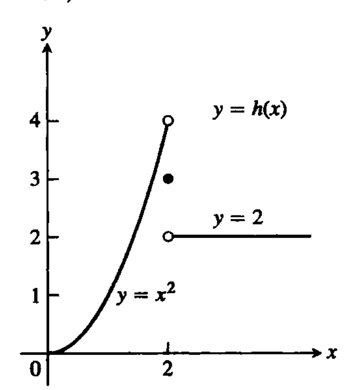
$$0 < |x - 1| < \delta \quad 和 \quad |f(x) - 2| \geqslant 1/2$$

这将证明 $\lim_{x \to 1} f(x) \neq 2$.

**(b)** 证明 $\lim_{x \to 1} f(x) \neq 1$.

(c) 证明$\lim_{x\to 1} f(x) \neq 1.5$.

**58.** 令 $h(x) = \begin{cases} x^2, & x<2, \\ 3, & x=2, \\ 2, & x>2. \end{cases}$




证明:

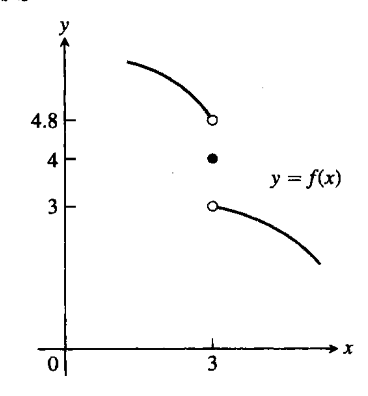
(a) $\lim_{x\to 2} h(x) \neq 4$. (b) $\lim_{x\to 2} h(x) \neq 3$.

(c) $\lim_{x\to 2} h(x) \neq 2$.

**59.** 对于附图表示的函数，解释极限不等于所给值的理由.

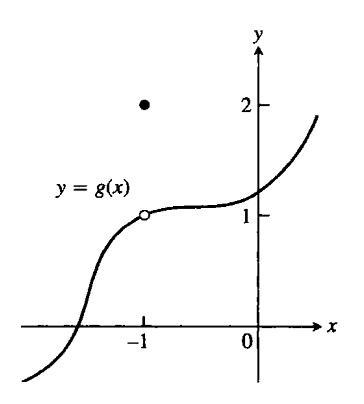
(a) $\lim_{x\to 3} f(x) \neq 4$. (b) $\lim_{x\to 3} f(x) \neq 4.8$.

(c) $\lim_{x\to 3} f(x) \neq 3$.




**60.** (a) 对于附图表示的函数，证明 $\lim_{x\to -1} g(x) \neq 2$.

(b) $\lim_{x\to -1} g(x)$ 是否存在? 如果存在，极限值是什么? 如果不存在，原因何在?




**计算机探究**

在习题61 ~66 中，进一步探究用图形方法求 $\delta$. 用一种 CAS(计算机代数系统)执行下列处理步骤:

(a) 绘制函数 $y=f(x)$ 在 $x$ 趋近点 $x_0$ 附近的图形.

(b) 猜测极限值 $L$，然后用符号方式计算极限，检查猜测是否正确.

(c) 利用值 $\varepsilon=0.2$ 画带直线 $y_1=L-\varepsilon$ 和 $y_2=L+\varepsilon$ 以及函数在点 $x_0$ 附近的图形.

(d) 从步骤(c)画出的图形中估计出这样一个 $\delta>0$，使得对于所有 $x$,

$$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

在区间 $0<|x-x_0|<\delta$ 上画出 $f$, $y_1$ 和 $y_2$，检查所作的估计. 对于视窗使用 $x_0-2\delta \leqslant x \leqslant x_0+2\delta$ 和 $L-2\varepsilon \leqslant y \leqslant L+2\varepsilon$. 如果任何函数值位于区间$[L-\varepsilon, L+\varepsilon]$之外，说明选择的 $\delta$ 太大. 用一个更小的 $\delta$ 值再试.

(e) 接着对 $\in=0.1$, 0.05 和 0.001 重复步骤(c)和(d).

**61.** $f(x)=\dfrac{x^4-81}{x-3}$, $x_0=3$.

**62.** $f(x)=\dfrac{5x^3+9x^2}{2x^5+3x^2}$, $x_0=0$.

**63.** $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{3x}$, $x_0=0$.

**64.** $f(x)=\dfrac{x(1-\cos x)}{x-\sin x}$, $x_0=0$.

**65.** $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$, $x_0=1$.

**66.** $f(x)=\dfrac{3x^2-(7x+1)\sqrt{x}+5}{x-1}$, $x_0=1$.

## 2.4 单侧极限与在无穷大的极限

在这一节我们把极限的概念扩大到单侧极限，就是当 $x$ 仅从 $x_0$ 的左侧($x<x_0$)或者 $x_0$ 的右侧($x>x_0$)趋近 $x_0$ 时的极限. 此外还要分析某些有理函数及其他函数的图形当 $x\to\pm\infty$ 时的极限特性.

### 2.4.1 单侧极限

为了使函数$f$当$x$趋近$c$时有极限$L$，$f$必须在$x=c$的两侧有定义，而且当$x$从任何一侧趋近$c$时函数值$f(x)$必须趋近$L$. 由于这个原因，通常的极限称为**双侧极限**.

如果$f$在点$c$不存在双侧极限，它仍然可能有单侧极限，也就是仅从一侧趋近时的极限. 如果是从右侧趋近，极限称为**右极限**. 从左侧趋近的极限称为**左极限**.

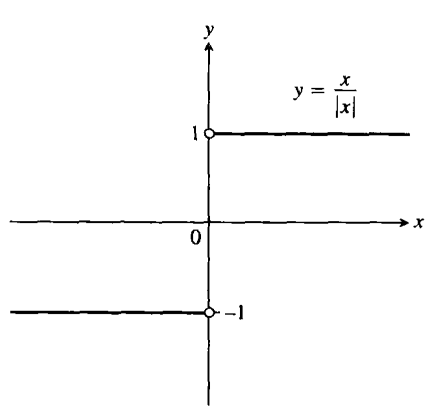


图 2.24 在原点的左极限和右极限不同

函数$f(x)=x/|x|$（见图 2.24）当$x$从右侧趋近 0 时有极限 1，而当$x$从左侧趋近 0 时有极限 $-1$. 由于这两个单侧极限不同，$f(x)$当$x$趋近 0 时不存在单一的函数值. 所以$f(x)$在$x=0$没有（双侧）极限.

在直观上，如$f(x)$定义在区间$(c, b)$上，其中$c<b$，且当$x$从区间内部趋近$c$时$f(x)$任意地趋近$L$，那么$f$在$c$有右极限$L$. 我们记为

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L$$

符号“$x\to c^+$”的含义是仅考虑大于$c$的$x$值.

同样，如果$f(x)$定义在区间$(a, c)$上，其中$a<c$，且当$x$从区间内部趋近$c$时$f(x)$任意地趋近$M$，那么$f$在$c$有左极限，我们记为

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = M$$

符号“$x\to c^-$”的含义是仅考虑小于$c$的$x$值.

这些非形式定义在图 2.25 中说明. 对于图 2.24 中的$f(x)=x/|x|$，我们有

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \quad 及 \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$$

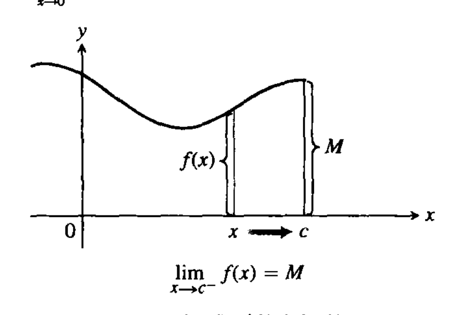


图 2.25

**例 1** $f(x)=\sqrt{4-x^2}$的定义域是$[-2, 2]$；它的图形为图 2.26 中的半圆. 我们有

$$\lim_{x\to -2^+} \sqrt{4-x^2} = 0 \quad 及 \quad \lim_{x\to 2^-} \sqrt{4-x^2} = 0$$

这个函数在$x=-2$没有左极限或者在$x=2$没有右极限. 它在 $-2$ 或者 2 没有通常的双侧极限. ■

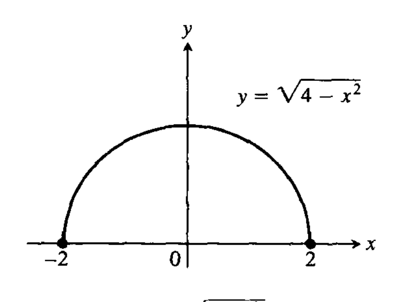


图 2.26 $\lim_{x\to 2^-}\sqrt{4-x^2}=0$ 及 $\lim_{x\to -2^+}\sqrt{4-x^2}=0$（例 1）

单侧极限具有 2.2 节的定理 1 中列出的全部性质. 两个函数之和的右极限等于它们的右极限之和，等等. 多项式和有理函数的极限定理对于单侧极限成立，像夹层定理和定理 5. 单侧极

限同极限以下述方式相联系.

> **定理 6**　函数$f(x)$当$x$趋近$c$时有极限，当且仅当它有左极限和右极限以及这两个单侧极限相等：
> $$\lim_{x\to c}f(x)=L \iff \lim_{x\to c^-}f(x)=L \text{ 及 } \lim_{x\to c^+}f(x)=L$$

**例 2**　对于图 2.27 中画出的函数，

在 $x=0$：　$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$，

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$和$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在. 函数在$x=0$左侧无定义.

在 $x=1$：　$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=0$，虽然$f(1)=1$，

$\lim\limits_{n\to 1^+}f(x)=1$，

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$不存在，右极限和左极限不相等.

在 $x=2$：　$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=1$，

$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=1$，

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=1$，虽然$f(2)=2$.

在 $x=3$：　$\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}f(x)=f(3)=2$.

在 $x=4$：　$\lim\limits_{x\to 4^-}f(x)=1$，虽然$f(4)\neq 1$，

$\lim\limits_{x\to 4^+}f(x)$和$\lim\limits_{x\to 4}f(x)$不存在. 函数在$x=4$右侧无定义. ■

图 2.27　例 2 中函数的图形

在$[0, 4]$上其他任何点$c$，$f(x)$有极限$f(c)$.

### 2.4.2　单侧极限的精确定义

2.3 节中极限的形式定义容易修改成单侧极限的定义.

> **定义**　我们说$f(x)$**在$x_0$有右极限$L$**，并写成
> $$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=L \quad （参见图 2.28）$$
> 只要对于每个数$\varepsilon>0$，存在一个相应的数$\delta>0$，使得对于所有$x$，
> $$x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$
> 我们说$f(x)$**在$x_0$有左极限$L$**，并写成
> $$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=L \quad （参见图 2.29）$$
> 只要对于每个$\varepsilon>0$，存在一个相应的数$\delta>0$，使得对于所有$x$，
> $$x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

**例 3**　证明$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$.

**解**　假设给定$\varepsilon>0$. 这里$x_0=0$及$L=0$，所以需要求$\delta>0$，使得对于所有$x$，
$$0<x<\delta \Rightarrow |\sqrt{x}-0|<\varepsilon$$
或
$$0<x<\delta \Rightarrow \sqrt{x}<\varepsilon$$
对后面这个不等式两端取平方，给出
$$x<\varepsilon^2,\quad 如果\quad 0<x<\delta$$

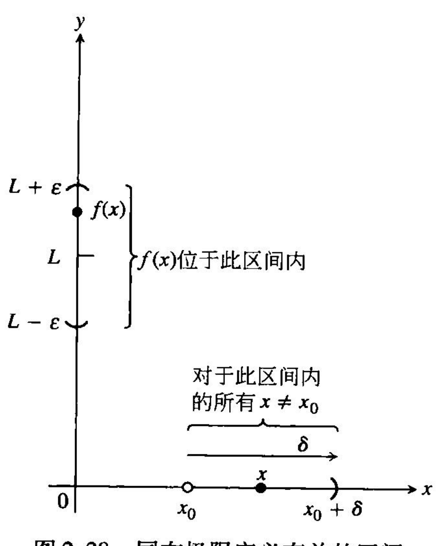



图 2.28 同右极限定义有关的区间

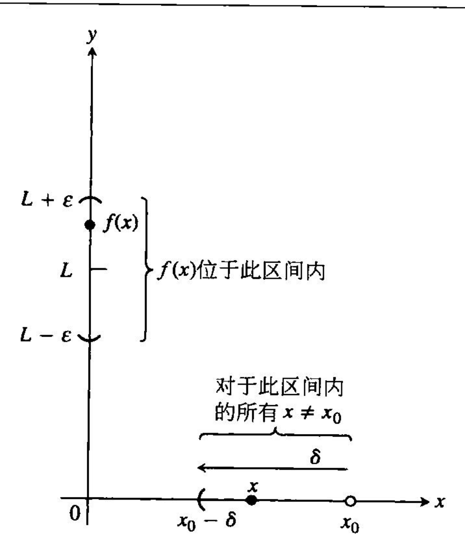



图 2.29 同左极限定义有关的区间

如果选择 $\delta=\varepsilon^2$，就有

$$0 < x < \delta = \varepsilon^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} < \varepsilon$$

或

$$0 < x < \varepsilon^2 \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$$

按照定义，这证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$(见图 2.30). ■

到目前为止，考察的函数在涉及的每个点都有某种类型的极限. 一般说来，不必需是这种情形.

**例 4** 证明 $y=\sin(1/x)$ 当 $x$ 从任意一侧趋近 0 时不存在极限(见图 2.31).

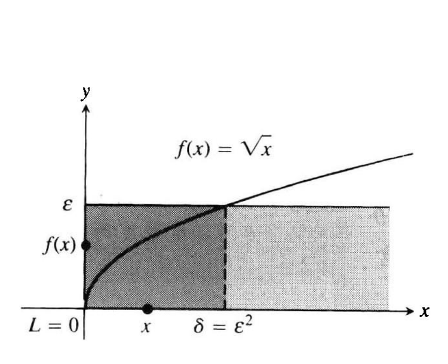



图 2.30 例 3 中 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$

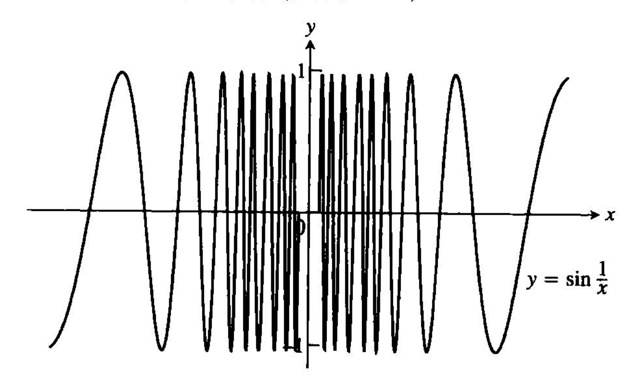
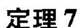



图 2.31 函数 $y=\sin(1/x)$ 当 $x$ 趋近零时既无右极限也无左极限

**解** 当 $x\to 0$ 时，它的倒数 $1/x$ 无限地增长，而 $\sin(1/x)$ 的值从 $-1$ 到 1 周期性地重复. 函数值当$x\to 0$ 时不趋近一个数 $L$. 无论限制 $x$ 为正值或者是负值，都是这种情况. 函数在 $x=0$ 既无右极限也无左极限. ■

### 2.4.3 包含$(\sin\theta)/\theta$的极限

关于$(\sin\theta)/\theta$的一个主要事实是，它的极限当 $\theta\to 0$ 时按弧度量度的值为 1. 这个结果可以从图 2.32 中看出，并用夹层定理以代数方法证实. 在 3.4 节中将会了解这个极限的重要性，在那里要讨论三角函数的瞬时变化率.



**定理 7**

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1 \quad (\theta\text{ 取弧度}) \qquad (1)$$

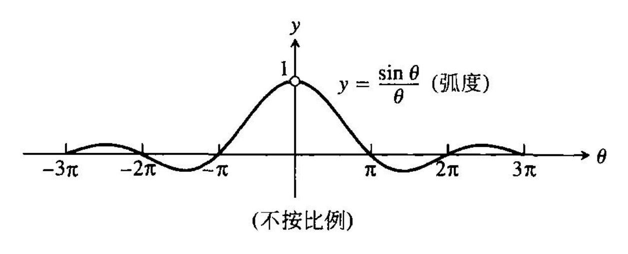
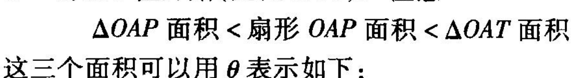



图 2.32 $f(\theta)=(\sin\theta)/\theta$ 的图形，显示当 $\theta\to 0$ 时右极限和左极限均为 1

**证明** 方案是证明右极限和左极限均为 1．于是就推知双侧极限也是 1.

为了证明右极限为 1，我们从小于 $\pi/2$ 的正 $\theta$ 值开始(见图 2.33)．注意



$$\Delta OAP\text{ 面积} < \text{扇形 } OAP\text{ 面积} < \Delta OAT\text{ 面积}$$

这三个面积可以用 $\theta$ 表示如下：

$$\Delta OAP\text{ 面积} = \frac{1}{2}\text{底}\times\text{高} = \frac{1}{2}(1)(\sin\theta) = \frac{1}{2}\sin\theta$$

$$\text{扇形 } OAP\text{ 面积} = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(1)^2\theta = \frac{\theta}{2} \qquad (2)$$

$$\Delta OAT\text{ 面积} = \frac{1}{2}\text{底}\times\text{高} = \frac{1}{2}(1)(\tan\theta) = \frac{1}{2}\tan\theta$$

因此，

$$\frac{1}{2}\sin\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta$$

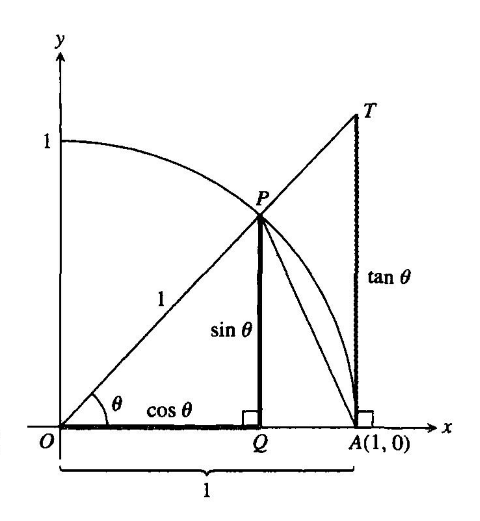



图 2.33 用于定理 7 证明的图形：$TA/OA=\tan\theta$，但 $OA=1$，所以 $TA=\tan\theta$

上面不等式当用数 $(1/2)\sin\theta$ 同除三项后仍然成立，因为 $(1/2)\sin\theta$ 当 $0<\theta<\pi/2$ 时为正数：

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

取倒数使不等式反向：

$$1 > \frac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta$$

由于 $\lim_{\theta\to 0^+}\cos\theta=1$（见 2.2 节例 11(b)），由夹层定理得到

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

> **附注**
>
> 等式(2)是用弧度量度的结果：扇形 $OAP$ 面积仅当 $\theta$ 用弧度量度时为 $\theta/2$.

回忆 $\sin\theta$ 和 $\theta$ 均为奇函数(见 1.1 节)．所以，$f(\theta)=(\sin\theta)/\theta$ 是偶函数，其图形对于 $y$ 轴对称(参见图 2.32)．这种对称性隐含在 $\theta=0$ 存在左极限，并且同右极限具有同样值：

$$\lim_{\theta\to 0^-}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 = \lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta}$$

所以，由定理 6 有 $\lim_{\theta\to 0}(\sin\theta)/\theta=1$. ■

**例 5** 证明

(**a**) $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0$ 及 (**b**) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x}=\frac{2}{5}$.

**解**

(**a**) 利用半角公式 $\cos h=1-2\sin^2(h/2)$，计算出

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{2\sin^2(h/2)}{h}$$

$$= -\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\sin\theta \quad (令\ \theta = h/2)$$

$$= -(1)(0) = 0$$

(b)等式(1)不适用于例中的分式. 我们需要以 $2x$ 而不是 $5x$ 为分母. 对分子分母同乘以 2/5 产生分母 $2x$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x} = \lim_{x\to 0}\frac{(2/5)\cdot\sin 2x}{(2/5)\cdot 5x}$$

$$= \frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} \quad (现在等式(1)适用于\ \theta = 2x)$$

$$= \frac{2}{5}(1) = \frac{2}{5}$$

■

### 2.4.4 当 $x\to\pm\infty$ 时的有限极限

无穷大记号($\infty$)不代表一个实数. 我们用$\infty$表示一个函数在它的定义域或者值域中的值超过所有有限界限时的性质. 例如, 函数$f(x)=1/x$ 对于所有 $x\neq 0$ 有定义(见图 2.34). 当 $x$ 取正值并变得越来越大时, $1/x$ 变得越来越小. 当 $x$ 取负值而它的大小变得越来越大时, $1/x$ 同样变得越来越小. 我们把这种观察结果概括为 $f(x)=1/x$ 当 $x\to\pm\infty$ 时以 0 为极限, 或者说 0 是 $f(x)=1/x$ 在正负无穷大的极限. 下面给出精确定义.

**定义**

(1)我们说$f(x)$当 **$x$ 趋近无穷大时有极限 $L$**, 并记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

是指对于每个数 $\varepsilon>0$, 存在一个相应的数 $M$, 使得对所有 $x$,

$$x > M \quad\Rightarrow\quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

(2)我们说$f(x)$当 **$x$ 趋近负无穷大时有极限 $L$**, 并记为

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$$

是指对于每个数 $\varepsilon>0$, 存在一个相应的数 $N$, 使得对所有 $x$,

$$x < N \quad\Rightarrow\quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

从直观上看, 如果当 $x$ 从正方向越来越远离原点时, $f(x)$任意地接近 $L$, 那么$\lim_{x\to\infty} f(x)=L$. 同样, 如果当 $x$ 从负方向越来越远离原点时, $f(x)$任意地接近 $L$, 那么 $\lim_{x\to -\infty} f(x)=L$.

计算函数当 $x\to\pm\infty$ 时的极限, 采用 2.2 节计算有限极限的同样对策. 我们首先求常数函数 $y=k$ 和恒等函数 $y=x$ 的极限. 然后应用关于函数代数组合的极限定理, 把得到的结果推广到其他函数. 下面我们做同样的事情, 不过初始函数是 $y=k$ 和 $y=1/x$ 而不是 $y=k$ 和 $y=x$.

应用极限的形式定义要证明的基本事实是

$$\lim_{x\to\pm\infty} k = k \quad 及 \quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x} = 0 \tag{3}$$

我们在下面例子中证明后面一个极限而把前面一个极限的证明作为习题(见习题 75 和 76).

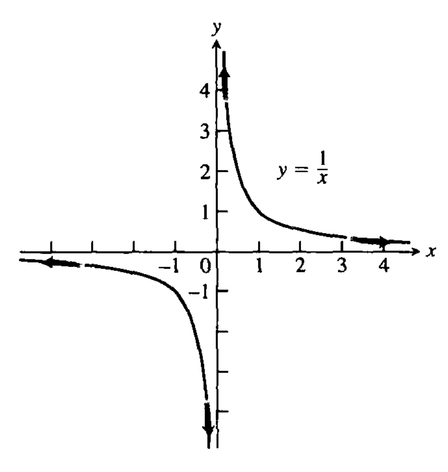



图 2.34 函数 $y=1/x$ 的图形当 $x\to\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时趋近 0

**例 6** 证明

(a) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.　　　(b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$.

**解** (a) 假设已给定 $\varepsilon>0$. 必须找出一个数 $M$，使得对于所有 $x$，

$$x>M\quad\Rightarrow\quad\left|\frac{1}{x}-0\right|=\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$$

如果取 $M=1/\varepsilon$ 或任何更大的正数，蕴涵式成立(见图 2.35). 这就证明 $\lim_{x\to-\infty}(1/x)=0$.

(b) 假设已给定 $\varepsilon>0$，必须找出一个数 $N$，使得对于所有 $x$，

$$x<N\quad\Rightarrow\quad\left|\frac{1}{x}-0\right|=\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$$

如果取 $N=-1/\varepsilon$ 或任何比 $-1/\varepsilon$ 小的值，蕴涵式成立(见图 2.35). 这就证明 $\lim_{x\to-\infty}(1/x)=0$. ■

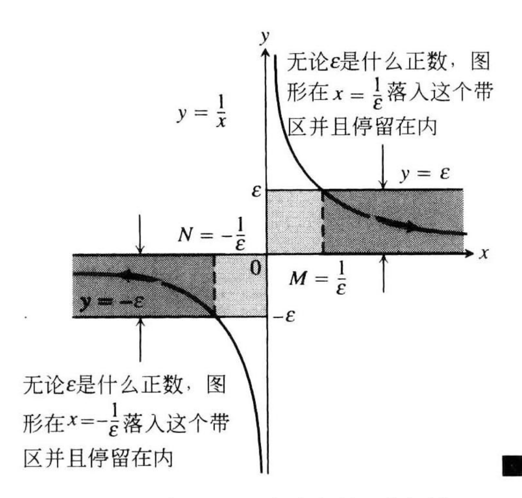



图 2.35 例 6 论证中隐含的几何图像

在无穷大的极限所具有的性质，同有限极限的性质相似.

> **定理 8 (当 $x\to\pm\infty$ 时的极限法则)** 如果 $L$，$M$ 和 $k$ 是实数，并且
> $$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=L,\quad \lim_{x\to\pm\infty}g(x)=M$$
> 那么有下列法则：
>
> (1) 和法则　$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)+g(x))=L+M$
>
> (2) 差法则　$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-g(x))=L-M$
>
> (3) 积法则　$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)\cdot g(x))=L\cdot M$
>
> (4) 常数倍法则　$\lim_{x\to\pm\infty}(k\cdot f(x))=k\cdot L$
>
> (5) 商法则　$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M},\quad M\neq0$
>
> (6) 幂法则　若 $r$ 和 $s$ 是无公因数的整数，$s\neq0$，则
> $$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x))^{r/s}=L^{r/s}$$
> 假设 $L^{r/s}$ 是实数(如果 $s$ 是偶数，那么设 $L>0$).

这些性质同 2.2 节定理 1 中的性质完全一样，我们使用它们的方式也相同.

**例 7**

(a) $\lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}5+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$　(和法则)

$=5+0=5$. (已知极限)

(b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\pi\sqrt{3}}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\pi\sqrt{3}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}$

$=\lim_{x\to-\infty}\pi\sqrt{3}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$　(积法则)

$=\pi\sqrt{3}\cdot0\cdot0=0$. (已知极限) ■

### 2.4.5 有理函数在无穷大的极限

为了确定有理函数当 $x\to\pm\infty$ 时的极限，可以用分母中 $x$ 的最高次幂除分子和分母. 其后得到什么结果取决于所包含多项式的次数.

**例 8** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+(8/x)-(3/x^2)}{3+(2/x^2)}$ （用 $x^2$ 除分子和分母）

$=\dfrac{5+0-0}{3+0}=\dfrac{5}{3}$. （参见图 2.36） ■

**例 9** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{11x+2}{2x^3-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(11/x^2)+(2/x^3)}{2-(1/x^3)}$ （用 $x^3$ 除分子和分母）

$=\dfrac{0+0}{2-0}=0$. （参见图 2.37） ■

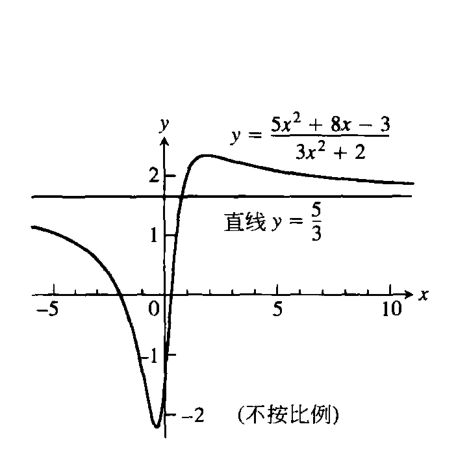



图 2.36 例 8 中函数的图形：当 $|x|$ 增加时图形趋近直线 $y=5/3$

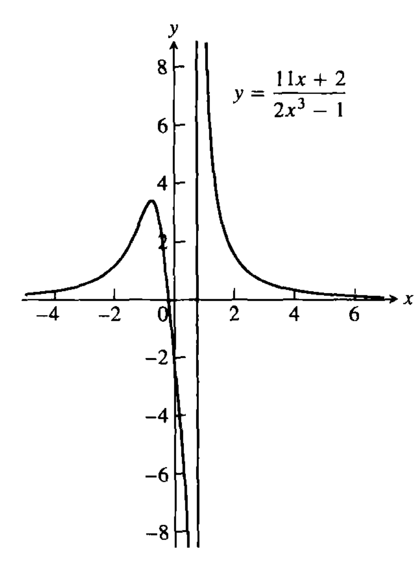



图 2.37 例 9 中的图形：图形当 $|x|$ 增加时趋近 $x$ 轴

在下一节我们举出分子次数高于分母次数的一个例子(见 2.5 节例 9).

### 2.4.6 水平渐近线

如果函数图形上的一点逐渐远离原点时同某条固定直线之间的距离趋近零，就说函数图形渐近地趋近直线，而这条直线称为图形的渐近线.

观察 $f(x)=1/x$(参见图 2.34)，注意 $x$ 轴是曲线在右边的渐近线，因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

也是曲线在左边的渐近线，因为

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

我们说 $x$ 轴是 $f(x)=1/x$ 的图形的水平渐近线.

> **定义** 对于函数 $y=f(x)$ 和直线 $y=b$，如果满足
>
> $$\lim_{x\to\infty}f(x)=b \quad 或 \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=b$$
>
> 那么直线称为函数图形的**水平渐近线**.

图 2.36(例 8)画出的曲线

$$f(x)=\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$$

以直线 $y=5/3$ 为左右两边的渐近线，因为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{5}{3}\quad 及 \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\frac{5}{3}$$

**例 10** $x$ 轴(直线 $y=0$)是 $y=e^x$ 的图形的水平渐近线，因为

$$\lim_{x\to-\infty}e^x=0$$

为证实这一点，应用当 $x$ 趋近 $-\infty$ 时的极限定义. 所以假设任意给定 $\varepsilon>0$. 我们必须求一个常数 $N$，使得对于所有 $x$，

$$x<N \Rightarrow |e^x-0|<\varepsilon$$

当前 $|e^x-0|=e^x$，故上述当 $x<N$ 时必须满足的条件为

$$e^x<\varepsilon$$

令 $x=N$ 是使 $e^x=\varepsilon$ 的数. 由于 $e^x$ 是增函数，若 $x<N$，则 $e^x<\varepsilon$. 对等式 $e^N=\varepsilon$ 两端取自然对数，得到 $N=\ln\varepsilon$(参见图 2.38). 用这个 $N$ 值，条件得到满足，由此得出结论 $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$. ■

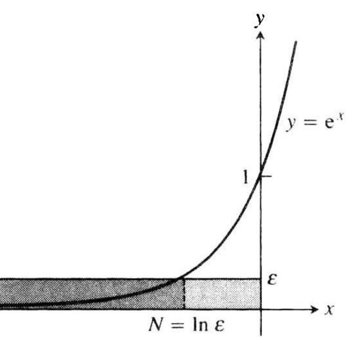



图 2.38 $y=e^x$ 的图形当 $x\to-\infty$ 时趋近 $x$ 轴(例 10)

**例 11** 求 $\lim_{x\to\infty}\sin(1/x)$.

**解** 我们引进新变量 $t=1/x$. 从例 6 可知，当 $x\to\infty$ 时 $t\to0^+$ (参见图 2.34). 因此，

$$\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to0^+}\sin t=0$$ ■

同样，通过考察当 $t\to\pm\infty$ 时 $y=f(t)$，可以研究 $y=f(1/x)$的特性，其中 $t=1/x$.

**例 12** $\lim_{x\to0^-}e^{1/x}$.

**解** 令 $t=1/x$. 从图 2.34 可知，当 $x\to0^-$ 时 $t\to-\infty$. 因此，

$$\lim_{x\to0^-}e^{1/x}=\lim_{t\to-\infty}e^t=0 \quad (例 10)$$ ■

(见图 2.39).

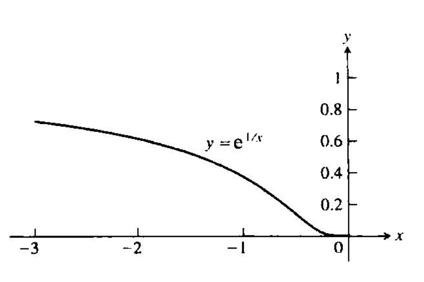



图 2.39 函数 $y=e^{1/x}$ 对于 $x<0$ 的图形显示 $\lim_{x\to0^-}e^{1/x}=0$(例 12)

### 2.4.7 再讨论夹层定理

夹层定理对于当 $x\to\pm\infty$ 时的极限也成立.

**例 13** 利用夹层定理求曲线

$$y=2+\frac{\sin x}{x}$$

的水平渐近线.

**解** 我们所关注的是函数当 $x\to\pm\infty$ 时的特性. 由于

$$0\leqslant\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant\left|\frac{1}{x}\right|$$

及 $\lim_{x\to\pm\infty}|1/x|=0$，由夹层定理有 $\lim_{x\to\pm\infty}(\sin x)/x=0$. 因此，

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(2+\frac{\sin x}{x}\right)=2+0=2$$

所以直线 $y=2$ 是曲线在左右两边的水平渐近线(见图 2.40).

这个例子说明一条曲线可以穿过它的水平渐近线之一，甚至穿过多次. ■

一个函数的图形可能有多条水平渐近线. 例如，要进一步讨论的反正切函数(见3.8节)有两条水平渐近线.

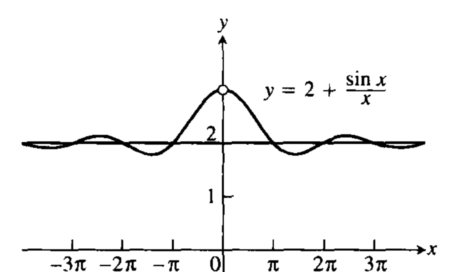



图2.40 一条曲线通常可以穿过它的渐近线无数次(例13)

### 2.4.8 斜渐近线

如果有理函数的分子多项式的次数高于分母多项式的次数，那么图形具有**斜(倾斜的)渐近线**. 我们用有理函数的分母除分子，把$f$表示成一个线性函数和一个余式之和，余式当$x \to \pm\infty$时趋近零，用这种方法求渐近线的方程. 下面是一个例子.

**例14** 求$f(x)=\dfrac{2x^2-3}{7x+4}$的图形的斜渐近线.

**解** 用长除法，求出

$$f(x)=\frac{2x^2-3}{7x+4}$$

$$=\underbrace{\left(\frac{2}{7}x-\frac{8}{49}\right)}_{\text{线性函数}g(x)}+\underbrace{\frac{-115}{49(7x+4)}}_{\text{余式}}$$

当$x \to \pm\infty$时余式趋近零，余式的大小给出函数$f$和构成斜渐近线的

$$g(x)=\frac{2}{7}x-\frac{8}{49}$$

的图形之间的垂直距离(见图2.41). 直线$y=g(x)$是左右两边的渐近线. 在下一节将会见到，函数$f(x)$的绝对值当$x$趋近$-4/7$时任意地增大，分母在这一点变成零(见图2.41). ■

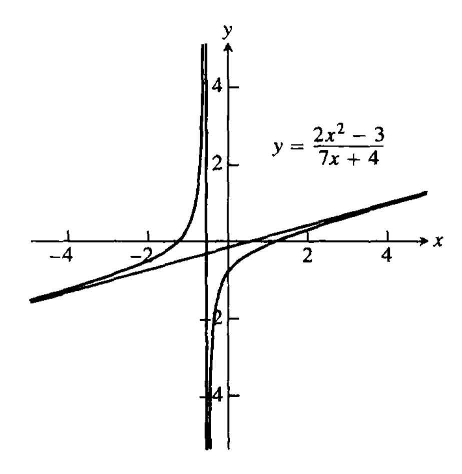
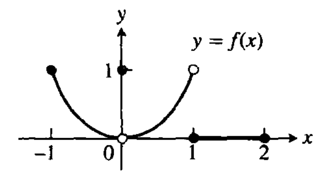



图2.41 例14中的函数有一条斜渐近线

### 习题2.4

1. 对于附图代表的函数$y=f(x)$，下列命题中哪些命题成立，哪些命题不成立？




(a) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=1$. (b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$.

(c) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$. (d) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

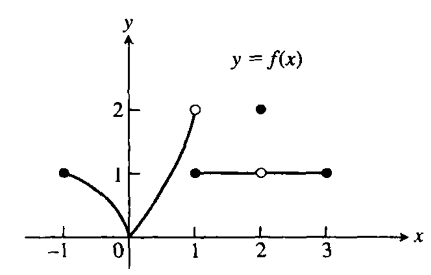
(e) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$存在. (f) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

(g) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$. (h) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$.

(i) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$. (j) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2$.

(k) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$不存在. (l) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=0$.

2. 对于附图代表的函数$y=f(x)$，下列命题中哪些命题成立，哪些命题不成立？




(a) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=1$. (b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$不存在.

(c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$. (d) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$.

(e) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$. (f) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$不存在.

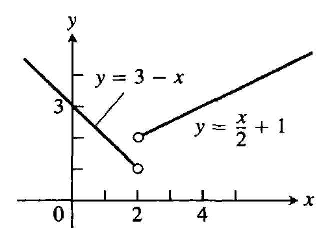
(g) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

(h) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$在开区间$(-1, 1)$中的每点$c$存在.

(i) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$在开区间$(1, 3)$中的每点$c$存在.

(j) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=0$. (k) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$不存在.

3. 令$f(x)=\begin{cases}3-x, & x<2,\\ \dfrac{x}{2}+1, & x>2.\end{cases}$



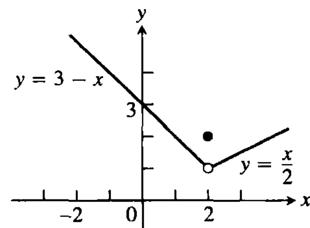

(a) 求$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$和$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$.

(b) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$是否存在？如果存在，极限值是什么？如果不存在，原因何在？

(c) 求$\lim\limits_{x\to 4^-}f(x)$及$\lim\limits_{x\to 4^+}f(x)$.

(d) $\lim\limits_{x\to 4}f(x)$是否存在？如果存在，极限值是什么？如果不存在，原因何在？

4. 令$f(x)=\begin{cases}3-x, & x<2,\\ 2, & x=2,\\ \dfrac{x}{2}, & x>2.\end{cases}$



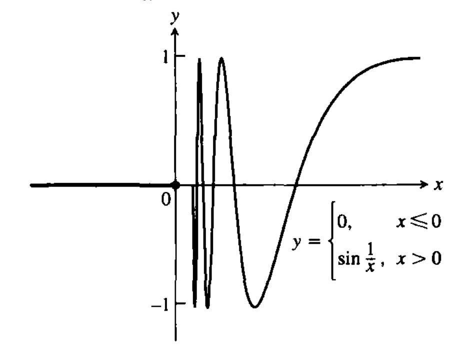

(a) 求$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$和$f(2)$.

(b) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$是否存在？如果存在，极限值是什么？如果不存在，原因何在？

(c) 求$\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)$和$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)$.

(d) $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$是否存在？如果存在，极限值是什么？如果不存在，原因何在？

5. 令$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \sin\dfrac{1}{x}, & x>0.\end{cases}$

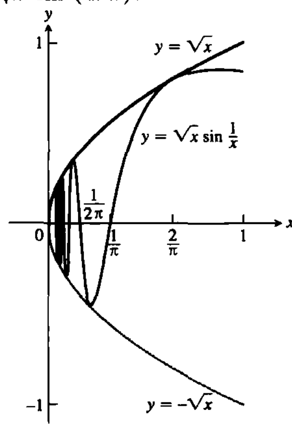



(a) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$是否存在？如果存在，极限值是什么？如果不存在，原因何在？

(b) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$是否存在？如果存在，极限值是什么？如果不存在，原因何在？

(c) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$是否存在？如果存在，极限值是什么？如果不存在，原因何在？

6. 令$g(x)=\sqrt{x}\sin(1/x)$.




(a) $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)$是否存在？如果存在，极限值是什么？如果不存在，原因何在？

(b) $\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)$是否存在？如果存在，极限值是什么？如果不存在，原因何在？

(c) $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$是否存在？如果存在，极限值是什么？如果不存在，原因何在？

7. 令$f(x)=\begin{cases}x^3, & x\neq 1,\\ 0, & x=1.\end{cases}$

(a) 画出$f(x)$的图形.

(b) 求$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$和$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$.

(c) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$是否存在？如果存在，极限值是什么？如果不存在，原因何在？

8. 令$f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x\neq 1,\\ 2, & x=1.\end{cases}$

(a) 画出$f(x)$的图形.

(b) 求$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$和$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$.

(c) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$是否存在？如果存在，极限值是什么？如果不存在，原因何在？

在习题 9 和习题 10 中画出函数的图形. 然后回答下列问题：

(a) $f$的定义域和值域是什么？

(b) $\lim\limits_{x\to c}f(x)$还可能在什么点$c$存在（如果存在）？

(c) 在什么点仅有左极限存在？

(d) 在什么点仅有右极限存在？

9. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x<2,\\ 2, & x=2.\end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x<0 \text{ 或 } 0<x\leqslant 1,\\ 1, & x=0,\\ 0, & x<-1 \text{ 或 } x>1.\end{cases}$

在习题11～18中，求极限.

11. $\lim\limits_{x\to -0.5^-}\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$.　12. $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$.

13. $\lim\limits_{x\to -2^+}\left(\frac{x}{x+1}\right)\left(\frac{2x+5}{x^2+x}\right)$.

14. $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{x+6}{x}\right)\left(\frac{3-x}{7}\right)$.

15. $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h}$.

16. $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5h^2+11h+6}}{h}$.

17. (a) $\lim\limits_{x\to -2^+}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2}$.

(b) $\lim\limits_{x\to -2^-}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2}$.

18. (a) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$.

(b) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$.

在习题19和20中，利用最大整数函数$y=\lfloor x\rfloor$的图形(即1.1节中的图1.9)帮助求极限.

19. (a) $\lim\limits_{\theta\to 3^+}\frac{\lfloor\theta\rfloor}{\theta}$.　(b) $\lim\limits_{\theta\to 3^-}\frac{\lfloor\theta\rfloor}{\theta}$.

20. (a) $\lim\limits_{t\to 4^+}(t-\lfloor t\rfloor)$.　(b) $\lim\limits_{t\to 4^-}(t-\lfloor t\rfloor)$.

在习题21～36中，求极限.

21. $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin\sqrt{2}\theta}{\sqrt{2}\theta}$.　22. $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin kt}{t}$ ($k$为常数).

23. $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin 3y}{4y}$.　24. $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{h}{\sin 3h}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}$.　26. $\lim\limits_{t\to 0}\frac{2t}{\tan t}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\csc 2x}{\cos 5x}$.　28. $\lim\limits_{x\to 0}6x^2(\cot x)(\csc 2x)$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+x\cos x}{\sin x\cos x}$.　30. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-x+\sin x}{2x}$.

31. $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin(1-\cos t)}{1-\cos t}$.　32. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(\sin t)}{\sin h}$.

33. $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\sin 2\theta}$.　34. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 4x}$.

35. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 8x}$.　36. $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin 3y\cot 5y}{y\cot 4y}$.

在习题37～42中，对于每个函数，(a)求函数当$x\to\infty$时的极限，(b)求函数当$x\to-\infty$时的极限(可以把答案显示在绘图计算器或计算机上).

37. $f(x)=\frac{2}{x}-3$.　38. $f(x)=\pi-\frac{2}{x^2}$.

39. $g(x)=\frac{1}{2+(1/x)}$.　40. $g(x)=\frac{1}{8-(5/x^2)}$.

41. $h(x)=\frac{-5+(7/x)}{3-(1/x^2)}$.　42. $h(x)=\frac{3-(2/x)}{4+(\sqrt{2}/x^2)}$.

在习题43～50中，求极限.

43. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x}$.　44. $\lim\limits_{\theta\to-\infty}\frac{\cos\theta}{3\theta}$.

45. $\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{2-t+\sin t}{t+\cos t}$.　46. $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{r+\sin r}{2r+7-5\sin r}$.

47. $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\sin x$.　48. $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$.

49. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.　50. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+e^{-x}}{\sin(1/x)-2x^2}$.

在习题51～60中，对于每个有理函数，(a)求函数当$x\to\infty$时的极限，(b)求函数当$x\to-\infty$时的极限.

51. $f(x)=\frac{2x+3}{5x+7}$.　52. $f(x)=\frac{2x^3+7}{x^3-x^2+x+7}$.

53. $f(x)=\frac{x+1}{x^2+3}$.　54. $f(x)=\frac{3x+7}{x^2-2}$.

55. $h(x)=\frac{7x^3}{x^3-3x^2+6x}$.　56. $g(x)=\frac{1}{x^3-4x+1}$.

57. $g(x)=\frac{10x^5+x^4+31}{x^6}$.　58. $h(x)=\frac{9x^4+x}{2x^4+5x^2-x+6}$.

59. $h(x)=\frac{-2x^3-2x+3}{3x^3+3x^2-5x}$.　60. $h(x)=\frac{-x^4}{x^4-7x^3+7x^2+9}$.

用于求有理函数极限的过程，同样适合于分式中包含$x$的非整数幂和负数幂的情形：用分母中的最高次幂除分子和分母，并由此求极限. 试求习题61～66中的极限.

61. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}+x^{-1}}{3x-7}$.　62. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$.

63. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}$.　64. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{-1}+x^{-4}}{x^{-2}-x^{-3}}$.

65. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^{5/3}-x^{1/3}+7}{x^{8/5}+3x+\sqrt{x}}$.　66. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x}-5x+3}{2x+x^{2/3}-4}$.

67. 如果已知$f(x)$在其定义域内部的一点$a$的右极限$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$及左极限$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$，能否确定极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)$？提出答案理由.

68. 如果已知$\lim\limits_{x\to c}f(x)$存在，能够通过计算$\lim\limits_{x\to c^+}f(x)$求其值吗？提出答案的理由.

69. 假定$f$是$x$的奇函数. 如果知道$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=3$，能够得出有关$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$的任何结论吗？提出答案的理由.

70. 假定$f$是$x$的偶函数. 如果知道$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=7$，能够得出有关$\lim\limits_{x\to -2^-}f(x)$或者$\lim\limits_{x\to -2^+}f(x)$的任何结

论吗？提出答案的理由.

71. 假定$f(x)$和$g(x)$是$x$的多项式，且$\lim_{x\to\infty}(f(x)/g(x))=2$. 能够得出有关$\lim_{x\to-\infty}(f(x)/g(x))$的任何结论吗？提出答案的理由.

72. 假定$f(x)$和$g(x)$是$x$的多项式. 如果$g(x)$的值不会为0，$f(x)/g(x)$的图形有一条渐近线吗？提出答案的理由.

73. 一个给定的有理函数的图形可能有多少条水平渐近线？提出答案的理由.

74. 求$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$.

在习题75和76中，利用极限当$x\to\pm\infty$时的形式定义证实函数的极限值.

75. 若$f$具有常数值$f(x)=k$，则$\lim_{x\to\infty}f(x)=k$.

76. 若$f$具有常数值$f(x)=k$，则$\lim_{x\to-\infty}f(x)=k$.

77. 给定$\varepsilon>0$，求一个区间$I=(5,\ 5+\delta)$，$\delta>0$，使得只要$x$在$I$中就有$\sqrt{x-5}<\varepsilon$，这证实存在什么极限及极限值是什么？

78. 给定$\varepsilon>0$，求区间$I=(4-\delta,\ 4)$，$\delta>0$，使得只要$x$在$I$中就有$\sqrt{4-x}<\varepsilon$. 这证实存在什么极限及极限值是什么？

在习题79和80中，利用右极限和左极限的定义证明极限的命题.

79. $\lim_{x\to0^-}\frac{x}{|x|}=-1$.

80. $\lim_{x\to2^+}\frac{x-2}{|x-2|}=1$.

81. **最大整数函数** 求(a)$\lim_{x\to400^+}\lfloor x\rfloor$和(b)$\lim_{x\to400^-}\lfloor x\rfloor$；然后利用极限定义证实得到的结果. (c)依据从(a)和(b)中得到的结果，能够得出有关$\lim_{x\to400}\lfloor x\rfloor$的任何结论吗？提出答案的理由.

82. **单侧极限** 令$f(x)=\begin{cases}x^2\sin(1/x), & x<0,\\ \sqrt{x}, & x>0.\end{cases}$

求(a)$\lim_{x\to0^+}f(x)$和(b)$\lim_{x\to0^-}f(x)$；然后用极限定义证实求出的结果. (c)依据从(a)和(b)中得出的结果，能够得出有关$\lim_{x\to0}f(x)$的任何结论吗？提出答案的理由.

**T** 在某些情况下，变量代换能够把我们不熟悉的表达式变成知道如何求其极限的表达式. 如例11所示，在求当$x\to\infty$的极限时代入$t=1/x$. 这就提供一种"观察"在无穷大的极限的创见性方法. 请描述这个过程，并用它绘制习题83~88中的函数图形和确定其中的极限.

83. $\lim_{x\to\pm\infty}x\sin\frac{1}{x}$.

84. $\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos(1/x)}{1+(1/x)}$.

85. $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x+4}{2x-5}$.

86. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{1/x}$.

87. $\lim_{x\to\pm\infty}\left(3+\frac{2}{x}\right)\left(\cos\frac{1}{x}\right)$.

88. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x^2}-\cos\frac{1}{x}\right)\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)$.

## 2.5 无穷极限与垂直渐近线

我们在这一节把极限概念扩大的无穷极限. 这种极限不是以前讨论的极限，而是极限这个术语的全新应用. 对于描述函数值变成任意大时的函数特性，无穷极限提供很有用的记号和语言. 下面继续进行前一节有理函数图形的分析，对于$f$非常大的函数值利用垂直渐近线.

### 2.5.1 无穷极限

我们再次考察函数$f(x)=1/x$. 当$x\to0^+$时，$f$的值无限增加，最终达到并超过任何正实数. 也就是说，给定无论多么大的任何正实数$B$，$f$的值会变得比它更大(见图2.42). 于是$f$当$x\to0^+$时不存在极限. 但是，把$f$的这种特性表述为当$x\to0^+$时$f(x)$趋近$\infty$是方便的. 我们记为

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=\infty$$

在写出的这个等式中，我们不说极限存在，也不说存在一个实数$\infty$，因为没有这样一个实数. 换一种方式，我们说$\lim_{x\to0^+}(1/x)$不存在，因为当$x\to0^+$时$1/x$变成任意大的正数.

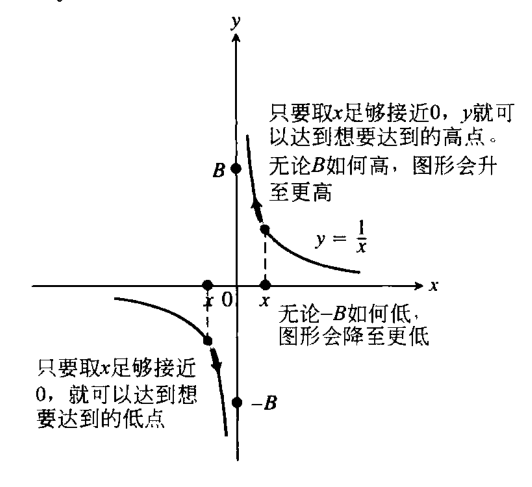



图2.42 单侧无穷极限：$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=\infty$及$\lim_{x\to0^-}+\frac{1}{x}=-\infty$

当$x\to0^-$时，$f(x)=1/x$的值变成任意大的负数. 给定任何负实数$-B$，$f$的值最终处于$-B$之下(参见图2.42). 我们记为

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

同样，我们不说极限存在和等于数$-\infty$. 不存在实数$-\infty$. 把函数的这种特性表述为函数当$x\to0^-$时不存在极限，因为它的值变成任意大的负数.

**例1**　求$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x-1}$及$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{x-1}$.

**几何解**　$y=1/(x-1)$的图形是$y=1/x$右移1个单位后的图形(见图2.43). 因此，$y=1/(x-1)$接近于1的特性同$y=1/x$接近于0的特性完全一样：

$$\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}=\infty\quad及\quad\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$$

**渐近解**　考虑数$x-1$和它的倒数. 当$x\to1^+$时，有$(x-1)\to0^+$及$1/(x-1)\to\infty$. 当$x\to1^-$时，有$(x-1)\to0^-$及$1/(x-1)\to-\infty$. ■

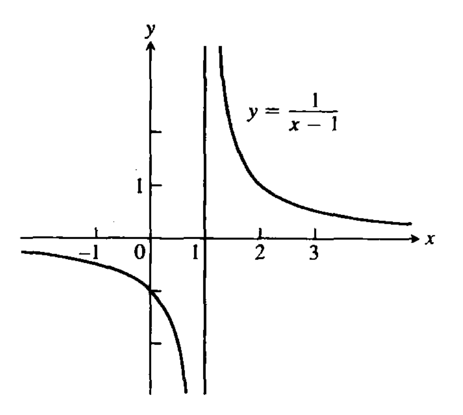



图2.43　函数$y=1/(x-1)$在$x=1$附近与函数$y=1/x$在$x=0$附近有同样的特性；$y=1/(x-1)$的图形是$y=1/x$右移1个单位后的图形(例1)

**例2**　讨论$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$接近于$x=0$时的特性.

**解**　当$x$无论从哪一侧趋近零时，$1/x^2$的值为正并变成任意大(见图2.44)：

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=\infty$$ ■

函数$y=1/x$显示出当$x\to0$时没有稳定的特性. 当$x\to0^+$时$1/x\to\infty$，而当$x\to0^-$时$1/x\to-\infty$. 关于$\lim\limits_{x\to0}(1/x)$我们只能说这个极限不存在. 函数$y=1/x^2$的情况不同. 当$x$无论从哪一侧趋近0时它的值趋近无穷大，所以可以说$\lim\limits_{x\to0}(1/x^2)=\infty$.

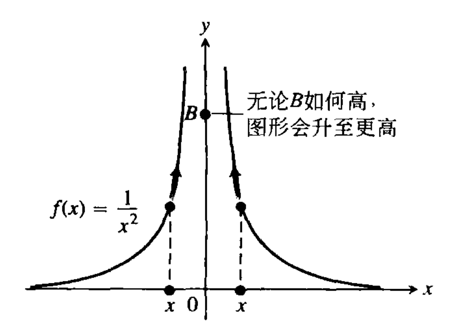



图2.44　例2中$f(x)$的图形当$x\to0$时趋近无穷大

**例3**

(a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)^2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x+2}=0$.

(b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{4}$.

(c) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x-3}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x-3}{(x-2)(x+2)}=\infty$.

(对于$x>2$和$x$接近2，分式的值为正)

(d) $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x-3}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x-3}{(x-2)(x+2)}=\infty$.　(对于$x<2$和$x$接近2，分式的值为负)

(e) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-3}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-3}{(x-2)(x+2)}$不存在.　(参见(c)和(d))

(f) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2-x}{(x-2)^3}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{-(x-2)}{(x-2)^3}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{-1}{(x-2)^2}=-\infty$.

在(a)和(b)中，分母在$x=2$为零的作用被消去，因为分子这时也为零. 因此存在一个有限的极限. 在(f)中就不是这种情形，分母在消去后仍然遗留取零的因式. ■

### 2.5.2 无穷极限的精确定义

无穷极限的定义，对于所有充分接近 $x_0$ 的 $x$，不要求 $f(x)$ 保持任意地接近一个有限数 $L$，而是要求 $f(x)$ 保持任意地远离 0. 除开这个改变外，定义的陈述跟我们前面所见的完全一样. 图 2.45 和图 2.46 是对下面两个定义的辅助说明.

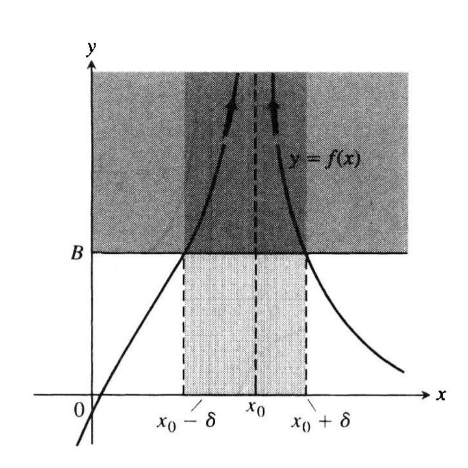



图 2.45 对于 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$，$f(x)$ 的图形位于直线 $y=B$ 之上

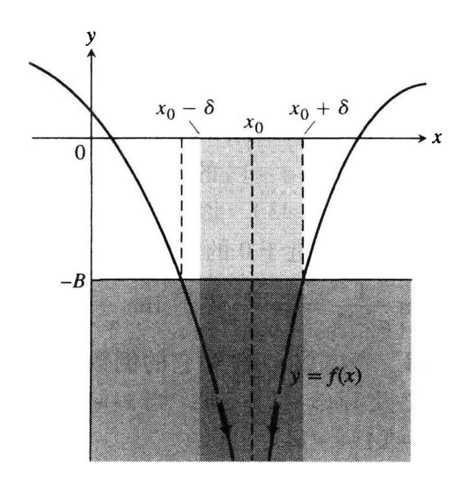



图 2.46 对于 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$，$f(x)$ 的图形位于直线 $y=-B$ 之上

**定义**

**(1)** 如果对每个正实数 $B$，存在一个对应的 $\delta>0$，使得对于所 $x$，

$$0<|x-x_0|<\delta \quad \Rightarrow \quad f(x)>B$$

就说 **$f(x)$ 当 $x$ 趋近 $x_0$ 时趋近无穷大**，并记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$$

**(2)** 如果对每个负实数 $-B$，存在一个对应的 $\delta>0$，使得对于所有 $x$，

$$0<|x-x_0|<\delta \quad \Rightarrow \quad f(x)<-B$$

就说 **$f(x)$ 当 $x$ 趋近 $x_0$ 时趋近负无穷大**，并记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$$

在 $x_0$ 的单侧无穷极限的精确定义是类似的，并且在习题中陈述.

**例 4** 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$.

**解** 给定 $B>0$，需要求 $\delta>0$，使得

$$0<|x-0|<\delta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2}>B$$

如今，

$$\frac{1}{x^2}>B \quad \text{当且仅当} \quad x^2<\frac{1}{B}$$

或者等价于

$$|x|<\frac{1}{\sqrt{B}}$$

因此，取 $\delta=1/\sqrt{B}$（或者更小的正数），就看出

$$|x|<\delta \Rightarrow \frac{1}{x^2}>\frac{1}{\delta^2}\geqslant B$$

所以，由定义有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$$

■

### 2.5.3 垂直渐近线

注意 $y=1/x$ 的图形上一点同 $y$ 轴之间的距离，当点沿图形垂直地移动并远离圆点时趋近零（见图 2.47）. 出现这个特性是因为

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty \quad 及 \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

我们把直线 $x=0$（$y$ 轴）称为 $y=1/x$ 的图形的垂直渐近线. 注意分母在 $x=0$ 时的值为零，函数在这一点无定义.

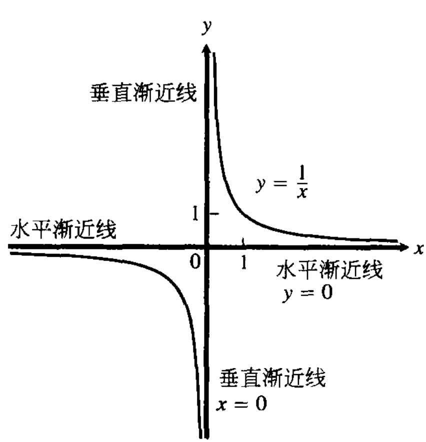



图 2.47 坐标轴是双曲线 $y=1/x$ 两个分支的渐近线

> **定义** 如果有
>
> $$\lim_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty \quad 或 \quad \lim_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty$$
>
> 那么直线 $x=a$ 称为函数 $y=f(x)$ 图形的**垂直渐近线**.

**例 5** 求曲线 $y=\dfrac{x+3}{x+2}$的水平渐近线和垂直渐近线.

**解** 我们关注的是函数当 $x\to\pm\infty$ 和 $x\to-2$ 时的特性，这时分母的值为零.

如果通过以 $x+2$ 除 $x+3$ 把有理函数变换成多项式带余式的形式，很快就显现出渐近线：

$$\begin{array}{r} 1 \\ x+2\overline{)\,x+3} \\ \underline{x+2} \\ 1 \end{array}$$

这个结果使我们可以把 $y$ 改写成

$$y=1+\frac{1}{x+2}$$

现在看出，本例的曲线是 $y=1/x$ 的图形上移 1 个单位和左移 2 个单位后的图形（见图 2.48）. 所求的渐近线是直线 $y=1$ 和 $x=-2$ 而不是坐标轴. ■

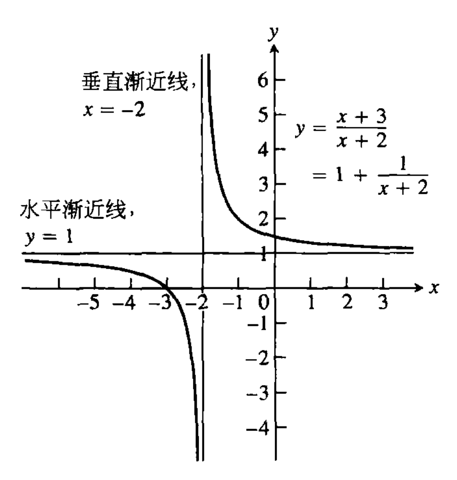



图 2.48 直线 $y=1$ 和 $x=-2$ 是曲线$y=(x+3)/(x+2)$的渐近线（例 5）

**例 6** 求$f(x)=-\dfrac{8}{x^2-4}$的图形的水平渐近线和垂直渐近线.

**解** 我们关注的是函数 $f(x)$ 当 $x\to\pm\infty$ 时的特性，这时分母为零. 注意 $f$ 是 $x$ 的偶函数，所以它的图形对 $y$ 轴对称.

**(a)** 当 $x\to\pm\infty$ 时的特性. 由于$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$，直线 $y=0$ 是图形右边的水平渐近线. 由对称性，它也是左边的水平渐近线（见图 2.49）. 请注意，曲线仅从负值一侧（或从下面）趋近 $x$ 轴.

(**b**) 当 $x\to\pm2$ 时的特性. 由于

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=-\infty \quad 及 \quad \lim_{x\to2^-}f(x)=\infty$$

直线 $x=2$ 同时是从右侧和从左侧的垂直渐近线. 由对称性, 直线 $x=-2$ 也是同样的渐近线.

不存在其他的渐近线, 因为 $f$ 在任何其他点具有有限的极限. ■

**例 7** 自然对数函数的图形以 $y$ 轴(直线 $x=0$)为垂直渐近线. 我们从图 2.50 中描绘的图形(该图是自然指数函数的图形通过直线 $y=x$ 的反射)以及 $x$ 轴是 $y=e^x$ 的水平渐近线(2.4 节例 10)看出这一点. 因此,

$$\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$$

对于 $y=\log_a x$ 有同样结果, 只要 $a>1$. ■

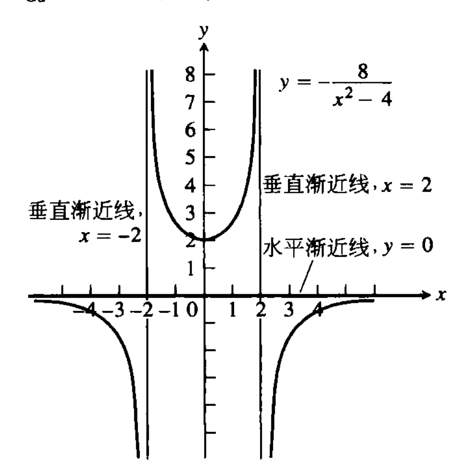



图 2.49 $y=-8/(x^2-4)$ 图形, 注意曲线仅从一侧趋近 $x$ 轴, 渐近线不必然是双侧的(例 6)

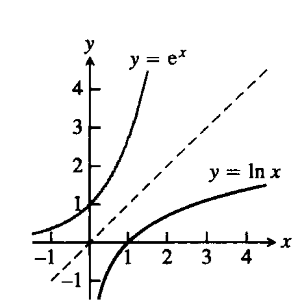



图 2.50 直线 $x=0$ 是自然对数函数的垂直渐近线(例 7)

**例 8** 曲线 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ 和 $y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ 在 $x$ 为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的奇数倍点(在这些点 $\cos x=0$)均有垂直渐近线(见图 2.51).

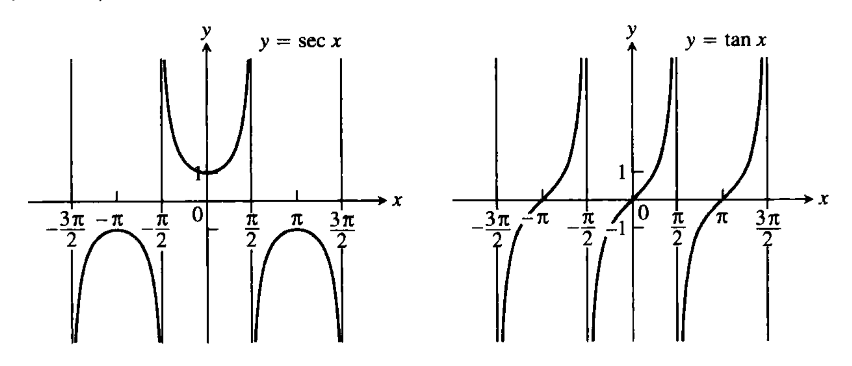



图 2.51 $\sec x$ 和 $\tan x$ 的图形有无限多垂直渐近线(例 8) ■

**例 9** 求 $f(x)=\dfrac{x^2-3}{2x-4}$ 的图形的渐近线.

**解** 我们关注 $f(x)$ 当 $x\to\pm\infty$ 以及 $x\to2$ 时(分母此时为零)的特性. 用 $(2x-4)$ 除 $(x^2-3)$:

$$
\begin{array}{r}
\frac{x}{2}+1 \\
2x-4\overline{)\,x^2-3\quad} \\
\underline{x^2-2x} \\
2x-3 \\
\underline{2x-4} \\
1
\end{array}
$$

这个结果表明

$$f(x)=\frac{x^2-3}{2x-4}=\underbrace{\frac{x}{2}+1}_{\text{线性部分}}+\underbrace{\frac{1}{2x-4}}_{\text{余式}}$$

由于 $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\infty$ 和 $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=-\infty$，直线 $x=2$ 是双侧垂直渐近线. 当 $x\to\pm\infty$ 时，余式趋近 0 且 $f(x)\to(x/2)+1$. 直线 $y=(x/2)+1$ 是同时对左右两侧的斜渐近线(见图 2.52). ■

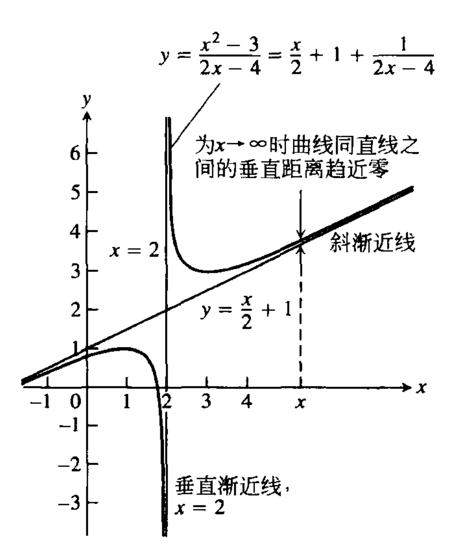



图 2.52 $f(x)=(x^2-3)/(2x-4)$ 的图形有一条垂直渐近线和一条斜渐近线(例 9)

请注意，在例 9 中如果有理函数的分子的次数高于分母的次数，那么极限为 $+\infty$ 或 $-\infty$，取决于当 $|x|$ 增大时分子和分母所取的符号.

## 习题 2.5

在习题 1～12 中，求极限.

**1.** $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{3x}$. **2.** $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{5}{2x}$.

**3.** $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{3}{x-2}$. **4.** $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{1}{x-3}$.

**5.** $\lim\limits_{x\to-8^+}\frac{2x}{x+8}$. **6.** $\lim\limits_{x\to-5^-}\frac{3x}{2x+10}$.

**7.** $\lim\limits_{x\to7}\frac{4}{(x-7)^2}$. **8.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{-1}{x^2(x+1)}$.

**9.** (a) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2}{3x^{1/3}}$. (b) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{2}{3x^{1/3}}$.

**10.** (a) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2}{x^{1/5}}$. (b) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{2}{x^{1/5}}$.

**11.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{4}{x^{2/5}}$. **12.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^{2/3}}$.

在习题 13～16 中，求极限.

**13.** $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-}\tan x$. **14.** $\lim\limits_{x\to(-\pi/2)^+}\sec x$.

**15.** $\lim\limits_{\theta\to0^-}(1+\csc\theta)$. **16.** $\lim\limits_{\theta\to0}(2-\cot\theta)$.

在习题 17～22 中，求极限.

**17.** $\lim\frac{1}{x^2-4}$，当

(a) $x\to2^+$. (b) $x\to2^-$.

(c) $x\to-2^+$. (d) $x\to-2^-$.

**18.** $\lim\frac{x}{x^2-1}$，当

(a) $x\to1^+$. (b) $x\to1^-$.

(c) $x\to-1^+$. (d) $x\to-1^-$.

**19.** $\lim\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}\right)$，当

(a) $x\to0^+$. (b) $x\to0^-$.

(c) $x\to\sqrt[3]{2}$. (d) $x\to-1$.

**20.** $\lim\frac{x^2-1}{2x+4}$，当

(a) $x\to-2^+$. (b) $x\to-2^-$.

(c) $x\to1^+$. (d) $x\to0^-$.

**21.** $\lim\frac{x^2-3x+2}{x^3-2x^2}$，当

(a) $x\to0^+$. (b) $x\to2^+$.

(c) $x\to2^-$. (d) $x\to2$.

(e) 关于当 $x\to0$ 时的极限能否得出什么其他结论?

**22.** $\lim\frac{x^2-3x+2}{x^3-4x}$，当

(a) $x\to2^+$. (b) $x\to-2^+$.

(c) $x\to0^-$. (d) $x\to1^+$.

(e) 关于当 $x\to0$ 时的极限能否得出什么其他结论?

在习题 23～36 中，求极限.

**23.** $\lim\left(2-\frac{3}{t^{1/3}}\right)$，当

(a) $t\to0^+$. (b) $t\to0^-$.

**24.** $\lim\left(\frac{1}{t^{3/5}}+7\right)$，当

(a) $t \to 0^+$.　(b) $t \to 0^-$.

25. $\lim \left(\frac{1}{x^{2/3}} + \frac{2}{(x-1)^{2/3}}\right)$，当

(a) $x \to 0^+$.　(b) $x \to 0^-$.

(c) $x \to 1^+$.　(d) $x \to 1^-$.

26. $\lim \left(\frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(x-1)^{4/3}}\right)$，当

(a) $x \to 0^+$.　(b) $x \to 0^-$.

(c) $x \to 1^+$.　(d) $x \to 1^-$.

在习题 27 ~ 38 中，画出有理函数的图形. 在图中加入渐近线及其方程.

27. $y = \frac{1}{x-1}$.　28. $y = \frac{1}{x+1}$.

29. $y = \frac{1}{2x+4}$.　30. $y = \frac{-3}{x-3}$.

31. $y = \frac{x+3}{x+2}$.　32. $y = \frac{2x}{x+1}$.

33. $y = \frac{x^2}{x-1}$.　34. $y = \frac{x^2+1}{x-1}$.

35. $y = \frac{x^2-4}{x-1}$.　36. $y = \frac{x^2-1}{2x+4}$.

37. $y = \frac{x^2-1}{x}$.　38. $y = \frac{x^3+1}{x^2}$.

在习题 39 ~ 42 中，描绘满足给定条件的函数 $y = f(x)$ 的图形. 不要求写出公式，只需标示坐标轴并画出相应的图形.（答案不是唯一的，所以画出的图形可能不完全像本书习题答案部分提供的图形.）

39. $f(0) = 0$，$f(1) = 2$，$f(-1) = -2$，$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ 及 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

40. $f(0) = 0$，$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$，$\lim_{x\to0^+} f(x) = 2$ 及 $\lim_{x\to0^-} f(x) = -2$.

41. $f(0) = 0$，$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$，$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^+} f(x) = \infty$，$\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$ 及 $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$.

42. $f(2) = 1$，$f(-1) = 0$，$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$，$\lim_{x\to0^+} f(x) = \infty$，$\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$ 及 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

在习题 43 ~ 46 中，求满足给定条件的函数并描绘它们的图形.（答案不是唯一的，任何满足条件的函数都是可以接受的. 如果有帮助，可随意试用分段定义函数的公式.）

43. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$，$\lim_{x\to2^-} f(x) = \infty$ 及 $\lim_{x\to2^+} f(x) = \infty$.

44. $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$，$\lim_{x\to3^-} g(x) = -\infty$ 及 $\lim_{x\to3^+} g(x) = \infty$.

45. $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -1$，$\lim_{x\to\infty} h(x) = 1$，$\lim_{x\to0^-} h(x) = -1$ 及 $\lim_{x\to0^+} h(x) = 1$.

46. $\lim_{x\to\pm\infty} k(x) = 1$，$\lim_{x\to1^-} k(x) = \infty$ 及 $\lim_{x\to1^+} k(x) = -\infty$.

在习题 47 ~ 50 中，利用形式定义证明极限的命题.

47. $\lim_{x\to0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$.　48. $\lim_{x\to0} \frac{1}{|x|} = \infty$.

49. $\lim_{x\to3} \frac{-2}{(x-3)^2} = -\infty$.　50. $\lim_{x\to-5} \frac{1}{(x+5)^2} = \infty$.

51. 下面是**无穷右极限**的定义.

> **定义**　如果对每个正实数 $B$，存在一个对应的数 $\delta > 0$，使得对于函数 $f$ 及所有 $x$，
> $$x_0 < x < x_0 + \delta \ \Rightarrow\ f(x) > B$$
> 就说 $f(x)$ 当 $x$ 从右侧趋近 $x_0$ 时趋近无穷大，并记为
> $$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$$

试修改这个定义，使其包容下列极限.

(a) $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$.　(b) $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$.

(c) $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$.

在习题 52 ~ 56 中，利用习题 51 中的形式定义证明极限的命题.

52. $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = \infty$.　53. $\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

54. $\lim_{x\to2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$.　55. $\lim_{x\to2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$.

56. $\lim_{x\to1^-} \frac{1}{1-x^2} = \infty$.

在习题 57 ~ 60 中，给定的每个函数为两项之和或两项之差. 首先画出每项的图形（用同一组坐标轴），然后利用这些图形作向导，描绘函数的图形.

57. $y = \sec x + \frac{1}{x}$，$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

58. $y = \sec x - \frac{1}{x^2}$，$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

59. $y = \tan x + \frac{1}{x^2}$，$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

60. $y = \frac{1}{x} - \tan x$，$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

**T**　在习题 61 ~ 64 中，画出曲线的图形. 说明曲线的公式以及你所见的图形之间的关系.

61. $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.　62. $y = \frac{-1}{\sqrt{4-x^2}}$.

63. $y = x^{2/3} + \frac{1}{x^{1/3}}$.　64. $y = \sin\left(\frac{\pi}{x^2+1}\right)$.

T 在习题 65 ~ 68 中，利用 $y=f(1/x)$ 的图形求 $\lim_{x\to\infty}f(x)$ 及 $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.

**65.** $f(x)=xe^x$.  **66.** $f(x)=x^2e^{-x}$.

**67.** $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{x}$.  **68.** $f(x)=\dfrac{e^{1/x}}{\ln|x|}$.

T 在习题 69 和 70 中，画出函数的图形. 然后回答下列问题.

(a) 图形当 $x\to0^+$ 时有何特性?

(b) 图形当 $x\to\pm\infty$ 时有何特性?

(c) 图形在 $x=1$ 和 $x=-1$ 有何特性?

提出答案的理由.

**69.** $y=\dfrac{3}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{2/3}$.  **70.** $y=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{2/3}$.

## 2.6 连续性

我们在绘制实验室产生数据或者野外作业采集数据的函数图形时，通常用不间断的曲线连接描绘的点，显示在未进行测量的时刻可能具有的函数值(见图 2.53). 在这样做时，我们假定是在研究连续函数，所以它的输出值随输入值连续变化，而在一个值到另外一个值之间不存在不经过中间值的跳变. 连续函数当 $x$ 趋近 $c$ 时的极限只需通过计算函数在 $c$ 的值求得.(我们曾在 2.2 节发现这一点对多项式是正确的.)

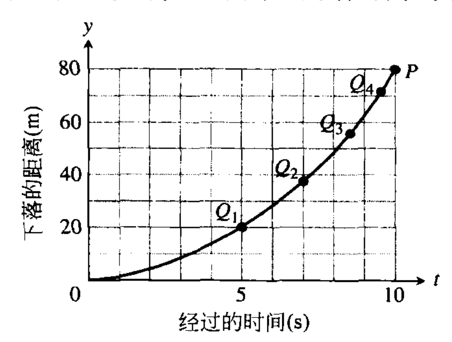



图 2.53 用不间断的曲线连接落体实验数据 $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, …的描绘点

从直观上看，对于任何函数 $y=f(x)$，如果可以在其定义域上以不抬起画笔的连续移动方式描绘图形，那么它就是连续函数的例子. 在这一节我们考察连续函数更确切的含义. 此外，要研究连续函数的性质，并且察觉 1.1 节中讨论的许多函数是连续函数.

### 2.6.1 在一点的连续性

为了理解连续性，考虑像图 2.54 的函数是有帮助的，在 2.4 节例 2 中讨论过它的极限.

**例 1** 求图 2.54 中的函数 $f$ 是连续的点以及 $f$ 是不连续的点.

**解** 函数 $f$ 在其定义域 $[0, 4]$ 上除开 $x=1$, $x=2$ 和 $x=4$ 以外的每个点是连续的. 在这几个点，图形有间断. 请注意在函数定义域的各点 $f$ 的值同 $f$ 的极限之间的关系.

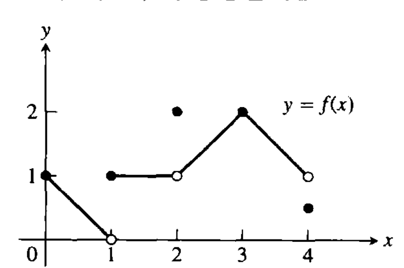



图 2.54 函数在 $x=1$, $x=2$ 和 $x=4$ 除外的区间 $[0, 4]$ 上是连续的

$f$ 是连续的点:

在 $x=0$, $\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)$.

在 $x=3$, $\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$.

在 $0<c<4$, $c\neq1$, $2$, $\lim_{x\to c}f(x)=f(c)$.

$f$ 是不连续的点:

在 $x=1$, $\lim_{x\to1}f(x)$ 不存在.

在 $x=2$, $\lim_{x\to2}f(x)=1$, 但是 $1\neq f(2)$.

在 $x=4$, $\lim_{x\to4^-}f(x)=1$, 但是 $1\neq f(4)$.

在 $c<0$, $c>4$, 这样的点不在 $f$ 的定义域中. ■

为了在函数定义域上的一点定义连续性，需要在内点(牵涉双侧极限)定义连续性以及在端点(牵涉单侧极限)定义连续性(见图 2.55).

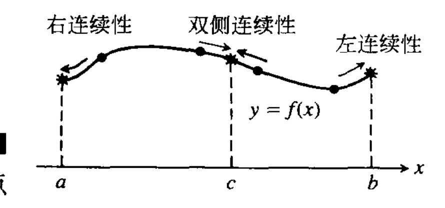



图 2.55 在点 $a$, $b$, $c$ 的连续性

**定义** 在内点的连续性：如果函数 $y=f(x)$ 在其定义域的内点 $c$ 有

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$$

那么 $f(x)$ **在内点 $c$ 是连续的**.

在端点的连续性：如果函数 $y=f(x)$ 在其定义域的左端点 $a$ 或右端点 $b$ 有

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a) \quad 或 \quad \lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$$

那么 $f(x)$ **在左端点 $a$ 或在右端点 $b$ 是连续的.**

如果函数 $f$ 在一点 $c$ 是不连续的，就说 $f$ 在 $c$ 是**不连续的**，而 $c$ 是 $f$ 的**不连续点**. 请注意，$c$ 无须在 $f$ 的定义域内.

如果函数 $f$ 在其定义域内一点 $x=c$ 有 $\lim_{x\to c^+} f(x)=f(c)$，那么 $f$ 是**右连续的(从右边连续)**. 如果在 $x=c$ 有 $\lim_{x\to c^-} f(x)=f(c)$，那么 $f$ 是**左连续的(从左边连续)**. 因此，如果函数 $f$ 在其定义域的左端点是右连续的，那么它在 $a$ 是连续的；如果 $f$ 在其定义域的右端点 $b$ 是左连续的，那么它在 $b$ 是连续的. 函数 $f$ 在其定义域的内点 $c$ 是连续的，当且仅当 $f$ 在 $c$ 同时是右连续的和左连续的(见图 2.55).

**例 2** 函数 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ 在其定义域 $[-2, 2]$ 上的每个点是连续的(见图 2.56)，包括在 $x=-2$ ($f$ 在这个点是右连续的)和 $x=2$ ($f$ 在这个点是左连续的). ■

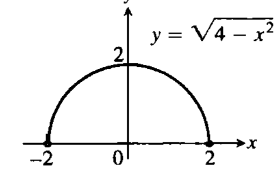



图 2.56 一个在定义域的每个点是连续的函数(例 2)

**例 3** 在图 2.57 中画出的单位阶梯函数在 $x=0$ 是右连续的，但在这个点既不是左连续的，也不是连续的，也不是连续的. 它在 $x=0$ 具有跃变不连续性. ■

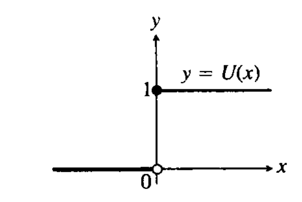



图 2.57 一个在原点是右连续但不是左连续的函数，它在原点具有跃变不连续性(例 3)

我们用检验法的形式概括函数在一点的连续性.

**连续性检验法**

函数 $f(x)$ 在 $x=c$ 是连续的，当且仅当 $f$ 满足下列三个条件：

(1) $f(c)$ 存在($c$ 在 $f$ 的定义域内).

(2) $\lim_{x\to c} f(x)$ 存在($f$ 当 $x\to c$ 时有极限).

(3) $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ (极限等于函数值).

关于在端点的单侧连续性和连续性，检验条件(2)和(3)中的极限应该用相应的单侧极限代替.

**例 4** 在 1.1 节介绍的函数 $y=\lfloor x\rfloor$ 的图形画在图 2.58 中. 它在每个整数点是不连续的，因为当 $x\to n$ 时左极限和右极限不相等：

$$\lim_{x\to n^-} \lfloor x\rfloor=n-1, \quad \lim_{x\to n^+} \lfloor x\rfloor=n$$

由于 $\lfloor n\rfloor=n$，最大整数函数在每个整数点 $n$ 是右连续的(但不是左连续的).

最大整数函数在每个不是整数的其他实数点是连续的. 例如，

$$\lim_{x\to 1.5} \lfloor x\rfloor=1=\lfloor 1.5\rfloor$$

一般说来，如果 $n-1<c<n$，$n$ 为整数，那么

$$\lim_{x \to c^-} \lfloor x \rfloor = n - 1 = \lfloor c \rfloor$$ ■

图 2.59 是函数不连续类型的分类. 在图 2.59a 中，函数$f(x)$在 $x=0$ 是连续的. 在图 2.59b 中，如果$f(0)=1$，那么$f$将是连续的. 在图 2.59c 中，如果$f(0)$等于 1 而不等于 2，$f$将是连续的. 图 2.59b 和 2.59c 中的不连续性是**可去的**. 每个函数当 $x \to 0$ 时有极限，我们通过设置$f(0)$为函数极限值的方法除去不连续性.

在图 2.59d ~ 2.59f 中，包含更严重的不连续性：$\lim_{x \to 0} f(x)$ 不存在，因而无法通过改变$f$在 $x=0$ 的值改善不连续性. 图 2.59d 中的阶梯函数具有**跃变不连续性**. 两个单侧极限虽然存在，但是取不同的值. 图 2.59e 中的函数 $f(x)=1/x^2$ 具有**无穷不连续性**. 图形 2.59f 中的函数具有**振荡不连续性**：函数由于过于振荡而当 $x \to 0$ 时不存在极限.

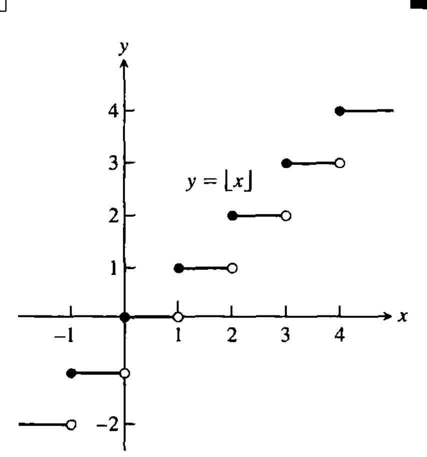



图 2.58 最大整数函数在每个非整数点是连续的，在每个整数点是右连续而非左连续的(例 4)

## 2.6.2 连续函数

一个函数**在区间上是连续的**，当且仅当它在区间上每个点是连续的. 例如，在图 2.56 中画出的半圆函数在它的定义域区间[ -2，2]上是连续的. **连续函数**是在定义域的每个点上连续的函数. 连续函数不需要在每个区间上是连续的.

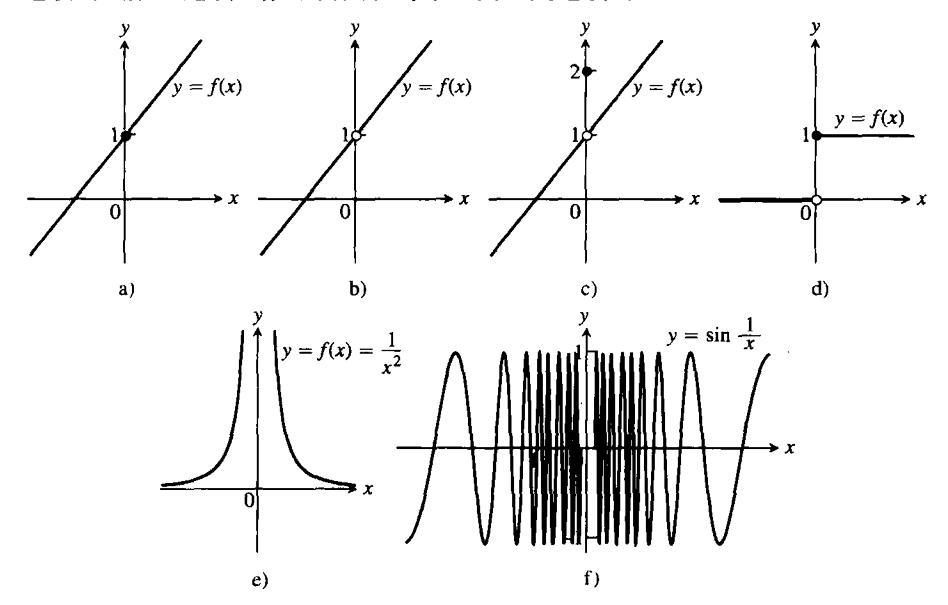



图 2.59 a) 中的函数$f(x)$在 $x=0$ 是连续的；b) ~ f) 的函数是不连续的

**例 5**

**(a)** 函数 $y=1/x$(见图 2.60)是连续函数，因为它在定义域的每个点上是连续的. 然而它在 $x=0$ 有一个不连续点，因为函数在这个点没有定义；也就是说，它在包含 $x=0$ 的任何区间上是不连续的.

**(b)** 由 2.3 节例 3 可知，恒等函数 $y=x$ 和常值函数是处处连续的. ■

连续函数的代数组合是连续的，只要它们是有定义的.

> **定理 9（连续函数的性质）** 若函数$f$和$g$在$x=c$是连续的，则它们的下列组合在$x=c$是连续的：
>
> (1) 和 $f+g$
>
> (2) 差 $f-g$
>
> (3) 积 $f\cdot g$
>
> (4) 常数倍数 $k\cdot f$ ($k$为任意常数)
>
> (5) 商 $f/g$ (只要$g(c)\neq 0$)
>
> (6) 幂 $f^{r/s}$ (只要它在包含$c$的开区间上有定义，其中$r$和$s$是整数)

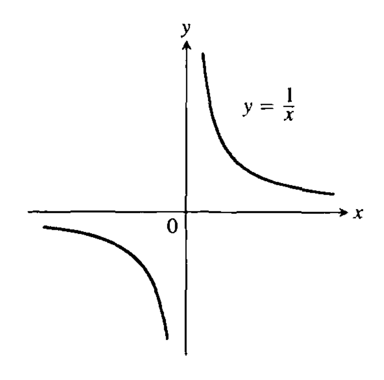
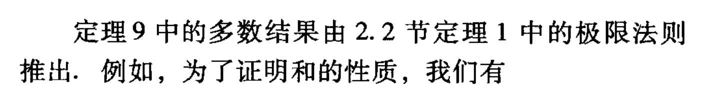



图 2.60 函数$y=1/x$在除$x=0$外的每个点是连续的；它在点$x=0$具有不连续性(例 5)

定理 9 中的多数结果由 2.2 节定理 1 中的极限法则推出. 例如，为了证明和的性质，我们有



$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}(f+g)(x) &= \lim_{x\to c}(f(x)+g(x))\\ &= \lim_{x\to c}f(x)+\lim_{x\to c}g(x) \quad \text{（定理 1 的和法则）}\\ &= f(c)+g(c) \quad (f,g\text{ 在 }c\text{ 的连续性})\\ &= (f+g)(c)\end{aligned}$$

这证明$f+g$是连续的.

**例 6**

**(a)** 每个多项式$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$是连续的，因为由 2.2 节定理 2 有$\lim\limits_{x\to c}P(x)=P(c)$.

**(b)** 若$P(x)$和$Q(x)$是多项式，则由定理 9 中商的连续性法则，有理函数$P(x)/Q(x)$是连续的，只要它是有定义的($Q(c)\neq 0$). ■

**例 7** 函数$y=|x|$在$x$的每个值是连续的. 如果$x>0$，我们有$f(x)=x$，这是一个多项式. 如果$x<0$，我们有$f(x)=-x$，这是另外一个多项式. 最后，在原点$\lim\limits_{x\to 0}|x|=0=|0|$. ■

由 2.2 节例 11 可知，函数$y=\sin x$和$y=\cos x$在$x=0$是连续的. 事实上，这两个函数是处处连续的(参见习题 62). 于是由定理 9 推出，全部 6 个三角函数是连续的，只要它们有定义. 例如，$y=\tan x$在$\cdots\cup(-\pi/2,\pi/2)\cup(\pi/2,3\pi/2)\cup\cdots$上是连续的.

### 2.6.3 反函数与连续性

任何连续函数的反函数在其定义域上是连续的. 这个结论是由下述观察结果所暗示的：$f^{-1}$的图形是$f$的图形通过直线$y=x$反射得到的，当$f$的图形没有断点时，它就不会有任何断点. 只要$f$是连续的，$f^{-1}$就是连续的，对于这一点的严格证明在高级微积分教材中给出. 由此推出全部反三角函数在它们的定义域上是连续的.

我们曾在 1.4 节凭借图形非形式地定义指数函数$y=a^x$. 回忆一下，指数函数的图形由$y=a^x$对有理数$x$的图形填满在无理数断点$x$的图形得到，所以$y=a^x$定义在整个实直线上. 反函数$y=\log_a x$也就是连续的. 特别是，自然指数函数$y=e^x$和自然对数函数$y=\ln x$在它们的定义域上都是连续的.

### 2.6.4 复合函数

连续函数的所有复合函数是连续的. 这个概念是指如果$f(x)$在$x=c$是连续的和$g(x)$在$x=f(c)$是连续的，那么$f\circ g$在$x=c$是连续的(见图 2.61). 在这种情形下，$f\circ g$当$x\to c$时的极限为$g(f(c))$.

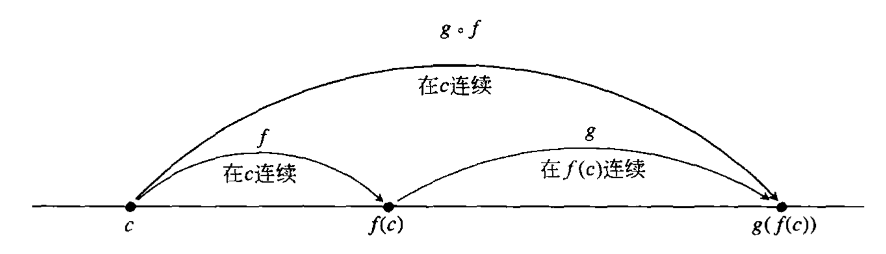



图 2.61　连续函数的复合函数是连续的

**定理 10（连续函数的复合函数）**　若$f$在$c$是连续的和$g$在$f(c)$是连续的，则$f \circ g$在$c$是连续的.

在直观上定理 10 是理所当然的，因为如果$x$趋近$c$，那么$f(x)$趋近$f(c)$，又由于$g$在$f(c)$是连续的，由此推出$g(f(x))$趋近$g(f(c))$.

对于任何有限数目的函数而言，复合函数保持连续性. 唯一的条件是每个函数在其定义域是连续的. 定理 10 的证明概要请参见附录 A.5 的习题 6.

**例 8**　证明下列函数在各自的定义域上是处处连续的.

**(a)** $y=\sqrt{x^2-2x-5}$.　　**(b)** $y=\frac{x^{2/3}}{1+x^4}$.　　**(c)** $y=\left|\frac{x-2}{x^2-2}\right|$.　　**(d)** $y=\left|\frac{x\sin x}{x^2+2}\right|$.

**解**

**(a)** 平方根函数在$[0,\infty)$上是连续的，因为它是连续的恒等函数$f(x)=x$的有理数幂(见定理 9 性质(6)). 再者，给出的函数是多项式$f(x)=x^2-2x-5$同平方根函数$g(t)=\sqrt{t}$的复合函数.

**(b)** 分子是恒等函数的有理数幂；分母是处处为正的多项式. 所以，商是连续的.

**(c)** 商$(x-2)/(x^2-2)$对于所有$x\neq\pm\sqrt{2}$是连续的，而例题中的函数是这个商同绝对值函数(例 7)的复合函数.

**(d)** 由于正弦函数是处处连续的(见习题 62)，分子项$x\sin x$是连续函数的乘积，分母项$x^2+2$是处处取正值的多项式. 给定的函数是连续函数的商同连续的绝对值函数的复合函数(见图 2.62). ■

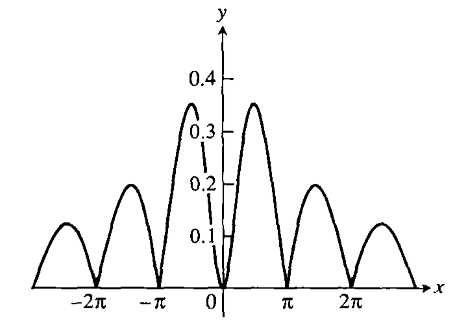



图 2.62　图形暗示$y=|(x\sin x)/(x^2+2)|$是连续的(例 8(d))

定理 10 其实是下面提出和证明的更普遍的定理的推论.

**定理 11（连续函数的极限）**　若函数$g$在点$b$是连续的且$\lim_{x\to c}f(x)=b$，则

$$\lim_{x\to c}g(f(x))=g(b)=g(\lim_{x\to c}(f(x))$$

**证明**　假设给定$\varepsilon>0$，由于$g$在$b$是连续的，存在数$\delta_1>0$，使得

$$|g(y)-g(b)|<\varepsilon,\quad \text{只要}\quad 0<|y-b|<\delta_1$$

由于$\lim_{x\to c}f(x)=b$，存在$\delta>0$，使得

$$|f(x)-b|<\delta_1,\quad \text{只要}\quad 0<|x-c|<\delta$$

如果令$y=f(x)$，那么就有

$$|y-b|<\delta_1,\quad 只要\quad 0<|x-c|<\delta$$

由上面第一个断言，这隐含 $|g(y)-g(b)|=|g(f(x))-g(b)|<\varepsilon$，只要 $0<|x-c|<\delta$. 根据极限的定义，这证明 $\lim_{x\to c} g(f(x))=g(b)$. ■

**例 9**

(**a**) $\lim_{x\to 1}\sin^{-1}\left(\frac{1-x}{1-x^2}\right)=\sin^{-1}\left(\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-x^2}\right)$ （反正弦是连续的）

$=\sin^{-1}\left(\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x}\right)$ （消除公因式 $(1-x)$）

$=\sin^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}.$

(**b**) $\lim_{x\to 0}\sqrt{x+1}\,e^{\tan x}=\lim_{x\to 0}\sqrt{x+1}\cdot\exp\left(\lim_{x\to 0}\tan x\right)$ （指数函数是连续的）

$=1\cdot e^0=1.$ ■

### 2.6.5 对一点的连续延拓

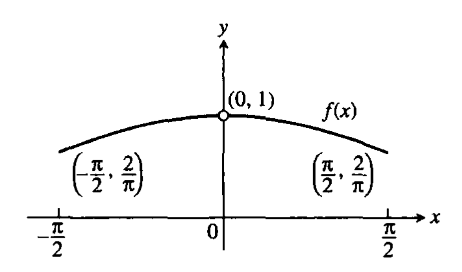
函数 $y=(\sin x)/x$ 在除开 $x=0$ 以外的每个点是连续的. 这一点同函数 $y=1/x$ 一样. 但是，$y=(x\sin x)/x$ 与 $y=1/x$ 的差异在于当 $x\to 0$ 时它具有有限的极限（定理 7）. 因此可以用一种方法把函数的定义域扩展到包含点 $x=0$ 在内，使得扩展后的函数在 $x=0$ 是连续的. 我们定义新函数

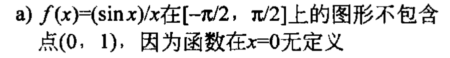
$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

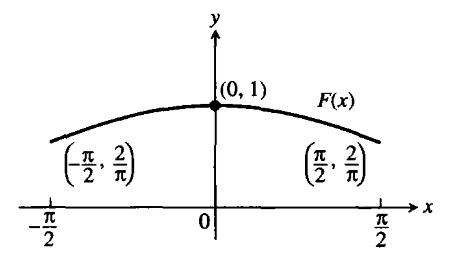
函数 $F(x)$ 在 $x=c$ 是连续的，因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=F(0)$$

（见图 2.63.）





a) $f(x)=(\sin x)/x$ 在 $[-\pi/2,\ \pi/2]$ 上的图形不包含点 $(0,\ 1)$，因为函数在 $x=0$ 无定义




b) 通过定义新函数 $F(x)$ 可以消除图形上的不连续性，其中 $F(0)=1$，而在其余各处 $F(x)=f(x)$（注意 $F(0)=\lim_{x\to 0}f(x)$）

图 2.63

在更为一般的情形下，函数（像有理函数）即使在没有定义的点也可能存在极限. 如果 $f(c)$ 没有定义，但是 $\lim_{x\to c}f(x)=L$ 存在，那么可以通过规则

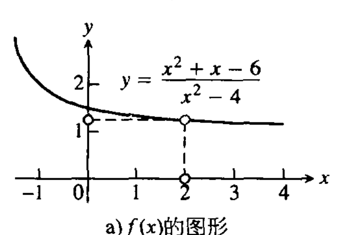
$$F(x)=\begin{cases}f(x), & 如果\ x\ 在\ f\ 的定义域中\\ L, & 如果\ x=c\end{cases}$$

定义一个新函数. 函数 $F$ 在 $x=c$ 是连续的. $F$ 称为 $f$ 对 $x=c$ 的**连续延拓**.

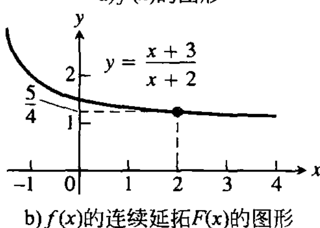
**例 10** 证明 $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$，$x\neq 2$ 对 $x=2$ 有一个连续延拓，并求出这个延拓.

**解** 虽然$f(2)$没有定义，如果$x\neq2$，那么有$f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}=\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{x+3}{x+2}$.

新函数
$$F(x)=\frac{x+3}{x+2}$$
在$x\neq2$同$f(x)$相等，但是$F$在$x=2$是连续的，在此处的函数值为4/5. 因此，$F$是$f$对$x=2$的连续延拓，并有
$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\lim_{x\to2}f(x)=\frac{5}{4}$$
$f$的图形显示在图2.64中. 连续延拓$F$除开在点(2,5/4)没有断点外，具有和$f$同样的图形. 实际上，$F$是在消除$f$在$x=2$的不连续性后得到的函数. ■



a) $f(x)$的图形



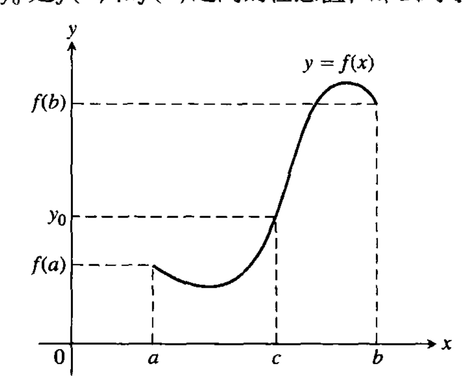
b) $f(x)$的连续延拓$F(x)$的图形

图2.64 例10的图形

## 2.6.6 连续函数的介值定理

在区间上连续的函数具有使它们在数学及各种应用中特别有用的性质. 这些性质之一是介值性质. 一个函数所谓具有**介值性质**，是指每当函数取两个值时，也要取它们之间的全部值.

**定理12（连续函数的介值定理）** 在闭区间$[a,b]$上连续的函数$y=f(x)$取$f(a)$和$f(b)$之间的每个值. 换句话说，如果$y_0$是$f(a)$和$f(b)$之间的任意值，那么对于$[a,b]$中某个$c$有$y_0=f(c)$.




在几何上，介值定理表明，任何一条在$y=f(a)$和$y=f(b)$之间穿越$y$轴的水平直线$y=y_0$，将至少在区间$[a,b]$上通过曲线$y=f(x)$一次.

介值定理的证明依赖于实数系的完备性性质，这个性质在高级微积分教材中讲述.

$f$在区间上的连续性对定理12是必要的. 如果$f$即使在区间上的一点不连续，定理的结论也可能失效，像图2.65代表的函数那样.

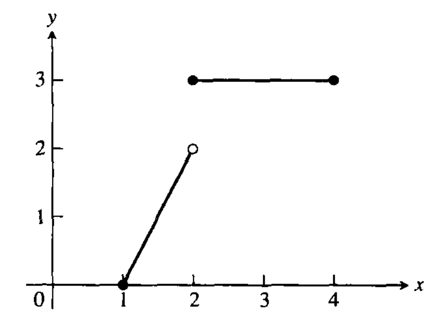



图2.65 函数$f(x)=\begin{cases}2x-2, & 1\leqslant x<2\\ 3, & 2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$不包含$f(1)=0$和$f(4)=3$之间的全部值：不取2和3之间的所有值

**关于绘图的推论：连续性** 定理12暗示一个区间上的连续函数的图形在区间上不可能存在任何断点. 图形将是**连通的**，是一条不间断的曲线，像$\sin x$的图形. 它不像最大整数函数的图形（见图2.58）具有跃变，也不像$1/x$的图形具有独立分支（见图2.60）.

**关于求根的推论** 方程$f(x)=0$的一个解称为方程的**根**或函数$f$的**零点**. 由介值定理可知，如果$f$是连续函数，那么在$f$改变符号的任何区间上包含函数的一个零点.

实际上，当我们发现一个连续函数穿越计算机屏幕水平轴的图形时，知道它不是阶跃穿过. 真正情况是存在函数值为零的一点. 这个推论导致估计我们能够画图的任何连续函数零点的过程：

(1) 在一个很大的区间上描绘函数的图形，粗略地观察零点在什么位置.

(2) 在每个零点上放大，估计它的$x$坐标值.

在某些习题中，可以用绘图计算器或计算机实践这个过程. 图2.66显示用图形方法求解方程$x^3-x-1=0$的典型步骤.

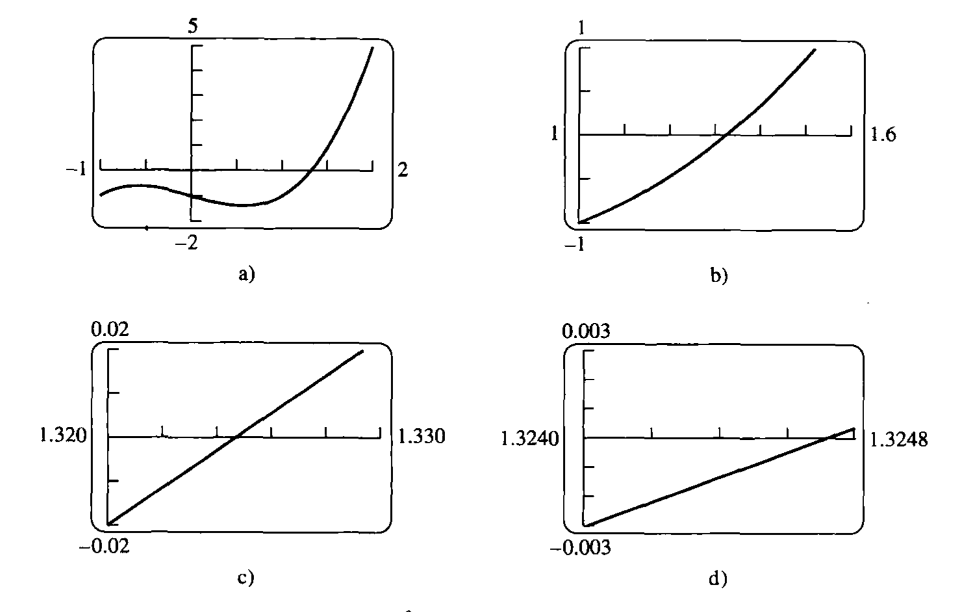
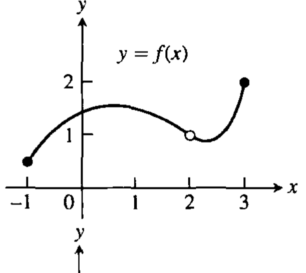



图2.66 对函数$f(x)=x^3-x-1$零点放大，零点接近$x=1.3247$

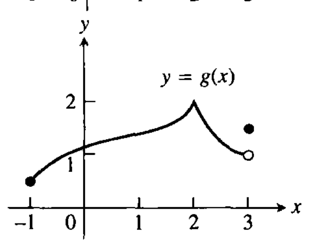
## 习题 2.6

在习题1~4中，说明图形所示的函数在区间$[-1, 3]$上是不是连续的. 如果不连续，那么在何处是不连续的，原因何在?

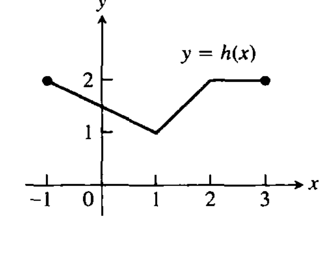
1.



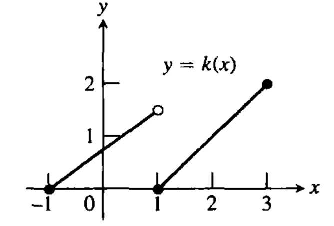

2.




3.



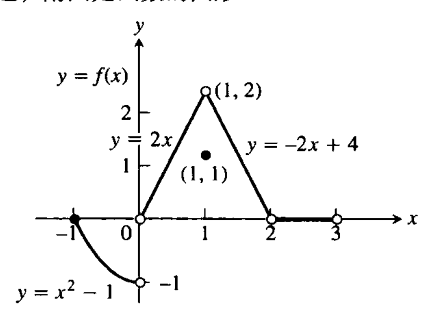

4.



习题 5 ~ 10 是关于函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & -1\leqslant x<0\\ 2x, & 0<x<1\\ 1, & x=1\\ -2x+4, & 1<x<2\\ 0, & 2<x<3\end{cases}$$

的问题，附图是函数的图形.




5. (a) $f(-1)$是否存在？
   (b) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$是否存在？
   (c) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)$吗？
   (d) $f$在 $x=-1$ 是连续的吗？
6. (a) $f(1)$是否存在？
   (b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$是否存在？
   (c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$吗？
   (d) $f$在 $x=1$ 是连续的吗？
7. (a) $f$在 $x=2$ 有定义吗？(注意$f$的定义.)
   (b) $f$在 $x=2$ 是连续的吗？
8. $f$在 $x$ 取什么值时是连续的？
9. 对$f(2)$应该赋予什么值才能使延拓后的函数在 $x=2$ 是连续的？
10. $f(1)$应该改变成什么新值才能消除不连续性？

在习题 11 和 12 中，函数在哪些点是不连续的？如果存在可去不连续性，哪些点是可去不连续性的点，哪些点不是可去不连续性的点？提出答案的理由.

11. 2.4 节习题 1.　　12. 2.4 节习题 2.

在习题 13 ~ 28 中，函数在什么点是连续的？

13. $y=\dfrac{1}{x-2}-3x$.　　14. $y=\dfrac{1}{(x+2)^2}+4$.
15. $y=\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}$.　　16. $y=\dfrac{x+3}{x^2-3x-10}$.
17. $y=|x-1|+\sin x$.　　18. $y=\dfrac{1}{|x|+1}-\dfrac{x^2}{2}$.
19. $y=\dfrac{\cos x}{x}$.　　20. $y=\dfrac{x+2}{\cos x}$.
21. $y=\csc 2x$.　　22. $y=\tan\dfrac{\pi x}{2}$.
23. $y=\dfrac{x\tan x}{x^2+1}$.　　24. $y=\dfrac{\sqrt{x^4+1}}{1+\sin^2 x}$.
25. $y=\sqrt{2x+3}$.　　26. $y=\sqrt[4]{3x-1}$.
27. $y=(2x-1)^{1/3}$.　　28. $y=(2-x)^{1/5}$.

在习题 29 ~ 34 中，求极限. 函数在趋近的点是连续的吗？

29. $\lim\limits_{x\to\pi}\sin(x-\sin x)$.　　30. $\lim\limits_{t\to 0}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cos(\tan t)\right)$.
31. $\lim\limits_{y\to 1}\sec(y\sec^2 y-\tan^2 y-1)$.
32. $\lim\limits_{x\to 0}\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\cos(\sin x^{1/3})\right)$.
33. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}e^{\sqrt{x}}\right)$.　　34. $\lim\limits_{x\to 1}\cos^{-1}(\ln\sqrt{x})$.
35. 用一种方法定义 $g(3)$，延拓 $g(x)=(x^2-9)/(x-3)$，使其在 $x=3$ 是连续的.
36. 用一种方法定义 $h(2)$，延拓 $h(t)=(t^2+3t-10)/(t-2)$，使其在 $t=2$ 是连续的.
37. 用一种方法定义 $f(1)$，延拓 $f(s)=(s^3-1)/(s^2-1)$，使其在 $s=1$ 是连续的.
38. 用一种方法定义 $g(4)$，延拓 $g(x)=(x^2-16)/(x^2-3x-4)$，使其在 $x=4$ 是连续的.
39. 当 $a$ 取什么值时函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x<3\\ 2ax, & x\geqslant 3\end{cases}$$

在每个点 $x$ 是连续的？

40. 当 $a$ 取什么值时函数

$$g(x)=\begin{cases}x, & x<-2\\ bx^2, & x\geqslant -2\end{cases}$$

在每个点 $x$ 是连续的？

**T** 在习题 41 ~ 44 中，绘制函数 $f$ 的图形，考察是否显现在原点存在连续延拓. 如果存在，用 Trace 和 Zoom 功能键求函数在 $x=0$ 的一个满意的延拓候选值. 如果函数未显现存在连续延拓，能否在原点把函数延拓为右连续的或者左连续的？如果能够这样做，那么函数的这两个延拓值应该是什么？

41. $f(x)=\dfrac{10^x-1}{x}$.　　42. $f(x)=\dfrac{10^{|x|}-1}{x}$.
43. $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$.　　44. $f(x)=(1+2x)^{1/x}$.
45. 已知连续函数 $y=f(x)$在 $x=0$ 取负值，在 $x=1$ 取正值. 方程$f(x)=0$ 为什么在 $x=0$ 和 $x=1$ 之间至少存在一个解？请用草图说明.
46. 解释方程 $\cos x=x$ 为什么至少有一个解.
47. **立方根** 证明方程 $x^3-15x+1=0$ 在区间$[-4,4]$上有 3 个解.

**48. 函数值** 证明：函数 $F(x)=(x-a)^2\cdot(x-b)^2+x$ 对于某个 $x$ 值的取值为 $(a+b)/2$.

**49. 解方程** 若 $f(x)=x^3-8x+10$，证明存在这样的 $c$ 值，使得 (**a**) $f(c)=\pi$，(**b**) $f(c)=-\sqrt{3}$，(**c**) $f(c)=5\,000\,000$.

**50.** 解释下列 5 个命题为什么是在寻求同样的解.

(**a**) 求 $f(x)=x^3-3x-1$ 的根.

(**b**) 求曲线 $y=x^3$ 同直线 $y=3x+1$ 的交点的 $x$ 坐标.

(**c**) 求满足 $x^3-3x=1$ 的全部值.

(**d**) 求三次曲线 $y=x^3-3x$ 同直线 $y=1$ 的交点的 $x$ 坐标.

(**e**) 解方程 $x^3-3x-1=0$.

**51. 可去不连续性** 举出一个函数 $f(x)$ 的例子，它对除开 $x=2$ 以外的所有 $x$ 值是连续的，在 $x=2$ 存在可去不连续性. 解释怎样知道 $f$ 在 $x=2$ 是不连续的，以及怎样知道不连续性是可去的.

**52. 非可去不连续性** 举出一个函数 $g(x)$ 的例子，它对除开 $x=-1$ 以外的所有 $x$ 值是连续的，在 $x=-1$ 存在非可去不连续性. 解释怎样知道 $g$ 在 $x=-1$ 是非可去不连续的，以及不连续性为何是不可去的.

**53. 在每个点不连续的函数**

(**a**) 利用每个非空的实数区间包含有理数和无理数这个事实，证明函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

是在每一点不连续的.

(**b**) $f$ 在任何点是右连续的或左连续的吗？

**54.** 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 对于 $0\leqslant x\leqslant 1$ 是连续的，那么 $f(x)/g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的一点可能是不连续的吗？提出答案的理由.

**55.** 如果积函数 $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ 在 $x=0$ 是连续的，那么 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=0$ 必定是连续的吗？提出答案的理由.

**56. 连续函数的不连续复合函数** 举出函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的例子，它们在 $x=0$ 都是连续的，而复合函数 $f\circ g$ 在 $x=0$ 是不连续的. 这种情况同定理 10 相矛盾吗？提出答案的理由.

**57. 不会取零的连续函数** 在一个区间上不会取零的函数在区间上决不会改变符号——这是真实的吗？提出答案的理由.

**58. 拉长橡皮带** 如果拉长一条橡皮带，使其一端向右移动而另外一端向左移动，带子中的某个点将停止在原来位置上——这是真实的吗？提出答案的理由.

**59. 不动点定理** 假定函数 $f$ 在闭区间 $[0,1]$ 上是连续的，对于 $[0,1]$ 中的每个点 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$. 证明：在 $[0,1]$ 中必定存在一个数 $c$，使得 $f(c)=c$（$c$ 称为 $f$ 的**不动点**）.

**60. 连续函数的符号保持性质** 令 $f$ 是定义在区间 $(a,b)$ 上的函数，假定在 $f$ 是连续的某个点 $c$，$f(c)\neq 0$. 证明：存在一个围绕 $c$ 的区间 $(c-\delta, c+\delta)$，$f$ 在这个区间上具有同 $f(c)$ 一样的符号. 请注意，这个结论是非同寻常的. 虽然 $f$ 是定义在整个区间 $(a,b)$ 上，但是不要求它在除开 $c$ 以外的任何一点是连续的. 函数在 $c$ 连续和 $f(c)\neq 0$ 的条件足以保证 $f$ 在整个区间上不等于零（取正值或负值）.

**61.** 证明：$f$ 在 $c$ 是连续的，当且仅当

$$\lim_{h\to 0} f(c+h)=f(c)$$

**62.** 利用习题 61 与恒等式

$$\sin(h+c)=\sin h\cos c+\cos h\sin c$$
$$\cos(h+c)=\cos h\cos c-\sin h\sin c$$

证明 $f(x)=\sin x$ 和 $g(x)=\cos x$ 在每个点 $x=c$ 是连续的.

**T** 在习题 63 ~ 70 中，用一种绘图计算器或者计算机绘图器求解方程.

**63.** $x^3-3x-1=0$.

**64.** $2x^3-2x^2-2x+1=0$.

**65.** $x(x-1)^2=1$ （1 个根）.

**66.** $x^x=2$.

**67.** $\sqrt{x}+\sqrt{1+x}=4$.

**68.** $x^3-15x+1=0$ （3 个根）.

**69.** $\cos x=x$（1 个根）. 务必使用弧度方式.

**70.** $2\sin x=x$（3 个根）. 务必使用弧度方式.

## 2.7 在一点的切线和导数

这一节对 2.1 节中提出的直线斜率和切线作精确的论述. 我们已见到这两个概念同函数的瞬时变化率是如何关联的，而瞬时变化率是函数导数的一种解释.

### 2.7.1 求函数图形的切线

我们利用 2.1 节介绍的过程，求任意曲线 $y=f(x)$ 在一点 $P(x_0, f(x_0))$ 的切线. 首先计算经过点 $P$ 和一个邻近点 $Q(x_0+h, f(x_0+h))$ 的割线的斜率. 然后考察斜率当 $h\to 0$ 时的极限（见

图 2.67）. 如果极限存在，我们把它称为曲线在 $P$ 的斜率，并定义经过 $P$ 且具有这个斜率的直线为在 $P$ 的切线.

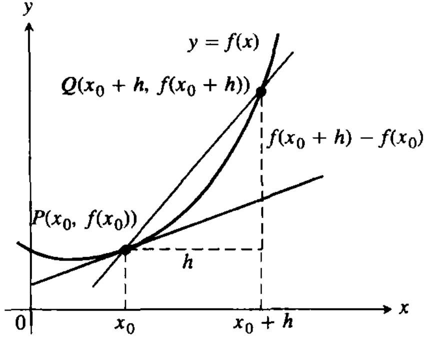



图 2.67 切线在 $P$ 的斜率为 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

> **定义** 函数 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 的**曲线斜率**为数值
>
> $$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad （假设极限存在）$$
>
> 曲线在 $P$ 的**切线**是经过 $P$ 且具有这个斜率的直线.

在 2.1 节的例 3 中，我们曾利用这两个定义求抛物线 $f(x)=x^2$ 在点 $P(2, 4)$ 的斜率和抛物线在 $P$ 的切线. 下面考察另外一个例子.

**例 1**

**(a)** 求曲线 $y=1/x$ 在 $x=a\neq 0$ 的斜率.

**(b)** 曲线在何处的斜率为 $-1/4$?

**(c)** 曲线在点 $(a, 1/a)$ 的切线当 $a$ 改变时会发生什么变化?

**解**

**(a)** 曲线 $f(x)=1/x$ 在 $(a, 1/a)$ 的斜率为

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{ha(a+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{a(a+h)}=-\frac{1}{a^2}.$$

请注意，在每个分式能够代入 $h=0$ 计算极限之前，必须保持用“$\lim_{h\to 0}$”的记号. 数 $a$ 可能是正数或负数，但是不能为 0.

**(b)** $y=1/x$ 在点 $x=a$ 的斜率是 $-1/a^2$. 如果

$$-\frac{1}{a^2}=-\frac{1}{4}$$

那么它将是 $-1/4$. 上述等式等价于 $a^2=4$，所以 $a=2$ 或 $a=-2$. 曲线在两点 $(2, 1/2)$ 和 $(-2, -1/2)$ 的斜率为 $-1/4$（见图 2.68）.

**(c)** 斜率 $-1/a^2$ 当 $a\neq 0$ 时恒为负数. 当 $a\to 0^+$ 时，斜率趋近 $-\infty$，切线变得越来越陡（见图 2.69）. 这种情况当 $a\to 0^{-1}$ 时再次出现. 当 $a$ 从任意一个方向远离原点时，斜率趋近 0，切线变成水平线. ■

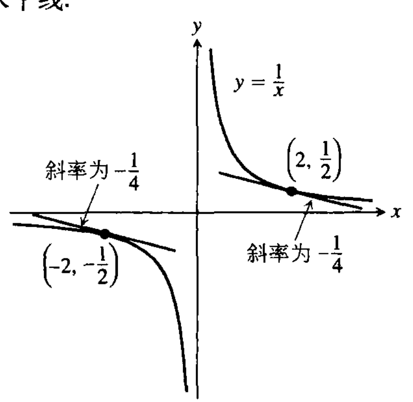



图 2.68 $y=1/x$ 的两条切线的斜率为 $-1/4$（例 1）

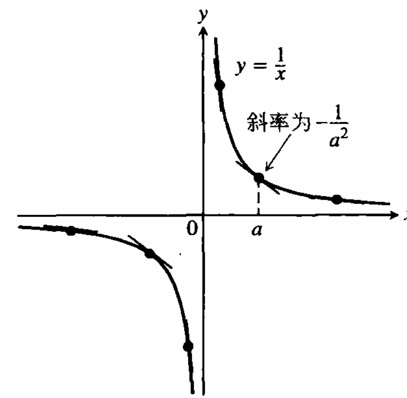



图 2.69 切线在接近原点时急剧升降，而当切点远离原点时趋于平缓

### 2.7.2 变化率：在一点的导数

表达式

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

称为**$f$ 在 $x_0$ 与增量 $h$ 的差商**. 如果差商当 $h$ 趋近零时存在极限，那么对这个极限赋予一个特别的名称和记号.

> **定义** **函数 $f$ 在一点 $x_0$ 的导数**，记为 $f'(x_0)$，乃是
>
> $$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
>
> 假如这个极限存在.

如果把差商解释成割线的斜率，那么导数给出曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 的斜率. 习题31证明，线性函数 $f(x)=mx+b$ 在任何点 $x_0$ 的斜率就是这条直线的斜率，即是

$$f'(x_0)=m$$

如果把差商解释为平均变化率(见2.1节)，导数给出函数在点 $x=x_0$ 关于 $x$ 的瞬时变化率.

**例2** 在2.1节的例1和例2中，我们研究过一块岩石在接近地面自由下落时的速率. 已经知道岩石在前 $t$ 秒期间下落 $y=16t^2$ 英尺，并用一连串越来越短的时间区间估计岩石在时刻 $t=1$ 的平均速率. 试问岩石在这时的确切速率是多少?

**解** 令 $f(t)=16t^2$. 岩石在 $t=1$ 秒和 $t=1+h$ 秒之间的时间区间上的平均速率为

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{16(1+h)^2-16(1)^2}{h}=\frac{16(h^2+2h)}{h}=16(h+2)$$

岩石在时刻 $t=1$ 的速率为

$$\lim_{h\to 0}16(h+2)=16(0+2)=32\ \text{ft/s}$$

这说明我们原来的估计 32 ft/s 是正确的. ■

### 2.7.3 小结

我们已经讨论了曲线的斜率，同曲线相切的直线，函数的变化率，差商的极限，以及函数在一点的导数. 所有这些概念涉及同一件事，兹小结如下：

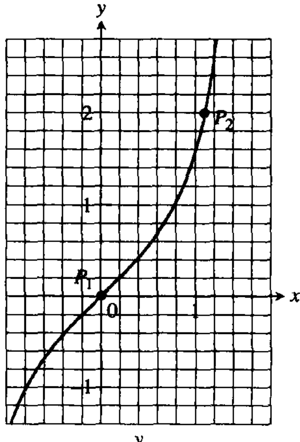
> (1) $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的斜率.
>
> (2) 曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的切线的斜率.
>
> (3) $f(x)$ 关于 $x$ 在 $x=x_0$ 的变化率.
>
> (4) 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的导数 $f'(x_0)$.
>
> (5) 差商的极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

导数是微积分学中两个最重要的概念之一. 我们在第3章开始进入导数的全面学习. 另外一个重要概念是积分，在第5章开始对它的学习.

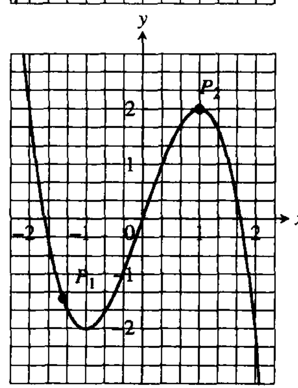
### 习题2.7

在习题1～4中，利用网格和直线边对曲线在点 $P_1$ 和 $P_2$ 的的斜率(每 $x$ 单位的 $y$ 单位数)作粗略估计. 在一轮印刷中图形可能变化，所以你得到的估计可能同本书的答案有某些差异.

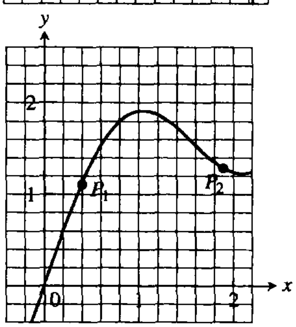
1.



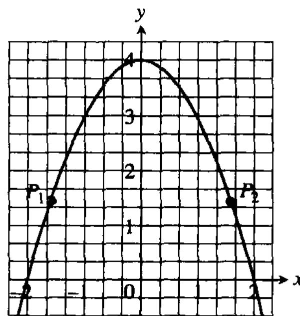

2.




3.




4.




在习题 5 ~ 10 中，求曲线在给定点切线方程. 然后一起画出曲线和切线的草图.

**5.** $y=3-x^2$，$(-1,\ 2)$.　　**6.** $y=(x-1)^2+1$，$(1,\ 1)$.

**7.** $y=2\sqrt{x}$，$(1,\ 2)$.　　**8.** $y=\frac{1}{x^2}$，$(-1,\ 1)$.

**9.** $y=x^3+1$，$(-2,\ -7)$.　　**10.** $y=\frac{1}{x^3}$，$\left(-2,\ -\frac{1}{8}\right)$.

在习题 11 ~ 18 中，求函数图形在给定点的斜率. 然后求在那里与图形相切的直线的方程.

**11.** $f(x)=x^2+1$，$(2,\ 5)$.

**12.** $f(x)=x-2x^2$，$(1,\ -1)$.

**13.** $g(x)=\frac{x}{x-2}$，$(3,\ 3)$.　　**14.** $g(x)=\frac{8}{x^2}$，$(2,\ 2)$.

**15.** $h(x)=t^3-t$，$(2,\ 6)$.　　**16.** $h(t)=t^3+3t$，$(1,\ 4)$.

**17.** $f(x)=\sqrt{x}$，$(4,\ 2)$.　　**18.** $f(x)=\sqrt{x+1}$，$(8,\ 3)$.

在习题 19 ~ 22 中，求曲线在指示点的斜率.

**19.** $y=5x^2$，$x=-1$.　　**20.** $y=1-x^2$，$x=2$.

**21.** $y=\frac{1}{x-1}$，$x=3$.　　**22.** $y=\frac{x-1}{x+1}$，$x=0$.

在习题 23 和 24 中，函数的图形在什么点有水平切线？

**23.** $f(x)=x^2+4x-1$.　　**24.** $g(x)=x^3-3x$.

**25.** 求同曲线 $y=1/(x-1)$ 相切的斜率为 $-1$ 的所有直线的方程.

**26.** 求同曲线 $y=\sqrt{x}$ 相切的斜率为 1/4 的直线的方程.

**27.** **从塔上坠落的物体**　一个物体从 100 m 高的塔顶坠落. 它在 $t$ 秒后离地面的高度是 $100-4.9\,t^2$m. 物体在坠落后 2 秒时的下落速率是多少？

**28.** **火箭的速率**　火箭在发射后 $t$ 秒的高度为 $3t^3$ft. 火箭在发射后 10 秒上升的速率是多少？

**29.** **圆面积的变化**　当半径 $r=3$ 时，圆面积（$A=\pi r^2$）相对于半径的变化率是多大？

**30.** **球体体积的变化**　当半径 $r=2$ 时，球体体积（$V=(4/3)\pi r^3$）相对于半径的变化率是多大？

**31.** 证明直线 $y=mx+b$ 是它自身在任何点 $(x_0,\ mx_0+b)$ 的切线.

**32.** 求曲线 $y=1/\sqrt{x}$ 在 $x=4$ 的点的切线斜率.

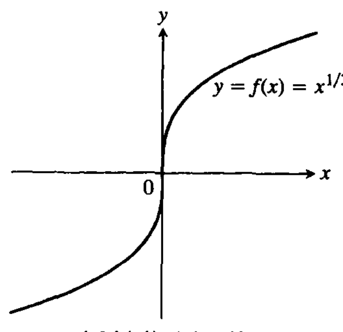
**33.** 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin(1/x), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 的图形在原点有切线吗？提出答案的理由.

**34.** 函数 $g(x)=\begin{cases}x\sin(1/x), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 的图形在原点有切线吗？提出答案的理由.

**垂直切线**　对于曲线 $y=f(x)$，如果 $\lim_{h\to 0}(f(x_0+h)-f(x_0))/h=\infty$ 或 $-\infty$，就说曲线在 $x=x_0$ 的点有**垂直切线**. 下面附图在 $x=0$ 有垂直切线：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{1/3}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{2/3}}=\infty$$

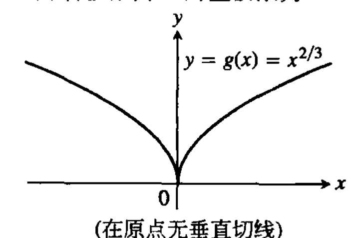


(在原点的垂直切线)

下面附图在 $x=0$ 无垂直切线：

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{2/3}-0}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{1/3}}$$

不存在，因为右极限为$\infty$而左极限为$-\infty$.



(在原点无垂直切线)

35. 函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$

的图形在原点有垂直切线吗？提出答案的理由.

36. 函数

$$U(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$$

在点(0,1)有垂直切线吗？提出答案的理由.

**T** (a)在习题 37 ~46 中，画出曲线的图形．图形在何处显现有垂直切线？

(b)用极限计算证实(a)中的答案．但是在计算极限之前，先阅读习题35 和 36 前面的叙述.

37. $y=x^{2/5}$.
38. $y=x^{4/5}$.
39. $y=x^{1/5}$.
40. $y=x^{3/5}$.
41. $y=4x^{2/5}-2x$.
42. $y=x^{5/3}-5x^{2/3}$.
43. $y=x^{2/3}-(x-1)^{1/3}$.
44. $y=x^{1/3}+(x-1)^{1/3}$.
45. $y=\begin{cases}-\sqrt{|x|}, & x\leqslant 0,\\ \sqrt{x}, & x>0.\end{cases}$
46. $y=\sqrt{|4-x|}$.

**计算机探究**

在习题 47 ~50 中，用一种 CAS(计算机代数系统)执行下列处理步骤：

(a)绘制 $y=f(x)$ 在区间 $(x_0-1/2)\leqslant x_0\leqslant(x_0+3)$ 上的图形.

(b)保持 $x_0$ 固定，差商

$$q(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

在 $x_0$ 变成步长 $h$ 的函数．把这个函数输入 CAS 的工作空间.

(c)求 $q$ 当 $h\to 0$ 时的极限.

(d)定义对于 $h=3, 2, 1$ 的割线 $y=f(x_0)+q\cdot(x-x_0)$．画出割线以及 $f$ 和切线在(a)中区间上的图形.

47. $f(x)=x^3+2x$，$x_0=0$.
48. $f(x)=x+\dfrac{5}{x}$，$x_0=1$.
49. $f(x)=x+\sin(2x)$，$x_0=\pi/2$.
50. $f(x)=\cos x+4\sin(2x)$，$x_0=\pi$.

## 第 2 章复习指导问题

1. 什么是函数 $g(t)$ 在从 $t=a$ 到 $t=b$ 的区间上的平均变化率？它同割线有何关系？
2. 为求函数 $g(t)$ 在 $t=t_0$ 的变化率或斜率，必须计算什么极限？
3. 什么是极限
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=L$$
的非形式定义或者直观定义？这种定义为什么是"非形式的"？举出一些例子.
4. 函数 $f(x)$ 当 $x$ 趋近 $x_0$ 时存在极限以及极限值总是依赖于在 $x=x_0$ 出现的情况吗？予以说明并举出一些例子.
5. 出现什么函数特性可能使极限不复存在？举出一些例子.
6. 计算极限可以使用哪些定理？举出一些例子说明如何利用那些定理.
7. 单侧极限同极限有何关系？举出一些例子.
8. $\lim_{\theta\to 0}((\sin\theta)/\theta)$ 的值是什么？这个极限值同以度或者弧度作为测量单位相关吗？予以说明.
9. 极限 $\lim_{x\to x_0}f(x)=L$ 的确切含义是什么？举一个例子说明在极限的确切定义中，对于给定的 $f$, $L$, $x_0$ 和 $\varepsilon>0$ 如何求 $\delta>0$.
10. 对下列极限给出确切定义.

(a) $\lim_{x\to 2^-}f(x)=5$.　　(b) $\lim_{x\to 2^+}f(x)=5$.

(c) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$. (d) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=-\infty$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$ 的确切含义是什么. 举出一些例子.

12. 什么是 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}k$($k$ 为常数)和 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1/x)$? 如何把这两个结果扩展到其他函数? 举出一些例子.

13. 如何求有理函数当 $x\to\pm\infty$ 时的极限? 举出一些例子.

14. 什么是水平渐近线和垂直渐近线? 举出一些例子.

15. 一个函数必须满足什么条件才能使它在定义域的一个内点是连续的? 函数在一个端点是连续的必须满足什么条件?

16. 如何凭借观察函数的图形判断函数是连续的?

17. 函数在一点是右连续的的含义是什么? 函数的连续性和单侧连续性有何关系?

18. 关于多项式的连续性能够得出什么结论? 关于三角函数, 函数的有理幂和代数组合, 指数函数与对数函数, 反函数, 复合函数, 以及函数的绝对值, 对它们的连续性能够得出什么结论?

19. 在什么情况下能够延拓函数 $f(x)$ 使其在一点 $x=c$ 是连续的? 举一个例子.

20. 函数在一个区间上是连续的的含义是什么?

21. 函数是连续的的含义是什么? 举出一些例子说明这样一个事实: 不是在整个定义域上连续的函数, 仍然可能在其定义域内某些选定区间上是连续的.

22. 函数的不连续性有哪些基本类型? 举出每种类型的例子. 什么是可去不连续性? 举一个例子.

23. 函数具有介值性质的含义是什么? 什么条件保证函数在一个区间上具有这种性质? 对于绘制函数图形和求解方程 $f(x)=0$ 有什么推论?

24. 通常说函数是连续的是指不用从纸面抬起画笔就能画出函数的图形. 为什么是这样?

25. 一条直线在一点 $P$ 同曲线 $C$ 相切的含义是什么?

26. 算式 $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ 的重要性何在? 解释这个算式的几何意义和物理意义.

27. 如何求曲线 $y=f(x)$ 上在一点 $P(x_0, f(x_0))$ 的切线?

28. 曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的斜率同函数在 $x=x_0$ 关于 $x$ 的变化率有何关系, 同 $f$ 在 $x=x_0$ 的导数有何关系?

## 第 2 章实习习题

1. 绘制函数
$$f(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant -1\\ -x, & -1<x<0\\ 1, & x=0\\ -x, & 0<x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$$
的图形. 然后详细讨论 $f$ 在 $x=-1, 0, 1$ 的极限、单侧极限、连续性和单侧连续性. 其中任何一种不连续性都是可去的吗? 予以说明.

2. 对于函数
$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant -1\\ 1/x, & 0<|x|<1\\ 0, & x=1\\ 1, & x>1\end{cases}$$
重复习题 1 的做法.

3. 假设 $f(t)$ 和 $g(t)$ 对于所有 $t$ 有定义, 且 $\lim\limits_{t\to t_0}f(t)=-7$, $\lim\limits_{t\to t_0}g(t)=0$. 求下列函数当 $t\to t_0$ 时的极限.

(a) $3f(t)$. (b) $(f(t))^2$.
(c) $f(t)\cdot g(t)$. (d) $\dfrac{f(t)}{g(t)-7}$.
(e) $\cos(g(t))$. (f) $|f(t)|$.
(g) $f(t)+g(t)$. (h) $1/f(t)$.

4. 假设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 对于所有 $x$ 有定义, 且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1/2$, $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\sqrt{2}$. 求下列函数当 $x\to 0$ 时的极限.

(a) $-g(x)$. (b) $g(x)\cdot f(x)$.
(c) $f(x)+g(x)$. (d) $1/f(x)$.
(e) $x+f(x)$. (f) $\dfrac{f(x)\cdot\cos x}{x-1}$.

在习题 5 和 6 中, 如果给出的极限命题成立, 求 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ 必须具有的值.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4-g(x)}{x}\right)=1$. 6. $\lim\limits_{x\to -4}\left(x\lim\limits_{x\to 0}g(x)\right)=2$.

7. 下列函数在什么区间上是连续的?

(a) $f(x)=x^{1/3}$. (b) $g(x)=x^{3/4}$.
(c) $h(x)=x^{-2/3}$. (d) $k(x)=x^{-1/6}$.

8. 下列函数在什么区间上是连续的?

(a) $f(x)=\tan x$. (b) $g(x)=\csc x$.

(c) $h(x)=\frac{\cos x}{x-\pi}$.  (d) $k(x)=\frac{\sin x}{x}$.

在习题 9 ~ 24 中，求极限或者解释极限为什么不存在.

**9.** $\lim \frac{x^2-4x+4}{x^3+5x^2-14x}$.

(a) 当 $x\to 0$.  (b) 当 $x\to 2$.

**10.** $\lim \frac{x^2+x}{x^5+2x^4+x^3}$.

(a) 当 $x\to 0$.  (b) 当 $x\to -1$.

**11.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$.  **12.** $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x^4-a^4}$.

**13.** $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$.  **14.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$.

**15.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x}$.  **16.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2+x)^3-8}{x}$.

**17.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(2x)}{\tan(\pi x)}$.  **18.** $\lim\limits_{x\to \pi^-}\csc x$.

**19.** $\lim\limits_{x\to \pi}\sin\left(\frac{x}{2}+\sin x\right)$.  **20.** $\lim\limits_{x\to 1}e^{(x^2+x-2)}$.

**21.** $\lim\limits_{t\to 3^+}\ln(t-3)$.  **22.** $\lim\limits_{t\to 1}t^2\ln\left(2-\sqrt{t}\right)$.

**23.** $\lim\limits_{\theta\to 0^+}\sqrt{\theta}e^{\cos(\pi/\theta)}$.  **24.** $\lim\limits_{z\to 0^+}\frac{2e^{1/z}}{e^{1/z}+1}$.

在习题 25 ~ 28 中，求 $g(x)$ 当 $x$ 趋近指定值时的极限.

**25.** $\lim\limits_{x\to 0^+}(4g(x))^{1/3}=2$.  **26.** $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}}\frac{1}{x+g(x)}=2$.

**27.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2+1}{g(x)}=\infty$.  **28.** $\lim\limits_{x\to -2}\frac{5-x^2}{\sqrt{g(x)}}=0$.

在习题 29 ~ 42 中，求极限.

**29.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{5x+7}$.  **30.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x^2+3}{5x^2+7}$.

**31.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^2-4x+8}{3x^3}$.  **32.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-7x+1}$.

**33.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^2-7x}{x+1}$.  **34.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+x^3}{12x^3+128}$.

**35.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{\lfloor x\rfloor}$ （如果你有绘图器，试绘制函数在 $-5\leqslant x\leqslant 5$ 上的图形）.

**36.** $\lim\limits_{\theta\to\infty}\frac{\cos\theta-1}{\theta}$ （如果你有绘图器，试绘制 $f(x)=x(\cos(1/x)-1)$ 在原点附近的图形，“观察”函数在无穷大的极限）.

**37.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x+2\sqrt{x}}{x+\sin x}$.  **38.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{2/3}+x^{-1}}{x^{2/3}+\cos^2 x}$.

**39.** $\lim\limits_{x\to\infty}e^{1/x}\cos\frac{1}{x}$.  **40.** $\lim\limits_{t\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)$.

**41.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\tan^{-1}x$.  **42.** $\lim\limits_{t\to -\infty}e^{3t}\sin^{-1}\frac{1}{t}$.

**43.** 能否延拓 $f(x)=x(x^2-1)/|x^2-1|$ 使其在 $x=1$ 或者 $x=-1$ 是连续的? 提出答案的理由.（绘制函数图形——你将会从图形中发现有意义的结果.）

**44.** 解释函数 $f(x)=\sin(1/x)$ 在 $x=0$ 为什么不存在连续延拓.

**T** 在习题 45 ~ 48 中，绘制函数图形. 考察在指定点 $a$ 是否显现具有连续延拓. 如果有，用 Trace 和 Zoom 功能键寻找函数在 $a$ 的一个恰当的延拓候选值. 如果函数显现不具有连续延拓，那么它是否存在右连续延拓或左连续延拓? 如果存在，你认为延拓的函数值应该是什么?

**45.** $f(x)=\frac{x-1}{x-\sqrt[4]{x}}$，$a=1$.

**46.** $g(\theta)=\frac{5\cos\theta}{4\theta-2\pi}$，$a=\pi/2$.

**47.** $h(t)=(1+|t|)^{1/t}$，$a=0$.

**48.** $k(x)=\frac{x}{1-2^{|x|}}$，$a=0$.

**T 49.** 令 $f(x)=x^3-x-1$.

(a) 证明 $f$ 在 $-1$ 和 2 之间有一个零点.

(b) 用图形方法求解方程 $f(x)=0$，要求误差大小至多为 $10^{-8}$.

(c) 可以证明，(b) 中解的准确值为

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{69}}{18}\right)^{1/3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{69}}{18}\right)^{1/3}$$

计算这个准确答案，并且把它同在 (b) 中求出的值比较.

**T 50.** 令 $f(\theta)=\theta^3-2\theta+2$.

(a) 证明 $f$ 在 $-2$ 和 0 之间有一个零点.

(b) 用图形方法求解 $f(\theta)=0$，要求误差大小至多为 $10^{-4}$.

(c) 可以证明，(b) 中解的准确值为

$$\left(\sqrt{\frac{19}{27}}-1\right)^{1/3}-\left(\sqrt{\frac{19}{27}}+1\right)^{1/3}$$

计算这个准确答案，并且把它同 (b) 中求出的值比较.

## 第2章补充和提高习题

1. **对$0^0$指定值** 指数定律表明，若$a$为任何不同于零的数，则$a^0=1$. 它们还表明，若$n$为任何正数，则$0^n=0$.

如果试图把这两个定律扩充到包括$0^0$的情形，就会获得互相冲突的结果. 由第一个定律得到$0^0=1$，而由第二个定律得到$0^0=0$.

我们在此不讨论正确或者错误的问题. 两个定律都不适用于现有情况，所以不存在矛盾. 事实上，你可以把$0^0$定义为具有任何想要的值，只要能说服其他人同意.

你希望$0^0$取什么值? 下面举出一个例子，可能有助于你作出决定. (另外一个例子参见下面的习题2.)

(a) 对于$x=0.1$，$0.01$，$0.001$，…计算$x^x$的值，直至计算器能够达到的计算范围. 记录获得的值，你观察到什么图像?

(b) 画出函数$y=x^x$对于$0<x\leqslant 1$的图形. 虽然函数对于$x\leqslant 0$没有定义，图形将从右边趋近$y$轴. 它看上去朝向什么$y$值? 为支持你的想法，放大图形.

2. **你可能想使$0^0$取不同于0或者1的某个其他值的理由** 当数$x$经过正数值增加时，$1/x$和$1/(\ln x)$都趋近零. 数

$$f(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{1/(\ln x)}$$

当$x$增加时出现什么情况? 下面是找出结果的两种方法.

(a) 对于$x=10$，$100$，$1000$，…计算$f(x)$的值，直至计算器能够正常达到的计算范围. 你观察到什么图像?

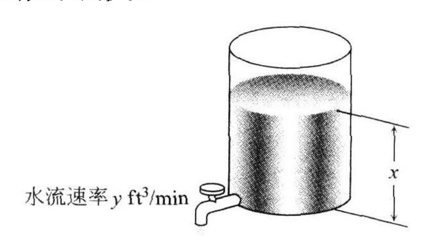
(b) 在不同的绘图窗口描绘$f$的图形，包括包含原点的窗口. 你观察到什么结果? 沿图形追踪$y$值. 你发现什么结果?

3. **洛伦兹收缩** 在相对论中，对观察者而言，一个物体(例如火箭)的长度依赖于物体相对于观察者的移动速度. 如果观察者测量火箭在静止时的长度为$L_0$，那么以速度$v$飞行的火箭显现的长度为

$$L=L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

这个等式称为洛伦兹收缩公式，其中，$c$是光在真空中的速度，约为$3\times10^8$ m/s. 当$v$增加时$L$会有什么变化? 试求$\lim\limits_{v\to c^-}L$. 这里为什么要用左极限?

4. **控制水罐的流量** 托里拆利定律表明，如果从如下图所示的水罐中排水，水流出处的速率$y$等于一个常数乘水深$x$的平方根. 常数值取决于排水管的大小和形状.




假定对于某个水罐$y=\sqrt{x}/2$. 试通过软管不断对水罐注水保持水流速率正好为常数. 如果要保持如下的流速，必须保持怎样的水深?

(a) 水流速率在$y_0=1$ ft³/min的0.2 ft³/min范围内.

(b) 水流速率在$y_0=1$ ft³/min的0.1 ft³/min范围内.

5. **精密仪器的热膨胀** 你或许知道大多数金属会在受热时膨胀而在遇冷时收缩. 一台实验室仪器的尺寸有时是很关键的，所以生产厂家在制造仪器时必须保持同使用仪器的实验室一样的温度. 一根在70℉时为10 cm宽的典型铝条，在接近温度$t$时的宽度为

$$y=10+(t-70)\times10^{-4}\ \text{cm}$$

假定在一台重力波检测仪中使用这样一根铝条，它的宽度必须保持在理想宽度10 cm的$\pm0.0005$ cm范围内. 必须保持温度如何接近70℉才能保证不超过这个容限?

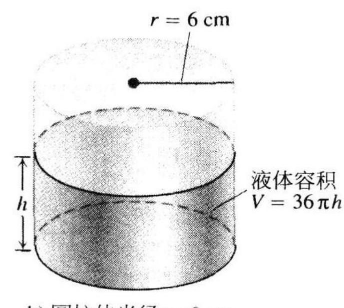
6. **测量杯上的刻度线** 典型的1公升测量杯的内腔是半径为6 cm的直立圆柱体(参见附图). 因此杯中的水容积是杯注水高度$h$的函数，其公式为

$$V=\pi6^2h=36\pi h$$

测量$h$时必须保持怎样的近似程度才能保证测量1公升(1000 cm³)水的误差不超过1%(10 cm³)?




a) 模拟成直立圆柱体




b) 圆柱体半径 $r = 6$ cm

1 公升测量杯

在习题 7 ~ 10 中，利用极限的形式定义证明函数在 $x_0$ 是连续的.

**7.** $f(x) = x^2 - 7$，$x_0 = 1$.

**8.** $g(x) = 1/(2x)$，$x_0 = 1/4$.

**9.** $h(x) = \sqrt{2x-3}$，$x_0 = 2$.

**10.** $F(x) = \sqrt{9-x}$，$x_0 = 5$.

**11. 极限的唯一性** 证明函数在同一点不可能有两个不同的极限. 就是说，若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1$ 和 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_2$，则 $L_1 = L_2$.

**12.** 证明极限的常数倍法则：对于任意常数 $k$，

$$\lim_{x \to c} k f(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$$

**13. 单侧极限** 设 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = A$ 及 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = B$. 求

(**a**) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x^3 - x)$. (**b**) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x^3 - x)$.

(**c**) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x^2 - x^4)$. (**d**) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x^2 - x^4)$.

**14. 极限与连续性** 下列命题中哪些成立，哪些不成立？如果成立，请说明原因；如果不成立，举出一个反例(即证实命题不成立的例子).

(**a**) 若 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 存在而 $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x \to a}(f(x) + g(x))$ 不存在.

(**b**) 若 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ 都不存在，则 $\lim\limits_{x \to a}(f(x) + g(x))$ 也不存在.

(**c**) 若 $f$ 在 $a$ 连续，则 $|f|$ 亦然.

(**d**) 若 $|f|$ 在 $a$ 连续，则 $f$ 亦然.

在习题 15 和 16 中，利用极限的形式定义证明，函数对于给定的 $x$ 值存在一个连续延拓.

**15.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$，$x = -1$.

**16.** $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x - 6}$，$x = 3$.

**17. 一个仅在一点连续的函数** 令

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } x \text{ 是有理数} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 是无理数} \end{cases}$$

(**a**) 证明 $f$ 在 $x = 0$ 连续.

(**b**) 利用每个实数的非空开区间同时包含有理数和无理数这个事实，证明 $f$ 在 $x$ 的任何非零值是不连续的.

**18. 狄利克雷直尺函数** 若 $x$ 是有理数，则 $x$ 可以用唯一方式写成整数商 $m/n$ 的形式，其中 $n > 0$，$m$ 和 $n$ 没有大于 1 的公因数.（这样一个分数称为最低项. 例如，6/4 最低项的形式是 3/2.）假设对于区间[0, 1]中的全部 $x$，$f(x)$ 的定义如下：

$$f(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{若 } x = m/n \text{ 是最低项形式的有理数} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 是无理数} \end{cases}$$

例如 $f(0) = f(1) = 1$，$f(1/2) = 1/2$，$f(1/3) = f(2/3) = 1/3$，$f(1/4) = f(3/4) = 1/4$，等等.

(**a**) 证明 $f$ 在区间[0, 1]中的每个有理数点是不连续的.

(**b**) 证明 $f$ 在区间[0, 1]中的每个无理数点是连续的.（提示：如果 $\varepsilon$ 是一个给定的正数，证明在[0, 1]中仅存在有限多个有理数 $r$ 满足 $f(r) \geqslant \varepsilon$.）

(**c**) 画出 $f$ 的草图. 你认为为什么把 $f$ 称为“直尺函数”？

**19. 对径点** 有任何理由相信在地球赤道上总是存在一对温度相同的对径点(直径两端相对的两点)吗？予以说明.

**20.** 设 $\lim\limits_{x \to c}(f(x) + g(x)) = 3$ 及 $\lim\limits_{x \to c}(f(x) - g(x)) = -1$，求 $\lim\limits_{x \to c} f(x)g(x)$.

**21. 一个殆线性二次方程的根** 考虑方程 $ax^2 + 2x - 1 = 0$，其中 $a$ 为常数. 如果 $a > -1$ 且 $a \neq 0$，那么方程有两个根，一个为正根，一个为负根：

$$r_+(a) = \frac{-1 + \sqrt{1+a}}{a}, \quad r_-(a) = \frac{-1 - \sqrt{1+a}}{a}$$

(**a**) $r_+(a)$ 当 $a \to 0$ 或 $a \to -1^+$ 时会有什么结果？

(**b**) $r_-(a)$ 当 $a \to 0$ 或 $a \to -1^+$ 时会有什么结果？

(c)通过绘制 $r_+(a)$ 和 $r_-(a)$ 作为 $a$ 的函数的图形支持你的结论.

(d)为了增加支持，同时画出 $f(x)=ax^2+2x-1$ 在 $a=1$, 0.5, 0.2, 0.1 和 0.05 的图形.

**22. 一个方程的根** 证明方程 $x+2\cos x=0$ 至少存在一个解.

**23. 有界函数** 实值函数 $f(x)$ 在集合 $D$ 上是**上方有界的**，是指存在一个数 $N$，使得对于 $D$ 中的所有 $x$ 有 $f(x)\leqslant N$. 这样的 $N$ 称为 $f$ 在 $D$ 上的一个**上界**，并说 $f$ 是上方以 $N$ 为界. 依照同样方式，说 $f$ 在 $D$ 上是**下方有界的**，是指存在一个数 $M$，使得对于 $D$ 中的所有 $x$ 有 $f(x)\geqslant M$. 这样的 $M$ 称为 $f$ 在 $D$ 上的一个**下界**，并说 $f$ 是下方以 $M$ 为界. 如果 $f$ 同时是上方有界的和下方有界的，就称 $f$ 在 $D$ 上是**有界的**.

(a)证明：$f$ 在 $D$ 上是有界的，当且仅当存在一个数 $B$，使得对于 $D$ 中的所有 $x$ 有 $|f(x)|\leqslant B$.

(b)假定 $f$ 是上方以 $N$ 为界. 证明：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$，则 $L\leqslant N$.

(c)假定 $f$ 是下方以 $M$ 为界. 证明：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$，则 $L\geqslant M$.

**24. $\max\{a,\ b\}$ 和 $\min\{a,\ b\}$**

(a)证明表达式

$$\max\{a,b\}=\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2}$$

在 $a\geqslant b$ 时等于 $a$，在 $b\geqslant a$ 时等于 $b$. 换句话说，$\max\{a,\ b\}$ 给出两个数 $a$ 和 $b$ 中的较大者.

(b)对于 $\min\{a,\ b\}$ 求同样的表达式，使其给出数 $a$ 和 $b$ 中的较小者.

**牵涉 $\sin\theta/\theta$ 的广义极限** 极限公式

$$\lim_{\theta\to 0}\sin\theta/\theta=1$$

可以推广. 若 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=0$，且 $f(x)$ 在包含点 $x=c$ 的开区间内($c$ 自身可能除外)不会为 0，则

$$\lim_{x\to c}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$$

下面是几个例子.

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x^2}=1.$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x^2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=1\cdot 0=0.$

(c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin(x^2-x-2)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin(x^2-x-2)}{(x^2-x-2)}\cdot\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^2-x-2)}{x+1}=1\cdot\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x-2)}{x+1}=-3.$

(d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-\sqrt{x})}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}}\dfrac{1-\sqrt{x}}{x-1}=1\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(x-1)(1+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{(x-1)(1+\sqrt{x})}=-\dfrac{1}{2}.$

在习题 25 ~ 30 中，利用牵涉 $(\sin\theta)/\theta$ 的广义极限公式求极限.

**25.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(1-\cos x)}{x}.$

**26.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{\sin\sqrt{x}}.$

**27.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}.$

**28.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2+x)}{x}.$

**29.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x^2-4)}{x-2}.$

**30.** $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sin(\sqrt{x}-3)}{x-9}.$

# 第3章 微 分 法

**概述** 第2章介绍了函数在一点的导数. 导数是对函数在一点的变化率的度量并且给出函数图形的斜率. 在这一章, 我们推导容易用于求导数函数的简单法则, 用这些法则求导数时无需直接计算任何极限. 讨论问题中用到的法则涉及函数的变化率, 同时也牵涉对复杂函数的逼近.

## 3.1 把导数作为一种函数

历史评述

导数

在2.7节我们把 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的导数定义为极限

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

现在我们把导数作为由 $f$ 导出的一种函数来研究, 即在 $f$ 的定义域中每个点 $x$ 考察这个极限.

> **定义** 函数 $f(x)$ 关于变量 $x$ 的**导数**是函数 $f'$, 它在 $x$ 的值为
>
> $$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
>
> 只要极限存在.

在导数定义中用记号 $f(x)$ 而不是单用 $f$, 用意是在强调自变量 $x$, 我们正是对于它求导数. $f'$ 的定义域是在 $f$ 的定义域中极限存在的那些点的集合, 这个定义域可能和 $f$ 的定义域相同或者更小. 如果 $f'$ 在某个特定点 $x$ 存在, 就说 **$f$ 在 $x$ 是可微的(有导数)**. 如果 $f'$ 在 $f$ 的定义域中的每点存在, $f$ 称为**可微的**.

若记 $z=x+h$, 则 $h=z-x$ 和 $h$ 趋近0, 当且仅当 $z$ 趋近 $x$. 因此, 导数的一个等价定义如下(参见图3.1).

> **导数的另外一个公式**
>
> $$f'(x) = \lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$



图3.1 差商的两种形式

### 3.1.1 从定义求导数

求导数或求微分的方法称为**微分法**. 为了强调微分法是对函数 $y=f(x)$ 执行的一种运算, 用记号

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$$

作为表示导数 $f'(x)$ 的另外一种方式. 2.7节例1说明了对函数 $y=1/x$ 在 $x=a$ 求导数的过程. 对于定义域中代表任意点的 $x$, 得到导数的公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

下面举出另外两个例子, 其中 $x$ 可以取 $f$ 的定义域中的任何点.

**例1** 求 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 的导数.

**解** 我们有$f(x)=\frac{x}{x-1}$及$f(x+h)=\frac{(x+h)}{(x+h)-1}$，所以

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad (\text{定义}) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x+h}{x+h-1}-\frac{x}{x-1}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{(x+h)(x-1)-x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)} \quad \left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-cb}{bd}\right) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{-h}{(x+h-1)(x-1)} \quad (\text{化简}) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h-1)(x-1)}=\frac{-1}{(x-1)^2} \quad (\text{消去 } h\neq 0) \end{aligned}$$

■

**例 2** 求$y=\sqrt{x}$对于$x>0$的导数.

**解** 利用导数的等价形式计算$f'$：

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}=\lim_{z\to x}\frac{\sqrt{z}-\sqrt{x}}{z-x}=\lim_{z\to x}\frac{\sqrt{z}-\sqrt{x}}{(\sqrt{z}-\sqrt{x})(\sqrt{z}+\sqrt{x})} \\ &= \lim_{z\to x}\frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

■

**附注**

经常需要知道$\sqrt{x}$对于$x>0$的导数：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

### 3.1.2 记号

可以采用多种方式表示函数$y=f(x)$的导数，其中自变量是$x$，因变量是$y$. 用于表示导数的一些常见的可选记号有

$$f'(x)=y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=D(f)(x)=D_x f(x)$$

符号 d/d$x$ 和 $D$ 表示求微分运算. d$y$/d$x$ 读作“$y$ 对于 $x$ 的导数”，d$f$/d$x$ 和(d/d$x$)$f(x)$读作“$f$ 对于 $x$ 的导数”. $y'$和$f'$上的撇号“′”来自牛顿对导数采用的记号. d/d$x$ 记号同莱布尼茨所用的记号相似. 不应当把符号 d$y$/d$x$ 看成一个比(直到在3.10节引入“微分”的概念为止).

为了表示导数在一个指定数$x=a$的值，使用记号

$$f'(a)\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}=\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right|_{x=a}$$

例如，在例 2 中

$$f'(4)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x}\right|_{x=4}=\left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=4}=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$$

### 3.1.3 描绘导数的图形

通过估计函数$f$图形上的斜率通常可能对$y=f(x)$的导数描绘出比较好的图形. 就是说，在$xy$平面描出一些点$(x, f'(x))$，然后用光滑曲线把它们连接起来，作为$y=f'(x)$的图形.

**例 3** 对于图 3.2a 中的函数$y=f(x)$，描绘它的导数的图形.

**解** 在常见的区间上画出$f$的图形的切线，用切点的斜率估计$f'(x)$在这些点上的值. 描出对应的点$(x, f'(x))$，用光滑曲线把它们连接起来形成如图 3.2b 的草图. ■

从$y=f'(x)$的图形上我们能够获知什么？初看起来，能够了解：(1)$f$的变化率在什么地方取正值、负值或者为零；(2)$f'$在任何点的增长率的粗略值以及$f'$的值同$f(x)$的值有关；(3)$f$的变化率本身在什么地方增加或者减少。

### 3.1.4 在区间上的可微函数和单侧导数

函数$y=f(x)$**在一个(有限或者无限)开区间上是可微的**，是指它在区间的每一点有导数. 函

数在一个闭区间$[a, b]$上是可微的，是指它在内部$(a, b)$上是可微的，而在端点存在极限

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad (\text{在 } a \text{ 的右导数})$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(b+h)-f(b)}{h} \quad (\text{在 } b \text{ 的左导数})$$

(见图 3.3).

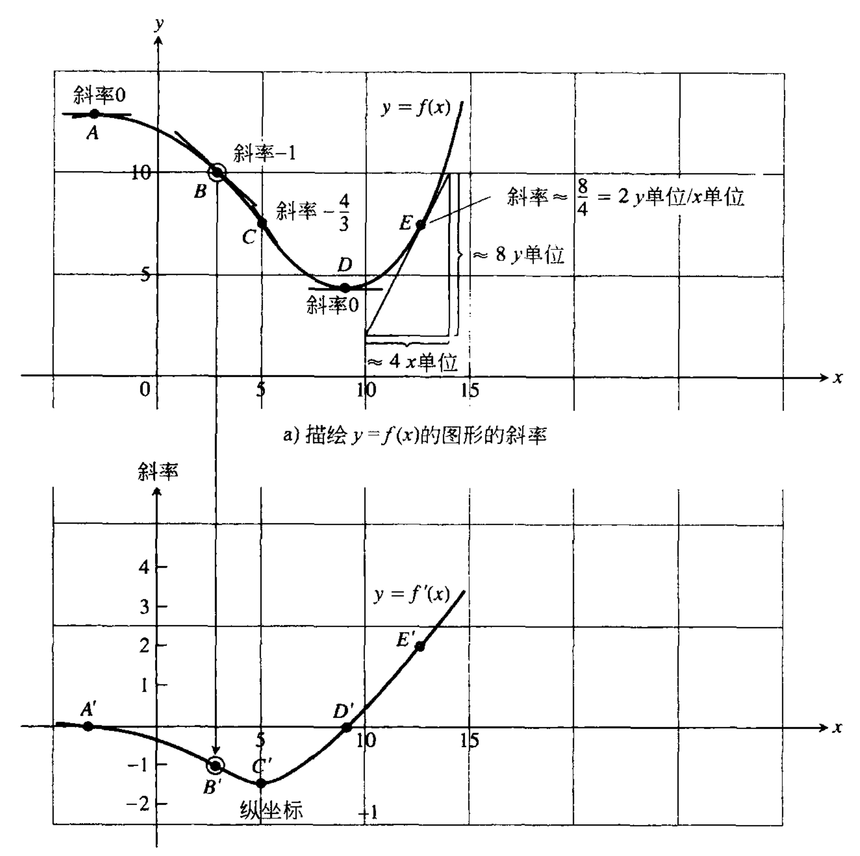



图 3.2 $f'$的图形是$f$的斜率如何随$x$变化的可视记录

右导数和左导数可以在函数定义域的任何点定义. 单侧极限和双侧极限之间的通常关系对于这两种导数成立. 由于2.4 节定理6，函数在一点有导数，当且仅当它在那个点有左导数和右导数，同时这两个单侧导数相等.

**例 4** 证明函数$y = |x|$在区间$(-\infty, 0)$和$(0, \infty)$上是可微的，但是在$x = 0$没有导数.

**解** 由 2.7 节可知，$y = mx + b$ 的导数等于斜率 $m$. 因此，在原点的右侧，

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(1\cdot x) = 1$$

$$\left(\frac{d}{dx}(mx+b) = m, |x| = x\right)$$

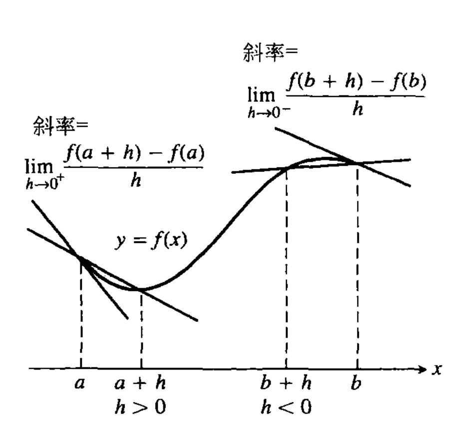



图 3.3 在端点的导数为单侧极限

在原点的左侧，

$$\frac{d}{dx}(|x|)=\frac{d}{dx}(-x)=\frac{d}{dx}(-1\cdot x)=-1\quad(|x|=-x)$$

（见图3.4）．在原点不可能存在导数，因为两个单侧导数不相等：

$|x|$在$x=0$的右导数

$$\begin{aligned}&=\lim_{h\to0^+}\frac{|0+h|-|0|}{h}\\&=\lim_{h\to0^+}\frac{|h|}{h}\\&=\lim_{h\to0^+}\frac{h}{h}\quad(当h>0时|h|=h)\\&=\lim_{h\to0^+}1=1\end{aligned}$$

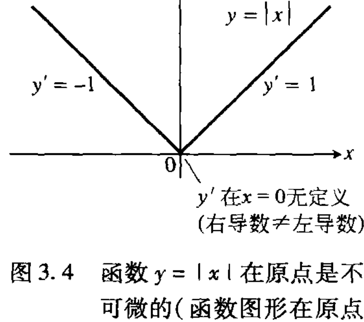



图3.4　函数$y=|x|$在原点是不可微的（函数图形在原点形成一个“角”）

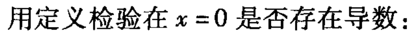
$|x|$在$x=0$的左导数

$$\begin{aligned}&=\lim_{h\to0^-}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{|h|}{h}\\&=\lim_{h\to0^-}\frac{-h}{h}\quad(当h<0时|h|=-h)\\&=\lim_{h\to0^-}-1=-1\end{aligned}$$

■

**例5**　在例2中，对于$x>0$求出

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$



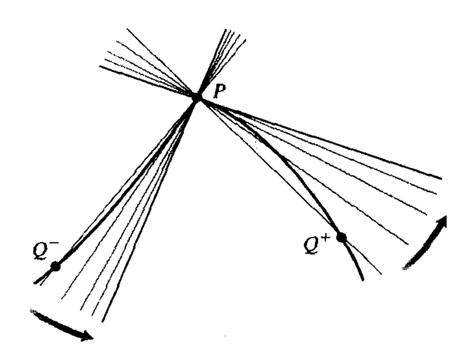
用定义检验在$x=0$是否存在导数：

$$\lim_{h\to0^+}\frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{\sqrt{h}}=\infty$$

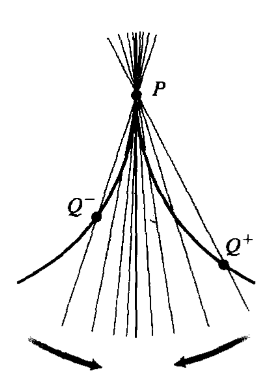
由于（右）极限为无穷大，在$x=0$不存在导数．由于连接原点和$y=\sqrt{x}$图形上点$[h,\sqrt{h}]$的割线的斜率趋近$\infty$，图形在原点有垂直切线（参见图1.15）． ■

### 3.1.5　什么情况下函数在一点没有导数

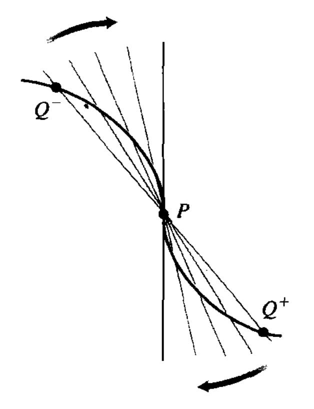
如果在函数$f$的图形上，通过点$P(x_0,f(x_0))$及邻近点$Q$的割线的斜率当$Q$趋近$P$时趋近一个有限的极限，函数在$x_0$有导数．只要割线不达到极限位置，或者当$Q$趋近$P$时割线变成垂直线，就不存在导数．因此，可微性是函数$f$的图形上的一种“光滑性”条件．函数可能由于具有像下列图形中所显示的几种点而在一点没有导数：



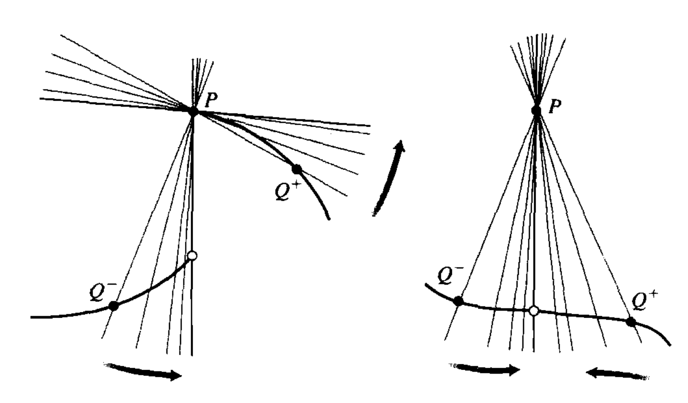

（1）角点，两个单侧导数不相等




（2）尖点，$PQ$的斜率从一侧趋近$\infty$而从另一侧趋近$-\infty$




(3) 垂直切线点，$PQ$ 的斜率从两侧都趋近∞或者都趋近 $-\infty$（此处为 $-\infty$）




(4) 不连续点（显示的两个例子）

### 3.1.6 可微函数是连续的

在每个点有导数的函数是连续的.

> **定理 1（可微性蕴涵连续性）** 若 $f$ 在 $x=c$ 有导数，则 $f$ 在 $x=c$ 是连续的.

**证明** 假定 $f'(c)$ 存在，我们必须证明 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=f(c)$，或者证明等价的结果 $\lim\limits_{h\to 0}f(c+h)=f(c)$. 若 $h\neq 0$，则

$$f(c+h)=f(c)+(f(c+h)-f(c))=f(c)+\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\cdot h$$

取当 $h\to 0$ 时的极限，按 2.2 节定理 1，

$$\lim_{h\to 0}f(c+h)=\lim_{h\to 0}f(c)+\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}h=f(c)+f'(c)\cdot 0=f(c)+0=f(c)\quad\blacksquare$$

用单侧极限的同样论据证明，若 $f$ 在 $x=c$ 有单侧导数（右导数或者左导数），则 $f$ 在 $x=c$ 的那一侧是连续的.

定理 1 表明，如果函数在一点不连续（例如存在跃变不连续性），那么在那一点是不可微的. 最大整数函数 $y=\lfloor x\rfloor$ 在所有整数 $x=n$ 是不可微的（见 2.6 节例 4）.

**注意** 定理 1 的逆定理不成立. 一个函数在其连续的点并非必定有导数，正如在例 4 所见的那样.

### 3.1.7 导数的介值性质（达布定理）

从下述定理看出，并非所有函数都能成为某个函数的导数，这个定理于 1875 年首次由法国数学家简 · 卡斯腾 · 达布（1842—1917）证明.

> **定理 2（达布定理）** 若 $a$ 和 $b$ 是一个区间上的任意两点，函数在区间上是可微的，则 $f'$ 取 $f'(a)$ 和 $f'(b)$ 之间的每个值.

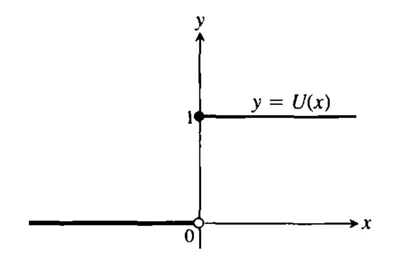



图 3.5 单位阶跃函数没有介值特性，不能成为实直线上某个函数的导数

定理 2（我们不予证明）表明，一个函数不能成为其他函数在一个区间上的导数，除非它在区间上具有介值性质. 例如，图 3.5 中的单位阶跃函数不能成为实直线上任

何实值函数的导数. 在第5章将会见到每个连续函数是某个函数的导数.

在4.4节，我们引用定理2分析在二次可微函数图形上一点发生的变化，在那个点函数改变它的“弯曲”特性.

## 习题3.1

在习题1~6中，应用定义计算函数的导数. 然后求导数在指定点的值.

**1.** $f(x)=4-x^2$；$f'(-3)$，$f'(0)$，$f'(1)$.

**2.** $F(x)=(x-1)^2+1$；$F'(-1)$，$F'(0)$，$F'(2)$.

**3.** $g(t)=\frac{1}{t^2}$；$g'(-1)$，$g'(2)$，$g'(\sqrt{3})$.

**4.** $k(z)=\frac{1-z}{2z}$；$k'(-1)$，$k'(1)$，$k'(\sqrt{2})$.

**5.** $p(\theta)=\sqrt{3\theta}$；$p'(1)$，$p'(3)$，$p'(2/3)$.

**6.** $r(s)=\sqrt{2s+1}$；$r'(0)$，$r'(1)$，$r'(1/2)$.

在习题7~12中，求指定函数的导数.

**7.** $\frac{dy}{dx}$，$y=2x^3$.　　**8.** $\frac{dr}{ds}$，$r=\frac{s^3}{2}+1$.

**9.** $\frac{ds}{dt}$，$s=\frac{t}{2t+1}$.　　**10.** $\frac{dv}{dt}$，$v=t-\frac{1}{t}$.

**11.** $\frac{dp}{dq}$，$p=\frac{1}{\sqrt{q+1}}$.　　**12.** $\frac{dz}{dw}$，$z=\frac{1}{\sqrt{3w-2}}$.

在习题13~16中，对函数求导数，并求在自变量指定值的切线的斜率.

**13.** $f(x)=x+\frac{9}{x}$，$x=-3$.　**14.** $k(x)=\frac{1}{2+x}$，$x=2$.

**15.** $s=t^3-t^2$，$t=-1$.　**16.** $y=(x+1)^3$，$x=-2$.

在习题17和18中，对函数求导数. 然后求在函数图形指定点上的切线的方程.

**17.** $y=f(x)=\frac{8}{\sqrt{x-2}}$，$(x, y)=(6, 4)$.

**18.** $w=g(z)=1+\sqrt{4-z}$，$(z, w)=(3, 2)$.

在习题19~22中，求导数的值.

**19.** $\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=-1}$，$s=1-3t^2$.　**20.** $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\sqrt{3}}$，$y=1-\frac{1}{x}$.

**21.** $\left.\frac{dr}{d\theta}\right|_{\theta=0}$，$r=\frac{2}{\sqrt{4-\theta}}$.　**22.** $\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=4}$，$w=z+\sqrt{z}$.

在习题23~26中，利用公式

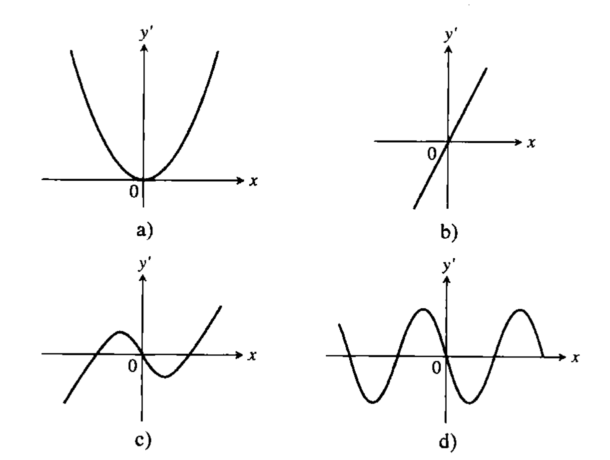
$$f'(x)=\lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

求函数的导数.

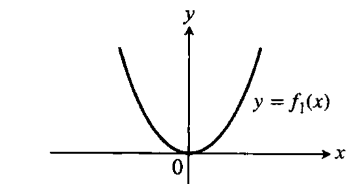
**23.** $f(x)=\frac{1}{x+2}$.　　**24.** $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$.

**25.** $g(x)=\frac{x}{x-1}$.　　**26.** $g(x)=1+\sqrt{x}$.

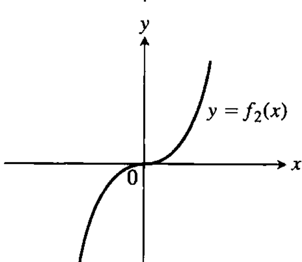
在习题27~30中，指出所画函数图形同附图a~d中所画的哪个导数图形匹配.



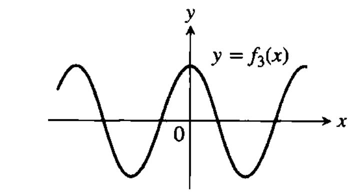

**27.**



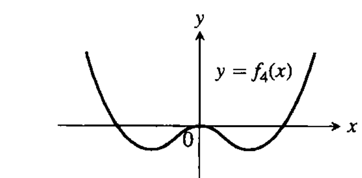

**28.**




**29.**

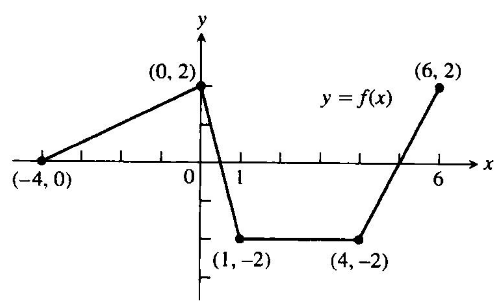



**30.**

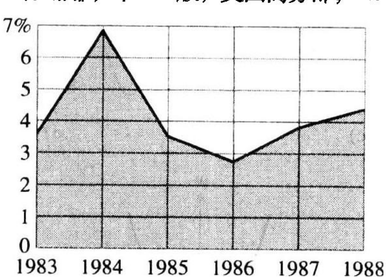



**31.** **(a)** 附图中的图形由线段首尾连接构成. $f'$在区间$[-4, 6]$的哪些点上没有定义？提出答案的理由.

**(b)** 画出$f$的导数的图形. 图形应呈现为阶梯函数.

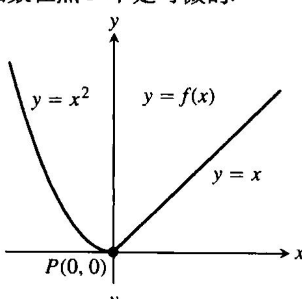



**32. 经济增长** 附图显示美国在1983～1988年期间国民生产总值(GNP)变化的年平均百分数$y=f(t)$. 画出$dy/dt$的图形(在有定义的地方). (资料来源:《美国统计文摘》, 第110版, 美国商务部, 427页.)

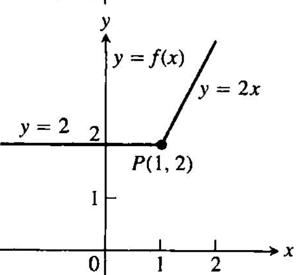



在习题33～36中, 比较函数的右极限和左极限, 证明函数在点$P$不是可微的.

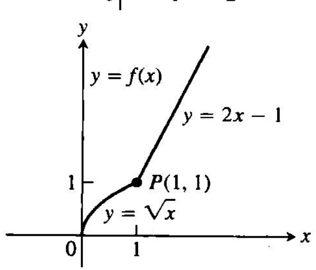
**33.**



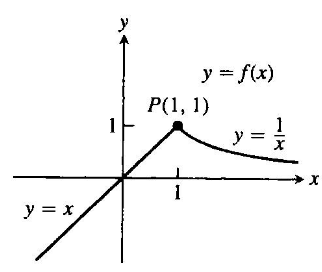

**34.**




**35.**




**36.**




在习题37～42中, 每幅图显示函数在闭区间$D$上的图形. 在定义域的什么点上

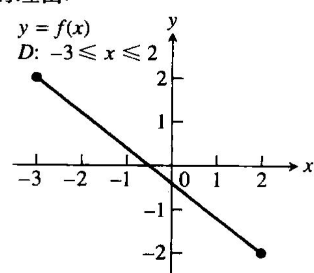
(a) 函数是可微的?

(b) 函数是连续的但不是可微的?

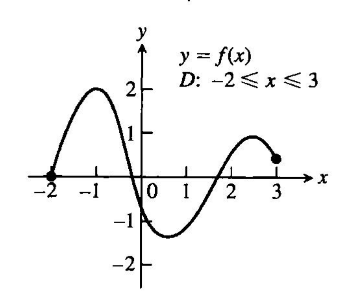
(c) 函数既不是连续的也不是可微的?

提出答案的理由.

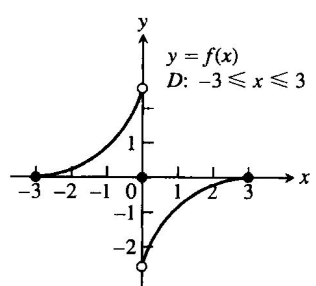
**37.**



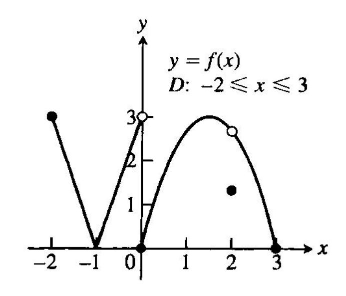

**38.**



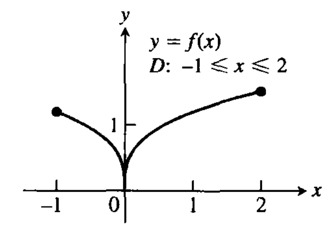

**39.**



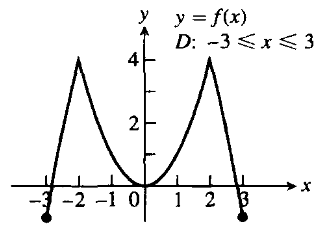

**40.**



41.




42.




43. **抛物线的切线** 抛物线 $y=2x^2-13x+5$ 存在以 $-1$ 为斜率的切线吗？如果存在，求切线的方程和切点. 如果不存在，原因何在？

44. **$y=\sqrt{x}$ 的切线** 曲线 $y=\sqrt{x}$ 在 $x=-1$ 存在穿过 $x$ 轴的切线吗？如果存在，求切线的方程和切点. 如果不存在，原因何在？

45. (a) 设 $f(x)$ 是满足 $|f(x)|\leqslant x^2(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 的函数. 证明 $f$ 在 $x=0$ 是可微的，并且求 $f'(0)$.

(b) 证明

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 是可微的，并且求 $f'(0)$.

46. **魏尔斯特拉斯的无处可微的连续函数**

魏尔斯特拉斯函数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2/3)^n\cos(9^n\pi x)$ 的前 8 项之和为

$$\begin{aligned}g(x)&=\cos(\pi x)+(2/3)^1\cos(9\pi x)\\&+(2/3)^2\cos(9^7\pi x).\\&+(2/3)^3\cos(9^3\pi x)+\cdots\\&+(2/3)^7\cos(9^7\pi x)\end{aligned}$$

画出这个和的图形. 放大几次. 图形是如何摆动和起伏的？指定一个视窗，在其中显示图形的平滑部分.

**计算机探究**

对习题 47 ~ 52 中的函数，用一种 CAS(计算机代数系统)执行下列处理步骤：

(a) 画出 $y=f(x)$ 的图形，考察函数的整体特性.

(b) 在一个一般的点 $x$ 用一个一般的步长 $h$ 定义差商 $q$.

(c) 取当 $h\to 0$ 时的极限. 这样得到什么公式？

(d) 代入值 $x=x_0$，一起画出函数 $y=f(x)$ 及其在这一点的切线的图形.

(e) 在(c)中求得的公式中，对 $x$ 代入比 $x_0$ 大和比 $x_0$ 小的不同值. 这两种数值对于你的图形有意义吗？

(f) 画出在(c)中所得公式的图形. 当公式取负值、零和正值时它具有什么含义？这对于(a)中画出的图形有意义吗？提出答案的理由.

47. $f(x)=x^3+x^2-x$，$x_0=1$.

48. $f(x)=x^{1/3}+x^{2/3}$，$x_0=1$.

49. $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$，$x_0=2$.

50. $f(x)=\dfrac{x-1}{3x^2+1}$，$x_0=-1$.

51. $f(x)=\sin 2x$，$x_0=\pi/2$.

52. $f(x)=x^2\cos x$，$x_0=\pi/4$.

## 3.2 多项式、指数函数及函数积与商求导数法则

本节介绍几种求导数或求微分的法则，可以用于对常值函数、幂函数、多项式、指数函数、有理函数以及这些函数的某些组合求导数.

### 3.2.1 幂函数、倍数函数及函数和与差的导数

求导数的第一条法则是每个常值函数的导数为零.

> **法则 1 常值函数的导数**
>
> 若 $f$ 取常数值 $f(x)=c$，则
>
> $$\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}(c)=0$$

**法则 1 的证明** 对输出为常数值 $c$ 的函数 $f(x)=c$(见图 3.6)，应用导数的定义. 在每个 $x$ 值求出

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$ ■

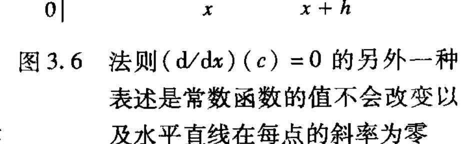



图 3.6 法则 $(d/dx)(c)=0$ 的另外一种表述是常数函数的值不会改变以及水平直线在每点的斜率为零

从 2.7 节知道

$$\frac{d}{dx}(x)=\frac{d}{dx}(1\cdot x)=1\quad\left(\frac{d}{dx}(mx+b)=m=1\right)$$

以及

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}\quad 或\quad \frac{d}{dx}(x^{-1})=-x^{-2}$$

从 3.1 节例 2 还知道

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x})=\frac{1}{2\sqrt{x}}\quad 或\quad \frac{d}{dx}(x^{1/2})=\frac{1}{2}x^{-1/2}$$

这三个例子说明对幂 $x^n$ 求导数的一般法则. 我们首先证明当 $n$ 为正整数时的法则.

> **正整数幂法则** 若 $n$ 为正整数，则
>
> $$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$$

**正整数幂法则的证明** 公式

$$z^n-x^n=(z-x)(z^{n-1}+z^{n-2}x+\cdots+zx^{n-2}+x^{n-1})$$

可以通过对右端的乘法得到证实. 于是从导数定义的另外一种形式，有

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}=\lim_{z\to x}\frac{z^n-x^n}{z-x}\\&=\lim_{z\to x}(z^{n-1}+z^{n-2}x+\cdots+zx^{n-2}+x^{n-1})\quad(n\ 项)\\&=nx^{n-1}\end{aligned}$$ ■

人物传记

理查德·柯朗 (Richard Courant, 1888—1972)

求导数的幂法则实际上对所有实数 $n$ 成立. 我们已经见到过负整数幂和分数幂的例子，但是 $n$ 也可以为无理数. 为了应用幂法则，从原来指数 $n$ 减 1，并对结果乘 $n$. 下面说明法则的一般形式，但是把它的证明推迟到 3.7 节.

> **法则 2 幂法则的一般形式**
>
> 若 $n$ 为任意实数，则
>
> $$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$$
>
> 对于幂 $x^n$ 和 $x^{n-1}$ 有定义的所有 $x$ 成立.

**例 1** 求下列 $x$ 的幂的导数：

(a) $x^3$. (b) $x^{2/3}$. (c) $x^{\sqrt{2}}$. (d) $\frac{1}{x^4}$. (e) $x^{-4/3}$. (f) $\sqrt{x^{2+\pi}}$.

**解**

(a) $\frac{d}{dx}(x^3)=3x^{3-1}=3x^2$. (b) $\frac{d}{dx}(x^{2/3})=\frac{2}{3}x^{2/3-1}=\frac{2}{3}x^{-1/3}$.

**(c)** $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$. **(d)** $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{x^4}\right) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-4}) = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = -\dfrac{4}{x^5}$.

**(e)** $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-4/3}) = -\dfrac{4}{3}x^{-4/3-1} = -\dfrac{4}{3}x^{-7/3}$.

**(f)** $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{x^{2+\pi}}) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{1+(\pi/2)}) = \left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)x^{1+(\pi/2)-1} = \dfrac{1}{2}(2+\pi)\sqrt{x^{\pi}}$. ■

求导数的第三条法则表明，当可微函数同常数相乘时，其导数为函数的导数和同一个常数相乘.

> **法则 3 常数倍法则**
> 若 $u$ 为 $x$ 的可微函数，$c$ 是常数，则
> $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cu) = c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

特别是，若 $n$ 是任意实数，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cx^n) = cnx^{n-1}$$

**法则 3 的证明**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}cu = \lim_{h\to 0}\frac{cu(x+h)-cu(x)}{h} \quad (f(x)=cu(x)\text{ 的导数定义})$$

$$= c\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} \quad (\text{极限性质})$$

$$= c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \quad (u\text{ 是可微的})$$ ■

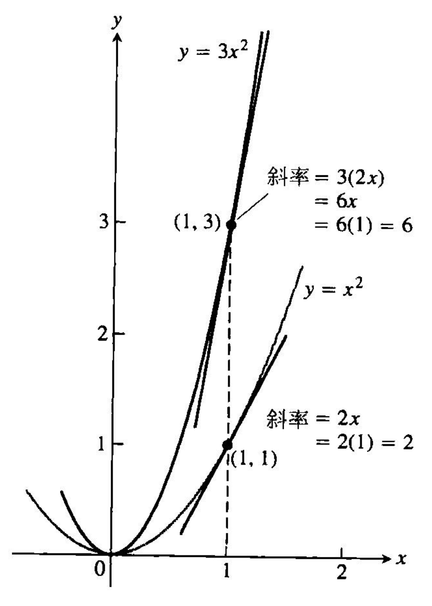



图 3.7 $y = x^2$ 和 $y = 3x^2$ 的图形，当对 $y$ 坐标乘 3 时其斜率由 3 相乘(例 2)

**例 2**

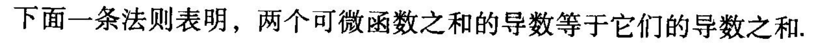
**(a)** 导数公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x^2) = 3\cdot 2x = 6x$$

表明，如果改变 $y = x^2$ 的图形标度，对每个 $y$ 坐标乘 3，那么在每个点的斜率由 3 相乘(见图 3.7).

**(b)** 可微函数 $u$ 的负值函数的导数等于函数导数的负值函数. 取 $c = -1$，法则 3 给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-1\cdot u) = -1\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u) = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$ ■



下面一条法则表明，两个可微函数之和的导数等于它们的导数之和.

> **法则 4 导数的和法则**
> 若 $u$，$v$ 是 $x$ 的可微函数，则它们的和在 $u$ 和 $v$ 都是可微的每个点是可微的. 在这样的点，
> $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u+v) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

**附注：用 $u$ 和 $v$ 表示函数**

在需要用微分法公式时，我们时常用 $f$ 和 $g$ 这样的字母表示处理的函数. 当推导公式时我们不希望在另外一种方式下使用同样的字母. 为防止出现这样的问题，在微分法则中用 $u$ 和 $v$ 这样过去多半没有用过的字母表示函数.

例如，如果 $y = x^4 + 12x$，$y$ 就是 $u(x) = x^4$ 与 $v(x) = 12x$ 之和. 于是有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x^4)+\frac{d}{dx}(12x)=4x^3+12$$

**法则 4 的证明** 对$f(x)=u(x)+v(x)$应用导数定义：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[u(x)+v(x)]&=\lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h)+v(x+h)]-[u(x)+v(x)]}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]\\&=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}\end{aligned}$$ ■

把导数的和法则同常数倍法则结合起来得到导数的**差法则**，表明可微函数之差的导数等于它们的导数之差：

$$\frac{d}{dx}(u-v)=\frac{d}{dx}[u+(-1)v]=\frac{du}{dx}+(-1)\frac{dv}{dx}=\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}$$

和法则还可以扩充到两个函数以上的有限和. 若 $u_1$，$u_2$，…，$u_n$ 在 $x$ 是可微的，则 $u_1+u_2+\cdots+u_n$ 在 $x$ 也是可微的，且有

$$\frac{d}{dx}(u_1+u_2+\cdots+u_n)=\frac{du_1}{dx}+\frac{du_2}{dx}+\cdots+\frac{du_n}{dx}$$

**例 3**
$$y=x^3+\frac{4}{3}x^2-5x+1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}x^3+\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^2\right)-\frac{d}{dx}(5x)+\frac{d}{dx}(1)=3x^2+\frac{4}{3}\cdot 2x-5+0=3x^2+\frac{8}{3}x-5$$ ■

我们可以使用例 3 中多项式求导数的方法，对任何多项式逐项求导数. 所有多项式都是处处可微的.

**多于两个函数之和的和法则的证明** 用数学归纳法(参见附录 A. 2)证明命题

$$\frac{d}{dx}(u_1+u_2+\cdots+u_n)=\frac{du_1}{dx}+\frac{du_2}{dx}+\cdots+\frac{du_n}{dx}$$

如刚才所作的证明，命题对于 $n=2$ 成立. 这是归纳法证明的第 1 步.

第 2 步证明，若命题对任何正整数 $n=k$ 成立，其中 $k\geqslant n_0=2$，则它对于 $n=k+1$ 也成立. 所以，假设

$$\frac{d}{dx}(u_1+u_2+\cdots+u_k)=\frac{du_1}{dx}+\frac{du_2}{dx}+\cdots+\frac{du_k}{dx}\tag{1}$$

于是
$$\frac{d}{dx}(\underbrace{u_1+u_2+\cdots+u_k}_{\text{称这个和定义的函数为}u}+\underbrace{u_{k+1}}_{\text{称这个函数为}v})$$

$$=\frac{d}{dx}(u_1+u_2+\cdots u_k)+\frac{du_{k+1}}{dx}\quad\left(\text{对于}\frac{d}{dx}(u+v)\text{的法则 4}\right)$$

$$=\frac{du_1}{dx}+\frac{du_2}{dx}+\cdots+\frac{du_k}{dx}+\frac{du_{k+1}}{dx}\quad(\text{等式(1)})$$

按这几个步骤，数学归纳原理保证和法则对于每个整数 $n\geqslant 2$ 成立. ■

**例 4** 曲线 $y=x^4-2x^2+2$ 有任何水平切线吗？如果有水平切线，出现在何处？

**解** 任何可能的水平切线出现在斜率 $dy/dx$ 为零的地方. 我们有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x^4-2x^2+2)=4x^3-4x$$

现在对于 $x$ 解方程 $\frac{dy}{dx}=0$：

$$4x^3-4x=0 \quad 4x(x^2-1)=0, \quad x=0,1,-1$$

曲线 $y=x^4-2x^2+2$ 在 $x=0$，1 和 $-1$ 有水平切线，曲线上对应的切点为(0，2)，(1，1)和($-1$，1)．请参见图3.8．■

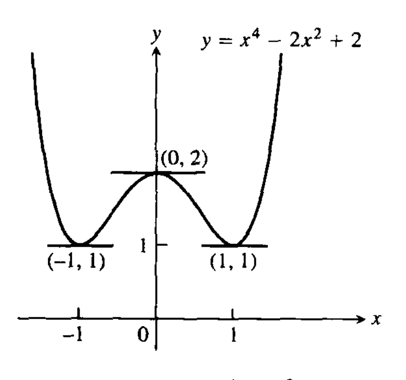



图3.8　曲线 $y=x^4-2x^2+2$ 及其水平切线(例4)

### 3.2.2　指数函数的导数

简要地复习一下在1.4节讨论的指数函数．对 $f(x)=a^x$ 应用导数的定义，得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(a^x)&=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} &&(\text{导数定义})\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{a^x\cdot a^h-a^x}{h} &&(a^{x+h}=a^x\cdot a^h)\\ &=\lim_{h\to 0}a^x\cdot\frac{a^h-1}{h} &&(\text{分解出因式 } a^x)\\ &=a^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} &&(\text{当 } h\to 0 \text{ 时 } a^x \text{ 为常数})\\ &=\underbrace{\left(\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}\right)}_{\text{一个固定数}L}\cdot a^x \end{aligned} \tag{2}$$

由此可见 $a^x$ 的导数是 $a^x$ 的一个常数倍数 $L$．这个常数 $L$ 与我们以前见到过的任何极限不同．但是，注意它等于 $f(x)=a^x$ 在 $x=0$ 的导数：

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{a^h-a^0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=L$$

因此极限 $L$ 是 $f(x)=a^x$ 的图形在其通过 $y$ 轴时的斜率．在第5章，我们要仔细讨论对数函数和指数函数，证明极限 $L$ 存在并且具有值 $\ln a$．现在通过绘制函数 $y=(a^h-1)/h$ 的图形考察 $L$ 的值，并研究当 $h$ 趋近零时它的特性．

图3.9显示 $y=(a^h-1)/h$ 对于4个不同 $a$ 值的图形．极限值 $L$ 当 $a=2$ 时的值约为0.69，当 $a=2.5$ 时的值约为0.92，当 $a=3$ 时的值约为1.1．对于在2.5和3之间选择的某个数 $a$，$L$ 的值似乎是1．那个数由 $a=e\approx 2.718\,281\,828$ 给出．选择这个基数，我们得到如1.4节的自然指数函数 $f(x)=e^x$，并且看出它满足

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1 \tag{3}$$

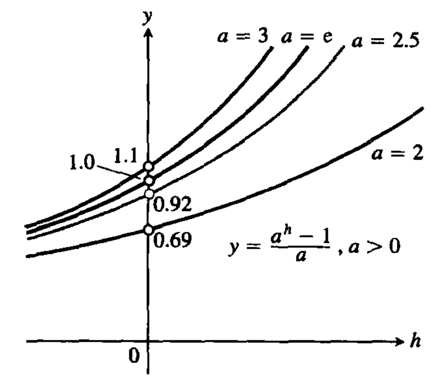



图3.9　曲线 $y=(a^h-1)/h(a>0)$ 的位置随 $a$ 连续地改变

这个极限为1蕴涵自然指数函数及其导数之间的一个重要关系：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(e^x)&=\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^h-1}{h}\right)\cdot e^x &&(\text{等式(2)取 } a=e)\\ &=1\cdot e^x=e^x &&(\text{等式(3)})\end{aligned}$$

因此自然指数函数是其自身的导数．

**自然指数函数的导数**

$$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$$

**例 5**　求与 $y=e^x$ 的图形相切并通过原点的直线的方程.

**解**　由于直线通过原点，所以它的方程具有 $y=mx$ 的形式，其中 $m$ 是斜率. 如果它在点 $(a,\ e^a)$ 同图形相切，斜率是 $m=(e^a-0)/(a-0)$. 自然指数在 $x=a$ 的斜率为 $e^a$. 由于这两个斜率是相同的，因此有 $e^a=e^a/a$. 由此推出 $a=1$ 和 $m=e$. 所以切线的方程为 $y=ex$. 请参见图 3.10. ■

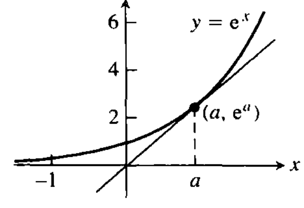



图 3.10　通过原点的直线在 $a=1$ 时同 $y=e^x$ 的图形相切(例 5)

我们可以提出这样的问题，是否还有其他不是自然指数的函数，它们也是它们自身的导数？答案是满足 $f'(x)=f(x)$ 的函数只有那些等于自然对数函数常倍数的函数，即 $f(x)=c\cdot e^x$，$c$ 为任意常数. 我们在 6.4 节证明这个事实. 请注意，从常倍数法则的确有

$$\frac{d}{dx}(c\cdot e^x)=c\cdot\frac{d}{dx}(e^x)=c\cdot e^x$$

### 3.2.3　函数的积和商的导数

两个函数之和的导数是它们的导数之和，但是，两个函数之积的导数不是它们的导数之积. 例如，

$$\frac{d}{dx}(x\cdot x)=\frac{d}{dx}(x^2)=2x,\ 而\ \frac{d}{dx}(x)\cdot\frac{d}{dx}(x)=1\cdot 1=1$$

两个函数之积的导数是两个乘积项的和，正如我们在下面的说明.

**法则 5　导数的积法则**

若 $u$ 和 $v$ 在 $x$ 是可微的，则它们的积在 $x$ 也是可微的，且有

$$\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

积 $uv$ 的导数等于 $u$ 乘 $v$ 的导数加上 $v$ 乘 $u$ 的导数. 用撇号“′”，写成 $(uv)'=uv'+vu'$. 用函数记号写成

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$$

**例 6**　求 $y=\frac{1}{x}(x^2+e^x)$ 的导数.

**解**　对 $u=1/x$ 和 $v=x^2+e^x$ 应用积法则：

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}(x^2+e^x)\right]=\frac{1}{x}(2x+e^x)+(x^2+e^x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\qquad\left(\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}\right)$$

$$=2+\frac{e^x}{x}-1-\frac{e^x}{x^2}\qquad\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=1+(x-1)\frac{e^x}{x^2}$$

■

**积法则的证明**　由导数定义，

$$\frac{d}{dx}(uv)=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$$

为了把这个分式改写成一个等价的形式，使其中包含 $u$ 和 $v$ 的导数的差商，在分子中减去和加上

$u(x+h)v(x)$:

$$\frac{d}{dx}(uv)=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x+h)v(x)+u(x+h)v(x)-u(x)v(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[u(x+h)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}+v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}u(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}+v(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

当 $h\to 0$ 时，$u(x+h)\to u(x)$，因为 $u$ 在 $x$ 是可微的，所以 $u$ 在 $x$ 是连续的. 式中两个分式在 $x$ 分别趋近 $dv/dx$ 和 $du/dx$ 的值，简记为

$$\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$ ■

**例 7** 求 $y=(x^2+1)(x^3+3)$ 的导数.

**解**

**(a)** 对 $u=x^2+1$ 和 $v=x^3+3$ 应用积法则，求得

$$\frac{d}{dx}[(x^2+1)(x^3+3)]$$
$$=(x^2+1)(3x^2)+(x^3+3)(2x)$$
$$=3x^4+3x^2+2x^4+6x=5x^4+3x^2+6x$$

**(b)** 对于这个特别的乘积，也可以通过乘出 $y$ 的原表达式，再对所得的多项式求微分(这样也许更好)：

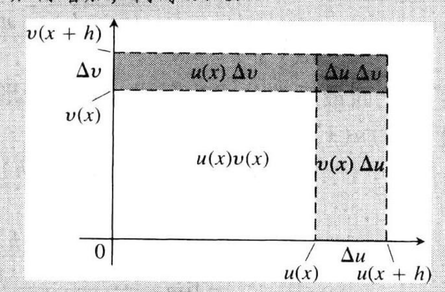
$$y=(x^2+1)(x^3+3)=x^5+x^3+3x^2+3$$
$$\frac{dy}{dx}=5x^4+3x^2+6x$$

这个结果同前面的计算一致. ■

正如两个可微函数的积的导数不是它们的导数的乘积一样，两个可微函数的商的导数不等于它们的导数的商. 求两个函数的商的导数用商法则.

**附注：积法则的图示**

设 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是正值函数且随 $x$ 增加而增加，同时 $h>0$.




那么图中阴影区的总面积为

$$u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)$$
$$=u(x+h)\Delta v+v(x+h)\Delta u-\Delta u\Delta v$$

用 $h$ 除等式两端，得到

$$\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$$
$$=u(x+h)\frac{\Delta v}{h}+v(x+h)\frac{\Delta u}{h}-\Delta u\frac{\Delta v}{h}.$$

当 $h\to 0^+$ 时，

$$\Delta u\cdot\frac{\Delta v}{h}\to 0\cdot\frac{dv}{dx}=0$$

最后得

$$\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

**法则 6 导数的商法则**

若 $u$ 和 $v$ 在 $x$ 是可微的，且 $v(x)\neq 0$，则商 $u/v$ 在 $x$ 是可微的，且有

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

采用函数记号，

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

**例 8** 求下列函数的导数：

**(a)** $y=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$.　　**(b)** $y=e^{-x}$.

**解**

**(a)** 对于 $u=t^2-1$ 和 $v=t^2+1$ 应用商法则：

$$\frac{dy}{dt}=\frac{(t^2+1)\cdot 2t-(t^2-1)\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\qquad \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v(du/dt)-u(dv/dt)}{v^2}\right)$$

$$=\frac{2t^3+2t-2t^3+2t}{(t^2+1)^2}=\frac{4t}{(t^2+1)^2}$$

**(b)**
$$\frac{d}{dx}(e^{-x})=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{e^x}\right)=\frac{e^x\cdot 0-1\cdot e^x}{(e^x)^2}=\frac{-1}{e^x}=-e^{-x}$$ ■

**商法则的证明** 由导数的定义，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x+h)}{v(x+h)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{v(x)u(x+h)-u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}$$

为了把上面最后的分式改写成一种等价形式，使其中包含 $u$ 和 $v$ 的导数的差商，在分子中减去和加上 $v(x)u(x)$. 于是得到

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{v(x)u(x+h)-v(x)u(x)+v(x)u(x)-u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{v(x)\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}-u(x)\dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}$$

对分子和分母取极限就得到商法则. ■

在求解微分问题中选择不同法则，可以使计算工作量有所不同. 下面便是一个例子.

**例 9** 不用商法则求 $y=\dfrac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}$ 的导数，改为展开分子并用 $x^4$ 相除：

$$y=\frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}=\frac{x^3-3x^2+2x}{x^4}=x^{-1}-3x^{-2}+2x^{-3}$$

然后用和法则及幂法则：

$$\frac{dy}{dx}=-x^{-2}-3(-2)x^{-3}+2(-3)x^{-4}=-\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x^3}-\frac{6}{x^4}$$ ■

### 3.2.4 二阶导数与高阶导数

若 $y=f(x)$ 是可微函数，则其导数也是一个函数. 若 $f'$ 又是可微的，则可求 $f'$ 的导数得到新的 $x$ 的函数，记为 $f''$. 所以 $f''=(f')'$. 函数 $f''$ 称为 $f$ 的**二阶导数**，因为它是一阶导数的导数. 二阶导数用几种方式表示：

$$f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dy'}{dx}=y''=D^2(f)(x)=D_x^2f(x)$$

符号 $D^2$ 表示微分运算执行两次.

若 $y=x^6$，则 $y'=6x^5$ 而有

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d}{dx}(6x^5)=30x^4$$

因此 $D^2(x^6)=30x^4$.

如果 $y''$ 是可微的，它的导数 $y'''=dy''/dx=d^3y/dx^3$ 是 $y$ 对于 $x$ 的**三阶导数**. 导数的名称能如你想象的那样继续下去，对于任何正整数 $n$，用

$$y^{(n)}=\frac{d}{dx}y^{(n-1)}=\frac{d^ny}{dx^n}=D^ny$$

**附注：导数记号的念法**

$y'$："y 撇"

$y''$："y 两撇"

$\dfrac{d^2y}{dx^2}$："d 方y-dx方"

$y'''$："y 三撇"

$y^{(n)}$："y n阶"

$\dfrac{d^ny}{dx^n}$："d n次 y-dx n次"

$D^n$："D n次"

表示 $y$ 对于 $x$ 的 **$n$ 阶导数**.

可以把二阶导数解释为 $y=f(x)$ 的图形在每点切线的斜率的变化率. 在下一章将会见到，二阶导数揭示图形在离开切点时从切线向上弯曲还是向下弯曲. 在下一节，我们通过沿直线的运动来解释二阶导数和三阶导数.

**例 10** $y=x^3-3x^2+2$ 的前四阶导数如下：

一阶导数： $y'=3x^2-6x$

二阶导数： $y''=6x-6$

三阶导数： $y'''=6$

四阶导数： $y^{(4)}=0$

这个函数具有所有各阶导数，五阶和更高阶的导数全部为 0. ■

## 习题 3.2

在习题 1 ~ 12 中，求一阶导数和二阶导数.

**1.** $y=-x^2+3$. **2.** $y=x^2+x+8$.

**3.** $s=5t^3-3t^5$. **4.** $w=3z^7-7z^3+21z^2$.

**5.** $y=\frac{4x^3}{3}-x+2e^x$. **6.** $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}$.

**7.** $w=3z^{-2}-\frac{1}{z}$. **8.** $s=-2t^{-1}+\frac{4}{t^2}$.

**9.** $y=6x^2-10x-5x^{-2}$. **10.** $y=4-2x-x^{-3}$.

**11.** $r=\frac{1}{3s^2}-\frac{5}{2s}$. **12.** $r=\frac{12}{\theta}-\frac{4}{\theta^3}+\frac{1}{\theta^4}$.

在习题 13 ~ 16 中，求 $y'$：(**a**) 用积法则；(**b**) 通过因式相乘产生更简单项的和，再求导数.

**13.** $y=(3-x^2)(x^3-x+1)$.

**14.** $y=(x-1)(x^2+x+1)$.

**15.** $y=(x^2+1)\left(x+5+\frac{1}{x}\right)$.

**16.** $y=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}+1\right)$.

在习题 17 ~ 36 中，求函数的导数.

**17.** $y=\frac{2x+5}{3x-2}$. **18.** $z=\frac{2x+1}{x^2-1}$.

**19.** $g(x)=\frac{x^2-4}{x+0.5}$. **20.** $f(t)=\frac{t^2-1}{t^2+t-2}$.

**21.** $v=(1-t)(1+t^2)^{-1}$. **22.** $w=(2x-7)^{-1}(x+5)$.

**23.** $y=2e^{-x}$. **24.** $y=\frac{x^2+3e^x}{2e^x-x}$.

**25.** $v=\frac{1+x-4\sqrt{x}}{x}$. **26.** $r=2\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}}+\sqrt{\theta}\right)$.

**27.** $y=x^3e^x$. **28.** $w=re^{-r}$.

**29.** $y=x^{9/4}$. **30.** $y=x^{-3/5}+\pi^{3/2}$.

**31.** $s=2t^{3/2}+3e^2$. **32.** $w=\frac{1}{z^{1.4}}+\frac{\pi}{\sqrt{z}}$.

**33.** $y=\sqrt[7]{x^2}-x^e$. **34.** $y=\sqrt[3]{x^{9.6}}+2e^{1.3}$.

**35.** $r=\frac{e^s}{s}$. **36.** $r=e^{\theta}\left(\frac{1}{\theta^2}+\theta^{-\pi/2}\right)$.

在习题 37 和 38 中，求函数的所有各阶导数.

**37.** $y=\frac{x^4}{2}-\frac{3}{2}x^2-x$. **38.** $y=\frac{x^5}{120}$.

在习题 39 ~ 46 中，求函数的一阶导数和二阶导数.

**39.** $y=\frac{x^3+7}{x}$.

**40.** $s=\frac{t^2+5t-1}{t^2}$.

**41.** $r=\frac{(\theta-1)(\theta^2+\theta+1)}{\theta^3}$.

**42.** $u=\frac{(x^2+x)(x^2-x+1)}{x^4}$.

**43.** $w=3z^2e^z$.

**44.** $w=e^z(z-1)(z^2+1)$.

**45.** $p=\left(\frac{q^2+3}{12q}\right)\left(\frac{q^4-1}{q^3}\right)$.

**46.** $p=\frac{q^2+3}{(q-1)^3+(q+1)^3}$.

**47.** 假定 $u$ 和 $v$ 是 $x$ 的函数，在 $x=0$ 是可微的，且有 $u(0)=5, u'(0)=-3, v(0)=-1, v'(0)=2$. 求下列导数在 $x=0$ 的值：

(**a**) $\frac{d}{dx}(uv)$. (**b**) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)$.

(**c**) $\frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right)$. (**d**) $\frac{d}{dx}(7v-2u)$.

**48.** 假定 $u$ 和 $v$ 是 $x$ 的可微函数，且有

$u(1)=2, u'(1)=0, v(1)=5, v'(1)=-1$

求下列导数在 $x=1$ 的值：

(**a**) $\frac{d}{dx}(uv)$. (**b**) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)$.

(**c**) $\frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right)$. (**d**) $\frac{d}{dx}(7v-2u)$.

**49.** (**a**) **曲线的法线** 求同曲线 $y=x^3-4x+1$ 在点 (2，1) 的切线垂直的直线的方程.

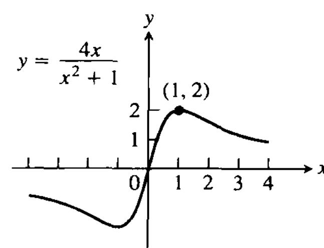
(b) **最小斜率** 曲线上的最小斜率是什么？在曲线上的什么点曲线具有这个斜率？

(c) **具有指定斜率的切线** 求曲线在某些点的切线方程，曲线在这些点的斜率为 8.

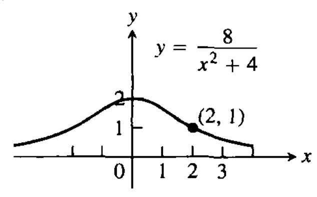
**50.** (a) **水平切线** 求曲线 $y=x^3-3x-2$ 的水平切线的方程. 此外，求同这些切线在切点垂直的直线的方程.

(b) **最小斜率** 此曲线上的最小斜率是什么？曲线上的什么点具有这个斜率？求在这一点同曲线切线垂直的直线的方程.

**51.** 求附图中牛顿蛇形线在原点和点(1，2)的切线.




**52.** 求附图中阿格尼希(Agnesi)箕舌线在点(2，1)的切线.




**53. 同恒等函数相切的二次曲线** 曲线 $y=ax^2+bx+c$ 通过点(1，2)且在原点同直线 $y=x$ 相切. 求 $a$，$b$，$c$.

**54. 具有公切线的二次曲线** 曲线 $y=x^2+ax+b$ 和 $y=cx-x^2$ 在点(1，0)有一条公切线. 求 $a$，$b$，$c$.

**55.** (a) 求在点(-1，0)同曲线 $y=x^3-x$ 相切的直线的方程.

**T** (b) 一起画出曲线和切线的图形. 切线同曲线在另外一点相交. 利用 Zoom 和 Trace 功能键估计交点的坐标.

**T** (c) 通过解曲线和切线的联立方程(用 Solver 功能键)证实对第二个交点坐标的估计.

**56.** (a) 求在原点同曲线 $y=x^3-6x^2+5x$ 相切的直线的方程.

**T** (b) 一起画出曲线和切线的图形. 切线同曲线在另外一点相交. 用 Zoom 和 Trace 功能键估计交点的坐标.

**T** (c) 通过解曲线和切线的联立方程(用 Solver 功能键)证实对第二个交点坐标的估计.

**57.** 一般 $n$ 次多项式的形式为

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

其中 $a_n\neq0$. 求 $P'(x)$.

**58. 人体对药物的反应** 人体对某种药物剂量的反应有时可以用形式为

$$R=M^2\left(\frac{C}{2}-\frac{M}{3}\right)$$

的方程表示，其中 $C$ 是正常数，$M$ 是血液中吸收药物的剂量. 如果反映是血压的变化，那么 $R$ 是测出的汞柱厘米数. 如果反映是体温的变化，那么 $R$ 是测出的温度，等等.

求 $\mathrm{d}R/\mathrm{d}M$. 这个导数作为 $M$ 的函数，称为人体对药物的敏感度. 在 4.5 节，我们会看到如何求人体最敏感的药物剂量.

**59.** 假设在积法则中函数 $v$ 取一个常数值 $c$，那么积法则说明什么？这说明的是常数倍法则吗？

**60. 倒数法则**

(a) 倒数法则表明，在函数 $v(x)$ 可微且不为零的任何点，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{v}\right)=-\frac{1}{v^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

证明倒数法则是商法则的特例.

(b) 证明倒数法则和积法则共同蕴涵商法则.

**61. 推广积法则** 积法则给出 $x$ 的两个可微函数的积 $uv$ 的导数公式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv)=u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

(a) 对于 $x$ 的三个可微函数的积 $uvw$ 的导数，类似的公式是什么？

(b) 对于 $x$ 的四个可微函数的积 $u_1u_2u_3u_4$，导数的公式是什么？

(c) 对于 $x$ 的有限个 $n$ 的可微函数的积 $u_1u_2u_3\cdots u_n$，导数的公式是什么？

**62. 负整数的幂法则** 利用商法则证明负整数的幂法则，就是

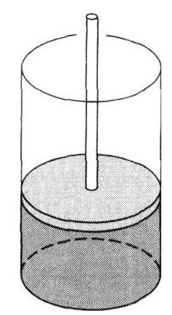
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-m})=-mx^{-m-1}$$

其中 $m$ 是负整数.

**63. 圆柱体内的压力** 如果圆柱体内气体保持常温 $T$，压力 $P$ 和体积 $V$ 的关系由形式为

$$P=\frac{nRT}{V-nb}-\frac{an^2}{V^2}$$

的公式表示，其中 $a$，$b$，$n$，$R$ 为常数. 求 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}V$. (参见附图.)



**64. 最佳订货量** 库存管理中的一个公式表明，每周订货、支付和保存商品的平均费用为

$$A(q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2}$$

其中 $q$ 是当商品(鞋子、收音机、扫帚或者无论什么可能的商品)库存量降低时提出的订购量，$k$ 是提出一份订单的费用(无论订单的频度如何，费用相同)，$c$ 是一种商品的费用(常数)，$m$ 是每周销售商品的品种(常数)，$h$ 是每种商品每周的保管费用(常数，其中要考虑的因素包括占用空间、公用设施以及保险和安全措施). 求 $\mathrm{d}A/\mathrm{d}q$ 和 $\mathrm{d}^2A/\mathrm{d}q^2$.

## 3.3 把导数作为一种变化率

在 2.1 节介绍了平均变化率和瞬时变化率. 这一节进一步讨论用导数模拟事物变化率的各种应用. 自然要考虑随时间变化的量，但是其他变量可以用同样方式处理. 例如，经济学家可能要研究生产钢的成本如何随钢产量吨数的变化.

### 3.3.1 瞬时变化率

如果把差商 $(f(x+h)-f(x))/h$ 解释成 $f$ 在区间 $[x, x+h]$ 上的平均变化率，我们就能把它在 $h\to 0$ 时的极限解释成 $f$ 在点 $x$ 的变化率.

> **定义** $f$ 在 $x_0$ 关于 $x$ 的**瞬时变化率**是导数
>
> $$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
>
> 只要极限存在.

因此，瞬时变化率是平均变化率的极限.

在习惯上，即使 $x$ 并不表示时间，也使用瞬时一词. 但是，这个词时常被省略. 当我们说变化率时，就是指瞬时变化率.

**例 1** 一个圆的面积 $A$ 与其直径的关系由方程

$$A = \frac{\pi}{4}D^2$$

表示. 当直径为 10 m 时，圆面积关于直径的变化率是多少?

**解** 圆面积关于直径的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}D} = \frac{\pi}{4}\cdot 2D = \frac{\pi D}{2}$$

当 $D=10$ m 时，面积随直径的变化率是 $(\pi/2)10 = 5\pi\ \mathrm{m}^2/\mathrm{m}$. ■

### 3.3.2 沿直线运动的位移、速度、速率、加速度和冲击

假设物体沿坐标线(例如 $x$ 轴)运动，所以我们知道它在直线上的位置 $s$ 是时间 $t$ 的函数:

$$s = f(t)$$

物体在时间区间 $[t, t+\Delta t]$ 上的**位移**(见图 3.11)为

$$\Delta s = f(t+\Delta t) - f(t)$$

而物体在这个时间区间上的**平均速率**为

$$v_{av} = \frac{\text{位移}}{\text{运动时间}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

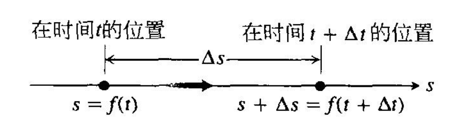



图 3.11 沿 $x$ 轴运动的物体在时间 $t$ 和瞬间后 $t+\Delta t$ 的位置

为了求物体正好在时刻 $t$ 的速度，我们在区间 $[t, t+\Delta t]$ 上取平均速度当 $\Delta t$ 缩小到零时的极限. 这个极限是 $f$ 关于 $t$ 的导数.

**定义　速度(瞬时速度)**是位置关于时间的导数. 若物体在时间 $t$ 的位置是 $s=f(t)$，则物体在时间 $t$ 的速度为

$$v(t)=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

速度不仅表明物体运动的快慢，而且指示运动的方向. 当物体向前运动($s$ 增加)时，速度是正的；当物体向后运动($s$ 减少)时，速度是负的(见图 3.12).

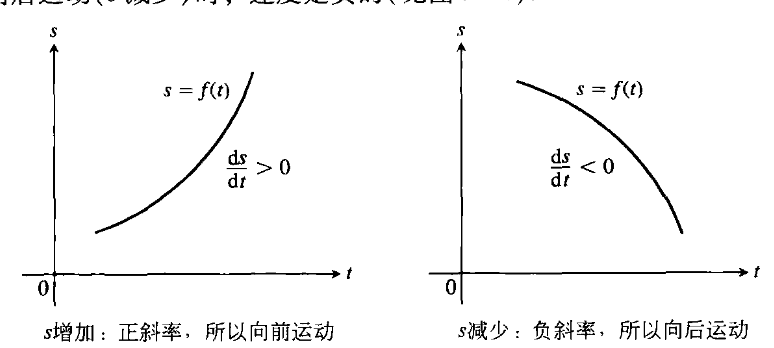



图 3.12　对于沿直线的运动 $s=f(t)$，$v=\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ 当 $s$ 增加时为正而当 $s$ 减少时为负

如果我们驱车到朋友家，以 30 英里/小时的速度返回，里程表在返回途中将显示 30 而不是 $-30$，即使距离家的距离是在减少. 里程表总是显示速率，即速度的绝对值. 速率度量进程的快慢程度而不涉及方向.

**定义　速率**是速度的绝对值.

$$速率=|v(t)|=\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|$$

**例 2**　图 3.13 显示质点在一条坐标线上运动的速度 $v=f'(t)$. 在前 3 秒向前运动，在后 2 秒向后运动，停止 1 秒后再向前运动. 当质点向后运动时在时间 $t=4$ 达到它的最大速率. ■

**人物传记**

贝尔纳・波尔查诺(Bernard Bolzano, 1781—1848)

物体运动速度的变化率是物体的*加速度*. 加速度测量物体加速或者减速的快慢程度. 加速度的突然改变称为*冲击*. 当搭乘轿车或公共汽车发生冲击时，涉及的加速度并非必定很大，只不过加速度的改变是突然发生的.

**定义　加速度**是速度对时间的导数. 若物体在时间 $t$ 的位置是 $s=f(t)$，则物体在时间 $t$ 的加速度为

$$a(t)=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$$

**冲击**是加速度对时间的导数：

$$j(t)=\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^3s}{\mathrm{d}t^3}$$

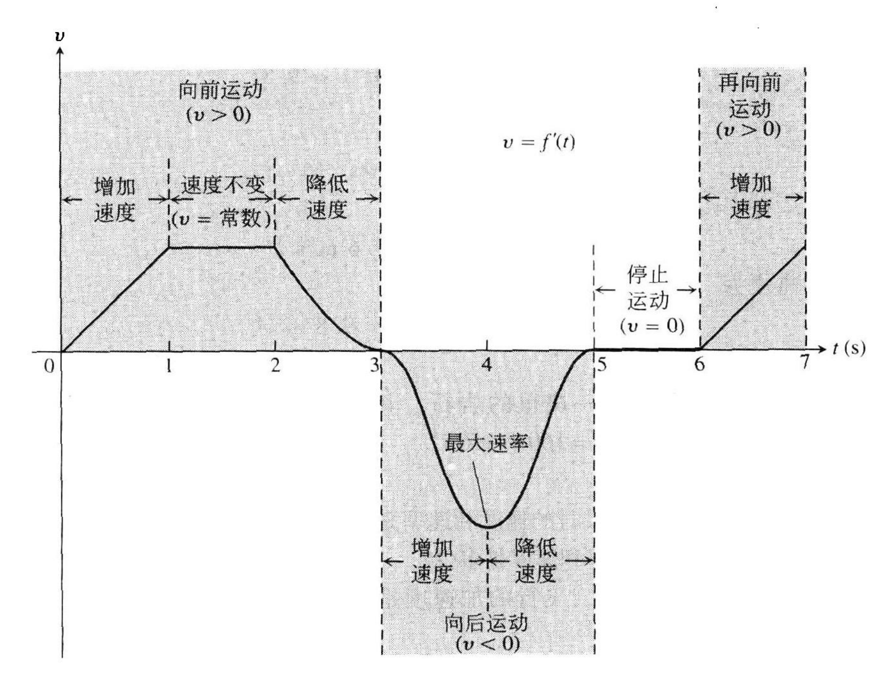



图 3.13　例 2 中的速度图示

在接近地球表面，所有物体以相同的恒定加速度下落. 伽利略的自由落体试验(见 2.1 节例 1)导出方程

$$s = \frac{1}{2} gt^2$$

其中 $s$ 是下落的距离，$g$ 是地球重力引起的加速度. 这个方程在真空中成立，其中没有空气阻力，并且近似地模拟高密度的重物体(如岩石或钢质工具)在下落过程中开头几秒时间的状况，这时空气阻力的作用尚未显现出来.

方程 $s=(1/2)gt^2$ 中 $g$ 的值依赖于 $t$ 和 $s$ 的量度单位. 在英制单位中，如果 $t$ 用秒作为单位(常用单位)，在海平面测得的值约为 32 ft/s²(英尺每秒平方)，而在米制单位中，$g \approx 9.8\ \mathrm{m/s^2}$(米每秒平方). (这些重力常数取决于同地球质心的距离，例如，在珠穆朗玛峰顶，重力常数的值要略低一些.)

地球重力的恒定加速度($g=32\ \mathrm{ft/s^2}$)的冲击为零：

$$j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g) = 0$$

在自由落体中，物体下落不显现冲击性.

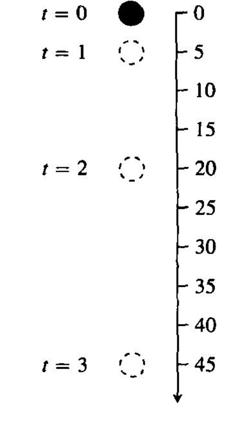



图 3.14　支撑的球体从静止状态自由下落(例 3)

**例 3**　图 3.14 显示一个支撑的重球体松开后在时间 $t=0$ 秒从静止状态自由下落.

**(a)** 球体在开头 2 秒下落多少米?

**(b)** 当 $t=2$ 时它的速度、速率和加速度是多少?

**解**　**(a)** 在米制中自由下落方程为 $s=4.9t^2$. 在开头 2 秒，球体下落

$$s(2) = 4.9(2)^2 = 19.6\ \mathrm{m}$$

(b) 在任意时间 $t$，速度是位置的导数：

$$v(t) = s'(t) = \frac{d}{dt}(4.9t^2) = 9.8t$$

在 $t=2$，速度为

$$v(2) = 19.6 \text{ m/s}$$

方向向下($s$ 增加)．在 $t=2$ 的速率为

$$\text{速率} = |v(2)| = 19.6 \text{ m/s}$$

在任意时间 $t$ 的加速度为

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 9.8 \text{ m/s}^2$$

在 $t=2$ 的加速度为 $9.8 \text{ m/s}^2$. ■

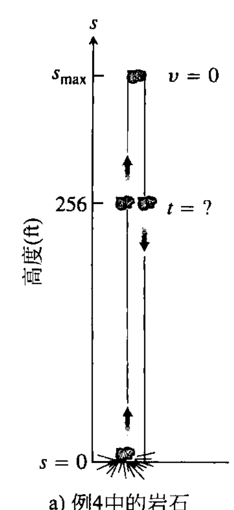
**例 4** 一次炸药爆破向上掀起一块重的岩石，其初始速率为 160 ft/s(约合 109 mph)(见图 3.15a)．在 $t$ 秒后岩石达到高度 $s=160t-16t^2$.

(a) 岩石会达到怎样的高度？

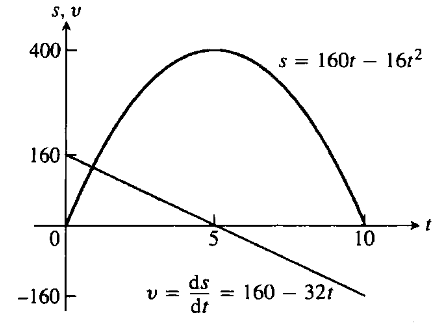
(b) 当岩石上升到地面上 256 英尺时的速度和速率是多少？下落到地面上 256 英尺时的速率和速度是多少？

(c) 岩石在爆炸后的任何时间 $t$，飞行的加速度是多少？

(d) 岩石何时再落到地面？




a) 例4中的岩石




b) $s$和$v$作为时间 $t$ 的函数的图形：$s$当$v=ds/dt=0$时达到最大值；$s$的图形不是岩石的路径而是高度作为时间的函数的图形；图形的斜率是岩石的速度，即图中的直线

图 3.15

**解**

(a) 在我们选择的坐标系中，$s$ 度量离地面的高度，所以岩石上升时的速度为正，下降时的速度为负．岩石在飞行速度为零时达到它的最高点．为求这个最大高度，只需求 $v=0$ 的时间并计算这时的 $s$ 值.

在任何时间 $t$，速度为

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(160t - 16t^2) = 160 - 32t \text{ ft/s}$$

当

$$160 - 32t = 0 \text{ 或 } t = 5 \text{ s}$$

时岩石的速度为零．岩石在 $t=5$ s 时的高度为

$$s_{max} = s(5) = 160(5) - 16(5)^2 = 800 - 400 = 400 \text{ ft}$$

参见图 3.15b.

(b) 为求岩石上升到 256 ft 时的速度和再次下降到这个高度时的速度，首先求满足

$$s(t) = 160t - 16t^2 = 256$$

的两个 $t$ 值．解这个方程，得到

$$16t^2 - 160t + 256 = 0$$

$$16(t^2 - 10t + 16) = 0$$

$$(t-2)(t-8) = 0$$

$$t = 2 \text{ s}, \quad t = 8 \text{ s}$$

岩石在爆破后 2 s 上升到 256 ft，而在爆破后 8 s 再次下降到这个高度．岩石在这两个时刻的速度为

$$v(2) = 160 - 32(2) = 160 - 64 = 96 \text{ ft/s}$$

$$v(8) = 160 - 32(8) = 160 - 256 = -96 \text{ ft/s}$$

在这两个时刻，岩石的速度为 96 ft/s. 由于 $v(2)>0$，岩石在 $t=2$ s 时向上运动($s$ 增加)；岩石在 $t=8$ s 时向下运动($s$ 减少)，因为 $v(8)<0$.

**(c)** 岩石在爆炸后飞行过程中的任何时刻，加速度为常数

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(160-32t)=-32\ \mathrm{ft/s^2}$$

加速度方向总是向下的. 当岩石上升时速度降低；当岩石下降时速度升高.

**(d)** 岩石在正的时间 $t$ 落回地面，这时 $s=0$. 对方程 $160t-16t^2=0$ 分解因式，得到 $16t(10-t)=0$，故有解 $t=0$ 和 $t=10$. 在 $t=0$ 时爆炸发生，岩石被向上抛射，在 10 s 后岩石落回地面. ■

### 3.3.3 经济学中的导数

工程师用速度和加速度这样的术语称呼描述运动的函数的导数. 对于变化率和导数，经济学家也使用特殊的词汇. 他们把它们称为边际.

在制造业中，生产成本 $c(x)$ 是生产 $x$ 件产品的函数. **边际生产成本**是成本关于生产水平的变化率，也就是 $\mathrm{d}c/\mathrm{d}x$.

假设 $c(x)$ 代表一周生产 $x$ 吨钢所需的美元数. 每周生产 $x+h$ 吨钢的成本更高，每多生产 1 吨钢的平均成本等于成本差除以 $h$：

$$\frac{c(x+h)-c(x)}{h}=\text{每多生产 } h \text{ 吨钢的平均成本}$$

在当前每周生产 $x$ 吨钢的情况下，这个比值当 $h\to 0$ 时的极限是每周生产更多钢的平均成本(见图 3.16)：

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}=\lim_{h\to 0}\frac{c(x+h)-c(x)}{h}=\text{生产的边际成本}$$

有时，生产的边际成本不严格地定义为多生产 1 吨钢的附加成本：

$$\frac{\Delta c}{\Delta x}=\frac{c(x+1)-c(x)}{1}$$

它以 $\mathrm{d}c/\mathrm{d}x$ 在 $x$ 的值作为近似值. 如果 $c(x)$ 的图形的斜率在接近 $x$ 时不急剧改变，这个近似值是可以接受的. 这时，差商将接近它的极限 $\mathrm{d}c/\mathrm{d}x$，这就是当 $\Delta x=1$ 时在切线中出现的情况(见图 3.17). 当 $x$ 为非常大的值时，这个近似值的符合程度最佳.

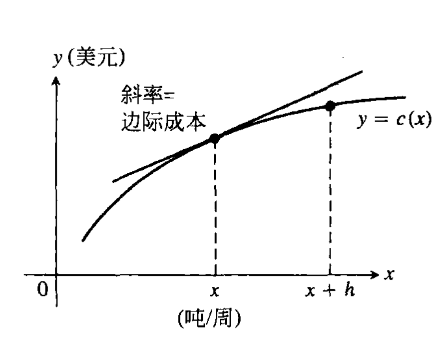



图 3.16 每周的钢产量：$c(x)$ 为每周生产 $x$ 吨钢的成本；$c(x+h)-c(x)$ 为多生产 1 吨钢的成本

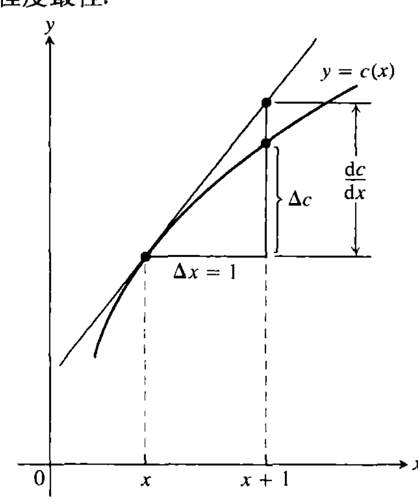



图 3.17 边际成本 $\mathrm{d}c/\mathrm{d}x$ 近似等于多生产 $\Delta x=1$ 单位钢的附加成本

经济学家通常用一个三次多项式

$$c(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

表示总成本函数，其中 $\delta$ 代表固定成本，像租金、暖气、设备投资和管理等的成本. 其他项代表可变成本，像原材料、纳税和劳务的成本. 固定成本同生产产品的数量无关，而可变成本依赖于产品数量. 三次多项式通常适于表达某个相关数量区间上的成本特性.

**例 5** 假定在生产 8 ~ 30 台散热器时生产 $x$ 台散热器的成本为

$$c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

美元，而

$$r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$$

为销售 $x$ 台散热器的收入. 如果你的工厂每天生产 10 台散热器，请问每天多生产 1 台散热器的附加成本是多少？每天销售 11 台散热器估计会增加多少收入？

**解** 当每天生产 10 台散热器时多生产 1 台散热器的成本约为 $c'(10)$：

$$c'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 15x) = 3x^2 - 12x + 15$$

$$c'(10) = 3(100) - 12(10) + 15 = 195$$

附加成本大约是 195 美元. 边际收入为

$$r'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2 + 12x) = 3x^2 - 6x + 12$$

边际收入函数估算多销售一件产品增加的收入. 如果当前每天销售 10 台散热器，当每天增至销售 11 台散热器时，预期可以增加的收入约为

$$r'(10) = 3(100) - 6(10) + 12 = 252 \text{ 美元}$$ ■

**例 6** 为了获得对边际变化率这个术语的某种感受，试考虑边际税率. 如果边际所得税率为 28%，而你的收入增加为 1000 美元，预期你可能支付附加税 280 美元. 这并不意味着要把整个收入的 28% 用于纳税. 这只是表明在你的当前收入水平 $I$，纳税额 $T$ 相对于收入增加的比率是 $dT/dI = 0.28$. 对于每多挣得的 1 美元将缴纳 0.28 美元的税. 自然，如果挣的钱更多，就可能进入更高的税级，边际税率会增加. ■

## 习题 3.3

在习题 1 ~ 6 中，给出物体在一条坐标线上移动的位置函数 $s = f(t)$，$s$ 以米为单位，$t$ 以秒为单位.

(a) 求给定时间区间上物体的位移和平均速度.

(b) 求物体在区间端点的速率和加速度.

(c) 如果物体在区间上改变运动方向，请问何时改变？

1. $s = t^2 - 3t + 2$，$0 \leqslant t \leqslant 2$.
2. $s = 6t - t^2$，$0 \leqslant t \leqslant 6$.
3. $s = -t^3 + 3t^2 - 3t$，$0 \leqslant t \leqslant 3$.
4. $s = (t^4/4) - t^3 + t^2$，$0 \leqslant t \leqslant 3$.
5. $s = \frac{25}{t^2} - \frac{5}{t}$，$1 \leqslant t \leqslant 5$.
6. $s = \frac{25}{t+5}$，$-4 \leqslant t \leqslant 0$.
7. **质点运动** 在时间 $t$，质点沿 $s$ 轴运动的位置为 $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ m. 求

   (a) 质点速度每次为零时的加速度.

   (b) 质点加速度每次为零时的速率.

   (c) 质点从 $t = 0$ 到 $t = 2$ 移动的总距离.
8. **质点运动** 在时间 $t \geqslant 0$，沿 $s$ 轴运动的质点的速度为 $v = t^2 - 4t + 3$.

   (a) 求质点在速度每次为零时的加速度.

   (b) 质点何时向前运动？何时向后运动？

   (c) 质点的速度何时增加？何时减少？
9. **火星和木星上的自由落体** 火星表面上自由落体的方程为 $s = 1.86t^2$，木星表面上自由落体的方程为 $s = 11.44t^2$（$s$ 以米为单位，$t$ 以秒为单位）. 在这两颗行星上，一块岩石从静止状态下落达到 27.8 m/s（约合 86 km/h）的速度，分别需要经历多少时间？
10. **月球上的抛射运动** 在月球表面以 24 m/s（约合 86 km/h）的速度垂直向上抛射一块岩石，在 $t$ 秒达到的高度为 $s = 24t - 0.8t^2$ m.

    (a) 求岩石在时间 $t$ 的速度和加速度（加速度这

时为月球的重力加速度).

(b) 岩石达到它的最高点需要多长时间?

(c) 岩石能达到什么高度?

(d) 岩石达到它的最大高度的一半需要多长时间?

(e) 岩石在空中停留多长时间?

**11. 求无大气小行星上的重力加速度 $g$** 一颗无大气小行星上的探测者用弹射器从小行星表面以 15 m/s 的弹射速度垂直向上弹射一个支撑的球体. 由于小行星表面的重力加速度为 $g_s$ m/s$^2$, 探测者预期球体在发射 $t$ 秒后达到的高度为 $s = 15t - (1/2)g_st^2$ m. 球体在发射后 20 秒达到它的最大高度. $g_s$ 的值是什么?

**12. 超速子弹** 一颗 45 毫米弹径的子弹在月球表面垂直向上射出 $t$ 秒后达到的高度为 $s = 832t - 2.6t^2$ 英尺. 在地球上, 如果不计空气阻力的影响, 它在 $t$ 秒后的高度应为 $s = 832t - 16t^2$ 英尺. 在两种情况下, 子弹在空中停留多长时间? 子弹将会达到什么高度?

**13. 从比萨斜塔自由落体** 伽利略曾在比萨斜塔上离地面 179 英尺的高度使一枚炮弹坠落, 炮弹下落 $t$ 秒时离地面的高度为 $s = 179 - 16t^2$.

(a) 炮弹在时间 $t$ 的速度、速率和加速度是多少?

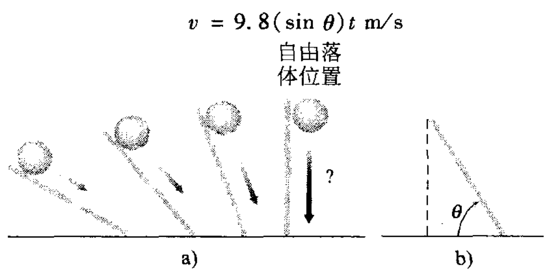
(b) 炮弹落到地面大约需要多长时间?

(c) 炮弹在撞击地面时的速度有多大?

**14. 伽利略自由落体公式** 伽利略通过在逐渐增加倾斜度的平板上从静止状态滚动球体推导物体自由落体的速度公式, 并寻求在极限情况下的公式, 以此预测球体在平板垂直而自由下落时的特性(参见附图 a). 他发现对于任何给定的平板角度, 球体在 $t$ 秒的运动速度是 $t$ 的常数倍. 就是说, 速度由公式 $v = kt$ 给出. $k$ 的值依赖于平板的倾斜度.

用现代表示法(参见附图 b), 距离以米为单位, 时间以秒为单位, 伽利略通过实验所确定的是, 对于任意给定的角 $\theta$, 球体滚动 $t$ 秒后的速度为

$$v = 9.8(\sin\theta)t \text{ m/s}$$

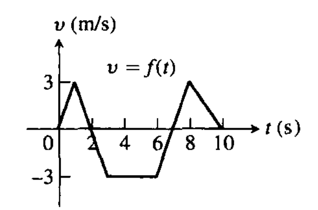



a) b)

(a) 在自由落体时球体的速度公式是什么?

(b) 依据(a)中的速度公式, 确定自由落体实验在接近地球表面时的恒定加速度是多大?

**15.** 附图显示物体沿一条坐标线移动的速度为 $v = ds/dt = f(t)$ (m/s).




(a) 物体何时向相反方向移动?

(b) 物体(大约)何时以恒定速率移动?

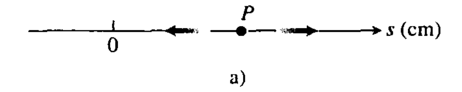
(c) 画出物体在 $0 \leq t \leq 10$ 时的速率图形.

(d) 在出现加速度的地方画出加速度的图形.

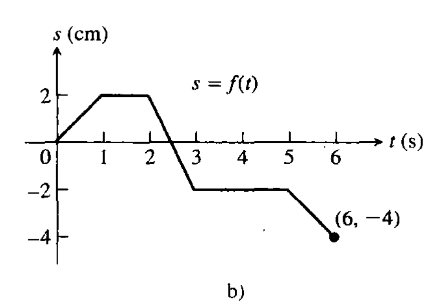
**16.** 质点 $P$ 在附图 a 中所示的数直线上移动. 附图 b 显示 $P$ 的位置作为时间 $t$ 的函数.

(a) $P$ 何时向左移动? 何时向右移动? 何时停止运动?

(b) 画出质点移动的速度和速率(在出现的地方)的图形.




a)




b)

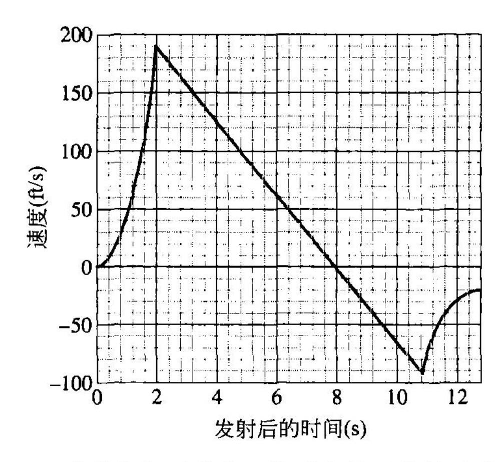
**17. 发射火箭** 当发射一枚模型火箭时, 火箭燃料燃烧几秒钟, 向上加速火箭. 在燃料耗尽后, 火箭向上惯性滑行一段时间, 然后开始下落. 在火箭开始下落后片刻打开一个小启爆装置弹出降落伞. 降落伞减缓火箭的速度, 防止火箭落地时坠毁.

附图显示模型火箭飞行中的速度数据. 利用这些数据回答下列问题.

(a) 当发动机停止时火箭上升的速度是多少?

(b) 发动机点燃多少秒钟?

(c) 火箭何时达到它的最高点? 这时的速度是多少?




(d) 降落伞何时弹出？其后火箭下落的速度是多少？

(e) 在降落伞打开前火箭下落多长时间？

(f) 火箭的加速度何时达到最大值？

(g) 加速度何时达到恒定值？这时加速度的值是多少(取最接近的整数)？

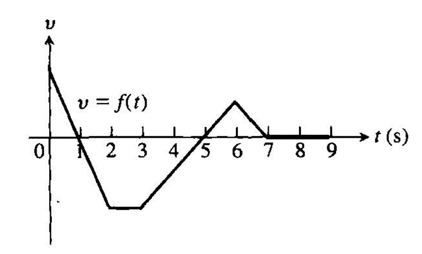
**18.** 附图显示质点在一条坐标线上移动的速度 $v = f(t)$.

(a) 质点何时向前移动，何时向后移动？质点何时加速，何时减速？

(b) 质点的加速度何时为正，何时为负，何时为零？

(c) 质点何时以它的最大速率移动？

(d) 质点何时保持静止一段时间？

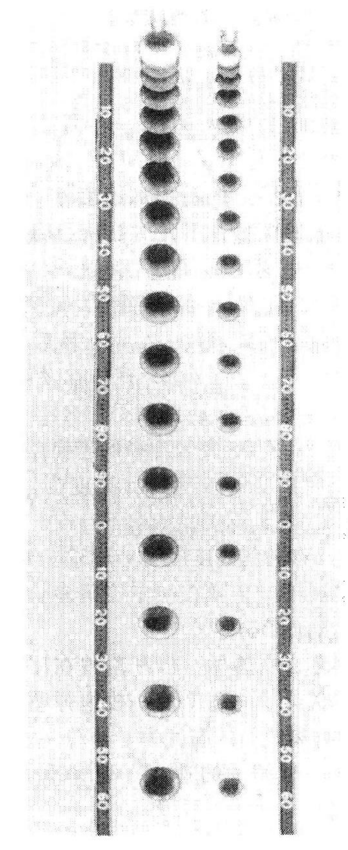



**19. 两个下落球体** 附图的多闪光照片显示两个从静止状态下落的球体. 垂直标尺以厘米为刻度. 利用方程 $s = 490t^2$($s$ 以厘米为单位和 $t$ 以秒为单位的自由落体方程)回答下列问题：

(a) 两个球体下落的前 160 cm 经历多长时间？它们在这段时间的平均速度是多少？

(b) 两个球体达到 160 cm 刻度时它们的速度是多少？这时它们的加速度是多少？

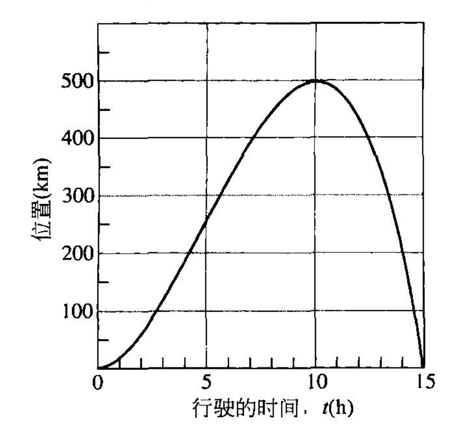
(c) 闪光的速度(每秒闪光次数)大约是多少？



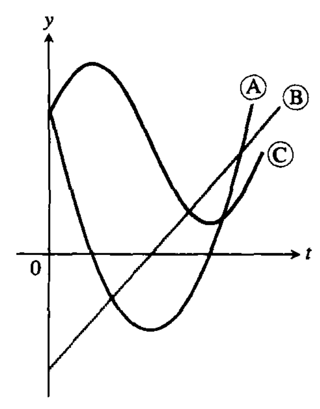
**20. 行驶中的卡车** 附图显示一辆在公路上行驶的卡车的位置 $s$. 卡车在 $t = 0$ 时开出，在 15 个小时后($t = 15$)返回.

(a) 利用3.1节例3中描述的方法，画出卡车速度 $v = ds/dt (0 \leqslant t \leqslant 15)$ 的图形. 然后对速度曲线重复这个过程，画出卡车的加速度 $dv/dt$ 的图形.

(b) 假设 $s = 15t^2 - t^3$，画出 $ds/dt$ 和 $d^2s/dt^2$ 的图形，并把画出的图形同(a)中的图形作比较.



**21.** 附图显示沿一条坐标线移动的一个物体的位置 $s$，速度 $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$，以及加速度 $a = \mathrm{d}^2s/\mathrm{d}t^2$ 作为时间 $t$ 的函数的图形. 哪个图形代表哪个函数? 提出答案的理由.




**22.** 图 3.18 中的图形显示一个沿坐标线移动的物体的位置 $s$，速度 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$，以及加速度 $a = \mathrm{d}^2s/\mathrm{d}t^2$ 作为时间 $t$ 的函数的图形. 哪个图形代表哪个函数? 提出答案的理由.

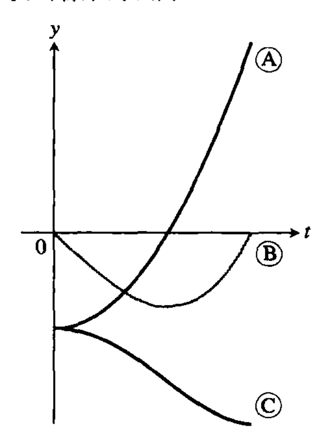



图 3.18　习题 22 的图形

**23.** **边际成本**　假设生产 $x$ 台洗衣机的美元成本为 $c(x) = 2000 + 100x - 0.1x^2$.

(**a**) 求生产前 100 台洗衣机时每台洗衣机的平均成本.

(**b**) 求生产 100 台洗衣机后的边际成本.

(**c**) 通过直接计算后面这个成本，证明生产 100 台洗衣机后的边际成本，近似等于生产前 100 台洗衣机后多生产 1 台洗衣机的成本.

**24.** **边际收入**　假设从销售 $x$ 台洗衣机获得的收入为

$$r(x) = 20\,000\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

美元.

(**a**) 求生产 100 台洗衣机时的边际收入.

(**b**) 利用函数 $r'(x)$ 估计把洗衣机的产量从每周 100 台增加到每周 101 台所增加的收入.

(**c**) 求 $r'(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限. 如何解释这个数字?

**25.** **细菌种群**　当把一种除菌剂加进正在繁殖细菌的培殖液时，菌群数目会继续增长一段时间，但是随后停止增长并且开始下降. 菌群在时间 $t$ (小时) 的数目为 $b = 10^6 + 10^4t - 10^3t^2$. 求在下列时刻菌群的增长率:

(**a**) $t = 0$ 小时.

(**b**) $t = 5$ 小时.

(**c**) $t = 10$ 小时.

**26.** **水箱排水**　一个水箱在开始排水后 $t$ 分钟的存水量为 $Q(t) = 200\,(30 - t)^2$ 加仑. 在 10 分钟末水流出的速率是多少? 什么时候水流出的速率是前 10 分钟排水的平均速率?

**T27.** **水箱排水**　打开贮水箱底部的阀门经历 12 小时排水. 打开阀门 $t$ 小时后水箱的液面深度 $y$ 由公式

$$y = 6\left(1 - \frac{t}{12}\right)^2 \mathrm{m}$$

给出.

(**a**) 求水箱在时间 $t$ 的排水速率 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ (m/h).

(**b**) 水箱中的液面下降何时最快，何时最慢? $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 在这两个时间的值是什么?

(**c**) 一起画出 $y$ 和 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 的图形，并且讨论 $y$ 同 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 的符号和值相关的特性.

**28.** **气球充气**　球形气球的体积 $V = (4/3)\pi r^3$ 随半径变化.

(**a**) 当半径 $r = 2$ ft 时气球体积关于半径的变化率 ($\mathrm{ft}^3/\mathrm{ft}$) 是什么?

(**b**) 当半径从 2 ft 变到 2.2 ft 时，气球体积大约增加多少?

**29.** **飞机起飞**　假设一架飞机在起飞前沿跑道行进的距离由 $D = (10/9)t^2$ 给出，其中 $D$ 用从起点算起的米数度量，$t$ 用从松开制动器时算起的秒数度量. 飞机在其速度达到 200 km/h 时升空. 试问飞机需要多长时间才能升空? 升空时在跑道行进的距离是多少?

**30.** **火山熔岩喷发**　1959 年夏威夷岛基拉韦亚 · 艾基火山口发生火山爆发. 开始时爆发出现在沿火山口墙垣的一条线上，但是后来仅在火山口

底部的一个口有爆发活动，其中一点的熔岩被喷射到1900 ft的高空(创世界纪录)．熔岩喷出时的速度达到每秒多少英尺？折合每小时多少英里？(提示：如果$v_0$为熔岩粒子喷出的速度，它在$t$秒后的高度将是$s=v_0t-16t^2$ ft．从求$ds/dt=0$的时间开始．忽略空气的阻力．)

**T** 习题31～34给出物体沿$s$轴移动的位置函数$s=f(t)$作为时间$t$的函数．一起画出位置$f$，速度函数$v(t)=ds/dt=f'(t)$和加速度函数$a(t)=d^2s/dt^2=f''(t)$的图形．说明物体同$v$和$a$的符号和值相关的特性．在说明中对下列问题做出回答：

(a)物体何时处于瞬间静止状态？

(b)物体何时向左(下)方移动或者向右(上)方移动？

(c)物体何时改变移动方向？

(d)物体何时增加速率和降低速率？

(e)物体何时移动最快(最高速度)，何时移动最慢？

(f)物体何时离坐标原点最远？

**31.** $s=200t-16t^2$，$0\leqslant t\leqslant 12.5$(从地球表面以200 ft/s的速度垂直向上发射一个重物体)．

**32.** $s=t^2-3t+2$，$0\leqslant t\leqslant 5$.

**33.** $s=t^3-6t^2+7t$，$0\leqslant t\leqslant 4$.

**34.** $s=4-7t+6t^2-t^3$，$0\leqslant t\leqslant 4$.

## 3.4 三角函数的导数

我们想要获取的信息的自然界的许多现象，带有近似的周期性(例如电磁场、心律、潮汐和气象等)．正弦函数和余弦函数的导数在描述周期性变化中起着关键作用．这一节说明如何求6个基本三角函数的导数．

### 3.4.1 正弦函数的导数

为了计算$f(x)=\sin x$的导数，其中$x$以弧度度量，我们把2.4节中例5(a)的极限和定理7的极限同正弦的和角恒等式

$$\sin(x+h)=\sin x\cos h+\cos x\sin h$$

结合起来．若$f(x)=\sin x$，则

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\quad\text{(导数定义)}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{(\sin x\cos h+\cos x\sin h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}\\
&=\lim_{h\to0}\left(\sin x\cdot\frac{\cos h-1}{h}\right)+\lim_{h\to0}\left(\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}\right)\\
&=\sin x\cdot\lim_{h\to0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\cdot\lim_{h\to0}\frac{\sin h}{h}=\sin x\cdot0+\cos x\cdot1=\cos x\quad\text{(2.4节例5(a)和定理7)}
\end{aligned}$$

> **正弦函数的导数是余弦函数：**
>
> $$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$$

**例1**

(a) $y=x^2-\sin x$:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}&=2x-\frac{d}{dx}(\sin x)\quad\text{(差法则)}\\
&=2x-\cos x
\end{aligned}$$

(b) $y=e^x\sin x$:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}&=e^x\frac{d}{dx}(\sin x)+\frac{d}{dx}(e^x)\sin x\quad\text{(积法则)}\\
&=e^x\cos x+e^x\sin x=e^x(\cos x+\sin x)
\end{aligned}$$

**(c)** $y=\dfrac{\sin x}{x}$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x\cdot\dfrac{d}{dx}(\sin x)-\sin x\cdot 1}{x^2}\quad（商法则）$$
$$=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

■

### 3.4.2 余弦函数的导数

借助余弦的和角公式

$$\cos(x+h)=\cos x\cos h-\sin x\sin h$$

可得
$$\frac{d}{dx}(\cos x)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\quad（导数定义）$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\cos x\cos h-\sin x\sin h)-\cos x}{h}\quad（余弦和角恒等式）$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h-1)-\sin x\sin h}{h}=\lim_{h\to 0}\cos x\cdot\frac{\cos h-1}{h}-\lim_{h\to 0}\sin x\cdot\frac{\sin h}{h}$$
$$=\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$
$$=\cos x\cdot 0-\sin x\cdot 1\quad（2.4节例5(a)和定理7）$$
$$=-\sin x$$

**余弦函数的导数是正弦函数的负值：**

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$$

图3.19展现这个结果的一种可视化方法.

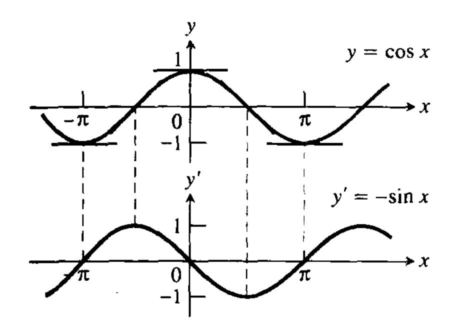



图3.19 曲线 $y'=-\sin x$ 作为曲线 $y=\cos x$ 的切线斜率的图形

**例2**

**(a)** $y=5e^x+\cos x$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(5e^x)+\frac{d}{dx}(\cos x)\quad（和法则）$$
$$=5e^x-\sin x$$

**(b)** $y=\sin x\cos x$:

$$\frac{dy}{dx}=\sin x\frac{d}{dx}(\cos x)+\cos x\frac{d}{dx}(\sin x)\quad（积法则）$$
$$=\sin x(-\sin x)+\cos x(\cos x)=\cos^2 x-\sin^2 x$$

**(c)** $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1-\sin x)\dfrac{d}{dx}(\cos x)-\cos x\dfrac{d}{dx}(1-\sin x)}{(1-\sin x)^2}\quad（商法则）$$
$$=\frac{(1-\sin x)(-\sin x)-\cos x(0-\cos x)}{(1-\sin x)^2}=\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}\quad(\sin^2+\cos^2 x=1)$$
$$=\frac{1}{1-\sin x}$$

■

### 3.4.3 简谐运动

悬挂在弹簧或者橡筋绳一端的物体上下自由跳动的运动是简谐运动的一个例子. 下面例子描绘一种运动场景，其中没有促使运动放慢的反作用力，像摩擦力或者弹性力.

**例 3** 把悬挂在弹簧一端的物体(见图 3.20)向下拉到距离静止位置 5 个单位的地方，并且在 $t=0$时松开，使物体上下跳动. 物体在其后任何时间 $t$ 的位置为

$$s = 5\cos t$$

它在时间 $t$ 的速度和加速度有多大?

**解** 我们有

位置: $s=5\cos t$

速度: $v=\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{d}{dt}(5\cos t) = -5\sin t$

加速度: $a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d}{dt}(-5\sin t) = -5\cos t$

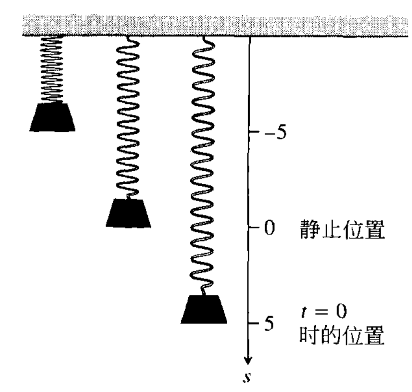



图 3.20 下拉悬挂在下垂弹簧上的物体使其在静止位置上下振荡，它的运动用三角函数描述(例 3)

请注意，从这几个方程我们可以了解到许多事项:

(1)随着时间的流逝，物体在 $s$ 轴上 $s=-5$ 和 $s=5$ 之间上下移动，其运动的幅度为 5，运动的周期为 $2\pi$.

(2)速度 $v=-5\sin t$ 当 $\cos t=0$ 时达到它的最大幅度 5，如图 3.21 所示. 因此，物体的速度 $|v|=5|\sin t|$ 当 $\cos t=0$ 时，也就是当 $s=0$(静止位置)时，达到最大值. 物体的速率当 $\sin t=0$ 时为零. 这种情况出现在 $s=5\cos t=\pm 5$，即出现在运动区间的端点.

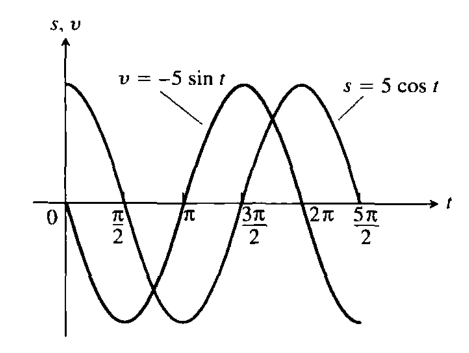



图 3.21 例 3 中物体的位置函数和速度函数的图形

(3)加速度值总是同位置值相反. 当物体处在静止位置之上时，重力向下牵引物体，当重物处在静止位置之下时，弹簧向上牵引物体.

(4)加速度 $a=-5\cos t$ 仅在静止位置为零，在那里重力和弹簧力相互平衡. 当物体处于任何其他位置时，这两个力不相等且加速度不为零. 加速度在距离静止位置最远的点达到最大幅度，那时 $\cos t=\pm 1$. ■

**例 4** 例 3 中的简谐运动的冲击为

$$j=\frac{da}{dt}=\frac{d}{dt}(-5\cos t) = 5\sin t$$

它的幅度当 $\sin t=\pm 1$ 时达到最大，这时物体处于静止位置而不是最大位移位置，加速度在这两处改变方向和符号. ■

### 3.4.4 其他基本三角函数的导数

由于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 是 $x$ 的可微函数，相关的函数

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\quad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x},\quad \sec x=\frac{1}{\cos x},\quad \csc x=\frac{1}{\sin x}$$

也是 $x$ 的可微函数，只要它们在 $x$ 有定义. 这些函数的导数用商法则计算，由下列公式给出. 请注意两个余函数导数公式中的负号.

**其他三角函数的导数**

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x)=-\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x)=-\csc x\cot x$$

为了说明典型的计算过程，我们来推导正切函数的导数. 其余导数的计算在习题 50 中作为练习.

**例 5** 求 $d(\tan x)/dx$.

**解**

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\frac{\cos x\frac{d}{dx}(\sin x)-\sin x\frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \quad (\text{商法则})$$

$$=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x \qquad \blacksquare$$

**例 6** 设 $y=\sec x$，求 $y''$.

**解**

$$y=\sec x$$

$$y'=\sec x\tan x$$

$$y''=\frac{d}{dx}(\sec x\tan x)$$

$$=\sec x\frac{d}{dx}(\tan x)+\tan x\frac{d}{dx}(\sec x) \quad (\text{积法则})$$

$$=\sec x(\sec^2 x)+\tan x(\sec x\tan x)=\sec^3 x+\sec x\tan^2 x \qquad \blacksquare$$

三角函数在它们整个定义域的可微性，给出三角函数在其定义域每个点的连续的另外一个证明(3.1 节定理 1). 所以，我们能够通过直接代入计算三角函数的代数组合和复合函数的极限.

**例 7**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+\sec x}}{\cos(\pi-\tan x)}=\frac{\sqrt{2+\sec 0}}{\cos(\pi-\tan 0)}=\frac{\sqrt{2+1}}{\cos(\pi-0)}=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3} \qquad \blacksquare$$

## 习题 3.4

在习题 1 ~ 12 中，求 $dy/dx$.

**1.** $y=-10x+3\cos x$.

**2.** $y=\frac{3}{x}+5\sin x$.

**3.** $y=\csc x-4\sqrt{x}+7$.

**4.** $y=x^2\cot x-\frac{1}{x^2}$.

**5.** $y=(\sec x+\tan x)(\sec x-\tan x)$.

**6.** $y=(\sin x+\cos x)\sec x$.

**7.** $y=\frac{\cot x}{1+\cot x}$.

**8.** $y=\frac{\cos x}{1+\sin x}$.

**9.** $y=\frac{4}{\cos x}+\frac{1}{\tan x}$.

**10.** $y=\frac{\cos x}{x}+\frac{x}{\cos x}$.

**11.** $y=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x$.

**12.** $y=x^2\cos x-2x\sin x-2\cos x$.

在习题 13 ~ 16 中，求 $ds/dt$.

**13.** $s=\tan t-e^{-t}$.

**14.** $s=t^2-\sec t+5e^t$.

**15.** $s=\frac{1+\csc t}{1-\csc t}$.

**16.** $s=\frac{\sin t}{1-\cos t}$

在习题 17 ~ 20 中，求 $dr/d\theta$.

**17.** $r=4-\theta^2\sin\theta$.

**18.** $r=\theta\sin\theta+\cos\theta$.

**19.** $r=\sec\theta\csc\theta$.

**20.** $r=(1+\sec\theta)\sin\theta$.

在习题 21 ~ 24 中，求 $dp/dq$.

**21.** $p=5+\frac{1}{\cot q}$.

**22.** $p=(1+\csc q)\cos q$.

**23.** $p=\frac{\sin q+\cos q}{\cos q}$.

**24.** $p=\frac{\tan q}{1+\tan q}$.

**25.** 求 $y''$，设

(**a**) $y=\csc x$. (**b**) $y=\sec x$.

**26.** 求 $y^{(4)}=d^4y/dx^4$，设

(**a**) $y=-2\sin x$. (**b**) $y=9\cos x$.

在习题 27 ~ 30 中，画出给定区间上曲线的图形，同时画出图形在给定点 $x$ 的切线. 在每条曲线和切线上标出曲线的方程.

**27.** $y=\sin x$，$-3\pi/2\leqslant x\leqslant 2\pi$；

$x=-\pi, 0, 3\pi/2$.

28. $y=\tan x$, $-\pi/2<x<\pi/2$;
$x=-\pi/3$, $0$, $\pi/3$.

29. $y=\sec x$, $-\pi/2<x<\pi/2$;
$x=-\pi/3$, $\pi/4$.

30. $y=1+\cos x$, $-3\pi/2\leqslant x\leqslant 2\pi$;
$x=-\pi/3$, $3\pi/2$.

**T** 在习题 31 ~ 34 中，函数的图形在区间 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 上存在任何水平切线吗？如果有水平切线，位于何处？如果没有，原因何在？用一种绘图器绘制函数的图形，使答案成为可视的.

31. $y=x+\sin x$.　　32. $y=2x+\sin x$.

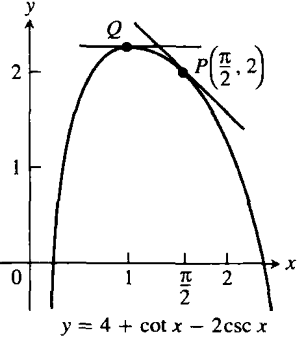
33. $y=x-\cot x$.　　34. $y=x+2\cos x$.

35. 求曲线 $y=\tan x(-\pi/2<x<\pi/2)$ 上所有这样的点，曲线在这些点的切线同直线 $y=2x$ 平行. 一起画出曲线和切线的图形，标出每条切线的方程.

36. 求曲线 $y=\cot x(0<x<\pi)$ 上所有这样的点，曲线在这些点的切线同直线 $y=-x$ 平行. 一起画出曲线和切线的图形，标出每条切线的方程.

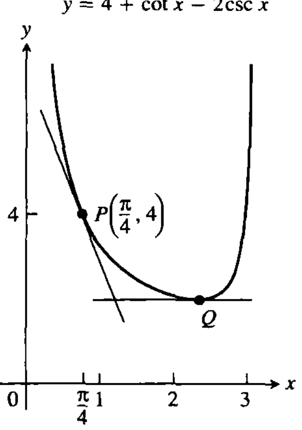
在习题 37 和 38 中，(**a**) 求曲线在点 $P$ 的切线方程，(**b**) 求曲线在点 $Q$ 的水平切线.

37.



$y=4+\cot x-2\csc x$

38.



$y=1+\sqrt{2}\csc x+\cot x$

在习题 39 ~ 44 中，求极限.

39. $\lim\limits_{x\to 2}\sin\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\right)$.

40. $\lim\limits_{x\to -\pi/6}\sqrt{1+\cos(\pi\csc x)}$.

41. $\lim\limits_{x\to 0}\sec\left[e^x+\pi\tan\left(\dfrac{\pi}{4\sec x}\right)-1\right]$.

42. $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\dfrac{\pi+\tan x}{\tan x-2\sec x}\right)$.

43. $\lim\limits_{t\to 0}\tan\left(1-\dfrac{\sin t}{t}\right)$.　　44. $\lim\limits_{\theta\to 0}\cos\left(\dfrac{\pi\theta}{\sin\theta}\right)$.

习题 45 和 46 中的方程给出物体在坐标线上移动的位置函数 $s=f(t)$ ($s$ 以米为单位，$t$ 以秒为单位). 求物体在 $t=\pi/4$ s 时的速度、速率、加速度和冲击.

45. $s=2-2\sin t$.　　46. $s=\sin t+\cos t$.

47. 对于函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 3x}{x^2}, & x\neq 0\\ c, & x=0\end{cases}$$

是否存在 $c$ 的一个值使 $f(x)$ 在 $x=0$ 是连续的？提出答案的理由.

48. 对于函数

$$g(x)=\begin{cases}x+b, & x<0\\ \cos x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

是否存在 $b$ 的一个值使 $f(x)$ 在 $x=0$ 是连续的和在 $x=0$ 是可微的？提出答案的理由.

49. 求 $d^{999}/dx^{999}(\cos x)$.

50. 推导下列函数关于 $x$ 的导数公式：
(**a**) $\sec x$.　(**b**) $\csc x$.　(**c**) $\cot x$.

**T**51. 画出 $y=\cos x$, $-\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ 的图形. 在同一屏幕上画出

$$y=\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

对于 $h=1$, $0.5$, $0.3$, $0.1$ 的图形. 然后，在一个新窗口试画对于 $h=-1$, $-0.5$, $-0.3$ 的图形. 当 $h\to 0^+$ 和 $h\to 0^-$ 时有什么结果？这时说明出现什么现象？

**T**52. 画出 $y=-\sin x$, $-\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ 的图形. 在同一屏幕上画出

$$y=\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

对于 $h=1$, $0.5$, $0.3$, $0.1$ 的图形. 然后，在一个新窗口上试画对于 $h=-1$, $-0.5$, $-0.3$ 的图形. 当 $h\to 0^+$ 和 $h\to 0^-$ 时有什么结果？这时说明出现什么现象？

**T**53. **中心差商**　中心差商

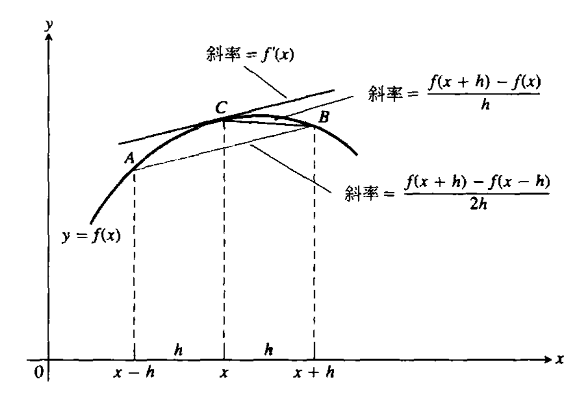
$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

在数值计算中用于逼近 $f'(x)$，因为，(1) 当

$f'(x)$存在时它在 $h\to 0$ 时的极限等于 $f'(x)$，(2)对于给定的$h$值，它通常对$f'(x)$给出比费马差商

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

更好的逼近. 参见附图.




(a) 为了看出$f(x)=\sin x$的中心差商如何快速收敛到$f'(x)=\cos x$，一起画出$y=\cos x$和

$$y=\frac{\sin(x+h)-\sin(x-h)}{2h}$$

在区间$[-\pi, 2\pi]$上对于$h=1, 0.5, 0.3$的图形. 把得到的结果同习题51中对同样一些$h$值所得的结果比较.

(b) 为看出$f(x)=\cos x$的中心差商如何快速收敛到$f'(x)=-\sin x$，一起画出$y=-\sin x$和

$$y=\frac{\cos(x+h)-\cos(x-h)}{2h}$$

在区间$[-\pi, 2\pi]$上对于$h=1, 0.5, 0.3$的图形. 把得到的结果同习题52中对同样一些$h$值所得的结果比较.

**54. 关于中心差商的告诫** (续习题53)当$f$在$x$没有导数的条件下，差商

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

可能在$h\to 0$时存在极限. 作为恰当的例证，取$f(x)=|x|$并计算

$$\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0-h|}{2h}$$

将会看到，即使$f(x)=|x|$在$x=0$不存在导数，上述极限仍然存在. *教益*：在应用中心差商之前，导数务必存在.

**T55. 正切函数图形上的斜率** 一起画出$y=\tan x$及其导数在区间$(-\pi/2, \pi/2)$上的图形. 正切函数的图形上显现有最小斜率或者最大斜率吗? 斜率是否总是为负? 提出答案的理由.

**T56. 余切函数图形上的斜率** 一起画出$y=\cot x$及其导数在区间$(0, \pi)$上的图形. 余切函数的图形上显现有最小斜率或者最大斜率吗? 斜率是否总是为正? 提出答案的理由.

**T57. 考察$(\sin kx)/x$** 一起画出$y=(\sin x)/x$，$y=(\sin 2x)/x$及$y=(\sin 4x)/x$在区间$-2\leqslant x\leqslant 2$上的图形. 每个图形显现在何处穿过$y$轴? 图形实际同$y$轴相交吗? 关于$y=(\sin 5x)/x$和$y=(\sin(-3x))/x$的图形当$x\to 0$时你预料有什么结果? 为什么? 关于$y=(\sin kx)/x$取其他$k$值的图形你预料有什么结果? 提出答案的理由.

**T58. 弧度与度：度方式下的导数** 当$x$用度而不用弧度度量时，$\sin x$和$\cos x$的导数出现什么变化? 为求这时的导数，采取下列步骤：

(a) 把绘图计算器或计算机绘图器设置为度模式，绘制

$$f(h)=\frac{\sin h}{h}$$

的图形，并估计$\lim_{h\to 0}f(h)$. 把估值同$\pi/180$比较. 有理由相信这个极限应是$\pi/180$吗?

(b) 在绘图器中仍然用度模式，估计

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}$$

(c) 现在回到正文中对$\sin x$导数公式的推导，并执行使用度模式极限的推导步骤. 对于这个导数你获得什么公式?

(d) 使用度方式极限推导$\cos x$的导数公式. 对于这个导数你获得什么公式?

(e) 当开始求高阶导数时，使用度模式的缺点是显而易见的. 试用这种模式推导高阶导数公式. $\sin x$和$\cos x$的二阶和三阶度模式的导数是什么?

## 3.5 链式法则与参数方程

函数$F(x)=\sin(x^2-4)$是函数$y=f(u)=\sin u$和$u=g(x)=x^2-4$的复合函数$f\circ g$，对于这个函数如何求导数? 答案由*链式法则*给出，链式法则表明$F(x)$的导数是$f$和$g$的导数的乘积. 这一节我们来学习这个法则，并把它应用到由*参数方程*在平面内定义的曲线.

### 3.5.1 复合函数的导数

函数 $y=\frac{3}{2}x=\frac{1}{2}(3x)$ 是函数 $y=\frac{1}{2}u$ 和 $u=3x$ 的复合函数. 对于函数 $y$ 和 $u$ 有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}, \quad \frac{dy}{du}=\frac{1}{2} \quad 及 \quad \frac{du}{dx}=3$$

由于 $\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\cdot 3$，在这种情况下看出

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

我们如果把导数想象成变化率，凭直觉就知道这个关系是合理的. 如果 $y=f(u)$ 的变化速率为 $u$ 的一半，而 $u=g(x)$ 的变化速率为 $x$ 的三倍，那么我们期望 $y$ 的变化速率为 $x$ 的 3/2 倍. 这种作用同多个齿轮的传动装置非常相似(见图 3.22).

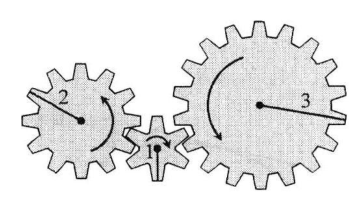



图 3.22 当齿轮 A 转动 $x$ 圈时，齿轮 B 转动 $u$ 圈，而齿轮 C 转动 $y$ 圈：从比较齿轮的周长或者数齿轮的齿数看出，$y=u/2$(C 转动半圈相当于 B 转动一圈)，$u=3x$(B 转动三圈相当于 A 转动一圈)，所以 $y=3x/2$；于是 $dy/dx=3/2=(1/2)(3)=(dy/du)(du/dx)$

下面考察另外一个例子.

**例 1** 函数 $y=(3x^2+1)^2$ 是 $y=f(u)=u^2$ 和 $u=g(x)=3x^2+1$ 的复合函数. 计算导数得到

$$\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=2u\cdot 6x=2(3x^2+1)\cdot 6x=36x^3+12x$$

通过展开公式 $(3x^2+1)^2=9x^4+6x^2+1$ 计算导数，给出同样的结果：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(9x^4+6x^2+1)=36x^3+12x$$ ■

复合函数 $f(g(x))$ 在 $x$ 的导数等于 $f$ 在 $g(x)$ 的导数乘以 $g$ 在 $x$ 的导数. 这就是所谓的链式法则(见图 3.23).

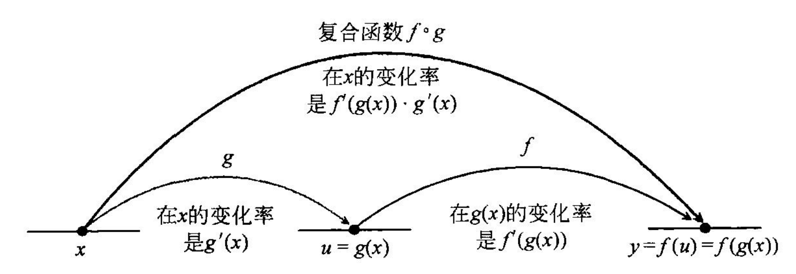



图 3.23 变化率相乘：$f\circ g$ 在 $x$ 的导数等于 $f$ 在 $g(x)$ 的导数乘以 $g$ 在 $x$ 的导数

**定理 3（链式法则）** 若 $f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 是可微的和 $g(x)$ 在点 $x$ 是可微的，则复合函数 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ 在点 $x$ 是可微的，并且

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

用莱布尼茨记号，若 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

其中 $dy/du$ 在 $u=g(x)$ 求值.

**链式法则的直观"证明"**

令 $\Delta u$ 是 $u$ 在 $x$ 改变 $\Delta x$ 时的相应的改变，就是说

$$\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x)$$

这时 $y$ 的相应改变为

$$\Delta y = f(u+\Delta u) - f(u)$$

这样诱导我们写出

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} \tag{1}$$

并求当 $\Delta x\to 0$ 时的极限：

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (\text{注意当 } \Delta x\to 0 \text{ 时 } \Delta u\to 0, \text{因为 } g \text{ 是连续的})\\ &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

这种推理的唯一缺陷在于，在等式(1)中可能出现 $\Delta u=0$(即使在 $\Delta x\neq 0$ 的情况下)，而我们当然不能以零做除数. 为了克服这个缺陷，证明需要采取一种不同的方法，我们在 3.10 节给出一种精确的证明.

**例 2** 一个物体沿 $x$ 轴运动，它在任何时刻 $t\geqslant 0$ 的位置由 $x(t)=\cos(t^2+1)$ 确定. 求物体的速度作为 $t$ 的函数.

**解** 已知速度为 $dx/dt$. 在本例中 $x$ 是复合函数：$x=\cos(u)$ 和 $u=t^2+1$. 求导数得到

$$\frac{dx}{du} = -\sin(u) \qquad (x=\cos(u))$$

$$\frac{du}{dt} = 2t \qquad (u=t^2+1)$$

由链式法则，

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{du}\cdot\frac{du}{dt}\\ &= -\sin(u)\cdot 2t \qquad \left(\frac{dx}{du}\text{ 在 } u \text{ 求值}\right)\\ &= -\sin(t^2+1)\cdot 2t = -2t\sin(t^2+1)\end{aligned}$$

■

### 3.5.2 "外函数-内函数"法则

使用莱布尼茨记号的一个难点是，它不具体指明链式法则中的导数在何处求值. 所以有时考虑采用函数记号的链式法则是有帮助的. 若 $y=f(g(x))$，则

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

就是说，对"外"函数 $f$ 求导数并且对它计算时保持"内"函数 $g(x)$ 不变，然后乘以"内"函数的导数.

**例 3** 求 $\sin(x^2+e^x)$ 关于 $x$ 的导数.

**解**

$$\frac{d}{dx}\sin\underbrace{(x^2+e^x)}_{\text{内函数}} = \underbrace{\cos(x^2+e^x)}_{\text{保持内函数不变}}\cdot\underbrace{(2x+e^x)}_{\text{内函数的导数}}$$

■

**例 4** 求 $y=e^{\cos x}$ 的导数.

**解** 此处内函数是 $u=g(x)=\cos x$，外函数是指数函数 $f(x)=e^x$. 应用链式法则，得到

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\cos x}) = e^{\cos x}\frac{d}{dx}(\cos x) = e^{\cos x}(-\sin x) = -e^{\cos x}\sin x$$

■

推广例 4 的结果，看出链式法则给出公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^u=\mathrm{e}^u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

例如，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{kx}) = \mathrm{e}^{kx}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(kx) = k\mathrm{e}^{kx} \quad (k\text{ 为任意常数})$$

及

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{x^2}) = \mathrm{e}^{x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$$

### 3.5.3 重复应用链式法则

人物传记

约翰·伯努利 (Johann Bernoulli, 1667—1748)

在求导数时有时不得不两次或者多次应用链式法则.

**例 5** 求 $g(t)=\tan(5-\sin 2t)$ 的导数.

**解** 注意此处的正切函数是 $5-\sin 2t$ 的函数，而正弦函数是 $2t$ 的函数，$2t$ 本身又是 $t$ 的函数. 因此，由链式法则，

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan(5-\sin 2t)) \quad (\tan u\text{ 的导数}, u = 5-\sin 2t)\\
&= \sec^2(5-\sin 2t)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(5-\sin 2t) \quad (5-\sin u\text{ 的导数}, u=2t)\\
&= \sec^2(5-\sin 2t)\cdot\left(0-\cos 2t\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2t)\right)\\
&= \sec^2(5-\sin 2t)\cdot(-\cos 2t)\cdot 2 = -2(\cos 2t)\sec^2(5-\sin 2t)
\end{aligned}$$ ■

### 3.5.4 函数幂的链式法则

如果 $f$ 是 $u$ 的可微函数而 $u$ 是 $x$ 的可微函数，那么把 $y=f(u)$ 代入链式法则公式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

导出公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(u) = f'(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

这里举一个如何用这个公式求导数的例子：如果 $u$ 是任意实数而 $f(u)=u^n$，那么幂法则(法则 2)表明 $f'(u)=nu^{n-1}$. 如果 $u$ 是 $x$ 的可微函数，那么可以用链式法则把这个公式扩充为**幂链式法则**：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u^n = nu^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(u^n) = nu^{n-1}\right)$$

**例 6**

**(a)** $$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x^3-x^4)^7 &= 7(5x^3-x^4)^6\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x^3-x^4) \quad (\text{幂链式法则用于 } u=5x^3-x^4,\ n=7)\\ &= 7(5x^3-x^4)^6(5\cdot 3x^2-4x^3) = 7(5x^3-x^4)^6(15x^2-4x^3)\end{aligned}$$

**(b)** $$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{3x-2}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x-2)^{-1}\\ &= -1(3x-2)^{-2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x-2) \quad (\text{幂链式法则用于 } u=3x-2,\ n=-1)\\ &= -1(3x-2)^{-2}(3) = -\frac{3}{(3x-2)^2}\end{aligned}$$

在(b)中也可以用商法则求导数.

(c) $\frac{d}{dx}(\sin^5 x) = 5\sin^4 x \cdot \frac{d}{dx}\sin x$ （幂链式法则用于 $u=\sin x$，$n=5$）

$$= 5\sin^4 x \cos x$$

> **附注**
> $\sin^n x$ 表示 $(\sin x)^n$，$n \neq -1$.

(d) $\frac{d}{dx}(e^{\sqrt{3x+1}}) = e^{\sqrt{3x+1}} \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{3x+1})$

$$= e^{\sqrt{3x+1}} \cdot \frac{1}{2}(3x+1)^{-1/2} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} e^{\sqrt{3x+1}}$$ ■

**例 7** 在 3.1 节已经见到，绝对值函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 是不可微的. 但是，现在来证明这个函数在所有其他实数值是可微的. 由于 $|x| = \sqrt{x^2}$，我们可以导出下述有用的公式：

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}\sqrt{x^2} = \frac{1}{2\sqrt{x^2}} \cdot \frac{d}{dx}(x^2)$$ （幂链式法则用于 $u = x^2$，$n = 1/2$，$x \neq 0$）

$$= \frac{1}{2|x|} \cdot 2x \qquad (\sqrt{x^2} = |x|)$$

$$= \frac{x}{|x|}, \quad x \neq 0$$ ■

**例 8** $\sin x$ 和 $\cos x$ 的导数公式是用弧度而不是以度作度量单位的假设下导出的. 链式法则使我们对两者之间的差别有新的理解. 由于 $180° = \pi$ 弧度，$x° = \pi x/180$ 弧度，其中 $x°$ 表示角 $x$ 用度度量. 用链式法则，

$$\frac{d}{dx}\sin(x°) = \frac{d}{dx}\sin\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180}\cos\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180}\cos(x°)$$

参见图 3.24. 同样，$\cos(x°)$ 的导数是 $-(\pi/180)\sin(x°)$.

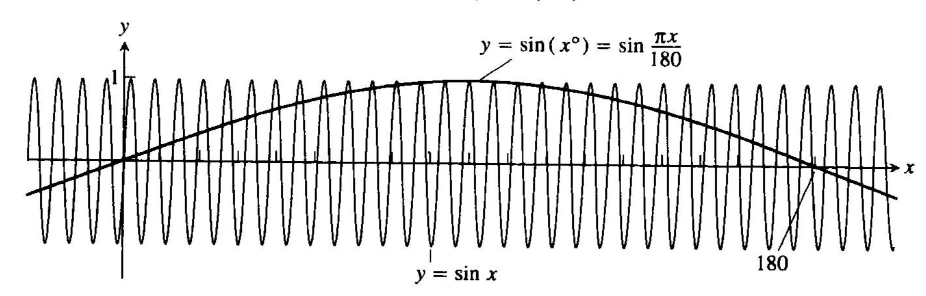



图 3.24 $\sin(x°)$ 的振荡次数仅为通常 $\sin x$ 的振荡次数乘 $\pi/180$，它在 $x=0$ 的最大斜率是 $\pi/180$（例 6）

第一个导数中令人烦恼的因子 $\pi/180$ 将在重复求导数中出现. 一看便知这是角用弧度作度量单位的令人信服的理由. ■

### 3.5.5 参数方程

过去描述曲线时，把曲线上一点 $P(x, y)$ 的 $y$ 坐标表示成 $x$ 坐标的函数. 有时不这样描述曲线而用一种更为方便的描述方法，就是把两个坐标都表示成第三个变量 $t$ 的函数. 图 3.25 显示用一对方程 $x=f(t)$ 和 $y=g(t)$ 显示运动质点的路径. 在研究运动时，$t$ 通常表示时间. 像这样的

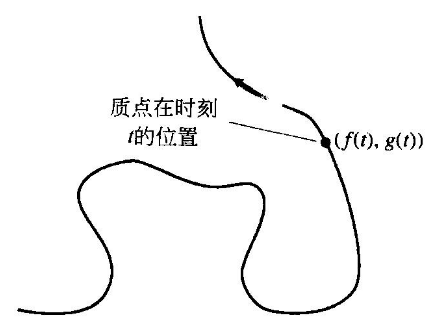



图 3.25 $xy$ 平面上运动质点经过的路径通常不是 $x$ 的函数或 $y$ 的函数的图形

方程具有笛卡儿坐标公式所不及的优点，因为它们显示任何时间质点的位置$(x, y) = (f(t), g(t))$. 它们也能模拟如图 3.25 那样的路径，这种路径不是函数的图形，不能作垂直线检验.

> **定义** 如果 $x$ 和 $y$ 由 $t$ 值区间上的函数
> $$x = f(t),\ y = g(t)$$
> 给定，那么由这两个方程定义的点$(x, y) = (f(t), g(t))$的集合是一条**参数曲线**. 这两个方程是曲线的**参数方程**.

变量 $t$ 是曲线的**参数**，它的定义域 $I$ 是**参数区间**. 如果 $I$ 是闭区间 $a \leqslant t \leqslant b$，点$(f(a), g(a))$是曲线的**起点**，点$(f(b), g(b))$是曲线的**终点**. 在我们给出曲线的参数方程和参数区间时，就说曲线已经**参数化**. 这些方程和区间共同构成曲线的**参数化**或**参数表示**. 一条已知的曲线可以由不同的参数方程组表示(参见习题 93 和 94).

**例 9** 画出下列参数曲线的图形：

(**a**) $x = \cos t,\quad y = \sin t,\quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$ (**b**) $x = a\cos t,\quad y = a\sin t,\quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$

**解** (**a**) 由于 $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$，参数曲线位于单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上. 当 $t$ 从 0 增加到 $2\pi$ 时，点$(x, y) = (\cos t, \sin t)$从$(1, 0)$开始依反时针方向绕行单位圆一周(见图 3.26).

(**b**) 对于 $x = a\cos t$，$y = a\sin t$，$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$，我们有 $x^2 + y^2 = a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t = a^2$. 这个参数表示描述一个运动，从点$(a, 0)$开始依反时针方向绕行圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 一周，在 $t = 2\pi$ 时再回到$(a, 0)$. 曲线图形是坐标点$(a\cos t, a\sin t)$构成的以原点为中心半径 $r = a$ 的圆. ■

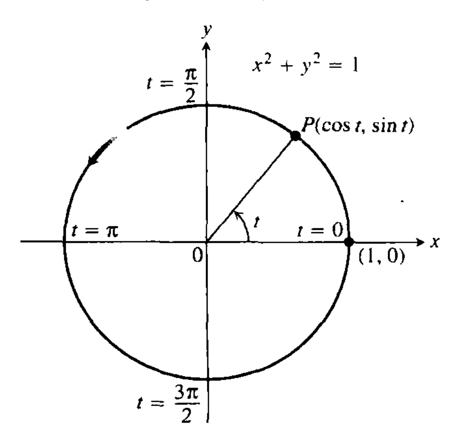



图 3.26 方程 $x = \cos t$ 和 $y = \sin t$ 描述圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的运动，箭头指示 $t$ 增加的方向(例 9)

**例 10** $xy$ 平面上质点运动的位置 $P(x, y)$ 由参数方程和参数区间

$$x = \sqrt{t},\quad y = t,\quad t \geqslant 0$$

给定. 确定质点经过的路径并描述这个运动.

**解** 我们试从消去方程 $x = \sqrt{t}$ 和 $y = t$ 之间的 $t$ 来确定质点的运动路径. 幸好，这将产生 $x$ 和 $y$ 之间的一个确定的代数关系. 我们求出

$$y = t = (\sqrt{t})^2 = x^2$$

于是，质点的位置坐标满足方程 $y = x^2$，所以质点沿抛物线 $y = x^2$ 运动.

然而，如果由此得出质点的路径是整个抛物线 $y = x^2$ 的结论，那将是错误的；事实上，路径仅是抛物线的一半. 质点的 $x$ 坐标不会为负值. 质点在 $t = 0$ 时从点$(0, 0)$开始，随着 $t$ 的增加在第一象限内上升(见图 3.27). 参数区间为$[0, \infty)$，运动没有终点. ■

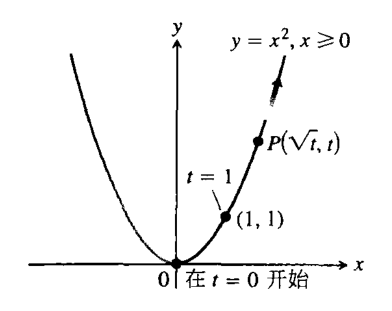



图 3.27 参数方程 $x = \sqrt{t}$，$y = t$ 和参数区间 $t \geqslant 0$ 描述质点经过抛物线 $y = x^2$ 右半支的运动(例 10)

**例 11** 求以$(-2, 1)$和$(3, 5)$为端点的线段的参数表示.

**解** 用$(-2, 1)$建立参数方程

$$x=-2+at, \quad y=1+bt.$$

这两个方程代表一条直线，对每个方程求解$t$并使它们相等，得到

$$\frac{x+2}{a}=\frac{y-1}{b}$$

这条直线当$t=0$时经过点$(-2, 1)$. 我们来确定$a$, $b$使得直线在$t=1$时经过点$(3, 5)$.

$$3=-2+a \quad \Rightarrow \quad a=5 \quad (\text{当} t=1 \text{时} x=3)$$
$$5=1+b \quad \Rightarrow \quad b=4 \quad (\text{当} t=1 \text{时} y=5)$$

因此，

$$x=-2+5t, \quad y=1+4t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

是以点$(-2, 1)$为起点和以$(3, 5)$为终点的线段的一种参数表示. ■

### 3.5.6 参数化曲线的斜率

说参数化曲线$x=f(t)$和$y=g(t)$在$t$是**可微的**，是指$f$和$g$在$t$是可微的. 在可微的参数化曲线上一点，$y$也是$x$的可微函数，导数$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$和$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$的关系由链式法则表示：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

如果$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t \neq 0$，可以在这个等式两端用$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$相除，解出$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$.

**dy/dx 的参数公式**

假设三个导数都存在且$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t \neq 0$,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} \tag{2}$$

**例 12** 描述一个质点的运动，它在时间$t$的位置$P(x, y)$由

$$x=a\cos t, \quad y=b\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

给出. 求曲线在点$(a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2})$的切线，在这个点$t=\pi/4$. (常数$a$和$b$都是正数.)

**解** 我们通过消去方程$\cos t=\frac{x}{a}$, $\sin t=\frac{y}{b}$之间的$t$，求出质点坐标的笛卡儿方程. 由恒等式$\cos^2 t+\sin^2 t=1$推出

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1 \quad \text{或} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

质点的坐标$(x, y)$满足方程$(x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1$，所以质点沿这个椭圆运动. 当$t=0$时，质点的坐标是

$$x=a\cos(0)=a, \quad y=b\sin(0)=0$$

所以运动从点$(a, 0)$开始. 随着$t$的增加，质点按反时针方向朝左上方运动. 它绕行椭圆一周后在$t=2\pi$时回到起点$(a, 0)$.

当$t=\pi/4$时椭圆切线的斜率是

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\pi/4}=\left.\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}\right|_{t=\pi/4} \quad (\text{公式}(2))$$

$$=\left.\frac{b\cos t}{-a\sin t}\right|_{t=\pi/4}=\frac{b/\sqrt{2}}{-a/\sqrt{2}}=-\frac{b}{a}$$

切线方程是

$$y-\frac{b}{\sqrt{2}}=-\frac{b}{a}\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

$$y=\frac{b}{\sqrt{2}}-\frac{b}{a}\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

或

$$y=-\frac{b}{a}x+\sqrt{2}b$$ ■

如果参数方程定义 $y$ 为 $x$ 的二次可微函数，可以对函数 $\frac{dy}{dx}=y'$应用公式(2)，计算出 $d^2y/dx^2$ 作为 $t$ 的函数：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(y')=\frac{dy'/dt}{dx/dt}\qquad(\text{在公式(2)中用 } y' \text{ 代换 } y)$$

**$d^2y/dx^2$ 的参数公式**

若方程 $x=f(t)$，$y=g(t)$定义 $y$ 为 $x$ 的二次可微函数，则在 $dx/dt\neq0$ 和 $y'=dy/dx$ 的任何点，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'/dt}{dx/dt}\tag{3}$$

**例 13** 假设 $x=t-t^2$，$y=t-t^3$，求 $d^2y/dx^2$ 作为 $t$ 的函数.

**解**

(1)通过 $t$ 表示 $y'=dy/dx$：

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{1-3t^2}{1-2t}$$

(2)求 $y'$关于 $t$ 的导数：

$$\frac{dy'}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1-3t^2}{1-2t}\right)=\frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^2}\qquad(\text{商法则})$$

(3)用 $dx/dt$ 除 $dy'/dt$：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'/dt}{dx/dt}=\frac{(2-6t+6t^2)/(1-2t)^2}{1-2t}=\frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^3}\qquad(\text{公式(3)})$$ ■

**附注：求通过 $t$ 表示的 $d^2y/dx^2$**
(1)通过 $t$ 表示 $y'=dy/dx$.
(2)求 $dy'/dt$.
(3)用 $dx/dt$ 除 $dy'/dt$.

## 习题 3.5

在习题 1 ~ 8 中，已知 $y=f(u)$和 $u=g(x)$，求 $dy/dx=f'(g(x))g'(x)$.

**1.** $y=6u-9$，$u=(1/2)x^4$. **2.** $y=2u^3$，$u=8x-1$.

**3.** $y=\sin u$，$u=3x+1$. **4.** $y=\cos u$，$u=-x/3$.

**5.** $y=\cos u$，$u=\sin x$. **6.** $y=\sin u$，$u=x-\cos x$.

**7.** $y=\tan u$，$u=10x-5$. **8.** $y=-\sec u$，$u=x^2+7x$.

在习题 9 ~ 22 中，把函数方程写成 $y=f(u)$和 $u=g(x)$的形式. 然后求 $dy/dx$ 作为 $x$ 的函数.

**9.** $y=(2x+1)^5$. **10.** $y=\sqrt[3]{2x}$.

**11.** $y=\left(1-\frac{x}{7}\right)^{-7}$. **12.** $y=\left(\frac{x}{2}-1\right)^{-10}$.

**13.** $y=(1-6x)^{2/3}$. **14.** $y=\left(\frac{x}{5}+\frac{1}{5x}\right)^5$.

**15.** $y=\sec(\tan x)$. **16.** $y=\cot\left(\pi-\frac{1}{x}\right)$.

**17.** $y=\sin^3x$. **18.** $y=5\cos^{-4}x$.

**19.** $y=e^{-5x}$. **20.** $y=e^{2x/3}$.

**21.** $y=e^{5-7x}$. **22.** $y=e^{(4\sqrt{x}+x^2)}$.

在习题 23 ~ 48 中，求函数的导数.

**23.** $p=\sqrt{3-t}$. **24.** $y=x(x^2+1)^{1/2}$.

**25.** $s=\frac{4}{3\pi}\sin 3t+\frac{4}{5\pi}\cos 5t$.

**26.** $y=\sin[(2t+5)^{-2/3}]$.

**27.** $r=(\csc\theta+\cot\theta)^{-1}$.

**28.** $r=-(\sec\theta+\tan\theta)^{-1}$.

**29.** $y=x^2\sin^4x+x\cos^{-2}x$.

**30.** $z=\cos[(1-6t)^{2/3}]$.

**31.** $y=\frac{1}{21}(3x-2)^7+\left(4-\frac{1}{2x^2}\right)^{-1}$.

**32.** $g(x)=2(2x^{-1/2}+1)^{-1/3}$.

**33.** $y=(4x+3)^4(x+1)^{-3}$.

**34.** $y=x(x^2+1)^{-1/2}$.　**35.** $y=xe^{-x}+e^{3x}$.

**36.** $y=(1+2x)e^{-2x}$.

**37.** $y=(x^2-2x+2)e^{5x/2}$.

**38.** $y=(9x^2-6x+2)e^{x^3}$.

**39.** $h(x)=x\tan(2\sqrt{x})+7$.

**40.** $k(x)=x^2\sec\left(\frac{1}{x}\right)$.　**41.** $f(\theta)=\left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)^2$.

**42.** $g(t)=\left(\frac{1+\cos t}{\sin t}\right)^{-1}$.　**43.** $h(\theta)=\sqrt[3]{1+\cos 2\theta}$.

**44.** $r=\sec\sqrt{\theta}\tan\left(\frac{1}{\theta}\right)$.　**45.** $q=\sin\left(\frac{t}{\sqrt{t+1}}\right)$.

**46.** $q=\cot\left(\frac{\sin t}{t}\right)$.　**47.** $y=\cos(e^{-\theta^2})$.

**48.** $y=\theta^3e^{-2\theta}\cos 5\theta$.

在习题 49 ~ 60 中，求 $dy/dt$.

**49.** $y=\sin^2(\pi t-2)$.　**50.** $y=\sec^2\pi t$.

**51.** $y=(1+\cos 2t)^{-4}$.　**52.** $y=(1+\cot(t/2))^{-2}$.

**53.** $y=e^{\cos^2(\pi t-1)}$.　**54.** $y=(e^{\sin(t/2)})^3$.

**55.** $y=\sin(\cos(2t-5))$.　**56.** $y=\cos\left(5\sin\left(\frac{t}{3}\right)\right)$.

**57.** $y=\left(1+\tan^4\left(\frac{t}{12}\right)\right)^3$.　**58.** $y=\frac{1}{6}(1+\cos^2(7t))^3$.

**59.** $y=\sqrt{1+\cos(t^2)}$.　**60.** $y=4\sin\sqrt{1+\sqrt{t}}$.

在习题 61 ~ 66 中，求 $y''$.

**61.** $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^3$.　**62.** $y=(1-\sqrt{x})^{-1}$.

**63.** $y=\frac{1}{9}\cot(3x-1)$.　**64.** $y=9\tan\left(\frac{x}{3}\right)$.

**65.** $y=e^{x^2}+5x$.　**66.** $y=\sin(x^2e^x)$.

在习题 67 ~ 72 中，求 $(f\circ g)'$ 在给定 $x$ 值的值.

**67.** $f(u)=u^5+1$，$u=g(x)=\sqrt{x}$，$x=1$.

**68.** $f(u)=1-\frac{1}{u}$，$u=g(x)=\frac{1}{1-x}$，$x=-1$.

**69.** $f(u)=\cot\frac{\pi u}{10}$，$u=g(x)=5\sqrt{x}$，$x=1$.

**70.** $f(u)=u+\frac{1}{\cos^2u}$，$u=g(x)=\pi x$，$x=1/4$.

**71.** $f(u)=\frac{2u}{u^2+1}$，$u=g(x)=10x^2+x+1$，$x=0$.

**72.** $f(u)=\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^2$，$u=g(x)=\frac{1}{x^2}-1$，$x=-1$.

**73.** 假设函数 $f$ 和 $g$ 以及它们关于 $x$ 的导数在 $x=2$ 和 $x=3$ 的值如下：

| $x$ | $f(x)$ | $g(x)$ | $f'(x)$ | $g'(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 8 | 2 | 1/3 | -3 |
| 3 | 3 | -4 | $2\pi$ | 5 |

求下列函数组合关于 $x$ 的导数在给定 $x$ 值的值：

(**a**) $2f(x)$，$x=2$.　(**b**) $f(x)+g(x)$，$x=3$.

(**c**) $f(x)\cdot g(x)$，$x=3$.　(**d**) $f(x)/g(x)$，$x=2$.

(**e**) $f(g(x))$，$x=2$.　(**f**) $\sqrt{f(x)}$，$x=2$.

(**g**) $1/g^2(x)$，$x=3$.　(**h**) $\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$，$x=2$.

**74.** 假设函数 $f$ 和 $g$ 以及它们关于 $x$ 的导数在 $x=0$ 和 $x=1$ 的值如下：

| $x$ | $f(x)$ | $g(x)$ | $f'(x)$ | $g'(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 5 | 1/3 |
| 1 | 3 | -4 | -1/3 | -8/3 |

求下列函数组合关于 $x$ 的导数在给定 $x$ 值的值：

(**a**) $5f(x)-g(x)$，$x=1$.

(**b**) $f(x)g^3(x)$，$x=0$.

(**c**) $\frac{f(x)}{g(x)+1}$，$x=1$.

(**d**) $f(g(x))$，$x=0$.

(**e**) $g(f(x))$，$x=0$.

(**f**) $(x^{11}+f(x))^{-2}$，$x=1$.

(**g**) $f(x+g(x))$，$x=0$.

**75.** 设 $s=\cos\theta$ 和 $d\theta/dt=5$，求 $ds/dt$ 在 $\theta=3\pi/2$ 的值.

**76.** 设 $y=x^2+7x-5$ 和 $dx/dt=1/3$，求 $dy/dt$ 在 $x=1$ 的值.

如果可以用不同方式把一个函数写成复合函数，那么会出现什么情况？每次能否得到同样的导数？链式法则表明应该得到相同的导数. 在习题 77 和 78 中，用给出的函数作试验.

**77.** 假设 $y=x$，对 $y$ 作为下列函数的复合函数，应用链式法则求 $dy/dx$.

(**a**) $y=(u/5)+7$ 和 $u=5x-35$.

(**b**) $y=1+(1/u)$ 和 $u=1/(x-1)$.

**78.** 假设 $y=x^{3/2}$，对 $y$ 作为下列函数的复合函数，

应用链式法则求 $dy/dx$.

(a) $y=u^3$ 和 $u=\sqrt{x}$.

(b) $y=\sqrt{u}$ 和 $u=x^3$.

**79.** (a) 求曲线 $y=2\tan(\pi x/4)$ 在 $x=1$ 的切线.

(b) **正切曲线的斜率** 该曲线的斜率在区间 $-2<x<2$ 上能够具有的最小值是什么？提出答案的理由.

**80. 正弦曲线的斜率**

(a) 求曲线 $y=\sin 2x$ 和 $y=-\sin(x/2)$ 在原点的切线方程. 这两条切线之间存在任何特殊关系吗？提出答案的理由.

(b) 关于曲线 $y=\sin mx$ 和 $y=-\sin(x/m)$ 在原点的切线（$m$ 是不等于零的常数）能得出任何结论吗？提出答案的理由.

(c) 对于给定的 $m$，曲线 $y=\sin mx$ 及 $y=-\sin(x/m)$ 的斜率能够具有的最大值是什么？提出答案的理由.

(d) 在区间 $[0, 2\pi]$ 上函数 $y=\sin x$ 形成一个周期，函数 $y=\sin 2x$ 形成两个周期，函数 $y=\sin(x/2)$ 形成半个周期，等等. $y=\sin mx$ 在 $[0, 2\pi]$ 上具有的周期数同曲线 $y=\sin mx$ 在原点的斜率之间存在任何关系吗？提出答案的理由.

习题 81 ~ 92 给出 $xy$ 平面内质点运动的参数方程和参数区间. 通过求质点运动的笛卡儿方程确定质点的路径. 画出笛卡儿方程的图形（图形随所用的方程而改变）. 指出质点经过的图形部分及运动的方向.

**81.** $x=\cos 2t,\ y=\sin 2t,\ 0\leqslant t\leqslant\pi$.

**82.** $x=\cos(\pi-t),\ y=\sin(\pi-t),\ 0\leqslant t\leqslant\pi$.

**83.** $x=4\cos t,\ y=2\sin t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

**84.** $x=4\sin t,\ y=5\cos t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

**85.** $x=3t,\ y=9t^2,\ -\infty<t<\infty$.

**86.** $x=-\sqrt{t},\ y=t,\ t\geqslant 0$.

**87.** $x=2t-5,\ y=4t-7,\ -\infty<t<\infty$.

**88.** $x=3-3t,\ y=2t,\ 0\leqslant t\leqslant 1$.

**89.** $x=t,\ y=\sqrt{1-t^2},\ -1\leqslant t\leqslant 0$.

**90.** $x=\sqrt{t+1},\ y=\sqrt{t},\ t\geqslant 0$.

**91.** $x=\sec^2 t-1,\ y=\tan t,\ -\pi/2<t<\pi/2$.

**92.** $x=-\sec t,\ y=\tan t,\ -\pi/2<t<\pi/2$.

**93.** 对于从点 $(a, 0)$ 开始沿着圆 $x^2+y^2=a^2$ 按下述方式运动的质点，求运动的参数方程和参数区间：

(a) 一次顺时针方向.

(b) 一次反时针方向.

(c) 两次顺时针方向.

(d) 两次反时针方向.

（有多种求解方式，所以你的答案可能同本书的答案不同.）

**94.** 对于从点 $(a, 0)$ 开始沿着椭圆 $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1$ 按下述方式运动的质点，求参数方程和参数区间：

(a) 一次顺时针方向.

(b) 一次反时针方向.

(c) 两次顺时针方向.

(d) 两次反时针方向.

（同习题 93 一样，存在多种正确答案.）

在习题 95 ~ 100 中，求曲线的参数表示.

**95.** 连接端点 $(-1, -3)$ 和 $(4, 1)$ 的线段.

**96.** 连接端点 $(-1, 3)$ 和 $(3, -2)$ 的线段.

**97.** 抛物线 $x-1=y^2$ 的下半支.

**98.** 抛物线 $y=x^2+2x$ 的左半支.

**99.** 以点 $(2, 3)$ 为起点并通过点 $(-1, -1)$ 的射线（半直线）.

**100.** 以点 $(-1, 2)$ 为起点并通过点 $(0, 0)$ 的射线（半直线）.

在习题 101 ~ 108 中，在 $t$ 值所定义的点上求曲线的切线方程. 此外，求 $d^2y/dx^2$ 在这一点的值.

**101.** $x=2\cos t,\ y=2\sin t,\ t=\pi/4$.

**102.** $x=\cos t,\ y=\sqrt{3}\cos t,\ t=2\pi/3$.

**103.** $x=t,\ y=\sqrt{t},\ t=1/4$.

**104.** $x=-\sqrt{t+1},\ y=\sqrt{3t},\ t=3$.

**105.** $x=2t^2+3,\ y=t^4,\ t=-1$.

**106.** $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ t=\pi/3$.

**107.** $x=\cos t,\ y=1+\sin t,\ t=\pi/2$.

**108.** $x=\sec^2 t-1,\ y=\tan t,\ t=-\pi/4$.

**109. 机器运转过快的问题** 假定一台机械装置的活塞作上下垂直运动，它在 $t$ 秒时的位置为

$$s = A\cos(2\pi bt)$$

其中 $A$ 和 $b$ 是正数. $A$ 的值是运动的振幅，$b$ 是运动的频率（活塞每秒上下运动的次数）. 当频率加倍时对活塞的速度、加速度和冲击有什么影响？（你只要找到问题的答案，就会知道某些机器为什么在运转过快时会损坏.）

**110. 阿拉斯加费尔班克斯镇的气温** 图 3.28 显示阿拉斯加费尔班克斯镇常年 365 天的平均华氏气温. 近似表示第 $x$ 天的气温的方程是

$$y = 37\sin\left[\frac{2\pi}{365}(x-101)\right]+25$$

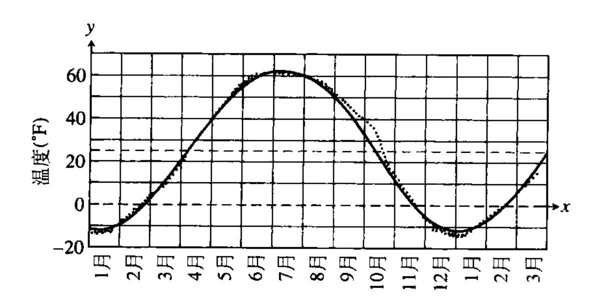



图 3.28 阿拉斯加费尔班克斯镇常年平均气温数据的描点图，接近于正弦函数(习题 110)

(a) 哪一天气温升高最快?

(b) 当气温升高最快时，每天大约升高多少度?

**111. 质点运动** 假定质点沿一条坐标线运动的位置由 $s=\sqrt{1+4t}$ 确定，其中 $s$ 以米为单位，$t$ 以秒为单位. 求质点在 $t=6$ 秒时的速度和加速度.

**112. 恒定加速度** 假定下落物体在落至距离起点 $s$ m 时的速度为 $v=k\sqrt{s}$ m/s($k$ 为常数). 证明物体的加速度为常数.

**113. 坠落的陨石** 一块进入地球大气层的重陨石在距离地心 $s$ km 时的速度同 $\sqrt{s}$ 成反比. 证明陨石的加速度同 $s^2$ 成反比.

**114. 质点的加速度** 假定质点沿 $x$ 轴运动的速度为 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=f(x)$. 证明质点的加速度为 $f(x)f'(x)$.

**115. 温度与摆的周期** 对于单摆的小幅振动(短摆动)，可以用方程

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

可靠地模拟周期 $T$ 和长度 $L$ 之间的关系. 其中 $g$ 是摆所在位置重力的恒定加速度. 如果测量 $g$ 以厘米每秒平方为单位，那么测量 $L$ 以厘米为单位，$T$ 以秒为单位. 如果摆是用金属材料制成的，它的长度将随温度变化，其增加或者减少的速率粗略地同 $L$ 成比例. 用符号表示成

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}u}=kL$$

其中 $u$ 是温度，$k$ 为比例常数. 在这种情况下，证明周期随温度的变化率为 $kT/2$.

**116. 链式法则** 假设 $f(x)=x^2$，$g(x)=|x|$. 这时，复合函数

$(f\circ g)(x)=|x|^2=x^2$ 及 $(g\circ f)(x)=|x^2|=x^2$

在 $x=0$ 都是可微的，虽然 $g$ 本身在 $x=0$ 不可微. 这同链式法则相矛盾吗? 予以说明.

**117. 切线** 假定 $u=g(x)$ 在 $x=1$ 是可微的，$y=f(u)$ 在 $u=g(1)$ 是可微的. 如果 $y=f(g(x))$ 在 $x=1$ 有水平切线，关于 $g$ 的图形在 $x=1$ 的切线，或者 $f$ 的图形在 $u=g(1)$ 的切线，我们能够得到任何结论吗? 提出答案的理由.

**118.** 假定 $u=g(x)$ 在 $x=-5$ 是可微的，$y=f(u)$ 在 $u=g(-5)$ 是可微的，且 $(f\circ g)'(-5)$ 为负数. 关于 $g'(-5)$ 和 $f'(g(-5))$ 的值可以得到什么结论?

**T 119. sin 2x 的导数** 画出函数 $y=2\cos 2x$ 在区间 $-2\leqslant x\leqslant 3.5$ 上的图形. 然后在同一屏幕上画出

$$y=\frac{\sin 2(x+h)-\sin 2x}{h}$$

对于 $h=1.0$，$0.5$，$0.2$ 的图形. 用 $h$ 的其他值作试验，其中包括用 $h$ 的负数值. 当 $h\to 0$ 时你观察到什么结果? 解释这种特性.

**T 120. cos($x^2$) 的导数** 画出 $y=-2x\sin(x^2)$ 在区间 $-2\leqslant x\leqslant 3$ 的图形. 然后在同一屏幕上画出

$$y=\frac{\cos((x+h)^2)-\cos(x^2)}{h}$$

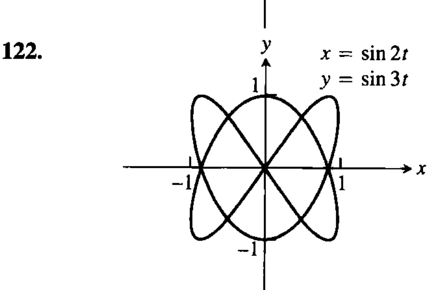
对于 $h=1.0$，$0.7$，$0.3$ 的图形. 用 $h$ 的其他值作试验. 当 $h\to 0$ 时你观察到什么结果? 解释这种特性.

**T** 习题 121 和 122 中的曲线称为*鲍迪奇曲线*或者*利萨如图形*. 在每题中求曲线在第一象限内的切线是水平直线的点，并求在原点的两条切线的方程.

**121.**

$x=\sin t$
$y=\sin 2t$

**122.**




在习题 123 和 124 中，利用链式法则证明，幂法则 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)x^n=nx^{n-1}$ 对于其中的函数 $x^n$ 成立.

**123.** $x^{1/4}=\sqrt{\sqrt{x}}$.  **124.** $x^{3/4}=\sqrt{x\sqrt{x}}$.

**计算机探究**

**125.** 如图 3.29 所示，三角“多项式”

$$s=f(t)=0.78540-0.63662\cos 2t-0.07074\cos 6t-0.02546\cos 10t-0.01299\cos 14t$$

对于区间[π，-π]上锯齿函数 $s=g(t)$ 给出一个满意的逼近. $f$ 的导数对于 $g$ 的导数在 $\mathrm{d}g/\mathrm{d}t$ 有定义的点给出怎样的逼近？为寻求答案，执行下列处理步骤：

(a) 在[-π，π]上 $\mathrm{d}g/\mathrm{d}t$ 有定义的地方画出它的图形.

(b) 求 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$.

(c) 画出 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$ 的图形. 观察 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$ 对 $\mathrm{d}g/\mathrm{d}t$ 的逼近在什么地方显现最好，在什么地方最差？

在热传导和振动理论中用三角多项式逼近函数是非常重要的，但是对它们不能期望过高，从下面习题中可以看出这一点.

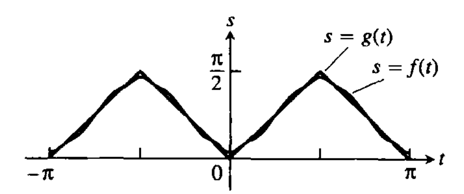



图 3.29 用三角“多项式”逼近锯齿函数(习题 125)

**126.** (续习题 125) 在习题 125 中，在区间[-π，π]上逼近锯齿函数 $g(t)$ 的三角多项式 $f(t)$ 有一个导数，它逼近锯齿函数 $g$ 的导数. 但是存在这样的可能性，对于一个相当好地逼近某个函数的三角多项式，它的导数完全不逼近那个函数的导数. 作为一个恰当的实例，请看在图 3.30 中画出图形的“多项式”

$$s=h(t)=1.2732\sin 2t+0.4244\sin 6t+0.25465\sin 10t+0.18189\sin 14t+0.14147\sin 18t$$

它逼近所示的阶梯函数 $s=k(t)$. 然而 $h$ 的导数完全不像 $k$ 的导数.

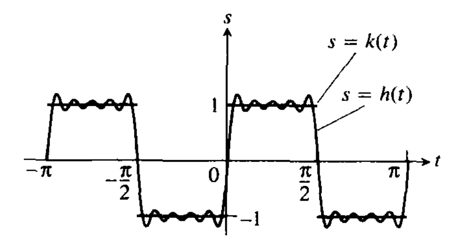



图 3.30 由三角“多项式”逼近阶梯函数(习题 126)

(a) 在区间[-π，π]上 $k(t)$ 有导数的地方画出 $\mathrm{d}k/\mathrm{d}t$ 的图形.

(b) 求 $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t$.

(c) 画出 $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t$ 的图形，观察同 $\mathrm{d}k/\mathrm{d}t$ 的图形有何显著不同. 说明你所见的结果.

在习题 127～130 中，用一种 CAS(计算机代数系统)对参数化曲线执行下列处理步骤：

(a) 在给定的 $t$ 值区间上画出曲线的图形.

(b) 求 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$ 在点 $t_0$ 的值.

(c) 在由给定值 $t_0$ 所确定的点，求曲线的切线方程. 在同一幅图中画出曲线和切线的图形.

**127.** $x=\frac{1}{3}t^3$，$y=\frac{1}{2}t^2$，$0\leqslant t\leqslant 1$，$t_0=1/2$.

**128.** $x=2t^3-16t^2+25t+5$，$y=t^2+t-3$，$0\leqslant t\leqslant 6$，$t_0=3/2$.

**129.** $x=t-\cos t$，$y=1+\sin t$，$-\pi\leqslant t\leqslant\pi$，$t_0=\pi/4$.

**130.** $x=\mathrm{e}^t\cos t$，$y=\mathrm{e}^t\sin t$，$0\leqslant t\leqslant\pi$，$t_0=\pi/2$.

## 3.6 隐式微分法

到目前为止，所讨论的大多数函数都是用 $y=f(x)$ 这种形式的方程描述，其中 $y$ 以显式方式用变量 $x$ 表达. 我们已经学习了以这种方式定义的函数的求导数法则. 在 3.5 节还学习了当曲线由方程 $x=x(t)$ 和 $y=y(t)$ 以参数方式定义时如何求导数 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$.

描述函数的第三种方式出现在像

$$x^2+y^2-25=0,\quad y^2-x=0 \text{ 或 } x^3+y^3-9xy=0$$

这样的方程中(参见图 3.31，3.32 和 3.33). 这些方程定义变量 $x$ 和 $y$ 之间的一种隐式关系. 在某些情况下，可以求解这样的方程把 $y$ 表示成 $x$ 的显式函数(甚至几个函数). 在我们不能把这种方程

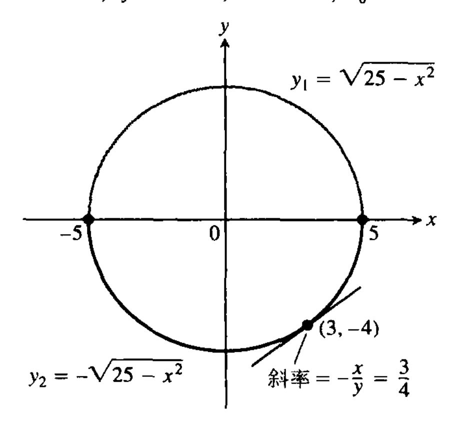



图 3.31 圆把两个函数的图形组合在一起，$y_2$ 的图形是通过点(3，-4)的下半圆

$F(x, y)=0$ 表示成 $y=f(x)$ 的形式用通常的方法求微分时，仍然可以用隐式微分法求 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$. 本节讨论这种微分法.

### 3.6.1 隐式定义的函数

我们从包含熟悉方程的例子开始，对于它们可以把 $y$ 作为 $x$ 的函数求解，用普通方法计算 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$. 然后用隐式方法对方程微分，并且求出导数. 由此提供对两种方法的比较. 最后根据例子概括这种新微分法包含的步骤. 在例子和习题中，总是假定给出的方程隐式定义 $y$ 为 $x$ 的可微函数，所以 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 存在.

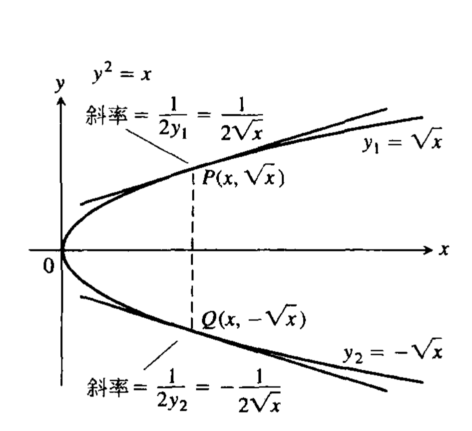



图 3.32 方程 $y^2-x=0$(或者常见的表示形式 $y^2=x$)在区间 $x\geqslant0$ 上定义 $x$ 的两个可微函数(例 1 显示如何求这两个函数的导数而不用从方程 $y^2=x$ 求解 $y$)

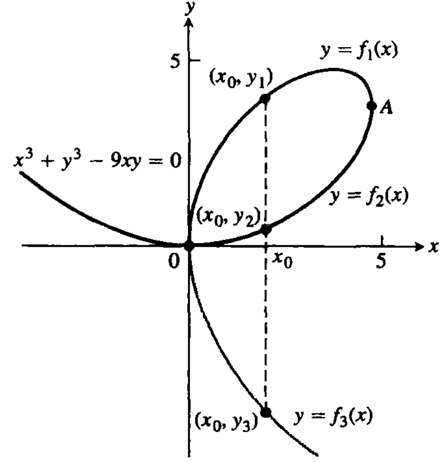
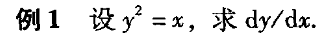



图 3.33 曲线 $x^3+y^3-9xy=0$ 不是 $x$ 的任何一个函数的图形，但是能够把曲线分成几段单独的弧，每段弧是 $x$ 的某个函数的图形(这条特殊的曲线称为叶形线，由笛卡儿在 1638 年提出)



**例 1** 设 $y^2=x$，求 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$.

**解** 方程 $y^2=x$ 定义两个实际上可以求出的可微函数，即 $y_1=\sqrt{x}$ 和 $y_2=-\sqrt{x}$(见图 3.32). 我们已知对于 $x>0$ 如何求这两个函数的导数：

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad 及 \quad \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

但是，假如仅知道方程 $y^2=x$ 对于 $x>0$ 定义 $y$ 为 $x$ 的一个或多个可微函数，并不确切了解这些函数具有什么形式，那么，我们仍然能够求 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 吗?

答案是"能". 为了求 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$，只需在方程 $y^2=x$ 的两端对 $x$ 求导数，把 $y=f(x)$ 作为 $x$ 的可微函数：

$$y^2=x \quad \left(链式法则给出\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^2)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)]^2=2f(x)f'(x)=2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2y}$$

这个公式给出我们对两个显式解 $y_1=\sqrt{x}$ 和 $y_2=-\sqrt{x}$ 计算的导数：

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2y_1}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad 及 \quad \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2y_2}=\frac{1}{2(-\sqrt{x})}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

■

**例 2** 求圆 $x^2+y^2=25$ 在点(3，-4)的斜率.

**解** 圆不是 $x$ 的某个函数的图形. 相反，它是两个可微函数 $y_1=\sqrt{25-x^2}$ 和 $y_2=-\sqrt{25-x^2}$ 的图形组合(见图 3.31). 点(3，-4)位于 $y_2$ 的图形上，所以能够通过显式计算求斜率：

$$\left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=3}=-\left.\frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}\right|_{x=3}=-\frac{-6}{2\sqrt{25-9}}=\frac{3}{4}$$

通过隐式方式对给定圆的方程求对 $x$ 的导数，我们更容易求解这个问题：

$$\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dx}(25)$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

在点(3，-4)的斜率是 $-\left.\frac{x}{y}\right|_{(3,-4)}=-\frac{3}{-4}=\frac{3}{4}$.

请注意，公式 $dy/dx=-x/y$ 适用于在圆上有斜率的任何点，这同 $dy_2/dx$ 的斜率公式仅适用于在 $x$ 轴下面的点不一样. 还要注意，导数包含两个变量 $x$ 和 $y$ 而不是只包含自变量 $x$. ■

为了计算其他隐式定义函数的导数，我们采用例 1 和例 2 中的处理步骤：把 $y$ 作为可微的 $x$ 的隐函数，并且按常用的微分法则对函数定义方程的两端求导数.

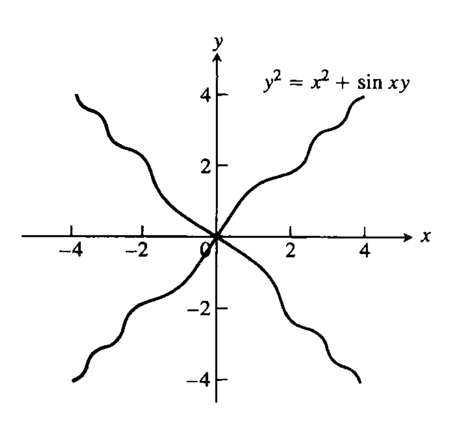



图 3.34 例 3 中 $y^2=x^2+\sin xy$ 的图形(此例说明如何求这条隐式定义曲线上的斜率)

**例 3** 设 $y^2=x^2+\sin xy$ (见图 3.34)，求 $dy/dx$.

**解**

$$y^2=x^2+\sin xy$$

$$\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(\sin xy) \quad \text{(两端对 } x \text{ 求导数)}$$

$$2y\frac{dy}{dx}=2x+(\cos xy)\frac{d}{dx}(xy) \quad \text{(把 } y \text{ 作为 } x \text{ 的函数并且利用链式法则)}$$

$$2y\frac{dy}{dx}=2x+(\cos xy)\left(y+x\frac{dy}{dx}\right) \quad \text{(把 } xy \text{ 作为乘积)}$$

$$2y\frac{dy}{dx}-(\cos xy)\left(x\frac{dy}{dx}\right)=2x+(\cos xy)y \quad \text{(合并含 } dy/dx \text{ 的项)}$$

$$(2y-x\cos xy)\frac{dy}{dx}=2x+y\cos xy \quad \text{(提出因式 } dy/dx\text{)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y\cos xy}{2y-x\cos xy} \quad \text{(用除法求解 } dy/dx\text{)}$$

请注意，$dy/dx$ 的公式适用于隐式定义曲线有斜率的任何地方. 还要注意导数包含两个变量 $x$ 和 $y$ 而不只是自变量 $x$. ■

> **隐式微分法**
>
> (1) 求方程两端对 $x$ 的导数，把 $y$ 作为 $x$ 的可微函数.
>
> (2) 在方程的一端合并含 $dy/dx$ 的项.
>
> (3) 求解 $dy/dx$.

### 3.6.2 透镜、切线和法线

在描述当光线射入透镜时如何改变方向的定律中，两个重要的角是光线同在入射点与透镜表面的垂直线形成的夹角(图 3.35 中的角 $A$ 和角 $B$)．这条垂直线称为镜面在入射点的*法线*．在图 3.35 这样的透镜剖面图中，法线是同剖面图曲线在入射点的切线垂直的直线.

**例 4** 证明点(2,4)位于曲线 $x^3+y^3-9xy=0$ 上．然后求曲线在这一点的切线和法线(见图 3.36).

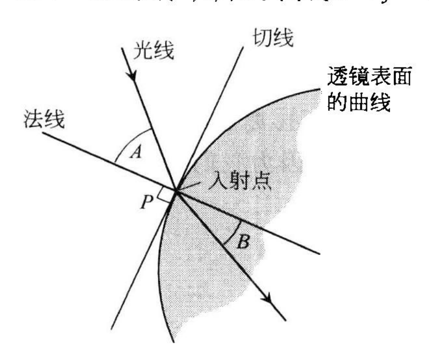



图 3.35 透镜剖面图，表示光线穿过透镜表面时的弯曲(折射)

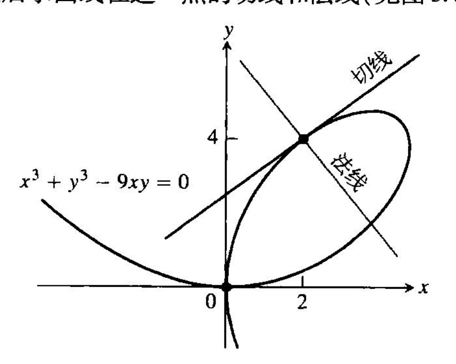



图 3.36 例 4 说明如何求笛卡儿叶形线在点(2,4)的切线方程和法线方程

**解** 点(2,4)位于曲线上是由于它的坐标满足给定曲线的方程：$2^3+4^3-9(2)(4)=8+64-72=0$.

为了求曲线在点(2,4)的斜率，首先用隐式微分法求 $dy/dx$ 的公式：

$$x^3+y^3-9xy=0$$

$$\frac{d}{dx}(x^3)+\frac{d}{dx}(y^3)-\frac{d}{dx}(9xy)=\frac{d}{dx}(0)$$

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-9\left(x\frac{dy}{dx}+y\frac{dx}{dx}\right)=0 \quad (\text{两端对 } x \text{ 求导数})$$

$$(3y^2-9x)\frac{dy}{dx}+3x^2-9y=0 \quad (\text{把 } xy \text{ 作为乘积,把 } y \text{ 作为 } x \text{ 的函数})$$

$$3(y^2-3x)\frac{dy}{dx}=9y-3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3y-x^2}{y^2-3x} \quad (\text{求解 } dy/dx)$$

然后计算在点$(x,y)=(2,4)$的导数：

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,4)}=\left.\frac{3y-x^2}{y^2-3x}\right|_{(2,4)}=\frac{3(4)-2^2}{4^2-3(2)}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

曲线在点(2,4)的切线是通过(2,4)和具有斜率 4/5 的直线：

$$y=4+\frac{4}{5}(x-2)$$

$$y=\frac{4}{5}x+\frac{12}{5}$$

曲线在点(2,4)的法线是在(2,4)同切线垂直的直线，这条法线通过(2,4)和具有斜率 $-5/4$：

$$y=4-\frac{5}{4}(x-2)$$

$$y=-\frac{5}{4}x+\frac{13}{2}$$

■

二次公式使我们能够求解 $y^2-2xy+3x^2=0$ 这样的方程，求出用 $x$ 表示的 $y$. 对于三次方程有一个求三个根的公式，公式同二次公式相似，不过更为复杂. 如果把这个公式用于求解方程 $x^3+y^3=9xy$，求出用 $x$ 表示的 $y$，那么由方程决定的三个函数是

$$y=f(x)=\sqrt[3]{-\frac{x^3}{2}+\sqrt{\frac{x^6}{4}-27x^3}}+\sqrt[3]{-\frac{x^3}{2}-\sqrt{\frac{x^6}{4}-27x^3}}$$

和 $$y=\frac{1}{2}\left[-f(x)\pm\sqrt{-3}\left(\sqrt[3]{-\frac{x^3}{2}+\sqrt{\frac{x^6}{4}-27x^3}}-\sqrt[3]{-\frac{x^3}{2}-\sqrt{\frac{x^6}{4}-27x^3}}\right)\right]$$

利用例 4 中的隐式微分法比直接从上述任何一个公式计算 $dy/dx$ 要简单得多. 对于由更高阶方程定义的曲线，求曲线上的斜率通常需要采用隐式微分法，因为我们无法求出 $y$ 的显式公式.

### 3.6.3 高阶导数

隐式微分法也可以用于求高阶导数. 下面举一个例子.

**例 5** 设 $2x^3-3y^2=8$，求 $d^2y/dx^2$.

**解** 为求出 $y'=dy/dx$，先在方程两端对 $x$ 求导数：

$$\frac{d}{dx}(2x^3-3y^2)=\frac{d}{dx}(8)$$

$$6x^2-6yy'=0 \quad (\text{把 } y \text{ 作为 } x \text{ 的函数})$$

$$y'=\frac{x^2}{y}, \text{当 } y\neq 0 \quad (\text{求解 } y')$$

现在应用商法则求 $y''$:

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{y}\right)=\frac{2xy-x^2y'}{y^2}=\frac{2x}{y}-\frac{x^2}{y^2}\cdot y'$$

最后代入 $y'=x^2/y$，用 $x$ 和 $y$ 表示 $y''$:

$$y''=\frac{2x}{y}-\frac{x^2}{y^2}\left(\frac{x^2}{y}\right)=\frac{2x}{y}-\frac{x^4}{y^3}, \text{当 } y\neq 0$$

■

## 习题 3.6

在习题 1 ~ 14 中，利用隐式微分法求 $dy/dx$.

**1.** $x^2y+xy^2=6$. **2.** $x^3+y^3=18xy$.

**3.** $2xy+y^2=x+y$. **4.** $x^3-xy+y^3=1$.

**5.** $x^2(x-y)^2=x^2-y^2$. **6.** $(3xy+7)^2=6y$.

**7.** $y^2=\frac{x-1}{x+1}$. **8.** $x^2=\frac{x-y}{x+y}$.

**9.** $x=\tan y$. **10.** $xy=\cot(xy)$.

**11.** $e^{2x}=\sin(x+3y)$. **12.** $x+\sin y=xy$.

**13.** $y\sin\left(\frac{1}{y}\right)=1-xy$. **14.** $e^{x^2y}=2x+2y$.

在习题 15 ~ 18 中，求 $dr/d\theta$.

**15.** $\theta^{1/2}+r^{1/2}=1$. **16.** $r-2\sqrt{\theta}=\frac{3}{2}\theta^{2/3}+\frac{4}{3}\theta^{3/4}$.

**17.** $\sin(r\theta)=\frac{1}{2}$. **18.** $\cos r+\cot\theta=e^{r\theta}$.

在习题 19 ~ 26 中，利用隐式微分法求 $dy/dx$，然后求 $d^2y/dx^2$.

**19.** $x^2+y^2=1$. **20.** $x^{2/3}+y^{2/3}=1$.

**21.** $y^2=e^{x^2}+2x$. **22.** $y^2-2x=1-2y$.

**23.** $2\sqrt{y}=x-y$. **24.** $xy+y^2=1$.

**25.** 设 $x^3+y^3=16$，求 $d^2y/dx^2$ 在点 $(2,2)$ 的值.

**26.** 设 $xy+y^2=1$，求 $d^2y/dx^2$ 在点 $(0,-1)$ 的值.

在习题 27 和 28 中，求曲线在给定点的斜率.

**27.** $y^2+x^2=y^4-2x$ 在 $(-2,1)$ 和 $(-2,-1)$.

**28.** $(x^2+y^2)^2=(x-y)^2$ 在 $(1,0)$ 和 $(1,-1)$.

在习题 29 ~ 38 中，证实给定点是在曲线上，并且求曲线在给定点的切线和法线.

**29.** $x^2+xy-y^2=1$，$(2,3)$.

**30.** $x^2+y^2=25$，$(3,-4)$.

**31.** $x^2y^2=9$，$(-1,3)$.

**32.** $y^2-2x-4y-1=0$，$(-2,1)$.

**33.** $6x^2+3xy+2y^2+17y-6=0$，$(-1,0)$.

**34.** $x^2-\sqrt{3}xy+2y^2=5$，$(\sqrt{3},2)$.

35. $2xy + \pi \sin y = 2\pi$，$(1, \pi/2)$.

36. $x \sin 2y = y \cos 2x$，$(\pi/4, \pi/2)$.

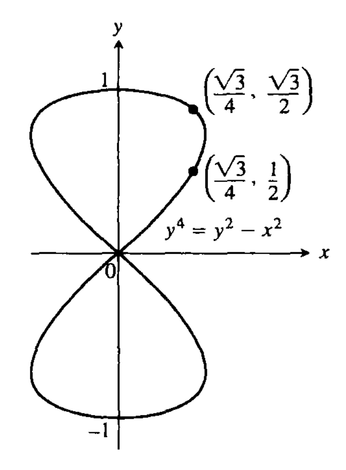
37. $y = 2 \sin(\pi x - y)$，$(1, 0)$.

38. $x^2 \cos^2 y - \sin y = 0$，$(0, \pi)$.

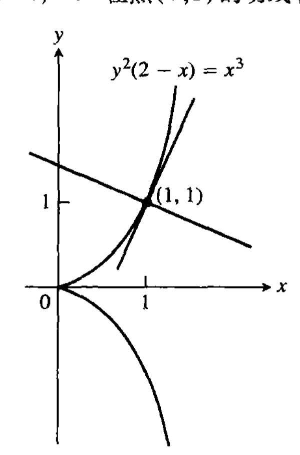
39. **平行切线** 求曲线 $x^2 + xy + y^2 = 7$ 同 $x$ 轴相交的两个点，并且证明曲线在这两点的切线是平行的. 这两条切线的共同斜率是什么？

40. **平行于坐标轴的切线** 求曲线 $x^2 + xy + y^2 = 7$ 上的点，在这些点，(a)切线同 $x$ 轴平行，(b)切线同 $y$ 轴平行. 在第二种情形 $dy/dx$ 无定义，但是 $dx/dy$ 有定义. $dx/dy$ 在这些点的值是什么？

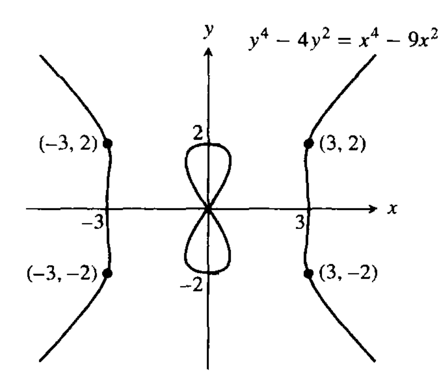
41. **8 字形线** 求曲线 $y^4 = y^2 - x^2$ 在所示两点的斜率.




42. **戴克(公元前 200 年前后)蔓叶线** 求戴克蔓叶线 $y^2(2 - x) = x^3$ 在点(1,1)的切线和法线.




43. **魔鬼曲线(盖布雷耳·克拉默，1750)** 求魔鬼曲线 $y^4 - 4y^2 = x^4 - 9x^2$ 在 4 个指定点的斜率.




44. **笛卡儿叶形线**(参见图 3.33)

(a)求笛卡儿叶形线 $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ 在点(4,2)和(2,4)的斜率.

(b)叶形线在原点之外的什么点有水平切线？

(c)求图 3.33 中点 $A$ 的坐标，叶形线在这个点有垂直切线.

在习题 45 ~ 48 中，假定方程隐式定义 $x$ 和 $y$ 为可微函数 $x = f(t)$，$y = g(t)$，求曲线 $x = f(t)$，$y = g(t)$ 在给定 $t$ 值的斜率.

45. $x^3 + 2t^2 = 9$，$2y^3 - 3t^2 = 4$，$t = 2$.

46. $x = \sqrt{5 - \sqrt{t}}$，$y(t - 1) = \sqrt{t}$，$t = 4$.

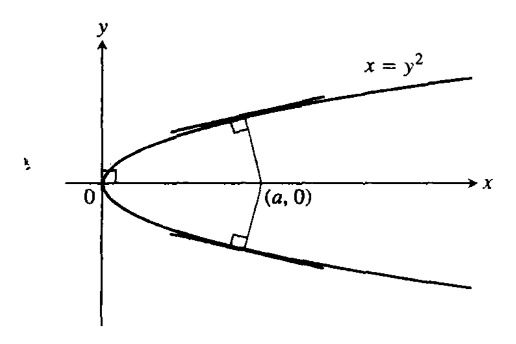
47. $x + 2x^{3/2} = t^2 + t$，$y\sqrt{t + 1} + 2t\sqrt{y} = 4$，$t = 0$.

48. $x \sin t + 2x = t$，$t \sin t - 2t = y$，$t = \pi$.

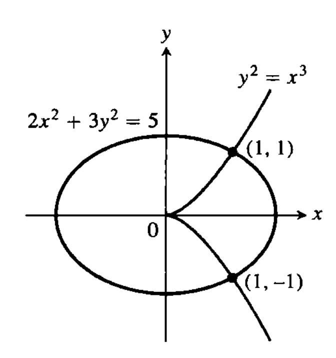
49. **相交法线** 在点(1，1)与曲线 $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$ 正交的直线同曲线在其他什么点相交？

50. **平行于直线的法线** 求曲线 $xy + 2x - y = 0$ 的法线，它们同直线 $2x + y = 0$ 平行.

51. **抛物线的法线** 如图所示，假设可以从点$(a, 0)$画出抛物线 $x = y^2$ 的三条法线，证明 $a$ 必须大于 1/2. 一条法线是 $s$ 轴. 当 $a$ 取什么值时其他两条法线相互垂直？




52. 曲线 $y^2 = x^3$ 和 $2x^2 + 3y^2 = 5$ 在点$(1, \pm 1)$的切线有何特别性质？提出答案的理由.




T 在习题 53 和 54 中，求 $dy/dx$（把 $y$ 作为 $x$ 的可微函数）和 $dx/dy$（把 $x$ 作为 $y$ 的可微函数）. $dy/dx$ 同 $dx/dy$ 之间看起来有什么关系？通过图形对这种关系给出几何解释.

**53.** $xy^3 + x^2y = 6$.

**54.** $x^3 + y^2 = \sin^2 y$.

**计算机探究**

**55.** (a) 给出 $x^4 + 4y^2 = 1$，用两种方法求 $dy/dx$：(1)求解 $y$ 并且用常用方法对所得函数求导数；(2)用隐式微分法. 从两种方法获得同样结果吗？

(b) 从方程 $x^4 + 4y^2 = 1$ 求解 $y$，并且一起画出结果函数的图形，由此得到方程 $x^4 + 4y^2 = 1$ 的完整图形. 然后，在图形显示中加进两个结果函数一阶导数的图形. 从对 $x^4 + 4y^2 = 1$ 图形的观察中，你能够推断导数图形的一般特性吗？通过对导数图形的观察，你能推断 $x^4 + 4y^2 = 1$ 图形的一般特性吗？提出答案的理由.

**56.** (a) 给出 $(x-2)^2 + y^2 = 4$，用两种方法求 $dy/dx$：(1)通过求解 $y$ 并且对所得函数求对 $x$ 的导数；(2)用隐式微分法. 从两种方法获得同样结果吗？

(b) 从方程 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 求解 $y$，并且一起画出结果函数的图形，由此得到方程 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 的完整图形. 然后，在图形中加进两个结果函数一阶导数的图形. 从对 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 图形的观察中，你能推断导数图形的一般特性吗？通过对导数图形的观察，你能推断 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 图形的一般特性吗？提出答案的理由.

在习题 57 ~ 64 中，用一种 CAS（计算机代数系统）执行下列处理步骤：

(a) 利用 CAS 内含的绘图器绘制方程的图形. 检验给出的点满足方程.

(b) 利用隐式微分法，求导数 $dy/dx$ 的公式，并且计算它在给定点 $P$ 的值.

(c) 利用在(b)中得到的斜率，求曲线在点 $P$ 的切线方程. 然后在同一幅图上画出隐式曲线和切线的图形.

**57.** $x^3 - xy + y^3 = 7$，$P(2, 1)$.

**58.** $x^5 + y^3x + yx^2 + y^4 = 4$，$P(1, 1)$.

**59.** $y^2 + y = \dfrac{2+x}{1-x}$，$P(0, 1)$.

**60.** $y^3 + \cos xy = x^2$，$P(1, 0)$.

**61.** $x + \tan\left(\dfrac{y}{x}\right) = 2$，$P\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

**62.** $xy^3 + \tan(x+y) = 1$，$P\left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$.

**63.** $2y^2 + (xy)^{1/3} = x^2 + 2$，$P(1, 1)$.

**64.** $x\sqrt{1+2y} + y = x^2$，$P(1, 0)$.

## 3.7 反函数和对数函数的导数

在 1.5 节我们见过一个函数的反函数如何使那个函数的作用复原或者逆转. 在那里把自然对数函数 $f^{-1}(x) = \ln x$ 定义为自然指数函数 $f(x) = e^x$ 的反函数. 这是数学和自然科学中最重要的成对的函数与反函数之一. 在 3.2 节学习了如何求指数函数的导数. 我们在这一节来学习可微函数的反函数的求导数法则，并且应用这个法则求自然指数函数的导数.

### 3.7.1 可微函数反函数的导数

在 1.5 节例 2 计算出 $f(x) = (1/2)x + 1$ 的反函数为 $f^{-1}(x) = x - 2$. 图 3.37 再次展现这两个函数的图形. 如果求它们的导数，可得

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{d}{dx}(2x - 2) = 2$$

这两个导数互为倒数，所以一条直线的斜率是其反函数直线的斜率的倒数(参见图 3.37).

这个事实并非一种特殊情况. 任何非水平的或者非垂直的直线通过直线 $y=x$ 总是反射成斜率为其倒数的直线. 如果原直线的斜率 $m\neq 0$，反射直线的斜率为 $1/m$.

$f$ 同 $f^{-1}$ 的斜率之间的倒数关系对于其他函数也成立，不过必须仔细比较两个函数在对应点之间的斜率. 如果 $y=f(x)$ 在点 $(a, f(a))$ 的斜率是 $f'(a)$ 且 $f'(a)\neq 0$，那么 $y=f^{-1}(x)$ 在点 $(f(a), a)$ 的斜率是倒数 $1/f'(a)$ (见图 3.38). 若 $b=f(a)$，则

$$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

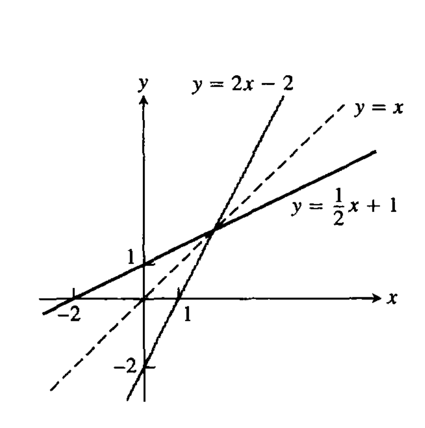



图 3.37 一条直线及其反函数的图形显示对于直线 $y=x$ 的对称性，它们的斜率互为倒数

斜率互为倒数：$(f^{-1})'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$ 或 $(f^{-1})'(b)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$

图 3.38 反函数的图形在对应点具有互为倒数的斜率

如果 $y=f(x)$ 在点 $(a,f(a))$ 有水平切线，那么反函数 $f^{-1}(x)$ 在 $(f(a),a)$ 有垂直切线，而这个无穷大斜率隐含 $f^{-1}$ 在 $f(a)$ 是不可微的. 下面定理 4 给出 $f^{-1}$ 在其定义域是可微的条件，这个定义域就是 $f$ 的值域.

**定理 4 (反函数求导数法则)** 若 $f$ 以区间 $I$ 作为定义域，$f'(x)$ 在 $I$ 上存在且恒不为零，则 $f^{-1}$ 在其定义域内的每个点是可微的. $(f^{-1})'$ 在 $f^{-1}$ 的定义域内一点 $b$ 的值等于 $f'$ 在点 $a=f^{-1}(b)$ 的值的倒数：

$$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

或

$$\left.\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=b}=\frac{1}{\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=f^{-1}(b)}} \tag{1}$$

定理 4 的证明从略. 我们用下面的方法可以看出定理的结论是明显的：当 $f(x)$ 在 $x=a$ 可微时，对 $x$ 改变一个微小的量 $\Delta x$，$y$ 对应的改变近似等于

$$\Delta y\approx f'(a)\Delta x\quad\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\approx f'(a)\right)$$

这意味着 $y$ 在 $x=a$ 时的改变约为 $x$ 的改变的 $f'(a)$ 倍，而 $x$ 在 $y=b$ 时的改变约为 $y$ 的改变的 $1/f'(a)$ 倍. 就是说，$f^{-1}$ 在 $b$ 的导数等于 $f$ 在 $a$ 的导数的倒数是理所当然的.

**例 1** 函数$f(x)=x^2$，$x\geqslant 0$ 及其反函数$f^{-1}(x)=\sqrt{x}$的导数为$f'(x)=2x$ 和$(f^{-1})'(x)=1/(2\sqrt{x})$. 定理 4 预示$f^{-1}(x)$的导数是

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{2(f^{-1}(x))} \qquad (f'(x)=2x \text{ 中用} f^{-1}(x) \text{ 代换 } x) \\ &= \frac{1}{2(\sqrt{x})}\end{aligned}$$

定理 4 给出的导数，同我们用幂法则计算出的平方根函数的导数一致.

让我们在特定点检验定理 4. 选取 $x=2$(数 $a$)，得$f(2)=4$($b$ 值). 定理 4 说明，$f$ 在 2 的导数$f'(2)=4$ 同$f^{-1}$在$f(2)$的导数$(f^{-1})'(4)$是互为倒数的. 就是说

$$(f^{-1})'(4)=\frac{1}{f'(f^{-1}(4))}=\frac{1}{f'(2)}=\left.\frac{1}{2x}\right|_{x=2}=\frac{1}{4}$$

参见图 3.39. ■

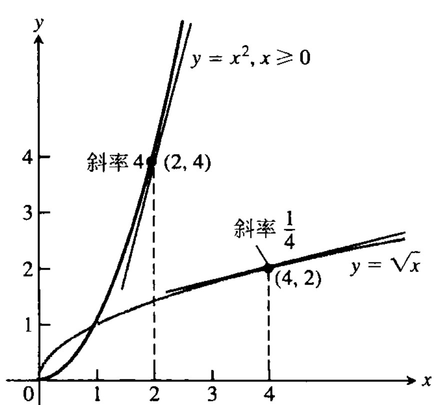



图 3.39 $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$在点(4,2)的导数等于$f(x)=x^2$ 在点(2,4)的导数的倒数(例 1)

公式(1)有时使我们能够在不知道$f^{-1}$的表达式的情况下求出特定的 $\mathrm{d}f^{-1}/\mathrm{d}x$ 的值.

**例 2** 令$f(x)=x^3-2$. 求 $\mathrm{d}f^{-1}/\mathrm{d}x$ 在 $x=6=f(2)$的值，其中不求$f^{-1}(x)$的表达式.

**解**

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2}=\left.3x^2\right|_{x=2}=12$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=f(2)}=\frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2}}=\frac{1}{12} \quad (\text{等式}(1))$$

参见图 3.40. ■

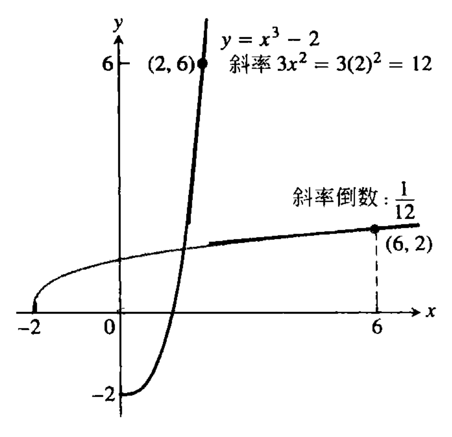



图 3.40 从$f(x)=x^3-2$ 在 $x=2$ 的导数可知$f^{-1}$在 $x=6$ 的导数(例 2)

### 3.7.2 反函数的参数表示

对于任何函数 $y=f(x)$，我们可以用参数方程

$$x=t \quad \text{和} \quad y=f(t)$$

表示或者画图. 交换 $t$ 和$f(t)$，得到反函数的参数方程：

$$x=f(t) \quad \text{和} \quad y=t$$

(参见 3.5 节).

例如，为了在绘图器上一起画出一对一函数$f(x)=x^2(x\geqslant 0)$及其反函数和直线 $y=x(x\geqslant 0)$的图形，使用下面的参数绘图选择：

$f$ 的图形： $x_1=t$， $y_1=t^2$， $t\geqslant 0$

$f^{-1}$的图形： $x_2=t^2$， $y_2=t$

$y=x$ 的图形： $x_3=t$， $y_3=t$

### 3.7.3 自然对数函数的导数

由于已知自然指数函数$f(x)=\mathrm{e}^x$ 是处处可微的函数，可以应用定理 4 求其反函数$f^{-1}(x)=\ln x$ 的导数：

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad (\text{定理}4)\\ &= \frac{1}{e^{f^{-1}(x)}} \quad (f'(u)=e^u)\\ &= \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} \quad (\text{反函数关系})\end{aligned}$$

**另外一种求导数方法** 不直接应用定理 4，我们可以通过隐式微分法求 $y=\ln x$ 的导数，过程如下：

$$\begin{aligned}y &= \ln x, \quad e^y = x \quad (\text{反函数关系})\\ \frac{d}{dx}(e^y) &= \frac{d}{dx}(x) \quad (\text{隐式求导数})\\ e^y\frac{dy}{dx} &= 1 \quad (\text{链式法则})\\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x} \quad (e^y = x)\end{aligned}$$

无论采用哪一种方法求导数，$y=\ln x$ 对 $x$ 的导数为

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}, \quad x>0$$

如果 $u$ 是 $x$ 的可微函数($u>0$)，应用链式法则，得到

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}, \quad u>0 \tag{2}$$

**例 3**

**(a)** $\frac{d}{dx}\ln 2x = \frac{1}{2x}\frac{d}{dx}(2x) = \frac{1}{2x}(2) = \frac{1}{x}.$

**(b)** 公式(2)用 $u=x^2+3$ 代入，得到

$$\frac{d}{dx}\ln(x^2+3) = \frac{1}{x^2+3}\cdot\frac{d}{dx}(x^2+3) = \frac{1}{x^2+3}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+3}$$ ■

请注意例 3(a)中值得重视的结果：函数 $y=\ln 2x$ 与函数 $y=\ln x$ 具有相同的导数. 这对于函数 $y=\ln bx$ 也是正确的($b$ 为任意常数)，只要 $bx>0$：

$$\frac{d}{dx}\ln bx = \frac{1}{bx}\cdot\frac{d}{dx}(bx) = \frac{1}{bx}(b) = \frac{1}{x} \tag{3}$$

若 $x<0$ 和 $b<0$，则 $bx>0$，等式(3)依然成立. 特别当 $x<0$ 和 $b=-1$ 时，得到

$$\frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{x}, \quad x<0$$

由于当 $x>0$ 时 $|x|=x$，当 $x<0$ 时 $|x|=-x$，我们得到下面的重要结果：

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}, \quad x\neq 0 \tag{4}$$

### 3.7.4 $a^u$ 和 $\log_a u$ 的导数

我们从方程 $a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x\ln a}$ 开始：

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln a} = e^{x\ln a}\cdot\frac{d}{dx}(x\ln a) \qquad \left(\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}\right)$$

$$= a^x \ln a$$

若 $a>0$，则

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$$

这个等式说明为什么在微积分中宁愿用指数函数 $e^x$. 若 $a=e$，则 $\ln a=1$，而 $a^x$ 的导数简化为

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \ln e = e^x$$

利用链式法则，对于指数函数的导数我们得到更为一般的形式.

> 若 $a>0$ 且 $u$ 是 $x$ 的可微函数，则 $a^u$ 是 $x$ 的可微函数，且
>
> $$\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a\frac{du}{dx} \tag{5}$$

在 3.2 节中考察过指数函数 $y=a^x$ 在基 $a$ 取不同值时的导数 $f'(0)$. $f'(0)$ 的值是极限 $\lim_{h\to 0}(a^h-1)/h$，它给出 $a^x$ 的图形在点(0，1)穿过 $y$ 轴时的斜率. 现在看出这个斜率的值为

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = \ln a \tag{6}$$

特别当 $a=e$ 时，得到

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = \ln e = 1$$

不过，我们尚未完全证实这个极限实际上存在. 虽然在推导指数函数和对数函数的导数时给出的全部论证是正确的，但是它们都要假定这两个极限存在. 在第 5 章我们将提出指数函数和对数函数理论的另外一种推导方法，证明两个极限的确存在并具有上面导出的值.

为了求$\log_a u$ 对于任意底 $a(a>0，a\neq 1)$时的导数，我们从对数的换底公式(在 1.5 节中复习)开始，并且通过自然对数函数表示$\log_a u$，

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

在两端取导数，得到

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)$$

$$= \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{d}{dx}\ln x \quad (\ln a \text{ 是常数})$$

$$= \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln a}$$

如果 $u$ 是 $x$ 的可微函数且 $u>0$，由链式法则得到下述公式：

> 对于 $a>0$ 和 $a\neq 1$，
>
> $$\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{1}{u\ln a}\frac{du}{dx} \tag{7}$$

### 3.7.5 对数微分法

假定正值函数是由包含积、商和幂的公式给出的，如果在求导数前对函数公式的两端取自然对数，那么通常能够更快地求出函数的导数. 这样使我们能够在求导数前利用对数律简化公式. 这种方法称为对数微分法，在下面的例子中解释.

**例 4** 设
$$y=\frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1},\quad x>1$$
求 $dy/dx$.

**解** 在函数公式两端取自然对数，并且利用 1.5 节中讨论的对数的代数性质简化结果：

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln\frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}\\ &= \ln\left((x^2+1)(x+3)^{1/2}\right)-\ln(x-1) \quad (\text{定律 }2)\\ &= \ln(x^2+1)+\ln(x+3)^{1/2}-\ln(x-1) \quad (\text{定律 }1)\\ &= \ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\ln(x+3)-\ln(x-1) \quad (\text{定律 }3)\end{aligned}$$

然后在两端求对 $x$ 的导数，并且对左端应用公式(2)：

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-1}$$

接着求解 $dy/dx$：

$$\frac{dy}{dx}=y\left(\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{2x+6}-\frac{1}{x-1}\right)$$

最后代换 $y$：
$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}\left(\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{2x+6}-\frac{1}{x-1}\right)$$ ■

### 3.7.6 幂法则(一般形式)的证明

到现在，对于任何 $x>0$ 和任意实数 $n$，我们可以把 $x^n$ 定义为 $x^n=e^{n\ln x}$. 因此，对等式 $\ln x^n=n\ln x$ 中的 $n$ 不再要求是有理数——它可以取任何固定的数，只要 $x>0$：

$$\ln x^n=\ln(e^{n\ln x})=n\ln x \quad (\ln e^u=u,\text{任意 }u)$$

把定律 $a^x/a^y=a^{x-y}$ 和定义 $x^n=e^{n\ln x}$ 结合起来，使我们能够对于任意实数 $n$ 建立求导数的幂法则. 求 $x^n$ 对 $x$ 的导数，得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^n &= \frac{d}{dx}e^{n\ln x} \quad (x^n\text{ 的定义}, x>0)\\ &= e^{n\ln x}\cdot\frac{d}{dx}(n\ln x) \quad (\text{对 }e^u\text{ 的链式法则})\\ &= x^n\cdot\frac{n}{x} \quad (\text{再次用定义})\\ &= nx^{n-1}\end{aligned}$$

简单地说，只要 $x>0$，

$$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$$

若 $y=x^n$，$y'$ 和 $x^{n-1}$ 对于 $x<0$ 都存在，则

$$\ln|y|=\ln|x|^n=n\ln|x|$$

利用对数微分法和公式(4)，我们有

$$\frac{y'}{y}=\frac{n}{x}$$

求解导数，
$$y' = n\frac{y}{x} = n\frac{x^n}{x} = nx^{n-1}.$$
（请注意，在这种情况下需要假定导数 $y'$ 存在.）

也可以直接从导数的定义证明，当 $x=0$ 和 $n\neq 0$ 时，$x^n$ 的导数等于 0. 这样就完成对于所有 $x$ 值求导数的幂法则（一般形式）的证明. ■

**例 5** 求 $f(x)=x^x\ (x>0)$ 的导数.

**解** 注意 $f(x)=x^x=e^{x\ln x}$，所以微分法给出
$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx}(e^{x\ln x})\\ &= e^{x\ln x}\frac{d}{dx}(x\ln x) \quad \left(\frac{d}{dx}e^u, u = x\ln x\right)\\ &= e^{x\ln x}\left(\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1) \quad (x>0)\end{aligned}$$
■

### 3.7.7 数 e 的极限表示

在 1.4 节我们把数 e 定义为这样一个基数值，它的指数函数 $y=a^x$ 在点 $(0,1)$ 穿过 $y$ 轴时的斜率为 1. 因此，e 是满足公式
$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = \ln e = 1 \quad (\text{由公式(6)斜率等于}\ln e)$$
的常数. 我们也这样说，e 可以按 $\lim\limits_{y\to\infty}(1+1/y)^y$ 计算，或者代入 $y=1/x$ 按 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$ 计算. 下面来证明这个结果.

> **定理 5（数 e 是一个极限）** 数 e 可以按极限
> $$e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$$
> 计算.

**证明** 若 $f(x)=\ln x$，则 $f'(x)=1/x$，所以 $f'(1)=1$. 但是，由导数定义，
$$\begin{aligned}f'(1) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) \quad (\ln 1 = 0)\\ &= \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = \ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right] \quad (\ln\text{ 是连续函数,第 2 章定理 11})\end{aligned}$$
由于 $f'(1)=1$，故有
$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right] = 1$$
所以，取两端作为 e 的幂，得到
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$$
■

当取 $x$ 为很小的值时，定理 5 中的逼近极限给出 e 的近似值. 它精确到 15 位小数的值是 $e\approx 2.718\,281\,828\,459\,045$.

### 习题 3.7

在习题 1 ~ 4 中：

**(a)** 求 $f^{-1}(x)$.

**(b)** 一起画出 $f$ 和 $f^{-1}$ 的图形.

**(c)** 求 $df/dx$ 在 $x=a$ 的值及 $df^{-1}/dx$ 在 $x=f(a)$ 的值，由此证明在这两点 $df^{-1}/dx = 1/(df/dx)$.

1. $f(x)=2x+3,\ a=-1$.
2. $f(x)=(1/5)x+7,\ a=-1$.
3. $f(x)=5-4x,\ a=1/2$.
4. $f(x)=2x^2,\ x\geqslant 0,\ a=5$.
5. (a) 证明$f(x)=x^3$ 和 $g(x)=\sqrt[3]{x}$互为反函数.
   (b) 画出$f$和$g$在一个足够大的$x$区间上的图形，证明两个图形在点$(1,1)$和$(-1,-1)$相交. 图形务必显示对直线$y=x$要求的对称性.
   (c) 求$f$和$g$的图形在点$(1,1)$和$(-1,-1)$的切线(共4条切线)的斜率.
   (d) 什么直线同这两条曲线在原点相切?
6. (a) 证明 $h(x)=x^3/4$ 和 $k(x)=(4x)^{1/3}$ 互为反函数.
   (b) 画出$h$和$k$在一个足够大的$x$区间上的图形，证明两个图形在点$(2,2)$和$(-2,-2)$相交. 图形务必显示对直线$y=x$要求的对称性.
   (c) 求$h$和$k$的图形在点$(2,2)$和$(-2,-2)$的切线的斜率.
   (d) 什么直线同这两条曲线在原点相切?
7. 令$f(x)=x^3-3x^2-1,\ x\geqslant 2$. 求 $df^{-1}/dx$ 在点 $x=-1=f(3)$的值.
8. 令$f(x)=x^2-4x-5,\ x>2$. 求 $df^{-1}/dx$ 在点 $x=0=f(5)$的值.
9. 假定可微函数$y=f(x)$具有反函数，并且$f$的图形通过点$(2,4)$以及在这一点的斜率为$1/3$. 求$df^{-1}/dx$在$x=4$的值.
10. 假定可微函数$y=g(x)$具有反函数，并且$g$的图形通过原点以及在原点的斜率为2. 求$g^{-1}$的图形在原点的斜率.

在习题 11 ~ 40 中，求 $y$ 对 $x$，$t$ 或 $\theta$ 的相应导数.

11. $y=\ln 3x$.
12. $y=\ln kx$，$k$为常数.
13. $y=\ln (t^2)$.
14. $y=\ln (t^{3/2})$.
15. $y=\ln \frac{3}{x}$.
16. $y=\ln \frac{10}{x}$.
17. $y=\ln (\theta+1)$.
18. $y=\ln (2\theta+2)$.
19. $y=\ln x^3$.
20. $y=(\ln x)^3$.
21. $y=t(\ln t)^2$.
22. $y=t\sqrt{\ln t}$.
23. $y=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{x^4}{16}$.
24. $y=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}$.
25. $y=\frac{\ln t}{t}$.
26. $y=\frac{1+\ln t}{t}$.
27. $y=\frac{\ln x}{1+\ln x}$.
28. $y=\frac{x\ln x}{1+\ln x}$.
29. $y=\ln (\ln x)$.
30. $y=\ln (\ln (\ln x))$.
31. $y=\theta(\sin (\ln \theta)+\cos (\ln \theta))$.
32. $y=\ln (\sec \theta+\tan \theta)$.
33. $y=\ln \frac{1}{x\sqrt{x+1}}$.
34. $y=\frac{1}{2}\ln \frac{1+x}{1-x}$.
35. $y=\frac{1+\ln t}{1-\ln t}$.
36. $y=\sqrt{\ln \sqrt{t}}$.
37. $y=\ln (\sec (\ln \theta))$.
38. $y=\ln \left(\frac{\sqrt{\sin \theta\cos \theta}}{1+2\ln \theta}\right)$.
39. $y=\ln \left(\frac{(x^2+1)^5}{\sqrt{1-x}}\right)$.
40. $y=\ln \sqrt{\frac{(x+1)^5}{(x+2)^{20}}}$.

在习题 41 ~ 54 中，用对数微分法求 $y$ 对给定自变量的导数.

41. $y=\sqrt{x(x+1)}$.
42. $y=\sqrt{(x^2+1)(x-1)^2}$.
43. $y=\sqrt{\frac{t}{t+1}}$.
44. $y=\sqrt{\frac{1}{t(t+1)}}$.
45. $y=\sqrt{\theta+3}\sin \theta$.
46. $y=(\tan \theta)\sqrt{2\theta+1}$.
47. $y=t(t+1)(t+2)$.
48. $y=\frac{1}{t(t+1)(t+2)}$.
49. $y=\frac{\theta+5}{\theta\cos \theta}$.
50. $y=\frac{\theta\sin \theta}{\sqrt{\sec \theta}}$.
51. $y=\frac{x\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^{2/3}}$.
52. $y=\sqrt{\frac{(x+1)^{10}}{(2x+1)^5}}$.
53. $y=\sqrt[3]{\frac{x(x-2)}{x^2+1}}$.
54. $y=\sqrt[3]{\frac{x(x+1)(x-2)}{(x^2+1)(2x+3)}}$.

在习题 55 ~ 62 中，求 $y$ 对 $x$，$t$ 或 $\theta$ 的相应导数.

55. $y=\ln (\cos^2\theta)$.
56. $y=\ln (3\theta e^{-\theta})$.
57. $y=\ln (3te^{-t})$.
58. $y=\ln (2e^{-t}\sin t)$.
59. $y=\ln \left(\frac{e^\theta}{1+e^\theta}\right)$.
60. $y=\ln \left(\frac{\sqrt{\theta}}{1+\sqrt{\theta}}\right)$.
61. $y=e^{(\cos t+\ln t)}$.
62. $y=e^{\sin t}(\ln t^2+1)$.

在习题 63 ~ 66 中，求 $dy/dx$.

63. $\ln y=e^y\sin x$.
64. $\ln xy=e^{x+y}$.
65. $x^y=y^x$.
66. $\tan y=e^x+\ln x$.

在习题 67 ~ 88 中，求 $y$ 对给定自变量的导数.

67. $y=2^x$.
68. $y=3^{-x}$.
69. $y=5^{\sqrt{s}}$.
70. $y=2^{(s^2)}$.
71. $y=x^\pi$.
72. $y=t^{1-e}$.
73. $y=\log_2 5\theta$.
74. $y=\log_3(1+\theta\ln 3)$.
75. $y=\log_4 x+\log_4 x^2$.
76. $y=\log_{25}e^x-\log_5\sqrt{x}$.
77. $y=\log_2 r\cdot\log_4 r$.
78. $y=\log_3 r\cdot\log_9 r$.
79. $y=\log_3\left(\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\ln 3}\right)$.
80. $y=\log_5\sqrt{\left(\frac{7x}{3x+2}\right)^{\ln 5}}$.
81. $y=\theta\sin(\log_7\theta)$.
82. $y=\log_7\left(\frac{\sin \theta\cos \theta}{e^\theta 2^\theta}\right)$.

**83.** $y=\log_5 e^x$.

**84.** $y=\log_2\left(\frac{x^2e^2}{2\sqrt{x+1}}\right)$.

**85.** $y=3^{\log_2 t}$.

**86.** $y=3\log_8(\log_2 t)$.

**87.** $y=\log_2(8t^{\ln 2})$.

**88.** $y=t\log_3(e^{(\sin t)(\ln 3)})$.

在习题 89 ~ 96 中，用对数微分法求 $y$ 对给定自变量的导数.

**89.** $y=(x+1)^x$.

**90.** $y=x^{(x+1)}$.

**91.** $y=(\sqrt{t})^t$.

**92.** $y=t^{\sqrt{t}}$.

**93.** $y=(\sin x)^x$.

**94.** $y=x^{\sin x}$.

**95.** $y=x^{\ln x}$.

**96.** $y=(\ln x)^{\ln x}$.

**97.** 如果把 $f^{-1}(x)$ 记为 $g(x)$，公式(1)可以写成

$$g'(f(a))=\frac{1}{f'(a)} \quad 或 \quad g'(f(a))\cdot f'(a)=1$$

如果再把 $a$ 记为 $x$，得到

$$g'(f(x))\cdot f'(x)=1$$

上面这个公式可以使你记起链式法则，而且确实有一种联系.

假定 $f$ 和 $g$ 是互为反函数的可微函数，所以 $(g\circ f)(x)=x$. 求这个等式两端对 $x$ 的导数，利用链式法则把 $(g\circ f)'(x)$ 表示成 $g$ 和 $f$ 的导数的积. 由此得到什么结果?（这样做并不是对定理 4 的证明，因为我们在这里假定了定理的结论，即 $g=f^{-1}$ 是可微的.）

**98.** 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$ 对于任何 $x>0$ 成立.

**99.** 如果 $y=A\sin(\ln x)+B\cos(\ln x)$，其中 $A$，$B$ 是常数，证明

$$x^2y''+xy'+y=0$$

**100.** 应用数学归纳法，证明

$$\frac{d^n}{dx^n}\ln x=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

**计算机探究**

在习题 101 ~ 108 中，考察某些函数及其反函数，以及它们的导数和切线在指定点的近似表示. 用你的 CAS(计算机代数系统)执行下列处理步骤：

(**a**) 绘制函数 $y=f(x)$ 及其导数在给定区间上的图形. 解释从何得知 $f$ 在区间上是一对一的.

(**b**) 解方程 $y=f(x)$ 求出 $x$ 作为 $y$ 的函数，并用 $g$ 命名所得的反函数.

(**c**) 求 $f$ 在指定点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线方程.

(**d**) 求 $g$ 在点 $(f(x_0), x_0)$ 的切线方程，这个点在指定点跨越直线 $y=x$(恒等函数的图形)的对称位置上. 应用定理 4 求这条切线的斜率.

(**e**) 绘制函数 $f$ 和 $g$、恒等函数、两条切线以及连接点 $(x_0, f(x_0))$ 和 $(f(x_0), x_0)$ 的线段的图形. 讨论你所见到的跨越主对角线的对称性.

**101.** $y=\sqrt{3x-2}$，$\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 4$，$x_0=3$.

**102.** $y=\frac{3x+2}{2x-11}$，$-2\leqslant x\leqslant 2$，$x_0=1/2$.

**103.** $y=\frac{4x}{x^2+1}$，$-1\leqslant x\leqslant 1$，$x_0=1/2$.

**104.** $y=\frac{x^3}{x^2+1}$，$-1\leqslant x\leqslant 1$，$x_0=1/2$.

**105.** $y=x^3-3x^2-1$，$2\leqslant x\leqslant 5$，$x_0=\frac{27}{10}$.

**106.** $y=2-x-x^3$，$-2\leqslant x\leqslant 2$，$x_0=\frac{3}{2}$.

**107.** $y=e^x$，$-3\leqslant x\leqslant 5$，$x_0=1$.

**108.** $y=\sin x$，$-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，$x_0=1$.

在习题 109 和 110 中，重复上述步骤求解由区间上给定方程隐式定义的函数 $y=f(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$.

**109.** $y^{1/3}-1=(x+2)^3$，$-5\leqslant x\leqslant 5$，$x_0=-3/2$.

**110.** $\cos y=x^{1/5}$，$0\leqslant x\leqslant 1$，$x_0=1/2$.

## 3.8 反三角函数

在 1.5 节介绍了 6 个基本反三角函数，但是把重点放在反正弦函数和反余弦函数上. 这一节完成对所有 6 个反三角函数的讨论，包括对它们如何定义、作图和求值，以及如何计算它们的导数.

### 3.8.1 tan $x$，cot $x$，sec $x$ 和 csc $x$ 的反函数

所有 6 个基本反三角函数的图形显示在图 3.41 中. 这些图形是由带限制的三角函数的图形(在 1.5 节中讨论)通过直线 $y=x$ 的反射得到. 让我们对反正切、反余切、反正割和反余割函数作更仔细的考察.

$x$ 的反正切是一个弧度角，它的正切为 $x$. $x$ 的反余切是一个弧度角，它的余切为 $x$.

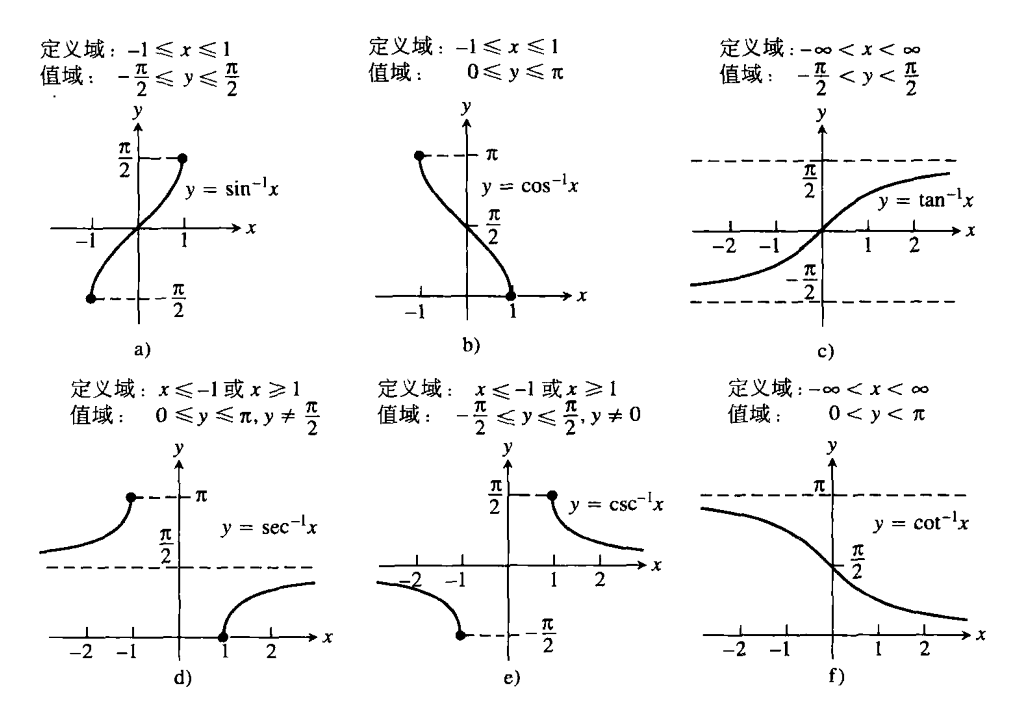



图 3.41　6 个基本反三角函数的图形

**定义**

**$y=\tan^{-1}x$** 是区间$(-\pi/2,\ \pi/2)$中的数，对于它，$\tan y=x$.

**$y=\cot^{-1}x$** 是区间$(0,\ \pi)$中的数，对于它，$\cot y=x$.

我们在讨论中使用开区间，避免其中出现正切函数和余切函数中无定义的值.

$y=\tan^{-1}x$ 的图形是对原点对称的，因为它是 $x=\tan y$ 图形的一支，这个图形是对原点对称的（见图 3.41c）. 在代数上这意味着

$$\tan^{-1}(-x)=-\tan^{-1}x$$

即反正切是奇函数. $y=\cot^{-1}x$ 的图形不存在这样的对称性（见图 3.41f）. 请注意，从图 3.41c 看出反正切函数的图形有两条水平渐近线，一条是 $y=\pi/2$，另一条是 $y=-\pi/2$.

$\sec x$ 和 $\csc x$ 的限制形式的反函数是图 3.41d 和图 3.41e 中画出的函数.

**注意**　关于如何对 $x$ 的负值定义$\sec^{-1}x$ 没有一般的约定. 我们对于 $x<0$ 选择$\sec^{-1}x$ 为 $\pi/2$ 和 $\pi$ 之间的第二象限的角. 这种选择使得$\sec^{-1}x=\cos^{-1}(1/x)$. 这样也使$\sec^{-1}x$ 在它的定义域的每个区间上是增函数. 某些数学表对于 $x<0$ 选择$\sec^{-1}x$ 为$[-\pi,-\pi/2)$内的

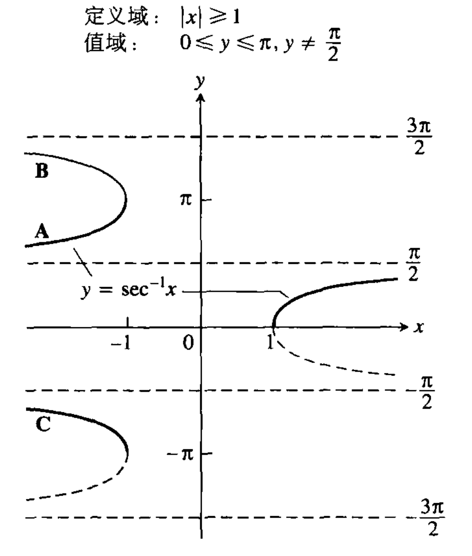
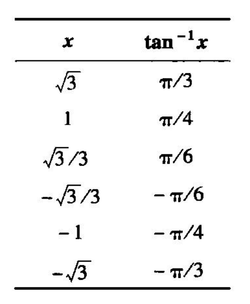



图 3.42　对于 $y=\sec^{-1}x$ 的左支存在几种逻辑上的选择，许多计算器选择 A（用这种选择，$\sec^{-1}x=\cos^{-1}(1/x)$，这是一个有用的恒等式）

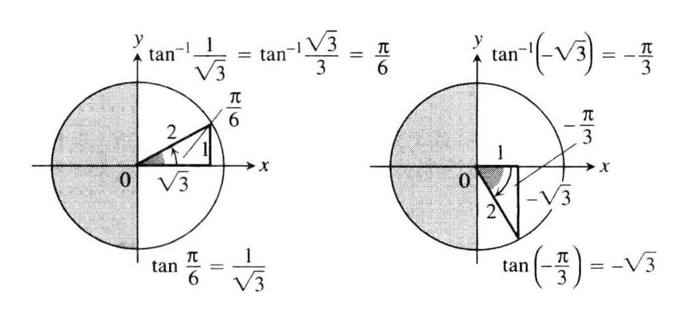
角，某些教科书选择$\sec^{-1}x$为$[\pi, 3\pi/2)$内的角(见图3.42)．这些选择简化导数的公式(我们所用的公式需要绝对值符号)，但是在计算上不再满足恒等式$\sec^{-1}x=\cos^{-1}(1/x)$．从这个恒等式，应用1.5节中的公式(5)可以导出恒等式

$$\sec^{-1}x=\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \tag{1}$$

**例 1** 附图显示$\tan^{-1}x$的两个值.



| $x$ | $\tan^{-1}x$ |
|---|---|
| $\sqrt{3}$ | $\pi/3$ |
| $1$ | $\pi/4$ |
| $\sqrt{3}/3$ | $\pi/6$ |
| $-\sqrt{3}/3$ | $-\pi/6$ |
| $-1$ | $-\pi/4$ |
| $-\sqrt{3}$ | $-\pi/3$ |




这两个角分别在第一象限和第四象限，因为$\tan^{-1}x$的值域是$(-\pi/2, \pi/2)$. ■

### 3.8.2 $y=\sin^{-1}u$的导数

我们知道函数$x=\sin y$在区间$-\pi/2<y<\pi/2$内是可微的，它的导数余弦函数在区间上取正值．因此，3.7节中的定理4保证反函数$y=\sin^{-1}x$在整个区间$-1<x<1$是可微的．我们不能期望它在$x=1$或者$x=-1$可微，因为它的图形在这两点的切线是垂直线(参见图3.43).

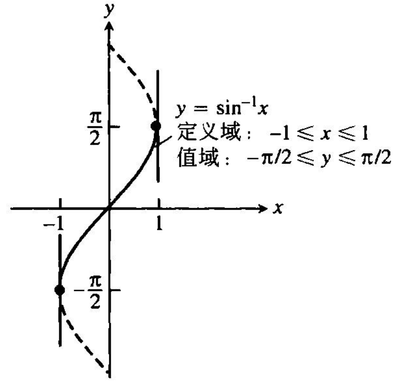



图3.43 $y=\sin^{-1}x$的图形在$x=-1$和$x=1$具有垂直切线

把定理4用于$f(x)=\sin x$和$f^{-1}(x)=\sin^{-1}x$，以此求$y=\sin^{-1}x$的导数：

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(x)&=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))} && (\text{定理}4)\\&=\frac{1}{\cos(\sin^{-1}x)} && (f'(u)=\cos u)\\&=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\sin^{-1}x)}} && (\cos u=\sqrt{1-\sin^2u})\\&=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. && (\sin(\sin^{-1}x)=x)\end{aligned}$$

如果$u$是$x$的可微函数且$|u|<1$，应用链式法则得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin^{-1}u)=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\qquad |u|<1$$

**例 2** 求$\sin^{-1}x^2$的导数.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin^{-1}x^2)=\frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2)=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$ ■

### 3.8.3 $y=\tan^{-1}u$的导数

把定理4用于$f(x)=\tan x$和$f^{-1}(x)=\tan^{-1}x$，以此求$y=\tan^{-1}x$的导数．由于$\tan x$的导数在区间$-\pi/2<x<\pi/2$内取正值，所以可以应用定理4：

$$
\begin{aligned}
(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} && \text{(定理4)} \\
&= \frac{1}{\sec^2(\tan^{-1}x)} && (f'(u) = \sec^2 u) \\
&= \frac{1}{1+\tan^2(\tan^{-1}x)} && (\sec^2 u = 1 + \tan^2 u) \\
&= \frac{1}{1+x^2} && (\tan(\tan^{-1}x) = x)
\end{aligned}
$$

这个导数对于所有实数有定义. 如果 $u$ 是 $x$ 的可微函数，应用链式法则得到:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan^{-1}u) = \frac{1}{1+u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

### 3.8.4　$y = \sec^{-1}u$ 的导数

由于 $\sec x$ 的导数在区间 $0<x<\pi/2$ 和 $\pi/2<x<\pi$ 内取正值，定理4表明反函数 $y=\sec^{-1}x$ 是可微的. 我们不直接应用定理4的公式而采用隐式微分法和链式法则求 $y=\sec^{-1}x$，$|x|>1$ 的导数如下：

$$
\begin{aligned}
y &= \sec^{-1}x \\
\sec y &= x && \text{(反函数关系)} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x && \text{(两端求导数)} \\
\sec y \tan y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 1 && \text{(链式法则)} \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{\sec y \tan y} && \text{(由于 } |x|>1, y \text{ 位于 } (0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi) \text{ 内且 } \sec y\tan y \neq 0)
\end{aligned}
$$

为了用 $x$ 表示结果，利用关系式

$$\sec y = x \quad \text{及} \quad \tan y = \pm\sqrt{\sec^2 y - 1} = \pm\sqrt{x^2-1}$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

我们对于式中的 ± 号能够进行处理吗？从图 3.44 一看便知，$y=\sec^{-1}x$ 图形的斜率恒为正值. 因此，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^{-1}x = \begin{cases} +\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, & \text{如果 } x>1 \\ -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, & \text{如果 } x<-1 \end{cases}$$

图 3.44　曲线 $y=\sec^{-1}x$ 对于 $x<-1$ 和 $x>1$ 的斜率为正值

用绝对值符号，可以消除符号上的“±”二重性，把导数写成单一的表达式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^{-1}x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

如果 $u$ 是 $x$ 的可微函数且 $|u|<1$，我们有公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec^{-1}u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \qquad |u|>1$$

**例 3** 求 $\sec^{-1}(5x^4)$ 的导数.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sec^{-1}(5x^4) &= \frac{1}{|5x^4|\sqrt{(5x^4)^2-1}}\frac{d}{dx}(5x^4)\\ &= \frac{1}{5x^4\sqrt{25x^8-1}}(20x^3) \quad (5x^4>1>0)\\ &= \frac{4}{x\sqrt{25x^8-1}}.\end{aligned}$$

■

### 3.8.5 其他 3 个反三角函数的导数

对于其他 3 个反三角函数——反余弦、反余切和反余割——可以用同样方法求它们的导数，但是由于存在下列恒等式，我们有更为简便的求导数方法.

**反三角函数-反三角余函数恒等式**

$$\cos^{-1}x = \pi/2 - \sin^{-1}x$$
$$\cot^{-1}x = \pi/2 - \tan^{-1}x$$
$$\csc^{-1}x = \pi/2 - \sec^{-1}x$$

我们在 1.5 节公式(5)中见过这三个恒等式中的第一个式子. 其余两个恒等式用同样的方法导出. 由这些恒等式容易推得，反三角余函数的导数是对应的反三角函数导数的负值. 例如，$\cos^{-1}x$ 的导数计算如下：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}x\right) \quad (\text{恒等式})\\ &= -\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)\\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{反正弦函数的导数})\end{aligned}$$

**表 3.1 反三角函数的导数**

| | |
|---|---|
| (1) $\frac{d(\sin^{-1}u)}{dx}=\frac{du/dx}{\sqrt{1-u^2}}$, $\quad |u|<1$ | (2) $\frac{d(\cos^{-1}u)}{dx}=-\frac{du/dx}{\sqrt{1-u^2}}$, $\quad |u|<1$ |
| (3) $\frac{d(\tan^{-1}u)}{dx}=\frac{du/dx}{1+u^2}$ | (4) $\frac{d(\cot^{-1}u)}{dx}=-\frac{du/dx}{1+u^2}$ |
| (5) $\frac{d(\sec^{-1}u)}{dx}=\frac{du/dx}{|u|\sqrt{u^2-1}}$, $\quad |u|>1$ | (6) $\frac{d(\csc^{-1}u)}{dx}=-\frac{du/dx}{|u|\sqrt{u^2-1}}$, $\quad |u|>1$ |

## 习题 3.8

在习题 1 ~ 12 中，利用同例 1 相似的参考三角形求角.

**1.** (a) $\tan^{-1}1$. (b) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$. (c) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

**2.** (a) $\tan^{-1}(-1)$. (b) $\tan^{-1}\sqrt{3}$. (c) $\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$.

**3.** (a) $\sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$. (b) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(c) $\sin^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$.

**4.** (a) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$. (b) $\sin^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

(c) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

**5.** (a) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$. (b) $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

(c) $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

**6.** (a) $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$. (b) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(c) $\cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$.

7. (a) $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$.　(b) $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.　(c) $\sec^{-1}(-2)$.

8. (a) $\sec^{-1}\sqrt{2}$.　(b) $\sec^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\right)$. (c) $\sec^{-1}2$.

9. (a) $\csc^{-1}\sqrt{2}$.　(b) $\csc^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\right)$. (c) $\csc^{-1}2$.

10. (a) $\csc^{-1}(-\sqrt{2})$. (b) $\csc^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.
(c) $\csc^{-1}(-2)$.

11. (a) $\cot^{-1}(-1)$. (b) $\cot^{-1}(\sqrt{3})$.
(c) $\cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$.

12. (a) $\cot^{-1}(1)$.　(b) $\cot^{-1}(-\sqrt{3})$.
(c) $\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

在习题 13 ~ 20 中，求极限.（如果存在疑问，请看函数的图形.）

13. $\lim\limits_{x\to 1^-} \sin^{-1}x$.　　14. $\lim\limits_{x\to -1^+} \cos^{-1}x$.

15. $\lim\limits_{x\to \infty} \tan^{-1}x$.　　16. $\lim\limits_{x\to -\infty} \tan^{-1}x$.

17. $\lim\limits_{x\to \infty} \sec^{-1}x$.　　18. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sec^{-1}x$.

19. $\lim\limits_{x\to \infty} \csc^{-1}x$.　　20. $\lim\limits_{x\to -\infty} \csc^{-1}x$.

在习题 21 ~ 42 中，求 $y$ 对相应变量的导数.

21. $y=\cos^{-1}(x^2)$.　　22. $y=\cos^{-1}(1/x)$.

23. $y=\sin^{-1}\sqrt{2}t$.　　24. $y=\sin^{-1}(1-t)$.

25. $y=\sec^{-1}(2s+1)$.　　26. $y=\sec^{-1}5s$.

27. $y=\csc^{-1}(x^2+1)$，$x>0$.

28. $y=\csc^{-1}\frac{x}{2}$.　　29. $y=\sec^{-1}\frac{1}{t}$，$0<t<1$.

30. $y=\sin^{-1}\frac{3}{t^2}$.　　31. $y=\cot^{-1}\sqrt{t}$.

32. $y=\cot^{-1}\sqrt{t-1}$.　　33. $y=\ln(\tan^{-1}x)$.

34. $y=\tan^{-1}(\ln x)$.　　35. $y=\csc^{-1}(e^t)$.

36. $y=\cos^{-1}(e^{-t})$.　　37. $y=s\sqrt{1-s^2}+\cos^{-1}s$.

38. $y=\sqrt{s^2-1}-\sec^{-1}s$.

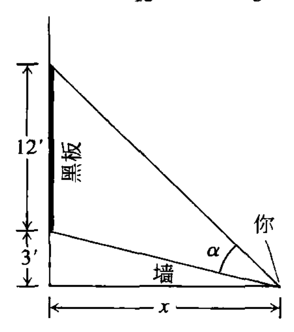
39. $y=\tan^{-1}\sqrt{x^2-1}+\csc^{-1}x$，$x>1$.

40. $y=\cot^{-1}\frac{1}{x}-\tan^{-1}x$.　41. $y=x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}$.

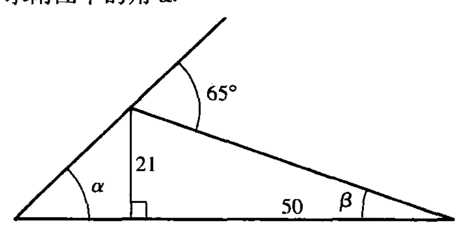
42. $y=\ln(x^2+4)-x\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$.

43. 如附图所示，假定你坐在一间教室的墙边注视着室内前方的黑板. 黑板长 12 英尺，一端距离你靠近的墙 3 英尺. 如果你离开前方的墙 $x$ 英尺，证明你的视角为

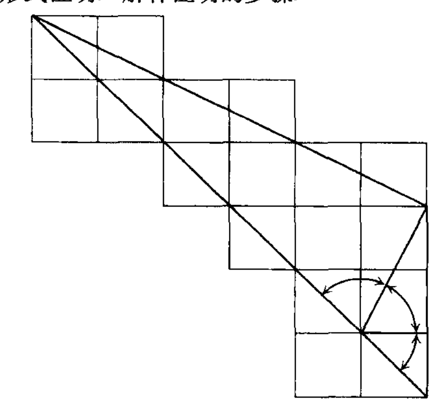
$$\alpha = \cot^{-1}\frac{x}{15}-\cot^{-1}\frac{x}{3}$$




44. 求附图中的角 $\alpha$.

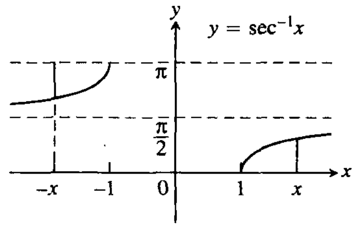



45. 附图表示 $\tan^{-1}1+\tan^{-1}2+\tan^{-1}3=\pi$ 的一种非形式证明. 解释证明的步骤.



46. **恒等式 $\sec^{-1}(-x)=\pi-\sec^{-1}x$ 的两种推导方法**

(a)（几何方法）附图显示 $\sec^{-1}(-x)=\pi-\sec^{-1}x$ 的一种图形证明方法. 考虑你能否给出证明的步骤.




(b)（代数方法）结合正文中下面两个公式推导恒等式 $\sec^{-1}(-x)=\pi-\sec^{-1}x$：

$$\cos^{-1}(-x)=\pi-\cos^{-1}x \quad (1.5\text{ 节公式}(4))$$
$$\sec^{-1}x=\cos^{-1}(1/x) \quad (\text{公式}(1))$$

**47. 恒等式$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\pi/2$** 图形 1.64 建立这个对于$0<x<1$的恒等式. 为了在区间$[-1,1]$的其余部分确立这个恒等式，通过直接计算证实它对于$x=0$，1 和$-1$成立. 然后，对于$(-1,0)$中的值令$x=-a$，$a>0$，并把公式(1)和1.5节公式(4)应用于和式$\sin^{-1}(-a)+\cos^{-1}(-a)$.

**48.** 证明和式$\tan^{-1}x+\tan^{-1}(1/x)$为常数.

在习题 49 ~ 52 中，哪些表达式是有定义的，哪些是无定义的? 提出答案的理由.

**49.** (a) $\tan^{-1}2$. (b) $\cos^{-1}2$.

**50.** (a) $\csc^{-1}(1/2)$. (b) $\csc^{-1}2$.

**51.** (a) $\sec^{-1}0$. (b) $\sin^{-1}\sqrt{2}$.

**52.** (a) $\cot^{-1}(-1/2)$. (b) $\cos^{-1}(-5)$.

**53.** 利用恒等式

$$\csc^{-1}u=\frac{\pi}{2}-\sec^{-1}u$$

由表 3.1 中$\sec^{-1}u$的导数公式推导$\csc^{-1}u$的导数公式.

**54.** 通过对$\tan y=x$这个同$y=\tan^{-1}x$等价的公式两端求导数，推导$y=\tan^{-1}x$的导数公式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$$

**55.** 利用 3.7 节中定理 4 的反函数导数法则推导

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}},\ |x|>1$$

**56.** 利用恒等式

$$\cot^{-1}u=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}u$$

由表 3.1 中$\tan^{-1}u$的导数公式推导$\cot^{-1}u$的导数公式.

**57.** 函数

$$f(x)=\sin^{-1}\frac{x-1}{x+1},x\geqslant 0 \quad \text{和} \quad g(x)=2\tan^{-1}\sqrt{x}$$

有什么特殊性? 予以说明.

**58.** 函数

$$f(x)=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{和} \quad g(x)=\tan^{-1}\frac{1}{x}$$

有什么特殊性? 予以说明.

**T 59.** 求下列函数值:

(a) $\sec^{-1}1.5$. (b) $\csc^{-1}(-1.5)$. (c) $\cot^{-1}2$.

**T 60.** 求下列函数值:

(a) $\sec^{-1}(-3)$. (b) $\csc^{-1}1.7$.

(c) $\cot^{-1}(-2)$.

**T** 在习题 61 ~ 63 中，求每个复合函数的定义域和值域. 然后在单独的屏幕上画出复合函数的图形. 每种情况下的图形合乎情理吗? 提出答案的理由. 说明你从图形中看出的任何差别.

**61.** (a) $y=\tan^{-1}(\tan x)$. (b) $y=\tan(\tan^{-1}x)$.

**62.** (a) $y=\sin^{-1}(\sin x)$. (b) $y=\sin(\sin^{-1}x)$.

**63.** (a) $y=\cos^{-1}(\cos x)$. (b) $y=\cos(\cos^{-1}x)$.

**T** 在习题 64 ~ 68 中，利用你的绘图工具绘制图形.

**64.** 绘制$y=\sec(\sec^{-1}x)=\sec(\cos^{-1}(1/x))$的图形. 从图形中看出什么结果? 予以说明.

**65. 牛顿蛇形线** 绘制牛顿蛇形线$y=4x/(x^2+1)$的图形. 然后在同一绘图窗口中绘制$y=2\sin(2\tan^{-1}x)$的图形. 从图形中看出什么结果? 予以说明.

**66.** 绘制有理函数$y=(2-x^2)/x^2$的图形，然后在同一绘图窗口中绘制$y=\cos(2\sec^{-1}x)$的图形. 从图形中看出什么结果? 予以说明.

**67.** 绘制$f(x)=\sin^{-1}x$及其一阶导数和二阶导数的图形. 说明$f$的特性及其图形形状同$f'$和$f''$的符号和值的关系.

**68.** 绘制$f(x)=\tan^{-1}x$及其一阶导数和二阶导数的图形. 说明$f$的特性及其图形形状同$f'$和$f''$的符号和值的关系.

## 3.9 相关变化率

这一节我们来考察这样的问题，当一个变量在其他某个(或者几个)相关变量的变化率为已知时，它的变化率是什么. 从其他已知变化率求一种变化率的问题称为**相关变化率**问题.

### 相关变化率方程

假定我们正在对一个球形气球充气. 气球的体积和半径都随时间增加. 若气球在某个时刻的体积为$V$，半径为$r$，则

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

利用链式法则求导数，得到相关变化率方程

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt}$$

所以，如果知道气球在给定时刻的半径 $r$ 和体积增加的速率$\frac{dV}{dt}$，我们就能够从上面这个方程求解 $dr/dt$，得到半径在那个时刻增加的速率. 请注意，直接测量体积增加的速率（气球充气的速率）比测量半径增加的速率更为容易. 相关变化率方程使我们能够从 $dV/dt$ 计算 $dr/dt$.

通常，在相关变化率问题中求变量关系的关键是画出显示它们之间的几何关系的图形，请看下面的例子.

**例 1** 如果从一个直立圆柱形桶中以 3000 L/min 的速率排出液体，那么桶内液面下降的速率是多少?

**解** 画一个部分注入液体的直立圆柱形桶，它的半径为 $r$，液面高度为 $h$（见图 3.45）. 设液体的体积为 $V$.

$V$ 和 $h$ 将随时间的流逝而改变，但是 $r$ 保持为常数. 我们把 $V$ 和 $h$ 设想为时间的可微函数，并且用 $t$ 代表时间. 已知液体排出的速率为 3000 L/min，这个速率应取负值，因为液体体积是在减少. 所以

$$\frac{dV}{dt}=-3000$$

我们要回答的问题是液面下降的速率是多少，也就是求

$$\frac{dh}{dt}$$

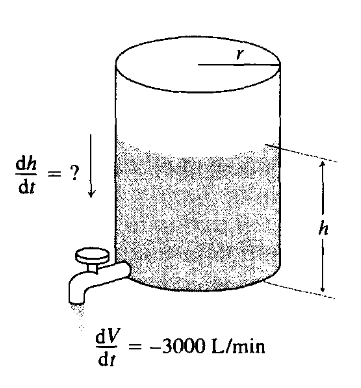



图 3.45 圆柱形桶内液体体积的变化率同桶中液面的变化率相关（例 1）

为了求出 $dh/dt$，首先写出表示 $V$ 同 $h$ 的关系的等式. 这个等式依赖于对 $V$，$r$ 和 $h$ 选用的单位. 如果 $V$ 用升为单位，$r$ 和 $h$ 用米为单位，圆柱体体积的相应公式为

$$V=1000\pi r^2h$$

因为 1 立方米包含 1000 升.

由于 $V$ 和 $h$ 是 $t$ 的可微函数，可以对等式 $V=1000\pi r^2h$ 两端对 $t$ 求导数，得到 $dh/dt$ 和 $dV/dt$ 的关系式：

$$\frac{dV}{dt}=1000\pi r^2\frac{dh}{dt}\quad(r\text{ 是半径})$$

代入已知值 $dV/dt=-3000$ 并解出 $dh/dt$：

$$\frac{dh}{dt}=\frac{-3000}{1000\pi r^2}=-\frac{3}{\pi r^2}$$

液面将以 $3/(\pi r^2)$ m/min 的速率下降.

等式 $dh/dt=-3/\pi r^2$ 表示液面下降速率同桶的半径 $r$ 相关. 如果 $r$ 很小，$dh/dt$ 将会很大；如果 $r$ 很大，$dh/dt$ 将会很小.

$$\text{若 } r=1\text{ m：}\quad\frac{dh}{dt}=-\frac{3}{\pi}\approx-0.95\text{ m/min}=-95\text{ cm/min}$$

$$\text{若 } r=10\text{ m：}\quad\frac{dh}{dt}=-\frac{3}{100\pi}\approx-0.0095\text{ m/min}=-0.95\text{ cm/min}$$ ■

**求解相关变化率问题的对策**

(1) 画出问题的图形并命名变量和常数. 用 $t$ 表示时间. 假定所有变量都是时间 $t$ 的可微函数.

(2) 记录数字资料(用你选择的符号名表示).

(3) 描述求解的问题(通常表示为导数的变化率).

(4) 写出表示变量关系的方程. 为了获得表示你想得到变化率的变量同已知道变化率的那些变量之间关系的方程，可能必须把两个或更多的方程结合起来.

(5) 求对 $t$ 的导数. 然后用已知值的变化率和变量表示想要得到的变化率.

(6) 求导数值. 利用已知的值求未知的变化率.

**例 2** 一个从平地升空的热气球由离开升空点 500 ft 的一台距离探测器跟踪. 在距离探测器的仰角为 $\pi/4$ 时，角度增加的变化率为 0.14 rad/min. 气球在那时上升的速度是多少?

**解** 通过下面 6 个步骤回答这个问题.

(1) 画出图形并命名变量和常数(见图 3.46). 图中的变量是

$\theta$ = 距离探测器同地面形成的角(以弧度为单位).

$y$ = 气球的高度(以英尺为单位).

令 $t$ 表示时间(以分为单位)，并且假定 $\theta$ 和 $y$ 是 $t$ 的可微函数.

图中的一个常数是距离探测器同气球升空点之间的距离(500 ft). 对它不需要给出特别的符号名.



图 3.46 气球高度的变化率同距离探测器和地面形成角度的变化率相关(例 2)

(2) 记录附带的数字资料.

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.14 \text{ rad/min}, \quad \text{当 } \theta = \frac{\pi}{4}$$

(3) 描述求解的问题. 我们想得到当 $\theta = \pi/4$ 时的 $dy/dt$.

(4) 写出表示变量 $y$ 和 $\theta$ 的关系的方程.

$$\frac{y}{500} = \tan\theta \quad \text{或} \quad y = 500\tan\theta$$

(5) 利用链式法则求对 $t$ 的导数. 结果表明 $dy/dt$(想得到的变化率)同 $d\theta/dt$(已知的变化率)相关.

$$\frac{dy}{dt} = 500\,(\sec^2\theta)\,\frac{d\theta}{dt}$$

(6) 求导数值，用 $\theta = \pi/4$ 和 $d\theta/dt = 0.14$ 求 $dy/dt$.

$$\frac{dy}{dt} = 500(\sqrt{2})^2(0.14) = 140 \quad \left(\sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\right)$$

所以，在指出的时刻气球上升的速度为 140 ft/min. ■

**例 3** 一辆警车由北驶向一个十字路口，追逐一辆已经拐弯正向东行驶的高速汽车. 当警车在十字路口北面 0.6 英里和汽车在十字路口东面 0.8 英里时，警察用雷达测定它们之间的距离以及汽车正以每小时 20 英里加速. 如果警车在测量时以每小时 60 英里的速率行驶，汽车的速率是多少?

**解** 我们在坐标平面内画出汽车和警车位置的图形，用正 $x$ 轴作为向东行的公路，正 $y$ 轴作为向北行的公路(见图 3.47). 令 $t$ 代表时间，并且设

$$x = \text{汽车在时间 } t \text{ 的位置}$$
$$y = \text{警车在时间 } t \text{ 的位置}$$
$$s = \text{汽车同警车之间在时间 } t \text{ 的距离}$$

假定 $x$，$y$ 和 $s$ 是 $t$ 的可微函数.

我们寻求的是当

$$x = 0.8 \text{ mi}, \quad y = 0.6 \text{ mi}, \quad \frac{dy}{dt} = -60 \text{ mph}, \quad \frac{ds}{dt} = 20 \text{ mph}$$

时的 $dx/dt$. 注意 $dy/dt$ 为负值，因为 $y$ 是在减少.

对距离方程

$$s^2 = x^2 + y^2$$

（也可用 $s = \sqrt{x^2+y^2}$）求导数，得到

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{s}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

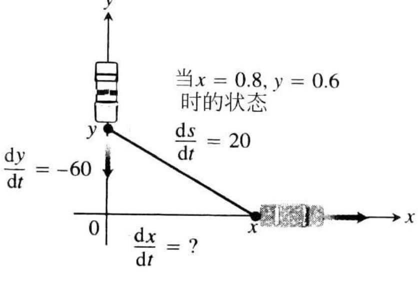



图 3.47　汽车的速度同警车的速率以及它们之间的距离的变化率相关（例 3）

最后，利用 $x = 0.8$，$y = 0.6$，$dy/dt = -60$，$ds/dt = 20$ 求解 $dx/dt$：

$$20 = \frac{1}{\sqrt{(0.8)^2 + (0.6)^2}}\left(0.8\frac{dx}{dt} + (0.6)(-60)\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{20\sqrt{(0.8)^2 + (0.6)^2} + (0.6)(60)}{0.8} = 70$$

所以汽车在指出时刻的行驶速率为每小时 70 英里. ■

**例 4**　将水以 9 $ft^3$/min 的速率注入一个圆锥形容器中. 容器顶朝下倒立，它的高为 10 ft，底半径为 5 ft. 当容器内的水深达 6 ft 时，水面升高的速率是多少？

**解**　图 3.48 显示注入部分水时的圆锥形容器. 问题中的变量为

$V$ = 容器中的水在时间 $t$ (min) 的体积 ($ft^3$)

$x$ = 水面在时间 $t$ 的半径 (ft)

$y$ = 容器中的水在时间 $t$ 的深度 (ft)

假定 $V$，$x$ 和 $y$ 是 $t$ 的可微函数. 问题中的常数是容器的尺寸. 要求在

$$y = 6 \text{ ft} \quad \text{及} \quad \frac{dV}{dt} = 9 \text{ ft}^3/\text{min}$$

时求出 $\frac{dV}{dt}$. 水形成的圆锥的体积为

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

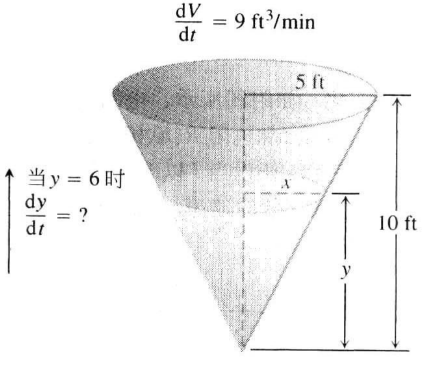



图 3.48　圆锥形容器注入水时的几何图形，注入水的速率决定水面升高的速率（例 4）

这个方程包含 $x$ 以及 $V$ 和 $y$. 由于没有给出关于 $x$ 和 $\frac{dx}{dt}$ 在时间 $t$ 的数据，我们需要消去 $x$. 图 3.48 中的相似三角形提供一种用 $y$ 表示 $x$ 的方法：

$$\frac{x}{y}=\frac{5}{10} \quad 或 \quad x=\frac{y}{2}$$

因此，
$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 y=\frac{\pi}{12}y^3$$

给出导数
$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{12}\cdot 3y^2\frac{dy}{dt}=\frac{\pi}{4}y^2\frac{dy}{dt}$$

最后，利用 $y=6$ 和 $dV/dt=9$ 求解 $dy/dt$：

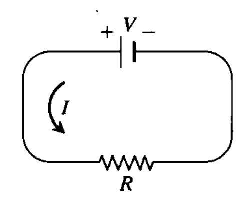
$$9=\frac{\pi}{4}(6)^2\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{\pi}\approx 0.32$$

在指出的时刻，水面升高的速率约为 0.32 ft/min. ■

## 习题 3.9

1. **面积** 假定圆的半径 $r$ 和面积 $A=\pi r^2$ 都是 $t$ 的可微函数. 写出表示 $dA/dt$ 同 $dr/dt$ 关系的方程.
2. **表面积** 假定球的半径 $r$ 同表面积 $S=4\pi r^2$ 都是 $t$ 的可微函数. 写出表示 $dS/dt$ 和 $dr/dt$ 关系的方程.
3. **体积** 正圆柱体的半径 $r$ 和高度 $h$ 同圆柱体体积 $V$ 的关系由公式 $V=\pi r^2 h$ 表示.
   (a) 如果 $r$ 为常数，$dV/dt$ 同 $dh/dt$ 有何关系？
   (b) 如果 $h$ 为常数，$dV/dt$ 同 $dh/dt$ 有何关系？
   (c) 如果 $r$ 和 $h$ 都不是常数，$dV/dt$ 同 $dh/dt$ 有何关系？
4. **体积** 正圆锥体的半径 $r$ 和高度 $h$ 同圆锥体体积的关系由方程 $V=(1/3)\pi r^2 h$ 表示.
   (a) 如果 $r$ 为常数，$dV/dt$ 同 $dh/dt$ 有何关系？
   (b) 如果 $h$ 为常数，$dV/dt$ 同 $dh/dt$ 有何关系？
   (c) 如果 $r$ 和 $h$ 都不是常数，$dV/dt$ 同 $dh/dt$ 有何关系？
5. **电压变化** 如附图所示，电路的电压 $V$(伏特)、电流 $I$(安培)和电阻 $R$(欧姆)之间的关系由方程 $V=IR$ 表示. 假设当 $I$ 以 1/3 安培/秒的速率减少时 $V$ 以 1 伏/秒的速率增加. 用 $t$ 表示以秒为单位的时间.




   (a) $dV/dt$ 的值是什么？
   (b) $dI/dt$ 的值是什么？
   (c) 表示 $dR/dt$ 同 $dV/dt$ 和 $dI/dt$ 关系的方程是什么？
   (d) 求 $V=12$ 伏和 $I=2$ 安培时 $R$ 的变化率. $R$ 是增加还是减少？
6. **电功率** 电路的电功率 $P$(瓦特)同电路电阻 $R$(欧姆)和电流 $I$(安培)之间的关系由方程 $P=RI^2$ 表示.
   (a) 如果 $P$, $R$ 和 $I$ 都不是常数，$dP/dt$, $dR/dt$ 和 $dI/dt$ 有何关系？
   (b) 如果 $P$ 是常数，$dR/dt$ 同 $dI/dt$ 有何关系？
7. **距离** 设 $x$ 和 $y$ 是 $t$ 的可微函数，并且令 $s=\sqrt{x^2+y^2}$ 是 $xy$ 平面内点$(x, 0)$和$(0, y)$之间的距离.
   (a) 如果 $y$ 是常数，$ds/dt$ 同 $dx/dt$ 有何关系？
   (b) 如果 $x$ 和 $y$ 都不是常数，$ds/dt$ 同 $dx/dt$ 和 $dy/dt$ 有何关系？
   (c) 如果 $s$ 是常数，$dx/dt$ 同 $dy/dt$ 有何关系？
8. **对角线** 如果 $x$, $y$, $z$ 是一个长方形盒子的边长，盒子对角线的共同长度为 $s=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
   (a) 假设 $x$, $y$, $z$ 是 $t$ 的可微函数，$ds/dt$ 同 $dx/dt$, $dy/dt$ 和 $dz/dt$ 有何关系？
   (b) 如果 $x$ 为常数，$ds/dt$ 同 $dy/dt$ 和 $dz/dt$ 有何关系？
   (c) 如果 $s$ 是常数，$dx/dt$, $dy/dt$ 和 $dz/dt$ 之间有何关系？
9. **面积** 由边长 $a$ 和 $b$ 围成的测量角为 $\theta$ 的三角形的面积为
$$A=\frac{1}{2}ab\sin\theta.$$
   (a) 如果 $a$ 和 $b$ 是常数，$dA/dt$ 同 $d\theta/dt$ 有何关系？
   (b) 如果只有 $b$ 是常数，$dA/dt$ 同 $d\theta/dt$ 和 $da/dt$ 有何关系？
   (c) 如果 $a$, $b$ 和 $\theta$ 都不是常数，$dA/dt$ 同 $d\theta/dt$, $da/dt$ 和 $db/dt$ 有何关系？

10. **加热金属板** 把一块圆形金属板放在炉子上加热，它的半径以 0.01 cm/min 的速率增加. 当金属板的半径为 50 cm 时，它的面积增加的速率是多少?

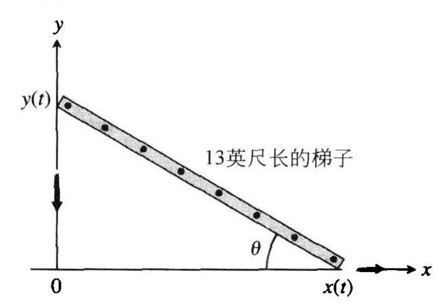
11. **矩形尺寸的变化** 当矩形在宽度 $w$ 以 2 cm/s 的速率增加时其长度 $l$ 以 2 cm/s 的速率减少. 当 $l=12$ cm 和 $w=5$ cm 时，求(**a**)矩形面积的变化率，(**b**)矩形周长的变化率，(**c**)矩形对角线长度的变化率. 在这些量中哪些在增加，哪些在减少?

12. **矩形盒子尺寸的变化** 假设边长为 $x$，$y$，$z$ 的闭合矩形盒子的尺寸变化率如下:

$$\frac{dx}{dt}=1\ \mathrm{m/s},\frac{dy}{dt}=-2\ \mathrm{m/s},\frac{dz}{dt}=1\ \mathrm{m/s}$$

当 $x=4$，$y=3$ 和 $z=2$ 时，求(**a**)矩形体积的变化率，(**b**)矩形表面积的变化率，(**c**)矩形对角线长度$s=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$的变化率.

13. **滑动的梯子** 一架斜靠在墙上的 13 英尺长的梯子，底端突然滑动，当其底端离开墙壁 12 英尺时，滑动的速率为 5 ft/s.
(**a**)这时梯子顶端在墙壁上下滑的速率是多少?
(**b**)这时由梯子、墙壁和地面形成的三角形的面积的变化率是多少?
(**c**)这时梯子和地面之间的夹角 $\theta$ 的变化率是多少?




14. **商业航空运输** 两架商用航空运输机在 40 000 英尺的高空沿两条正交的直线航线飞行. 飞机 $A$ 以 442 节(浬/小时，1 浬 =2000 码)的速度接近航线交汇点. 飞机 $B$ 以 481 节的速度接近航线交汇点. 当飞机 $A$ 距离交汇点 5 浬和飞机 $B$ 距离交汇点 12 浬时，它们之间的距离的变化率是多少?

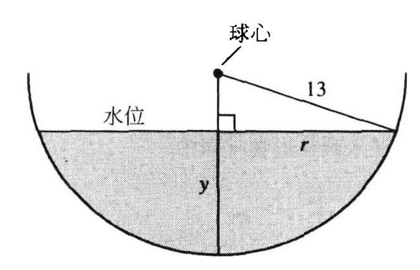
15. **放风筝** 一个女孩把风筝放到 300 英尺的高度，承载风筝的风力在水平方向以 25 ft/s 的速率离开她. 当风筝距她 500 ft 时她必须以多快的速率放出风筝线?

16. **镗汽缸** 林肯汽车制造厂的机械师正在重镗 6 英寸深的汽缸，以便安装一种新的活塞. 他们使用的镗床每 3 分钟增加汽缸半径千分之一英寸. 当汽缸内腔直径为 3.800 英寸时，汽缸容积增加的速率是多少?

17. **增大的沙堆** 沙粒从传送带以 10 m³/min 的速率散落到圆锥形的沙堆上. 沙堆的高度恒为底部直径的 3/8. 当沙堆高度为 4 英尺时(**a**)沙堆高度的变化率是多少? (**b**)底半径的变化率是多少? 答案以厘米/秒为单位.

18. **圆锥形水槽的排水** 水从底半径为 45 m 和高为 6 m 的圆锥形混凝土浅水槽(顶朝下)流出，排水速率为 50 m³/min.
(**a**)当水深为 5 m 时，水面下降的速率是多少(cm/s)?
(**b**)那时水面半径的变化率是多少(cm/s)?

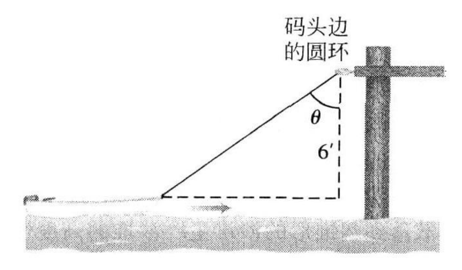
19. **半球形水槽的排水** 水从半径为 13 m 的半球形碗状水槽中流出，排水速率为 6 m³/min，如下面的剖面图所示. 假定水深为 $y$ 米时半径为 $R$ 的半球形碗状水槽中水的容积为 $V=(\pi/3)y^2\cdot(3R-y)$. 试回答下列问题:
(**a**)当水深为 8 m 时水位的变化率是多少?
(**b**)当水深为 $y$ m 时水面的半径 $r$ 是多大?
(**c**)当水深为 8 m 时水面半径 $r$ 的变化率是多少?



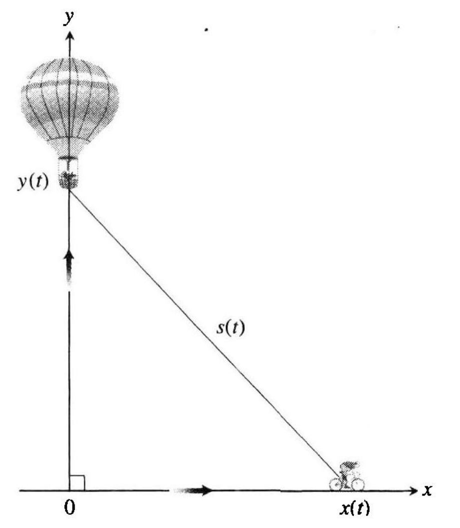

20. **增大的雨滴** 假定一滴水汽呈完全球状，通过凝聚，雨滴以与其表面积成正比的速率吸收水分. 证明在这种环境下雨滴的半径以常数速率增加.

21. **充气气球的半径** 一个气球以 $100\pi$ ft³/min 的速率充入氦气. 气球在半径为 5 ft 时半径增加的速率是多少? 这时表面积增加的速率是多少?

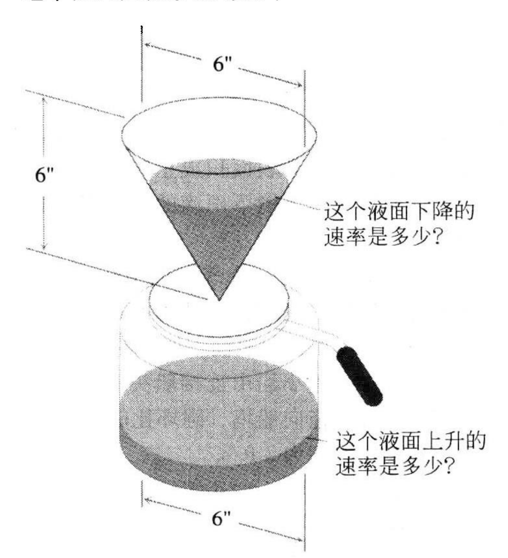
22. **拖曳小船** 一艘小船由连接船头和通过码头一个圆环的缆索拖向船坞，圆环比船头高出 6 ft. 缆索拖曳的速率为 2 ft/s.
(**a**)当缆索剩下 10 ft 时小船向码头靠近的速率是多少?
(**b**)那时角度 $\theta$(参见附图)的变化率是多少?




**23. 气球与自行车** 一个气球以恒定速率 1 ft/s 沿直线路径从地面上垂直上升. 当气球达到地面上 65 ft 的高度时，一辆以固定速率 17 ft/s 行驶的自行车恰好在它的下面通过. 3 秒后自行车同气球之间的距离 $s(t)$ 增加的速率是多少?




**24. 冲咖啡** 咖啡从圆锥形过滤器以 10 $\text{in}^3/\text{min}$ 的速率注入圆柱形咖啡壶中.




(a) 当过滤器中的咖啡为 5 in 深时，咖啡壶中液面上升的速率是多少?

(b) 这时过滤器中液面下落的速率是多少?

**25. 心脏的输出** 19 世纪 60 年代后期，德国维尔茨堡医学院生理学教授阿多夫·费克提出我们今天用于测量人体心脏一分钟泵入多少血液的几种方法中的一种方法. 在你阅读这个句子时，你的心脏输出大约是 7 L/min. 心脏在休息状态下的输出略低于 6 L/min. 正在训练中的马拉松长跑运动员，心脏的输出可能高达 30 L/min.

人体心脏的输出可以用公式

$$y = \frac{Q}{D}$$

计算，其中 $Q$ 是每分钟呼出的二氧化碳的毫升数量，$D$ 是输送到肺的血液的二氧化碳浓度同从肺返回的血液的二氧化碳浓度的差. 当 $Q = 233$ ml/min 和 $D = 97 - 56 = 41$ ml/min 时，

$$y = \frac{233\ \text{ml/min}}{41\ \text{ml/L}} \approx 5.68\ \text{L/min}$$

这同大多数人处于机体活动最低(休息)时的状态非常接近(数据由东田纳西州立大学奎尔南医学院医学博士J. 肯尼斯·赫尔德提供).

假定当 $Q = 233$ ml/min 和 $D = 41$ ml/min 时我们还知道 $D$ 以每分钟 2 单位的速率减少而 $Q$ 保持不变. 心脏的输出会出现什么情况?

**26. 成本、收入和利润** 一家公司能够以 $c(x)$ 千美元的成本，$r(x)$ 千美元的销售收入，以及 $p(x) = r(x) - c(x)$ 千美元的利润，生产 $x$ 件产品. 对于 $x$ 和 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 的下列值求 $\mathrm{d}c/\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t$.

(a) $r(x) = 9x$，$c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$，当 $x = 2$ 时 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0.1$.

(b) $r(x) = 70x$，$c(x) = x^3 - 6x^2 + 45/x$，当 $x = 1.5$ 时 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0.05$.

**27. 沿抛物线运动的质点** 质点沿第一象限内的抛物线 $y = x^2$ 运动，它的 $x$ 坐标(用米度量)以不变的速率 10 m/s 增加. 连接质点同坐标原点的线段的倾角 $\theta$ 在 $x = 3$ m 时的变化率是多少?

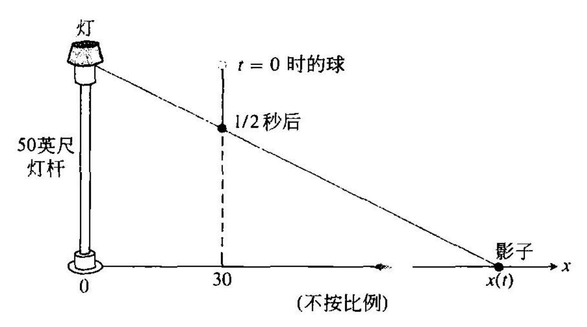
**28. 沿另外一条抛物线运动的质点** 质点从右到左沿抛物线 $y = \sqrt{-x}$ 运动，它的 $x$ 坐标(用米度量)以 8 m/s 的速率减少. 连接质点同坐标原点的线段的倾角 $\theta$ 在 $x = -4$ 时的变化率是多少?

**29. 在平面内运动的质点** 质点在按米制的 $xy$ 平面上的坐标是 $t$ 的可微函数，具有导数 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -1$ m/s 和 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = -5$ m/s. 质点在通过点

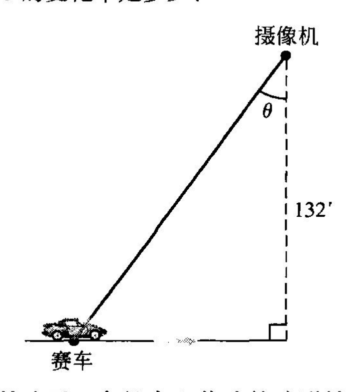
(5, 12)时同原点的距离的变化率是多少?

**30. 移动的影子**　一位6英尺高的男子以5 ft/s的速率朝离地面16英尺的街灯行进，他的影子顶端移动的速率是多少？当他距离灯的基底10英尺时，影子长度的变化率是多少？

**31. 另外一个移动的影子**　一盏灯从50英尺高的灯杆顶端照射. 一个球从距离灯杆30英尺处的同样高度下落(参见附图). 1/2秒后球的影子在地面上移动的速率是多少？(假设球在 $t$ 秒内下落的距离为 $s=16t^2$.)



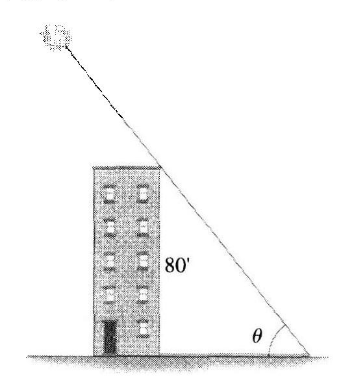

**32. 运动汽车的摄像**　你正在距离赛车道132英尺的看台对汽车赛摄像，跟踪一辆车速为180 mi/h(264 ft/s)的赛车. 当赛车经过你的正前方时，摄像机角度 $\theta$ 的变化率是多少？半秒钟后 $\theta$ 的变化率是多少？



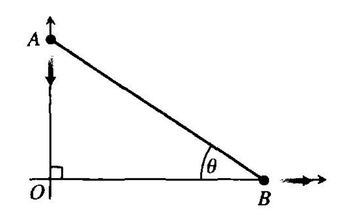

**33. 融化的冰层**　直径为8英寸的球形铁球由一层厚度均匀的冰层包围. 如果冰以10 in³/min的速率融化，当冰层的厚度为2英寸时它的厚度减少的速率是多少？冰层外部表面积减少的速率是多少？

**34. 公路巡逻**　公路巡逻飞机在地面直线公路上3英里的高度以120 mi/h的恒定速度飞行. 驾驶员看见一辆迎面驶来的汽车，并用雷达测定这时从飞机到汽车的视线距离为5英里，这个视线距离以160 mi/h的速率减少. 求汽车沿公路行驶的速率.

**35. 建筑物的影子**　当太阳在上午经过头顶时，80英尺高的建筑物在地面上的影子达60英尺. 这时太阳光线同地面形成的角度 $\theta$ 以0.27°/min的速率增加. 建筑物影子长度减少的速率是多少？(记住使用弧度，用 in/min 表示答案，准确到十分之一.)




**36. 步行者**　$A$ 和 $B$ 两人步行在两条直交的大街上. $A$ 以2 m/s的速度走向十字路口；$B$ 以1 m/s的速度背离十字路口(如附图所示). 当 $A$, $B$ 距离十字路口分别为10 m和20 m时角 $\theta$ 的变化率是多少？用度/秒表示答案，准确到度.

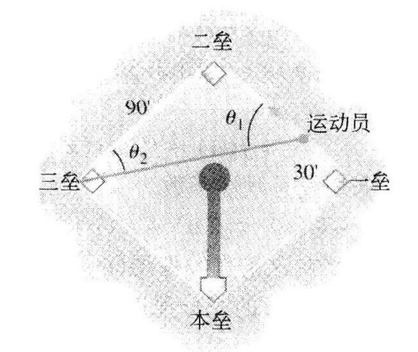



**37. 棒球运动员**　棒球场是边长为90 ft的正方形场地. 一名运动员以16 ft/s的速率从一垒跑向二垒.

(a) 当运动员距离一垒30 ft时他同三垒的距离的变化率是多少？

(b) 那时角 $\theta_1$ 和 $\theta_2$(见附图)的变化率是多少？

(c) 运动员以15 ft/s的速率滑进二垒. 当运动员触及二垒时 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ 的变化率是多少？



**38. 航船** 两艘船从点 $O$ 沿两条构成 120°角的航道驶离. 船 $A$ 的航速为 14 节(浬/小时, 1 浬 = 2000 码). 船 $B$ 的航速为 21 节. 当 $OA=5$ 浬和 $OB=3$ 浬时, 两艘船离开的速率是多少?

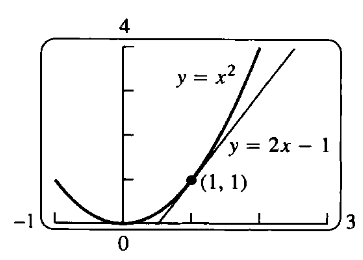
## 3.10 线性化与微分

某些情况下我们可以用比较简单的函数逼近复杂的函数, 这样的逼近对于特定的应用问题足以达到要求的精度, 并且更易于处理. 这一节讨论的逼近函数称为*线性化*, 它们是建立在切线基础上的. 其他的逼近函数(例如多项式)在第 8 章讨论.

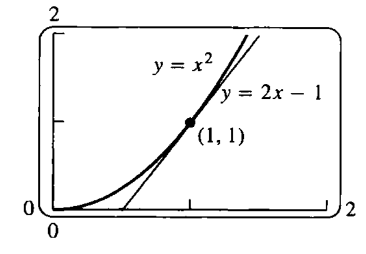
我们引进新的变量 $dx$ 和 $dy$, 把它们称为*微分*, 是把莱布尼茨的导数记号 $dy/dx$ 作为真正比值定义的. 我们利用 $dy$ 估计测量误差, 由此对链式法则(3.5 节)提供一种严格的证明.

### 3.10.1 线性化

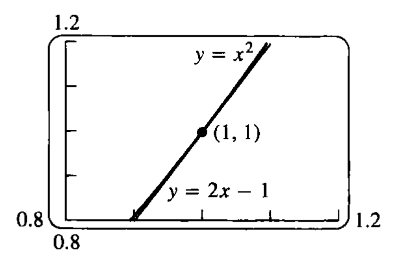
正如从图 3.49 可以看出的那样, 曲线 $y=x^2$ 的切线在切点附近同曲线接近. 在切点两边的小区间上, 沿切线的 $y$ 值给出曲线上 $y$ 值的充分逼近. 通过在切点放大两种图形, 或者在切点的 $x$ 坐标附近查看 $f(x)$ 及其切线之间的差值表, 我们观察到这种现象. 这种现象不是抛物线所独具的; 每一个可微函数曲线的局部特性都同它的切线相近.



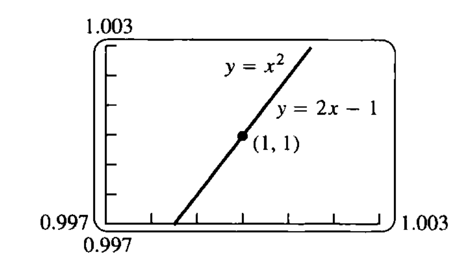
$y=x^2$ 及其在(1,1)的切线 $y=2x-1$



切线同曲线在(1,1)附近非常接近



在所示的整个$x$区间切线同曲线非常接近



切线同曲线更接近, 计算机屏幕在这个$x$区间上区分不出切线和曲线

图 3.49 在函数为可微的点附近越放大图形, 图形变得越平坦, 并且越显现同切线相似

一般说来, 在 $y=f(x)$ 是可微的点 $x=a$, $f$ 的切线通过点 $(a, f(a))$ (见图 3.50), 所以它的点斜式方程是

$$y=f(a)+f'(a)(x-a)$$

因此, 这条切线是线性函数

$$L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

的图形. 只要在这条直线保持同 $f$ 的图形接近的范围内, $L(x)$ 就给出对 $f(x)$ 的充分逼近.

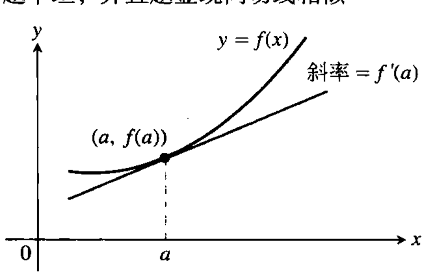


图 3.50 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 的切线是直线 $L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$

> **定义** 若$f$在$x=a$是可微的，则逼近函数
> $$L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$
> 是$f$在$x=a$的**线性化**. $L$对$f$的逼近
> $$f(x)\approx L(x)$$
> 是$f$在$x=a$的**标准线性逼近**. 点$x=a$是逼近的**中心**.

**例1** 求$f(x)=\sqrt{1+x}$在$x=0$的线性化(见图3.51).

**解** 由于
$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$$
我们有$f(0)=1$和$f'(0)=1/2$，给出线性化
$$L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)=1+\frac{1}{2}(x-0)=1+\frac{x}{2}$$
参见图3.52. ■

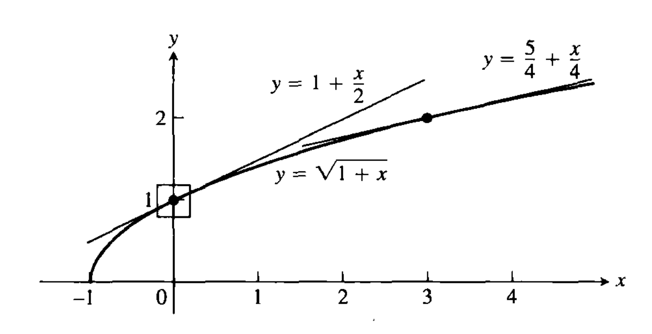


图3.51 $y=\sqrt{1+x}$及其在$x=0$和$x=3$的线性化的图形(图3.52显示$y$轴上1附近小窗口的放大视图)

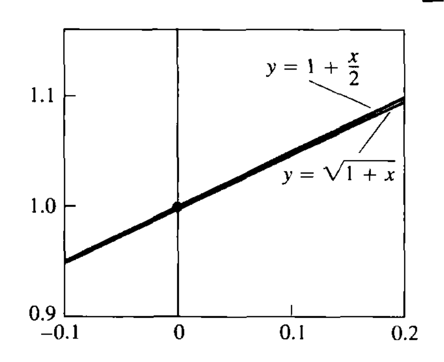


图3.52 图3.51中小窗口的放大视图

下表显示，例1中的逼近$\sqrt{1+x}\approx 1+(x/2)$对0附近的某些$x$值是相当精确的. 当偏离$x=0$时，就失去精度. 例如，对于$x=2$，线性化以2作为$\sqrt{3}$的近似值，其精度甚至不到一位小数.

| 逼近值 | 实际值 | \|实际值－近似值\| |
|---|---|---|
| $\sqrt{1.2}\approx 1+\frac{0.2}{2}=1.10$ | 1.095 445 | $<10^{-2}$ |
| $\sqrt{1.05}\approx 1+\frac{0.05}{2}=1.025$ | 1.024 695 | $<10^{-3}$ |
| $\sqrt{1.005}\approx 1+\frac{0.005}{2}=1.002\ 50$ | 1.002 497 | $<10^{-5}$ |

不要从前面的计算中引起误解，以为凡是用线性化得到的结果就比用计算器得到的结果更好. 实际上，我们不可能利用线性化求出某个特定的平方根. 线性化的功用在于它能在整个值的区间上用更简单的公式代替一个复杂的公式. 如果我们必须对于接近0的$x$讨论$\sqrt{1+x}$，并且容许包含小的误差，那么可以用$1+(x/2)$代替. 自然在其后需要知道存在多大的误差. 关于误差的估计在第8章作进一步讨论.

正常情况下线性逼近在离开逼近的中心损失精度. 如图3.51的暗示，逼近$\sqrt{1+x}\approx 1+(x/2)$

在 $x=3$ 附近的有用性可能太差. 在这一点上，我们需要用在 $x=3$ 的线性化.

**例 2** 求 $f(x)=\sqrt{1+x}$ 在 $x=3$ 的线性化.

**解** 求在 $a=3$ 定义 $L(x)$ 的方程. 由于

$$f(3)=2,\quad f'(3)=\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}\bigg|_{x=3}=\frac{1}{4}$$

我们有

$$L(x)=2+\frac{1}{4}(x-3)=\frac{5}{4}+\frac{x}{4}$$

■

在 $x=3.2$，例 2 中的线性化给出

$$\sqrt{1+x}=\sqrt{1+3.2}\approx\frac{5}{4}+\frac{3.2}{4}=1.250+0.800=2.050$$

它同实际值 $\sqrt{4.2}\approx 2.04939$ 之差小于千分之一. 例 1 的线性化给出

$$\sqrt{1+x}=\sqrt{1+3.2}\approx 1+\frac{3.2}{2}=1+1.6=2.6$$

这个结果的误差超过 25%.

**例 3** 求 $f(x)=\cos x$ 在 $x=\pi/2$ 的线性化(见图 3.53)

**解** 由于 $f(\pi/2)=\cos(\pi/2)=0$，$f'(x)=-\sin x$ 以及 $f'(\pi/2)=-\sin(\pi/2)=-1$，我们有

$$\begin{aligned}L(x)&=f(a)+f'(a)(x-a)\\&=0+(-1)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\\&=-x+\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

■

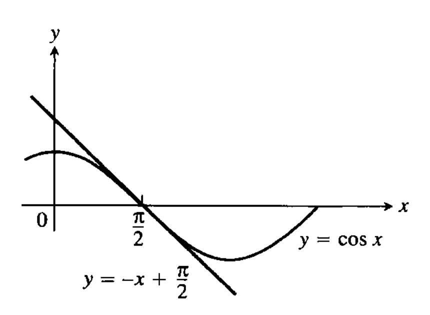



图 3.53 $f(x)=\cos x$ 及其在 $x=\pi/2$ 的线性化的图形，在 $x=\pi/2$ 附近 $\cos x\approx -x+(\pi/2)$(例3)

对于根函数和幂函数的一个重要线性逼近是

$$(1+x)^k\approx 1+kx\qquad (x\text{ 接近 }0,\ k\text{ 为任意数})$$

(见习题 15). 这个逼近对于足够接近零的 $x$ 值是很好的逼近，它有着广阔的应用. 例如，当 $x$ 很小时，

$$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x\qquad (k=1/2)$$

$$\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}\approx 1+(-1)(-x)=1+x\qquad (k=-1,\text{用 }-x\text{ 代换 }x)$$

$$\sqrt[3]{1+5x^4}=(1+5x^4)^{1/3}\approx 1+\frac{1}{3}(5x^4)=1+\frac{5}{3}x^4\qquad (k=1/3,\text{用 }5x^4\text{ 代换 }x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-1/2}\approx 1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2)=1+\frac{1}{2}x^2\qquad (k=-1/2,\text{用 }-x^2\text{ 代换 }x)$$

### 3.10.2 微分

有时我们用莱布尼茨记号 $dy/dx$ 表示 $y$ 关于 $x$ 的导数. 同 $dy/dx$ 的表象相反，这个记号不是一个比率. 现在我们引入两个新的变量 $dx$ 和 $dy$，它们具有这样的性质，如果它们的比率存在，这个比率就等于导数.

> **定义** 令 $y=f(x)$ 是可微函数，**微分 $dx$** 是一个自变量，**微分 $dy$** 是
>
> $$dy=f'(x)dx$$

不同于自变量 $dx$，变量 $dy$ 恒为因变量. 它同时依赖于 $x$ 和 $dx$. 如果对 $dx$ 给出特定的值，而 $x$ 是函数 $f$ 的定义域中一个特定的数，那么这两个值确定 $dy$ 的数值.

**例 4**

**(a)** 设 $y=x^5+37x$，求 $dy$.

**(b)** 求 $dy$ 在 $x=1$ 和 $dx=0.2$ 的值.

**解**

**(a)** $dy=(5x^4+37)dx$.

**(b)** 在 $dy$ 的表达式中代入 $x=1$ 和 $dx=0.2$，得到

$$dy=(5\cdot 1^4+37)0.2=8.4 \quad ■$$

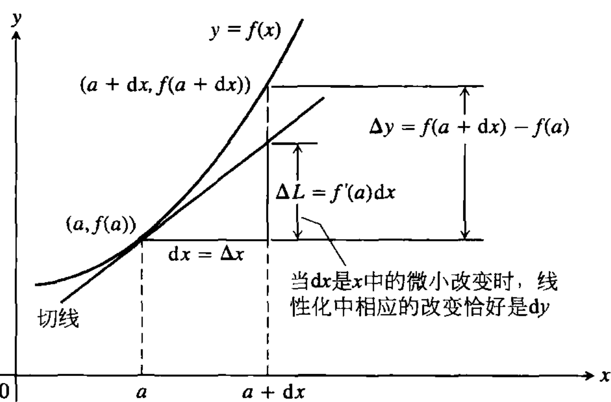



图 3.54　在几何上微分 $dy$ 是当 $x=a$ 改变 $dx=\Delta x$ 时在 $f$ 的线性化中改变 $\Delta L$

微分的几何意义如图 3.54 所示. 令 $x=a$，并设 $dx=\Delta x$. $y=f(x)$ 中相应的改变为

$$\Delta y=f(a+dx)-f(a)$$

切线 $L$ 中相应的改变为

$$\Delta L=L(a+dx)-L(a)=\underbrace{f(a)+f'(a)[(a+dx)-a]}_{L(a+dx)}-\underbrace{f(a)}_{L(a)}=f'(a)dx$$

就是说，$f$ 的线性化中的改变恰好是当 $x=a$ 和 $dx=\Delta x$ 时微分 $dy$ 的值. 所以，$dy$ 代表切线在 $x$ 改变 $dx=\Delta x$ 时升高或降低的量.

若 $dx\neq 0$，则微分 $dy$ 同微分 $dx$ 的商等于导数 $f'(x)$，因为

$$dy\div dx=\frac{f'(x)dx}{dx}=f'(x)=\frac{dy}{dx}$$

有时用记号

$$df=f'(x)dx$$

代替 $dy=f'(x)dx$，称为 ***f* 的微分**. 例如，若 $f(x)=3x^2-6$，则

$$df=d(3x^2-6)=6x\,dx$$

每一种微分法公式有其相应的微分形式，例如

$$\frac{d(u+v)}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}\quad 或\quad \frac{d(\sin u)}{dx}=\cos u\frac{du}{dx}$$

相应的微分形式为

$$d(u+v)=du+dv\quad 或\quad d(\sin u)=\cos u\,du$$

**例 5**

**(a)** $d(\tan 2x)=\sec^2(2x)d(2x)=2\sec^2 2x\,dx$.

**(b)** $d\left(\frac{x}{x+1}\right)=\frac{(x+1)dx-x\,d(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{x\,dx+dx-x\,dx}{(x+1)^2}=\frac{dx}{(x+1)^2}$. ■

### 3.10.3　用微分作估计

假定已经知道可微函数 $f(x)$ 在点 $a$ 的值，我们想要预测从点 $a$ 移到邻近点 $a+dx$ 时函数值有多少变化. 若 $dx=\Delta x$ 是很小的量，则从图 3.54 看出 $\Delta y$ 近似等于微分 $dy$. 由于

$$f(a+dx)=f(a)+\Delta y$$

微分逼近给出

$$f(a+dx)\approx f(a)+dy$$

其中 $dx=\Delta x$. 因此逼近 $\Delta y\approx dy$ 可以用于在 $f(a)$ 为已知和 $dx$ 是很小量时计算 $f(a+dx)$.

**例 6** 圆的半径 $r$ 由 $a=10$ m 增加至 10.1 m(见图 3.55). 利用 $dA$ 估计圆面积 $A$ 的增加值. 估计圆扩大后的面积，并且比较估计面积和圆的实际面积.

**解** 由于 $A=\pi r^2$，估计圆面积的增加为

$$dA = A'(a)dr = 2\pi a\ dr = 2\pi(10)(0.1) = 2\pi\ m^2$$

因此,

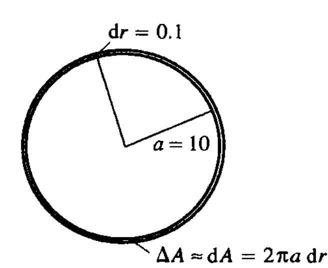
$$A(10+0.1) \approx A(10)+2\pi = \pi(10)^2+2\pi = 102\pi$$

半径为 10.1m 的圆的面积近似等于 $102\pi\ m^2$.

圆的实际面积是

$$A(10.1) = \pi(10.1)^2 = 102.01\pi\ m^2$$

估计的误差为 $0.01\pi\ m^3$，这个值就是差 $\Delta A - dA$.




■ 图 3.55 当 $dr$ 与 $a$ 相比很小时(像 $dr=0.1$ 和 $a=10$ 的情况)，微分 $dA=2\pi a\ dr$ 给出估计半径 $r=a+dr$ 的圆面积的一种方法(例 6)

## 3.10.4 微分逼近中的误差

设 $f(x)$ 在 $x=a$ 是可微的并且假定 $dx=\Delta x$ 是 $x$ 的增量. 我们有两种方法描述当 $x$ 从 $a$ 变为 $a+\Delta x$ 时 $f$ 的改变:

实际改变: $\Delta f = f(a+\Delta x)-f(a)$

微分估计: $df = f'(a)\Delta x$

$df$ 对 $\Delta f$ 的逼近程度如何?

我们用 $\Delta f - df$ 度量逼近误差:

$$\text{逼近误差} = \Delta f - df = \Delta f - f'(a)\Delta x = \underbrace{f(a+\Delta x)-f(a)}_{\Delta f} - f'(a)\Delta x$$

$$= \underbrace{\left(\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} - f'(a)\right)}_{\text{这个部分称为}\varepsilon} \cdot \Delta x = \varepsilon \cdot \Delta x$$

当 $\Delta x \to 0$ 时，差商

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

趋近 $f'(a)$(回忆 $f'(a)$ 的定义)，所以括号中的量变成非常小的数(这是把它称为 $\varepsilon$ 的原因). 事实上，当 $\Delta x \to 0$ 时 $\varepsilon \to 0$. 当 $\Delta x$ 很小时逼近误差 $\varepsilon\Delta x$ 变得更小.

$$\underbrace{\Delta f}_{\text{实际改变}} = \underbrace{f'(a)\Delta x}_{\text{估计改变}} + \underbrace{\varepsilon\Delta x}_{\text{误差}}$$

虽然我们无从确切知道误差小到什么程度，并且在第 8 章之前不可能在这个问题上取得更多进展，但是在这里仍然有重要事实值得指出，那就是公式所取的形式.

> **$y=f(x)$ 在 $x=a$ 附近的改变**
>
> 如果 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 是可微的，并且 $x$ 由 $a$ 变为 $a+\Delta x$，那么 $f$ 的改变 $\Delta y$ 由形式为
>
> $$\Delta y = f'(a)\Delta x + \varepsilon\Delta x \qquad (1)$$
>
> 的公式给出，其中当 $\Delta x \to 0$ 时 $\varepsilon \to 0$.

我们从例 6 中发现

$$\Delta A = \pi(10.1)^2 - \pi(10)^2 = (102.01-100)\pi = (\underbrace{2\pi}_{dA} + \underbrace{0.01\pi}_{\text{误差}})m^2$$

所以逼近误差是 $\Delta A - dA = \varepsilon\Delta r = 0.01\pi$ 而 $\varepsilon = 0.01\pi/\Delta r = 0.01\pi/0.1 = 0.1\pi$ m.

公式(1)使我们能够正确地证明链式法则.

### 3.10.5 链式法则的证明

我们的目标在于证明，如果$f(u)$是$u$的可微函数和$u=g(x)$是$x$的可微函数，那么复合函数$y=f(g(x))$是$x$的可微函数. 更确切地说，若$g$在$x_0$是可微的和$f$在$g(x_0)$是可微的，则复合函数在$x_0$是可微的，且有

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$$

令$\Delta x$是$x$的增量，$\Delta u$和$\Delta y$是$u$和$y$相应的增量. 应用公式(1)得到

$$\Delta u = g'(x_0)\Delta x+\varepsilon_1\Delta x=(g'(x_0)+\varepsilon_1)\Delta x$$

其中当$\Delta x\to 0$时$\varepsilon_1\to 0$. 同样，

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u+\varepsilon_2\Delta u=(f'(u_0)+\varepsilon_2)\Delta u$$

其中当$\Delta u\to 0$时$\varepsilon_2\to 0$. 同时注意，当$\Delta x\to 0$时$\Delta u\to 0$. 结合$\Delta u$和$\Delta y$的等式得到

$$\Delta y=(f'(u_0)+\varepsilon_2)(g'(x_0)+\varepsilon_1)\Delta x$$

所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u_0)g'(x_0)+\varepsilon_2 g'(x_0)+f'(u_0)\varepsilon_1+\varepsilon_2\varepsilon_1$$

由于当$\Delta x$趋近零时$\varepsilon_1$和$\varepsilon_2$趋近零，上式右端4项中的3项在极限下为零，保留

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u_0)g'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$$ ■

### 3.10.6 变化的灵敏度

公式$\mathrm{d}f=f'(x)\mathrm{d}x$表明，对于不同的$x$值在输入变化时输出变化的灵敏性如何. $f'$在$x$的值越大，给定变化$\mathrm{d}x$的作用也越大. 当从点$a$移向邻近点$a+\mathrm{d}x$时，可以用三种方式描述$f$的变化：

| | 实 际 值 | 估 计 值 |
|---|---|---|
| 绝对变化 | $\Delta f=f(a+\mathrm{d}x)-f(a)$ | $\mathrm{d}f=f'(a)\mathrm{d}x$ |
| 相对变化 | $\frac{\Delta f}{f(a)}$ | $\frac{\mathrm{d}f}{f(a)}$ |
| 百分数变化 | $\frac{\Delta f}{f(a)}\times 100$ | $\frac{\mathrm{d}f}{f(a)}\times 100$ |

### 习题 3.10

在习题1~5中，求$f(x)$在$x=a$的线性化$L(x)$.

**1.** $f(x)=x^3-2x+3$，$a=2$.

**2.** $f(x)=\sqrt{x^2+9}$，$a=-4$.

**3.** $f(x)=x+\frac{1}{x}$，$a=1$.

**4.** $f(x)=\sqrt[3]{x}$，$a=-8$.

**5.** $f(x)=\tan x$，$a=\pi$.

**6. 在$x=0$的常用线性逼近** 求下列函数在$x=0$的线性化：

(a) $\sin x$. (b) $\cos x$. (c) $\tan x$.

(d) $\mathrm{e}^x$. (e) $\ln(1+x)$.

在习题7~14中，需在包含给定点$x_0$的区间上用函数的线性化代替函数. 为了使后面的工作尽可能简单，不要以$x_0$为中心求线性化，而是用一个接近的整数$x=a$的点为中心，在这个点容易计算给定函数及其导数的值. 在每题中你使用什么线性化？

**7.** $f(x)=x^2+2x$，$x_0=0.1$.

**8.** $f(x)=x^{-1}$，$x_0=0.9$.

**9.** $f(x)=2x^2+4x-3$，$x_0=-0.9$.

**10.** $f(x)=1+x$，$x_0=8.1$.

**11.** $f(x)=\sqrt[3]{x}$，$x_0=8.5$.

**12.** $f(x)=\frac{x}{x+1}$，$x_0=1.3$.

**13.** $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$，$x_0=-0.1$.

**14.** $f(x)=\sin^{-1}x$，$x_0=\pi/12$.

**15.** 证明$f(x)=(1+x)^k$在$x=0$的线性化是$Lx=1+kx$.

**16.** 利用线性逼近$(1+x)^k\approx 1+kx$求函数$f(x)$对于0附近的$x$值的逼近：

(a) $f(x)=(1-x)^6$. (b) $f(x)=\frac{2}{1-x}$.

(c) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.　　(d) $f(x)=\sqrt{2+x^2}$.

(e) $f(x)=(4+3x)^{1/3}$.

(f) $f(x)=\sqrt[3]{\left(1-\dfrac{1}{2+x}\right)^2}$.

**17. 比计算器更快** 利用逼近 $(1+x)^k\approx 1+kx$ 估计下列值：

(a) $(1.0002)^{50}$.　　(b) $\sqrt[3]{1.009}$.

**18.** 求 $f(x)=\sqrt{x+1}+\sin x$ 在 $x=0$ 的线性化. 它同两个单独的函数 $\sqrt{x+1}$ 和 $\sin x$ 在 $x=0$ 的线性化有什么关系？

在习题 19～38 中，求 $dy$.

**19.** $y=x^3-3\sqrt{x}$.　　**20.** $y=x\sqrt{1-x^2}$.

**21.** $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$.　　**22.** $y=\dfrac{2\sqrt{x}}{3(1+\sqrt{x})}$.

**23.** $2y^{3/2}+xy-x=0$.　　**24.** $xy^2-4x^{3/2}-y=0$.

**25.** $y=\sin(5\sqrt{x})$.　　**26.** $y=\cos(x^2)$.

**27.** $y=4\tan(x^3/3)$.　　**28.** $y=\sec(x^2-1)$.

**29.** $y=3\csc(1-2\sqrt{x})$.　　**30.** $y=2\cot\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

**31.** $y=e^{\sqrt{x}}$.　　**32.** $y=xe^{-x}$.

**33.** $y=\ln(1+x^2)$.　　**34.** $y=\ln\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}\right)$.

**35.** $y=\tan^{-1}(e^{x^2})$.　　**36.** $y=\cot^{-1}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)+\cos^{-1}2x$.

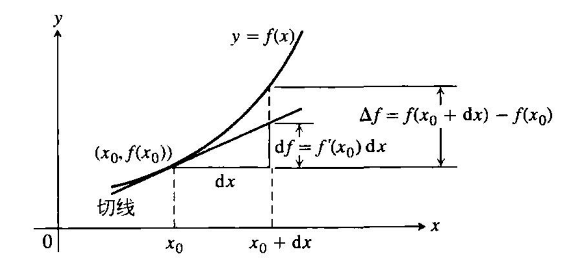
**37.** $y=\sec^{-1}(e^{-x})$.　　**38.** $y=e^{\tan^{-1}\sqrt{x^2+1}}$.

在习题 39～44 中，每个函数 $f(x)$ 当 $x$ 从 $x_0$ 变化为 $x_0+dx$ 时改变值. 求

(a) 变化 $\Delta f=f(x_0+dx)-f(x_0)$；

(b) 估计式 $df=f'(x_0)dx$ 的值；

(c) 逼近误差 $|\Delta f-df|$.




**39.** $f(x)=x^2+2x$，$x_0=1$，$dx=0.1$.

**40.** $f(x)=2x^2+4x-3$，$x_0=-1$，$dx=0.1$.

**41.** $f(x)=x^3-x$，$x_0=1$，$dx=0.1$.

**42.** $f(x)=x^4$，$x_0=1$，$dx=0.1$.

**43.** $f(x)=x^{-1}$，$x_0=0.5$，$dx=0.1$.

**44.** $f(x)=x^3-2x+3$，$x_0=3$，$dx=0.1$.

在习题 45～50，写出用于估计所给体积或表面积变化的微分公式.

**45.** 当球的半径从 $r_0$ 变为 $r_0+dr$ 时体积 $V=(4/3)\pi r^3$ 的变化.

**46.** 当立方体的边长从 $x_0$ 变为 $x_0+dx$ 时体积 $V=x^3$ 的变化.

**47.** 当立方体的边长从 $x_0$ 变为 $x_0+dx$ 时表面积 $S=6x^2$ 的变化.

**48.** 当正圆锥体的半径从 $r_0$ 变为 $r_0+dr$ 而高度不变时侧面积 $S=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$ 的变化.

**49.** 当正圆柱体的半径从 $r_0$ 变为 $r_0+dr$ 而高度不变时体积 $V=\pi r^2h$ 的变化.

**50.** 当正圆柱体的高度从 $h_0$ 变为 $h_0+dh$ 而半径不变时侧面积 $V=2\pi rh$ 的变化.

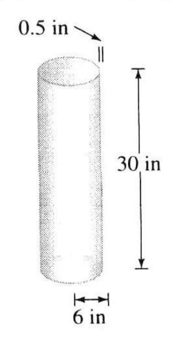
**51.** 圆的半径从 2.00 m 增加到 2.02 m.

(a) 估计圆面积的变化.

(b) 把估值表示成原有圆面积的百分数.

**52.** 一棵树的直径为 10 英寸. 在下一年，树的圆周增加 2 英寸. 树的直径大约增加多少？树的截面积增加多少？

**53. 估计体积** 估计圆柱筒材料的体积，筒高 30 英寸，半径 6 英寸，厚 0.5 英寸.




**54. 估计建筑物的高度** 测量员站在距离建筑物地基 30 英尺的地方，测量出建筑物顶端的仰角为 75°. 为使建筑物高度估计的百分比误差小于 4%，仰角的测量必须达到怎样的精度？

**55. 容差** 正圆柱体的高度和半径相等，所以圆柱体体积为 $V=\pi r^3$. 要求计算体积的误差不超过实际体积的 1%. 求在 $h$ 的测量中能够允许的最大近似误差，把它表示成 $h$ 的百分数.

**56. 容差**

(a) 在测量 10 米高的圆柱形贮藏桶的内径时，必须达到怎样的精度才能使计算桶体积的误差不超过实际值的 1%？

(b) 在测量桶的外径时，必须达到怎样的精度

才能使计算油漆桶面所需油漆量的误差不超过实际值的5%？

57. **铸造硬币** 铸币商承包为联邦政府铸造硬币．如果限制硬币重量的误差不超过标准重量的1/1 000，硬币半径能够容许的变化 $dr$ 是多少？假定硬币的厚度不变．

58. **利润率** 某家制造商销售 $x$ 件产品的利润率为
$$P(x)=200xe^{-x/400}$$
当销售产品由 $x=145$ 件改成 $x=150$ 件时，估计 $P$ 的变化和变化的百分数．

59. **飞行活动对心脏的影响** 左心室是心脏输送血液的主腔，它作的功由公式
$$W=PV+\frac{V\delta v^2}{2g}$$
给出，其中 $W$ 是每单位时间作的功，$P$ 是平均血压，$V$ 是单位时间输出血液的容积，$\delta$ 是血液的重量密度，$v$ 是流出血液的平均速度，$g$ 是重力加速度．

当 $P$，$V$，$\delta$ 和 $v$ 保持不变时，$W$ 成为 $g$ 的函数，公式具有简化形式
$$W=a+\frac{b}{g}\quad(a,b\text{ 是常数})$$
如果你是美国宇航局医疗队的一名医生，需要了解 $W$ 对于由飞行活动引起的 $g$ 的明显变化所具有的敏感性，而且这一点取决于 $g$ 的初始值．作为调查工作的一部分，你决定对比月球上和地球上同样的变化 $dg$ 对 $W$ 的影响，在月球上 $g=5.2\ \mathrm{ft/s^2}$，而在地球上 $g=32\ \mathrm{ft/s^2}$．利用上面的简化公式求 $dW_{地球}$ 和 $dW_{月球}$ 的比值．

60. **测量重力加速度** 通过控制温度使时钟的摆长 $L$ 保持不变．这时摆的周期 $T$ 取决于重力加速度 $g$．因此，当时钟从地球表面一个地方移到另一个地方时，摆的周期随着 $g$ 的改变而有轻微的变化．通过记录 $\Delta T$，我们可以从表示 $T$，$g$ 和 $L$ 关系的公式 $T=2\pi(L/g)^{1/2}$ 中估计 $g$ 的变化．
   (a) 保持 $L$ 不变和以 $g$ 为自变量，计算 $dT$ 并且用它回答(b)和(c)中的问题．
   (b) 如果 $g$ 增加，$T$ 随之增加还是减少？摆钟的走动加快还是放慢？说明理由．
   (c) 摆长为 100 cm 的时钟，从 $g=980\ \mathrm{cm/s^2}$ 的地方移到一处新位置，这使摆周期增加 $dT=0.001$ s．求 $dg$ 并估计 $g$ 在新位置的值．

61. 测出立方体的边长为 10 cm，误差为 1%．用这个测量值计算立方体的体积．估计体积计算中的百分率误差．

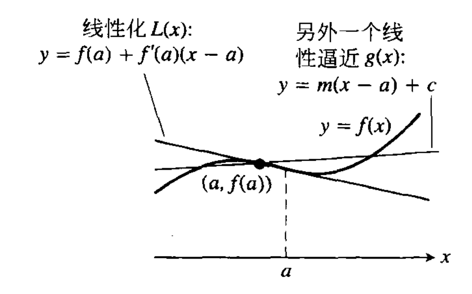
62. 为保证计算正方形面积同实际面积之差不超过 2%，对边长的测量应保持怎样的精度？

63. 测出球的直径为 $100\pm1$ cm，并用这个测量值计算球的体积．估计体积计算中的百分率误差．

64. 如果限制计算球体体积的误差不超过 3%，估计测量球体直径 $D$ 能够容许的百分率误差．

65. **线性化是最佳线性逼近** （这是我们使用线性化的原因．）假设 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 是可微的，并且 $g(x)=m(x-a)+c$ 是线性函数，其中 $m$ 和 $c$ 为常数．如果误差 $E(x)=f(x)-g(x)$ 在 $x=a$ 邻近足够小，可以设想用 $g$ 而不用线性化 $L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$ 作为 $f$ 的线性逼近．证明：若对 $g$ 加上条件
   (1) $E(a)=0$（逼近误差在 $x=a$ 为零）
   (2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{E(x)}{x-a}=0$（误差同 $x-a$ 比较是可以忽略的）

   则 $g(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$．因此，线性化 $L(x)$ 给出唯一的线性逼近，它的误差在 $x=a$ 为零，而同 $x-a$ 相比是可以忽略的．




66. **二次逼近**
   (a) 设 $Q(x)=b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2$ 是 $f(x)$ 在 $x=a$ 的二次逼近，满足条件：
      (i) $Q(a)=f(a)$
      (ii) $Q'(a)=f'(a)$
      (iii) $Q''(a)=f''(a)$
      确定系数 $b_0$，$b_1$ 和 $b_2$．
   (b) 求 $f(x)=1/(1-x)$ 在 $x=0$ 的二次逼近．
   **T** (c) 画出 $f(x)=1/(1-x)$ 及其在 $x=0$ 的二次逼近的图形．然后在点(0，1)放大这两个图形．说明从图中见到的情况．
   **T** (d) 求 $g(x)=1/x$ 在 $x=1$ 的二次逼近．画出 $g$ 及其二次逼近的图形．说明从图中见到的情况．
   **T** (e) 求 $h(x)=\sqrt{1+x}$ 在 $x=0$ 的二次逼近．画出 $h$ 及其二次逼近的图形．说明从图中见到的情况．

(f) 在(b)，(d)和(e)中，$f$, $g$ 和 $h$ 在各自点的线性化是什么？

**67. $2^x$ 的线性化**

(a) 求 $f(x)=2^x$ 在 $x=0$ 的线性化. 然后对它的系数舍入到两位小数.

T (b) 一起绘制线性化和函数对于 $-3\leqslant x\leqslant 3$ 和 $-1\leqslant y\leqslant 1$ 的图形.

**68. $\log_3 x$ 的线性化**

(a) 求 $f(x)=\log_3 x$ 在 $x=3$ 的线性化. 然后对它的系数舍入到两位小数.

T (b) 在窗口 $0\leqslant x\leqslant 8$ 和 $2\leqslant y\leqslant 4$ 一起绘制线性化和函数的图形.

**计算机探究**

在习题 69～74 中，用一种 CAS(计算机代数系统)估计在指定的区间 $I$ 上用线性化代替函数产生的误差的大小. 执行下列处理步骤：

(a) 绘制函数 $f$ 在 $I$ 上的图形.

(b) 求函数在点 $a$ 的线性化 $L$.

(c) 在一幅图上一起绘制 $f$ 和 $L$ 的图形.

(d) 绘制绝对误差 $|f(x)-L(x)|$ 在 $I$ 上的图形并且求它的最大值.

(e) 从(d)的图形中，对 $\delta>0$ 作出一个尽可能大的估计，使得对于 $\varepsilon=0.5$, 0.1 和 0.01 满足

$$|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L(x)|<\varepsilon$$

然后从图形上检验你作出的 $\delta$ 估计是否正确.

**69.** $f(x)=x^3+x^2-2x$. $[-1, 2]$, $a=1$.

**70.** $f(x)=\dfrac{x-1}{4x^2+1}$, $\left[-\dfrac{3}{4}, 1\right]$, $a=\dfrac{1}{2}$.

**71.** $f(x)=x^{2/3}(x-2)$, $[-2, 3]$, $a=2$.

**72.** $f(x)=\sqrt{x}-\sin x$, $[0, 2\pi]$, $a=2$.

**73.** $f(x)=x2^x$, $[0, 2]$, $a=1$.

**74.** $f(x)=\sqrt{x}\,\sin^{-1}x$, $[0, 1]$, $a=\dfrac{1}{2}$.

## 3.11 双曲函数

双曲函数由两个指数函数 $e^x$ 和 $e^{-x}$ 组合而成. 双曲函数使许多数学表达式得以简化并且频繁出现在各种数学应用中. 例如双曲函数被用于计算悬吊在两个支架上的电缆(如输电线)的张力. 这一节对双曲函数及其图形和导数作简单介绍.

### 3.11.1 定义与恒等式

双曲正弦函数和双曲余弦函数由表 3.2 中前两个方程定义. 表中同时列出双曲正切、双曲余切、双曲正割和双曲余割的定义. 像我们将会看到的那样，双曲函数同三角函数具有若干相似性，双曲函数是仿照三角函数命名的.

记号 $\cosh x$ 通常念成“kosh $x$”，与“gosh $x$”同韵；$\sinh x$ 按“cinch $x$”拼写读音，与“pinch $x$”同韵.

双曲函数满足表 3.3 中的恒等式. 除开符号上的差别外，这些恒等式同我们所知的三角函数恒等式类似. 双曲函数恒等式由定义直接证明，如第二个恒等式的证明：

$$2\sinh x\cosh x = 2\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}=\sinh 2x$$

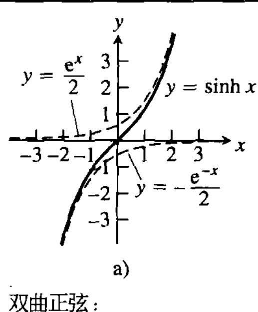
其他恒等式由同样的方法得到，即在双曲函数的定义中进行代换，并利用代数运算. 像很多标准函数那样，双曲函数以及它们的反函数很容易用计算器求值，计算器有实现这种计算的特殊操作键序列.

对于任何实数 $u$，我们知道带有坐标$(\cos u, \sin u)$的点位于单位圆 $x^2+y^2=1$ 上. 所以有时把三角函数称为圆函数. 由于第一个恒等式

$$\cosh^2 u-\sinh^2 u = 1$$

(在表 3.3 中用 $u$ 代换 $x$)，带有坐标$(\cosh u, \sinh u)$的点位于双曲线 $x^2-y^2=1$ 的右支上. 这是双曲函数得名的由来.

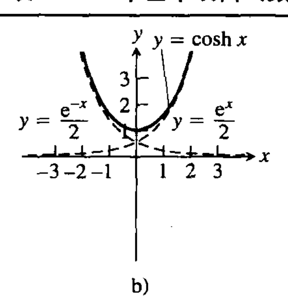
**表 3.2 6个基本双曲函数**




a)

双曲正弦：

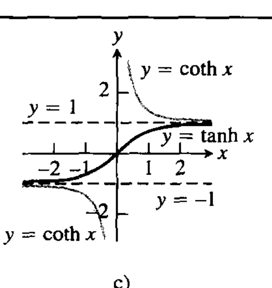
$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$




b)

双曲余弦：

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$



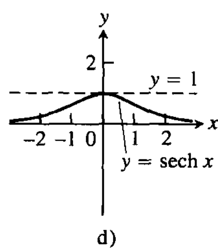

c)

双曲正切：

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

双曲余切：

$$\coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$




d)

双曲正割：

$$\operatorname{sech} x=\frac{1}{\cosh x}=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$$

e)

双曲余割：

$$\operatorname{csch} x=\frac{1}{\sinh x}=\frac{2}{e^x-e^{-x}}$$

**表 3.3 双曲函数的恒等式**

$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$

$\sinh 2x=2\sinh x\cosh x$

$\cosh 2x=\cosh^2 x+\sinh^2 x$

$\cosh^2 x=\dfrac{\cosh 2x+1}{2}$

$\sinh^2 x=\dfrac{\cosh 2x-1}{2}$

$\tanh^2 x=1-\operatorname{sech}^2 x$

$\coth^2 x=1+\operatorname{csch}^2 x$

**表 3.4 双曲函数的导数**

$\dfrac{d}{dx}(\sinh u)=\cosh u\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\cosh u)=\sinh u\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\tanh u)=\operatorname{sech}^2 u\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\coth u)=-\csc^2 u\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sech} u)=-\operatorname{sech} u\tanh u\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\operatorname{csch} u)=-\operatorname{csch} u\coth u\dfrac{du}{dx}$

## 3.11.2 双曲函数的导数

6个双曲函数是可微函数 $e^x$ 和 $e^{-x}$ 的有理式组合，在它们有定义的每个点存在导数（见表3.4）. 这是三角函数的另一个相似性.

这些导数公式由 $e^u$ 的导数推出：

$$\frac{d}{dx}(\sinh u)=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^u-e^{-u}}{2}\right)\quad(\sinh u\ \text{的定义})$$

$$=\frac{e^u du/dx+e^{-u}du/dx}{2}\quad(e^u\ \text{的导数})$$

$$=\cosh u\frac{du}{dx}\quad(\cosh u\ \text{的定义})$$

这给出第一个导数公式. 计算

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{csch} u) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\sinh u}\right) \quad (\operatorname{csch} u \text{ 的定义})\\ &= -\frac{\cosh u}{\sinh^2 u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \quad (\text{商法则})\\ &= -\frac{1}{\sinh u}\frac{\cosh u}{\sinh u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \quad (\text{调整项})\\ &= -\operatorname{csch} u \coth u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \quad (\operatorname{csch} u \text{ 和 } \coth u \text{ 的定义})\end{aligned}$$

给出最后一个公式. 其他公式用同样的方法推出.

**例 1** 从表 3.4，求导数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\mathrm{h}\sqrt{1+t^2}) = \operatorname{sech}^2\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sqrt{1+t^2}) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\operatorname{sech}^2\sqrt{1+t^2}$$ ■

### 3.11.3 反双曲函数

6 个基本双曲函数的反函数在积分法中是非常有用的(参见第 7 章). 由于 $\mathrm{d}(\sinh x)/\mathrm{d}x = \cosh x > 0$，双曲正弦是 $x$ 的增函数. 它的反函数记为

$$y = \sinh^{-1}x$$

对于区间 $-\infty < x < \infty$ 中的每个 $x$ 值，$y = \sinh^{-1}x$ 的值是一个数，它的双曲正弦为 $x$. $y = \sinh x$ 和 $y = \sinh^{-1}x$ 的图形显示在图 3.56a 中.

函数 $y = \cosh x$ 不是一对一函数，正如可以从表 3.2 中它的图形看出的那样. 但是，如果限制 $x \geqslant 0$，函数 $y = \cosh^{-1}x$ 成为一对一的，因此存在反函数，记为

$$y = \cosh^{-1}x$$

对于每个 $x \geqslant 1$ 的值，$y = \cosh^{-1}x$ 的值是区间 $0 \leqslant y < \infty$ 中的一个数，它的双曲余弦为 $x$. $y = \cosh x$，$x \geqslant 0$ 和 $y = \cosh^{-1}x$ 的图形显示在图 3.56b 中.

像 $y = \cosh x$ 一样，函数 $y = \operatorname{sech} x = 1/\cosh x$ 不是一对一函数，但是如果限制 $x$ 取非负值，那么 $y = \operatorname{sech} x$ 是一对一的，故有反函数，记为

$$y = \operatorname{sech}^{-1}x$$

对于区间(0，1]中的每个 $x$ 值，$y = \operatorname{sech}^{-1}x$ 是一个非负数，它的双曲正割为 $x$. $y = \operatorname{sech} x$，$x \geqslant 0$ 和 $y = \operatorname{sech}^{-1}x$ 的图形显示在图 3.56c 中.

双曲正切、双曲余切和双曲正割在它们的定义域上是一对一的函数，因此存在反函数，记为

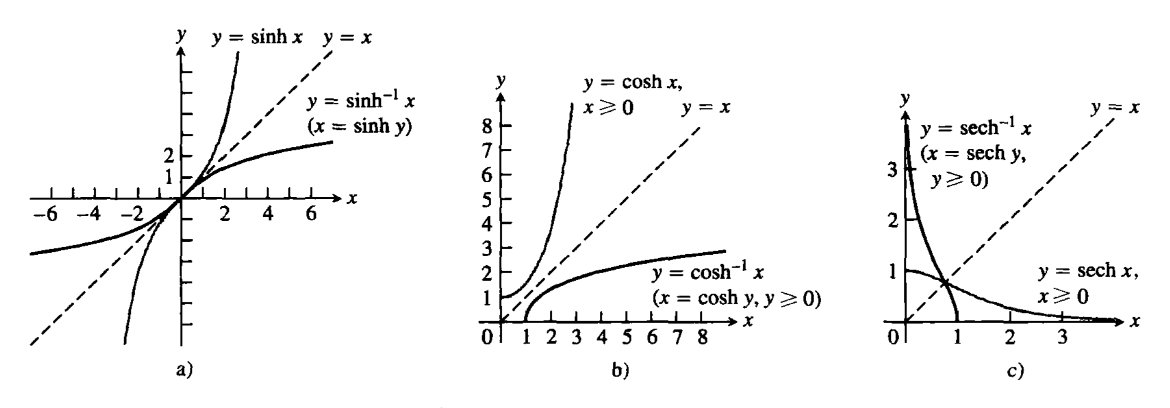



图 3.56 $x$ 的反双曲正弦、反双曲余弦和反双曲正割的图形，请注意它们关于直线 $y = x$ 的对称性

$$y = \tanh^{-1}x,\quad y = \coth^{-1}x,\quad y = \operatorname{csch}^{-1}x$$

这几个函数的图形见图 3.57.

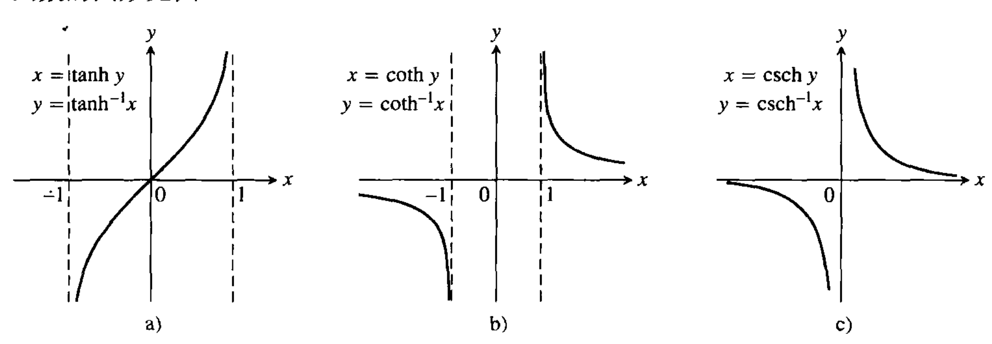



图 3.57　$x$ 的反双曲正切、反双曲余切和反双曲余割的图形

### 3.11.4　有用的恒等式

我们用表 3.5 中的恒等式在只给出 $\cosh^{-1}x$，$\sinh^{-1}x$ 和 $\tan^{-1}x$ 的计算器上计算 $\operatorname{sech}^{-1}x$，$\operatorname{csch}^{-1}x$ 和 $\coth^{-1}x$ 的值. 这几个恒等式直接由定义推出. 例如，若 $0 \leqslant x \leqslant 1$，则

$$\operatorname{sech}\left(\cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{\cosh\left(\cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = x$$

所以

$$\cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sech}^{-1}x$$

因为双曲正割在区间(0, 1]上是一对一的函数.

**表 3.5**

| |
|---|
| $\operatorname{sech}^{-1}x = \cosh^{-1}\frac{1}{x}$ |
| $\operatorname{csch}^{-1}x = \sinh^{-1}\frac{1}{x}$ |
| $\coth^{-1}x = \tanh^{-1}\frac{1}{x}$ |

### 3.11.5　反双曲函数的导数

我们将会看到，反双曲函数的主要用处是在积分法中使表 3.6 中的导数公式反演为积分公式.

对于 $\tanh^{-1}u$ 和 $\coth^{-1}u$ 的导数公式分别加上限制 $|u|<1$ 和 $|u|>1$，这是源于对这两个函数取值的自然限制(参见图 3.57a 和 b). 当我们把导数公式反演成第 5 章表 5.7 中的积分公式时，$|u|<1$ 和 $|u|>1$ 之间的区别是很重要的.

在下面的例 2 中说明如何求反双曲函数的导数，其中要计算 $d(\cosh^{-1}u)/dx$. 其他反双曲函数的导数用同样的计算得到.

**表 3.6　反双曲函数的导数**

| | |
|---|---|
| $\frac{d(\sinh^{-1}u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}$ | |
| $\frac{d(\cosh^{-1}u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx},$ | $u>1$ |
| $\frac{d(\tanh^{-1}u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx},$ | $\|u\|<1$ |
| $\frac{d(\coth^{-1}u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx},$ | $\|u\|>1$ |
| $\frac{d(\operatorname{sech}^{-1}u)}{du} = \frac{-du/dx}{u\sqrt{1-u^2}},$ | $0<u<1$ |
| $\frac{d(\operatorname{csch}^{-1}u)}{dx} = \frac{-du/dx}{\|u\|\sqrt{1+u^2}},$ | $u\neq 0$ |

**例 2**　证明：若 $u$ 是 $x>0$ 的可微函数，则

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

**解**　首先，对 $f(x)=\cosh x$ 和 $f^{-1}(x)=\cosh^{-1}x$ 应用定理 4，求 $y=\cosh^{-1}x$ 对于 $x>1$ 的导数. 由于 $\cosh x$ 的导数在 $x>0$ 时为正，所以可以应用定理 4：

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\qquad（定理 4）$$

$$= \frac{1}{\sinh(\cosh^{-1}x)} \qquad (f'(u) = \sinh u)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\cosh^{-1}x) - 1}} \qquad (\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1, \sinh u = \sqrt{\cosh^2 u - 1})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad (\cosh(\cosh^{-1}x) = x)$$

由链式法则得到最后结果：

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx}$$ ■

**人物传记**

索尼亚·柯瓦列夫斯基
(Sonya Kovalevsky,
1850—1891)

## 习题 3.11

在习题 1 ~ 4 中，每题给出 $\sinh x$ 或 $\cosh x$ 的一个值. 利用定义和恒等式 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ 求其余 5 个双曲函数的值.

**1.** $\sinh x = -\frac{3}{4}$. **2.** $\sinh x = \frac{4}{3}$.

**3.** $\cosh x = \frac{17}{15}$, $x > 0$. **4.** $\cosh x = \frac{13}{5}$, $x > 0$.

在习题 5 ~ 10 中，通过指数函数重写表达式，并且尽可能简化结果.

**5.** $2\cosh(\ln x)$. **6.** $\sinh(2\ln x)$.

**7.** $\cosh 5x + \sinh 5x$. **8.** $\cosh 3x - \sinh 3x$.

**9.** $(\sinh x + \cosh x)^4$.

**10.** $\ln(\cosh x + \sinh x) + \ln(\cosh x - \sinh x)$.

**11.** 利用恒等式

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

证明

**(a)** $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$.

**(b)** $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$.

**12.** 利用 $\cosh x$ 和 $\sinh x$ 的定义证明

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

在习题 13 ~ 24 中，求 $y$ 关于相应变量的导数.

**13.** $y = 6\sinh\frac{x}{3}$. **14.** $y = \frac{1}{2}\sinh(2x+1)$.

**15.** $y = 2\sqrt{t}\tanh\sqrt{t}$. **16.** $y = t^2\tanh\frac{1}{t}$.

**17.** $y = \ln(\sinh z)$. **18.** $y = \ln(\cosh z)$.

**19.** $y = \operatorname{sech}\theta(1 - \ln\operatorname{sech}\theta)$.

**20.** $y = \operatorname{csch}\theta(1 - \ln\operatorname{csch}\theta)$.

**21.** $y = \ln\cosh v - \frac{1}{2}\tanh^2 v$.

**22.** $y = \ln\sinh v - \frac{1}{2}\coth^2 v$.

**23.** $y = (x^2+1)\operatorname{sech}(\ln x)$.
(提示：在求导数之前，用指数函数表示并且化简.)

**24.** $y = (4x^2 - 1)\operatorname{csch}(\ln 2x)$.

在习题 25 ~ 36 中，求 $y$ 关于相应变量的导数.

**25.** $y = \sinh^{-1}\sqrt{x}$. **26.** $y = \cosh^{-1}2\sqrt{x+1}$.

**27.** $y = (1-\theta)\tanh^{-1}\theta$.

**28.** $y = (\theta^2 + 2\theta)\tanh^{-1}(\theta+1)$.

**29.** $y = (1-t)\coth^{-1}\sqrt{t}$. **30.** $y = (1-t^2)\coth^{-1}t$.

**31.** $y = \cos^{-1}x - x\operatorname{sech}^{-1}x$.

**32.** $y = \ln x + \sqrt{1-x^2}\operatorname{sech}^{-1}x$.

**33.** $y = \operatorname{csch}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^\theta$. **34.** $y = \operatorname{csch}^{-1}2^\theta$.

**35.** $y = \sinh^{-1}(\tan x)$.

**36.** $y = \cosh^{-1}(\sec x)$, $0 < x < \pi/2$.

当计算器不提供计算双曲函数的操作键时，仍然可能通过如下面所示的方法把反双曲函数表示成对数函数求它们的值：

$$\sinh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad -\infty < x < \infty$$

$$\cosh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad x \geqslant 1$$

$$\tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1$$

$$\operatorname{sech}^{-1}x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right), \quad 0 < x \leqslant 1$$

$$\operatorname{csch}^{-1}x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right), \quad x \neq 0$$

$$\coth^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}, \quad |x| > 1$$

利用方框中的公式以自然对数函数表示习题 37 ~ 42 中的函数值.

**37.** $\sinh^{-1}(-5/12)$.　　**38.** $\cosh^{-1}(5/3)$.

**39.** $\tanh^{-1}(-1/2)$.　　**40.** $\coth^{-1}(5/4)$.

**41.** $\operatorname{sech}^{-1}(3/5)$.　　**42.** $\operatorname{csch}^{-1}(-1/\sqrt{3})$.

**43.** 证明：如果函数 $f$ 是在一个区间上定义的关于原点对称的函数(所以只要 $f$ 在 $x$ 有定义，它在 $-x$ 就有定义)，那么

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

然后证明 $(f(x)+f(-x))/2$ 是偶函数，$(f(x)-f(-x))/2$ 是奇函数. 上述等式如何把 $e^x$ 同 $\sinh x$ 和 $\cosh x$ 联系起来？

**44.** 推导公式 $\sinh^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，$-\infty<x<\infty$. 解释导出公式的方根前用正号而不用负号的原因.

**45. 跳伞** 如果质量为 $m$ 的人体在重力作用下从静止状态下落，当遇到同速度平方成正比的空气阻力时，下落 $t$ 秒后人体的速度满足微分方程

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv^2$$

其中 $k$ 是依赖于人体的空气动力学特性和空气密度的常数. (我们假定下落的时间足够短，空气密度的变化对结果无明显影响.)

(a) 证明

$$v=\sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}\,t\right)$$

满足微分方程和 $t=0$ 时的初值条件 $v=0$.

(b) 求人体下落的极限速度 $\lim\limits_{t\to\infty}v$.

(c) 对于一名体重 160 磅的跳伞运动员($mg=160$)，$k$ 以秒为时间单位和英尺为距离单位的典型值是 0.005. 跳伞运动员的极限速度是多少?

**46. 大小同位移成正比的加速度** 假设沿一条坐标线运动的物体在 $t$ 时的位置为

(a) $s=a\cos kt+b\sin kt$

(b) $s=a\cosh kt+b\sinh kt$

证明在两种情况下的加速度 $d^2s/dt^2$ 都同 $s$ 成正比，但是在第一种情况物体是向原点运动，而在第二种情况物体是背离原点运动.

**47.** 利用双曲函数的定义求下列每一个极限：

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\tanh x$.　　(b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\tanh x$.

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\sinh x$.　　(d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sinh x$.

(e) $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{sech} x$.　　(f) $\lim\limits_{x\to\infty}\coth x$.

(g) $\lim\limits_{x\to0^+}\coth x$.　　(h) $\lim\limits_{x\to0^-}\coth x$.

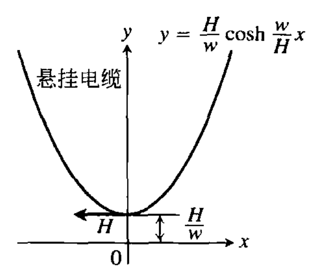
(i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{csch} x$.

**48.** 利用隐式微分法和链式法则求 $y=\cosh^{-1}x$，$x>1$ 的导数，而不像在例 2 中那样利用定理 4.

**49. 悬挂电缆** 想象一根电缆(如电话线或者 TV 电缆)自由悬挂在两个支架上. 电缆每单位长度上的重量 $w$ 是常数，它的最低点的水平张力是长度为 $H$ 的向量. 如果在电缆所在的平面选择坐标系，$x$ 轴在水平方向，重力垂直向下，正 $y$ 轴垂直向上，电缆的最低点位于 $y$ 轴上的点 $y=H/w$(参见附图)，那么可以证明电缆沿双曲余弦

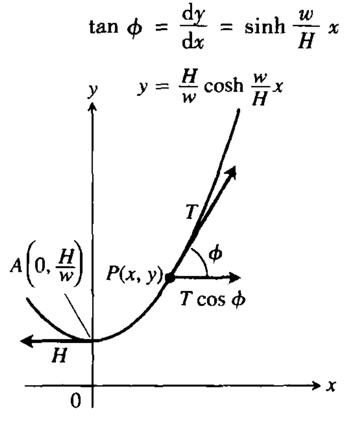
$$y=\frac{H}{w}\cosh\frac{w}{H}x$$

的图形悬垂. 这样一条曲线有时称为**链曲线**或者**悬链线**. 后面这个名称悬链线(catenary)来源于拉丁字"catena"，原意为"链"(chain).




(a) 令 $P(x,y)$ 表示电缆上的任意点，下面附图显示在 $P$ 的张力是长度(大小)为 $T$ 的向量，以及在最低点 $A$ 的张力是 $H$. 证明电缆在 $P$ 的斜率是

$$\tan\phi=\frac{dy}{dx}=\sinh\frac{w}{H}x$$




(b) 利用从(a)得到的结果以及在 $P$ 的水平张力必须等于 $H$(电缆不移动)这个事实，证明 $T=wy$. 因此，在 $P(x,y)$ 的张力的大小恰好等于 $y$ 单位长电缆的重量.

**50.** (续习题 49) 习题 49 附图中弧 $AP$ 的长度是 $(1/a)\sinh ax$，其中 $a=w/H$. 证明 $P$ 的坐标可以用 $s$ 表示成

$$x=\frac{1}{a}\sinh^{-1}as,\quad y=\sqrt{s^2+\frac{1}{a^2}}$$

## 第3章复习指导问题

1. 什么是函数$f$的导数？它的定义域和$f$的定义域有何关系？举出一些例子.
2. 导数在定义斜率、切线和变化率中起着什么作用？
3. 在某些情况下，你所能得到的是函数值的表，这时如何绘制导数的图形？
4. 一个函数在开区间上可微的含义是什么，在闭区间上可微的含义是什么？
5. 导数和单侧导数有何关系？
6. 从几何上描述通常在什么情况下函数在一点没有导数.
7. 函数在一点的可微性同它在那一点的连续性有何关系(无论怎样的关系)？
8. 单位阶跃函数

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

能否成为区间$[-1,1]$上某个其他函数的导数？予以说明.

9. 你知道哪些计算导数的法则？举出一些例子.
10. 说明下面三个公式能使我们怎样求任何多项式的导数：

(a) $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$.　(b) $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$.

(c) $\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_n}{dx}$.

11. 在求有理函数的导数时，除开问题10中列出的三个公式外，还需要用什么公式？
12. 什么是二阶导数和三阶导数？你知道函数有多少阶导数？举出一些例子.
13. 指数函数$e^x$的导数是什么？对于这个函数如何比较导数的定义域和函数的定义域？
14. 函数的平均变化率同瞬时变化率之间存在什么关系？举一个例子.
15. 导数在研究运动中是怎样出现的？通过考察物体沿直线运动的位置函数的导数，对于物体的运动能够了解什么？举出一些例子.
16. 导数怎样出现在经济学中？
17. 列举导数应用的其他例子.
18. 极限$\lim_{h\to 0}((\sin h)/h)$和$\lim_{h\to 0}((\cos h - 1)/h)$同正弦函数和余弦函数的导数有什么关系？这两个函数的导数是什么？
19. 一旦知道$\sin x$和$\cos x$的导数后，如何求$\tan x$，$\cot x$，$\sec x$和$\csc x$的导数？这些函数的导数是什么？
20. 6个基本三角函数在什么点是连续的？你是怎样知道的？
21. 对于两个可微函数的复合函数，求导数的法则是什么？如何求这样一个导数？举出一些例子.
22. 参数化曲线$x=f(t)$，$y=g(t)$的斜率$dy/dx$的公式是什么？什么时候应用这个公式？什么时候还可能求$d^2y/dx^2$？举出一些例子.
23. 如果$u$是$x$的可微函数，如何求$n$为整数时的$(d/dx)(u^n)$？当$n$为实数时如何求这个导数？举出一些例子.
24. 什么是隐式微分法？什么时候需要用它？举出一些例子.
25. 什么是自然对数函数$\ln x$的导数？如何比较这个导数和函数的定义域？
26. 什么是指数函数$a^x$ $(a>0, a\neq 1)$的导数？$(a^h-1)/h$当$h\to 0$的极限的几何意义是什么？当$a$是数e时的极限是什么？
27. 什么是$\log_a x$的导数？对于$a$有任何限制吗？
28. 什么是对数微分法？举一个例子.
29. 怎样把$x$的任意实数幂表示成e的幂？对于$x$有何限制？这样如何导致对任意实数幂求微分的幂法则？
30. 用什么方法把特殊数e表示成一个极限？e准确到7位小数的近似值是什么？
31. 反三角函数的导数是什么？如何比较反三角函数导数的定义域和反三角函数的定义域？
32. 相关变化率问题是怎样引起的？举出一些例子.
33. 概述求解相关变化率问题的对策. 用一个例子说明.
34. 什么是一个函数$f(x)$在点$x=a$的线性化$L(x)$？为了使$f$存在线性化，要求$f$在$x=a$满足什么条件？怎样利用线性化？举出一些例子.
35. 如果$x$从$a$移动到邻近值$a+dx$，如何估计可微函数$f(x)$的值的相应变化？如何估计相对变化和百分数变化？举一个例子.
36. 6个基本双曲函数是什么？对于它们的定义域、值域和图形作出说明. 使它们发生联系的那些恒等式是什么？
37. 6个基本双曲函数的导数是什么？你从中看出同6个基本三角函数有什么相似性？
38. 如何定义反双曲函数？对于它们的定义域、值域和图形作出说明. 怎样使用计算器用于$\cosh^{-1}x$，$\sinh^{-1}x$和$\tanh^{-1}x$的操作键求$\text{sech}^{-1}x$，$\text{csch}^{-1}x$和$\coth^{-1}x$的值？

## 第3章实习习题

在习题1～64中，求函数的导数.

**1.** $y=x^5-0.125x^2+0.25x$.

**2.** $y=3-0.7x^3+0.3x^7$.

**3.** $y=x^3-3(x^2+\pi^2)$.

**4.** $y=x^7+\sqrt{7}x-\frac{1}{\pi+1}$.

**5.** $y=(x+1)^2(x^2+2x)$.

**6.** $y=(2x-5)(4-x)^{-1}$.

**7.** $y=(\theta^2+\sec\theta+1)^3$.

**8.** $y=\left(-1-\frac{\csc\theta}{2}-\frac{\theta^2}{4}\right)^2$.

**9.** $s=\frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$.

**10.** $s=\frac{1}{\sqrt{t}-1}$.

**11.** $y=2\tan^2x-\sec^2x$.

**12.** $y=\frac{1}{\sin^2x}-\frac{2}{\sin x}$.

**13.** $s=\cos^4(1-2t)$.

**14.** $s=\cot^3\left(\frac{2}{t}\right)$.

**15.** $s=(\sec t+\tan t)^5$.

**16.** $s=\csc^5(1-t+3t^2)$.

**17.** $r=\sqrt{2\theta\sin\theta}$.

**18.** $r=2\theta\sqrt{\cos\theta}$.

**19.** $r=\sin\sqrt{2\theta}$.

**20.** $r=\sin(\theta+\sqrt{\theta+1})$.

**21.** $y=\frac{1}{2}x^2\csc\frac{2}{x}$.

**22.** $y=2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$.

**23.** $y=x^{-1/2}\sec(2x)^2$.

**24.** $y=\sqrt{x}\csc(x+1)^3$.

**25.** $y=5\cot x^2$.

**26.** $y=x^2\cot 5x$.

**27.** $y=x^2\sin^2(2x^2)$.

**28.** $y=x^{-2}\sin^2(x^3)$.

**29.** $s=\left(\frac{4t}{t+1}\right)^{-2}$.

**30.** $s=\frac{-1}{15(15t-1)^3}$.

**31.** $y=\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)^2$.

**32.** $y=\left(\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}\right)^2$.

**33.** $y=\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}$.

**34.** $y=4x\sqrt{x+\sqrt{x}}$.

**35.** $r=\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta-1}\right)^2$.

**36.** $r=\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)^2$.

**37.** $y=(2x+1)\sqrt{2x+1}$.

**38.** $y=20(3x-4)^{1/4}(3x-4)^{-1/5}$.

**39.** $y=\frac{3}{(5x^2+\sin 2x)^{3/2}}$.

**40.** $y=(3+\cos^3 3x)^{-1/3}$.

**41.** $y=10e^{-x/5}$.

**42.** $y=\sqrt{2}\,e^{\sqrt{2}x}$.

**43.** $y=\frac{1}{4}xe^{4x}-\frac{1}{16}e^{4x}$.

**44.** $y=x^2e^{-2/x}$.

**45.** $y=\ln(\sin^2\theta)$.

**46.** $y=\ln(\sec^2\theta)$.

**47.** $y=\log_2(x^2/2)$.

**48.** $y=\log_5(3x-7)$.

**49.** $y=8^{-t}$.

**50.** $y=9^{2t}$.

**51.** $y=5x^{3.6}$.

**52.** $y=\sqrt{2}x^{-\sqrt{2}}$.

**53.** $y=(x+2)^{x+2}$.

**54.** $y=2(\ln x)^{x/2}$.

**55.** $y=\sin^{-1}\sqrt{1-u^2}$, $0<u<1$.

**56.** $y=\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{v}}\right)$, $v>1$.

**57.** $y=\ln\cos^{-1}x$.

**58.** $y=z\cos^{-1}z-\sqrt{1-z^2}$.

**59.** $y=t\tan^{-1}t-\frac{1}{2}\ln t$.

**60.** $y=(1+t^2)\cot^{-1}2t$.

**61.** $y=z\sec^{-1}z-\sqrt{z^2-1}$, $z>1$.

**62.** $y=2\sqrt{x-1}\sec^{-1}\sqrt{x}$.

**63.** $y=\csc^{-1}(\sec\theta)$, $0<\theta<\pi/2$.

**64.** $y=(1+x^2)e^{\tan^{-1}x}$.

在习题65～78中，用隐式微分法求 $dy/dx$.

**65.** $xy+2x+3y=1$.

**66.** $x^2+xy+y^2-5x=2$.

**67.** $x^3+4xy-3y^{4/3}=2x$.

**68.** $5x^{4/5}+10y^{6/5}=15$.

**69.** $\sqrt{xy}=1$.

**70.** $x^2y^2=1$.

**71.** $y^2=\frac{x}{x+1}$.

**72.** $y^2=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

**73.** $e^{x+2y}=1$.

**74.** $y^2=2e^{-1/x}$.

**75.** $\ln(x/y)=1$.

**76.** $x\sin^{-1}y=1+x^2$.

**77.** $ye^{\tan^{-1}x}=2$.

**78.** $x^y=\sqrt{2}$.

在习题79和80中，求 $dp/dq$.

**79.** $p^3+4pq-3q^2=2$.

**80.** $q=(5p^2+2p)^{-3/2}$.

在习题81和82中，求 $dr/ds$.

**81.** $r\cos 2s+\sin^2 s=\pi$.

**82.** $2rs-r-s+s^2=-3$.

**83.** 用隐式微分法求 $d^2y/dx^2$：

(a) $x^3+y^3=1$.　(b) $y^2=1-\frac{2}{x}$.

**84.** (a) 用过隐式微分法求 $x^2-y^2=1$ 的导数，证明 $dy/dx=x/y$.

(b) 然后证明 $d^2y/dx^2=-1/y^3$.

**85.** 假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 以及它们的一阶导数在 $x=0$ 和 $x=1$ 取下列值：

| $x$ | $f(x)$ | $g(x)$ | $f'(x)$ | $g'(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | −3 | 1/2 |
| 1 | 3 | 5 | 1/2 | −4 |

求下列函数组合在给定 $x$ 值的一阶导数.

(a) $6f(x)-g(x)$, $x=1$.　(b) $f(x)g^2(x)$, $x=0$.

(c) $\frac{f(x)}{g(x)+1}$, $x=1$.　(d) $f(g(x))$, $x=0$.

(e) $g(f(x))$, $x=0$.　(f) $(x+f(x))^{3/2}$, $x=1$.

(g) $f(x+g(x))$, $x=0$.

**86.** 假设函数 $f(x)$ 及其一阶导数在 $x=0$ 和 $x=1$ 取下列值：

| $x$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|
| 0 | 9 | −2 |
| 1 | −3 | 1/5 |

求下列函数组合在给定 $x$ 值的一阶导数.

(a) $\sqrt{x}f(x)$，$x=1$.　(b) $\sqrt{f(x)}$，$x=0$.

(c) $f(\sqrt{x})$，$x=1$.　(d) $f(1-5\tan x)$，$x=0$.

(e) $\dfrac{f(x)}{2+\cos x}$，$x=0$. (f) $10\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)f^2(x)$，$x=1$.

**87.** 假设 $y=3\sin 2x$ 和 $x=t^2+\pi$，求 $dy/dt$ 在 $t=0$ 的值.

**88.** 假设 $s=t^2+5t$ 和 $t=(u^2+2u)^{1/3}$，求 $ds/du$ 在 $u=2$ 的值.

**89.** 假设 $w=\sin(e^{\sqrt{r}})$ 和 $r=3\sin(s+\pi/6)$，求 $dw/ds$ 在 $s=0$ 的值.

**90.** 假设 $r=(\theta^2+7)^{1/3}$ 和 $\theta^2e^t+\theta=1$，求 $dr/dt$ 在 $t=0$ 的值.

**91.** 假设 $y^3+y=2\cos x$，求 $d^2y/dx^2$ 在点 $(0,1)$ 的值.

**92.** 假设 $x^{1/3}+y^{1/3}=4$，求 $d^2y/dx^2$ 在点 $(8,8)$ 的值.

在习题 93 和 94 中，利用定义求导数.

**93.** $f(t)=\dfrac{1}{2t+1}$.　　**94.** $g(x)=2x^2+1$.

**95.** (a) 画出函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & -1\leqslant x<0\\ -x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

的图形.

(b) $f$ 在 $x=0$ 连续吗？

(c) $f$ 在 $x=0$ 可微吗？

提出答案的理由.

**96.** (a) 画出函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x<0\\ \tan x, & 0\leqslant x\leqslant \pi/4\end{cases}$$

的图形.

(b) $f$ 在 $x=0$ 连续吗？

(c) $f$ 在 $x=0$ 可微吗？

提出答案的理由.

**97.** (a) 画出函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

的图形.

(b) $f$ 在 $x=1$ 连续吗？

(c) $f$ 在 $x=1$ 可微吗？

提出答案的理由.

**98.** 函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & x\leqslant 0\\ mx, & x>0\end{cases}$$

对于常数 $m$ 的哪个值或者哪些值（如果存在这样的值），

(a) $f$ 在 $x=0$ 是连续的？

(c) $f$ 在 $x=0$ 是可微的？

提出答案的理由.

**99. 具有指定斜率的切线** 在曲线 $y=(x/2)+1/(2x-4)$ 上，存在任何以 $-3/2$ 为斜率的点吗？如果有这样的点，求出它们.

**100. 具有指定斜率的切线** 在曲线 $y=x-e^{-x}$ 上，存在任何以 2 为斜率的点吗？如果有这样的点，求出它们.

**101. 水平切线** 求曲线 $y=2x^3-3x^2-12x+20$ 上的点，在这些点的切线平行于 $x$ 轴.

**102. 截距** 求同曲线 $y=x^3$ 在点 $(-2,-8)$ 相切的直线的 $x$ 截距和 $y$ 截距.

**103. 同直线垂直或者平行的切线** 求曲线 $y=2x^3-3x^2-12x+20$ 上的点，在这些点的切线

(a) 垂直于直线 $y=1-(x/24)$.

(b) 平行于直线 $y=\sqrt{2}-12x$.

**104. 相交的切线** 证明：曲线 $y=(\pi\sin x)/x$ 在 $x=\pi$ 和 $x=-\pi$ 的切线正交.

**105. 同直线平行的法线** 求曲线 $y=\tan x$ 在 $[-\pi/2,\pi/2]$ 上的点，曲线在这些点的法线同直线 $y=-x/2$ 平行. 一起画出曲线和法线的草图，用各自的方程标注图形.

**106. 切线与法线** 求曲线 $y=1+\cos x$ 在点 $(\pi/2,1)$ 的切线和法线的方程. 一起画出曲线以及切线和法线的草图，用各自的方程标注图形.

**107. 相切抛物线** 抛物线 $y=x^2+C$ 同直线 $y=x$ 相切. 求 $C$.

**108. 切线的斜率** 证明：曲线 $y=x^3$ 在任何点 $(a,a^3)$ 的切线，同曲线上斜率等于在 $(a,a^3)$ 的斜率 4 倍的点再次相交.

**109. 相切曲线** 曲线 $y=c/(x+1)$ 对于什么 $c$ 值同通过点 $(0,3)$ 和 $(5,-2)$ 的直线相切？

**110. 圆的法线** 证明：圆 $x^2+y^2=a^2$ 在任何点的法线通过原点.

在习题 111 ~ 116 中，求曲线在给定点的切线方程和法线方程.

**111.** $x^2+2y^2=9$，$(1,2)$.

**112.** $e^x+y^2=2$，$(0,1)$.

**113.** $xy+2x-5y=2$，$(3,2)$.

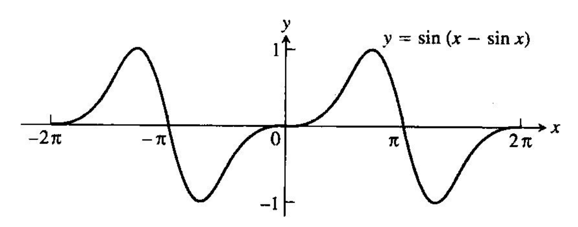
**114.** $(y-x)^2=2x+4$，$(6,2)$.

**115.** $x+\sqrt{xy}=6$，$(4,1)$.

**116.** $x^{3/2}+2y^{3/2}=17$，$(1,4)$.

**117.** 求曲线 $x^3y^3+y^2=x+y$ 在点$(1,1)$和$(1,-1)$的斜率.

**118.** 附图暗示曲线 $y=\sin(x-\sin x)$ 在 $x$ 轴可能具有水平切线. 是这样吗？提出答案的理由.



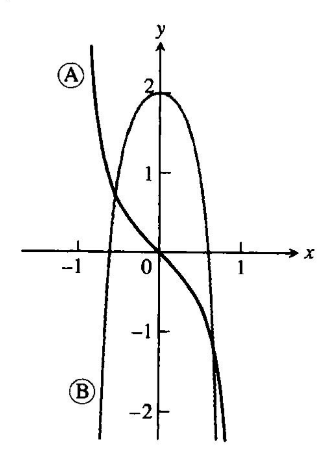

在习题 119 和 120 中，求 $xy$ 平面内同曲线在与给定 $t$ 值对应的点相切的直线方程. 此外求 $d^2y/dx^2$ 在这个点的值.

**119.** $x=(1/2)\tan t$，$y=(1/2)\sec t$，$t=\pi/3$.

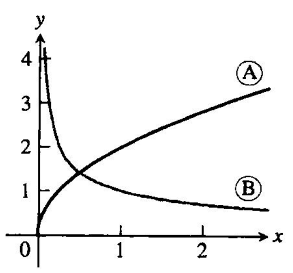
**120.** $x=1+1/t^2$，$y=1-3/t$，$t=2$.

在习题 121 和 122 中各自显示出两个图形，一个是函数 $y=f(x)$ 的图形，另一个是其导数 $f'(x)$ 的图形. 哪个是函数图形？哪个是导数图形？你是怎样知道的？

**121.**




**122.**

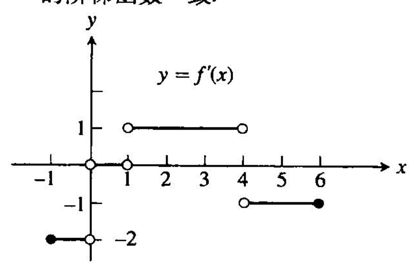



**123.** 利用下述资料画出 $y=f(x)$ 在区间 $-1\leqslant x\leqslant 6$ 上的图形.

(i) $f$ 的图形由连接端点到端点的线段组成.

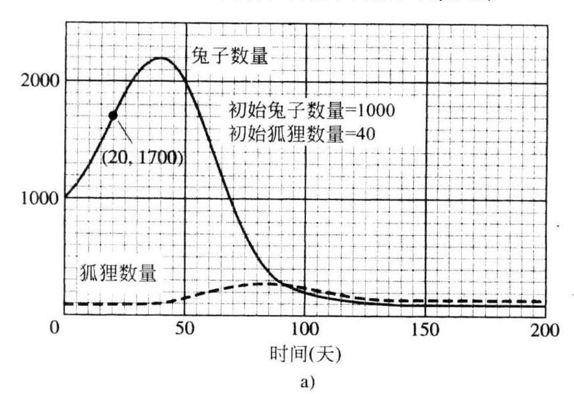
(ii) 图形的起点在$(-1,2)$.

(iii) 在存在导数的地方，$f$ 的导数同附图所示的阶梯函数一致.




**124.** 重复习题 123，假定图形的起点是$(-1,0)$而不是$(-1,2)$.

习题 125 和 126 同图 3.58 中的图形有关. 图 3.58a 显示严寒地区兔子和狐狸的一个小种群数量. 当兔子繁殖时，兔子的数量首先增加. 但是狐狸捕食兔子，当狐狸增加时，兔子种群停止增加并随后下降. 图 3.58b 显示兔子种群曲线的导数图形.



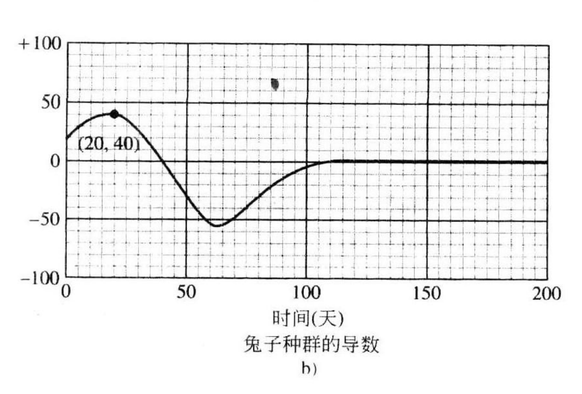




图 3.58　严寒地区捕食与被捕食动物食物链

**125.** (a) 在图 3.58 中，当兔子数量达到最大值和最小值时，它的种群曲线的导数值分别是多少？

(b) 在图 3.58 中，当兔子种群曲线的导数达

到最大值和最小值(负值)时，它的种群的数量分别是多少?

**126.** 兔子和狐狸种群曲线的斜率应该采用什么单位度量?

在习题 127 ~ 134 中，求极限.

**127.** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x^2-x}$.

**128.** $\lim_{x\to 0}\frac{3x-\tan 7x}{2x}$.

**129.** $\lim_{r\to 0}\frac{\sin r}{\tan 2r}$.

**130.** $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(\sin\theta)}{\theta}$.

**131.** $\lim_{\theta\to(\pi/2)^-}\frac{4\tan^2\theta+\tan\theta+1}{\tan^2\theta+5}$.

**132.** $\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1-2\cot^2\theta}{5\cot^2\theta-7\cot\theta-8}$.

**133.** $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2-2\cos x}$.

**134.** $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$.

在习题 135 和 136 中，说明如何延拓函数使其在原点是连续的.

**135.** $g(x)=\frac{\tan(\tan x)}{\tan x}$.

**136.** $f(x)=\frac{\tan(\tan x)}{\sin(\sin x)}$.

在习题 137 ~ 142 中，利用对数微分法求 $y$ 关于相应变量的导数.

**137.** $y=\frac{2(x^2+1)}{\sqrt{\cos 2x}}$.

**138.** $y=\sqrt[10]{\frac{3x+4}{2x-4}}$.

**139.** $y=\left(\frac{(t+1)(t-1)}{(t-2)(t+3)}\right)^5$, $t>2$.

**140.** $y=\frac{2u\,2^u}{\sqrt{u^2+1}}$.

**141.** $y=(\sin\theta)^{\sqrt{\theta}}$.

**142.** $y=(\ln x)^{1/(\ln x)}$.

在习题 143 ~ 152 中，求 $dy/dx$.

**143.** $y=\sinh^2 3x$.

**144.** $\tan x=\tanh^2 y$.

**145.** $\sin^{-1}x=\operatorname{sech} y$.

**146.** $\sinh y=\sec x$.

**147.** $\tan^{-1}y=\tanh^{-1}x$.

**148.** $y=\tanh(\ln x)$.

**149.** $x=\cosh(\ln y)$.

**150.** $y=\sinh(\tan^{-1}e^{3x})$.

**151.** $y=\sinh^{-1}(\tan x)$.

**152.** $y^2+x\cosh y+\sinh^2 x=50$.

**153. 正圆柱体** 正圆柱体总表面积 $S$ 同底半径 $r$ 和高度 $h$ 的关系由方程 $S=2\pi r^2+2\pi rh$ 表示.

(a) 如果 $h$ 是常数，$dS/dt$ 同 $dr/dt$ 有什么关系?

(b) 如果 $r$ 是常数，$dS/dt$ 同 $dh/dt$ 有什么关系?

(c) 如果 $r$ 和 $h$ 都不是常数，$dS/dt$ 同 $dr/dt$ 和 $dh/dt$ 有什么关系?

(d) 如果 $S$ 是常数，$dr/dt$ 同 $dh/dt$ 有什么关系?

**154. 正圆锥体** 正圆锥体侧表面积同底半径 $r$ 和高度 $h$ 的关系由方程 $S=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$ 表示.

(a) 如果 $h$ 是常数，$dS/dt$ 同 $dr/dt$ 有什么关系?

(b) 如果 $r$ 是常数，$dS/dt$ 同 $dh/dt$ 有什么关系?

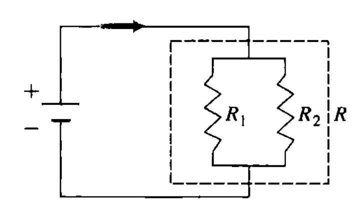
(c) 如果 $r$ 和 $h$ 都不是常数，$dS/dt$ 同 $dr/dt$ 和 $dh/dt$ 有什么关系?

**155. 圆面积的变化** 圆的半径以 $-2/\pi$ m/s 的速率变化. 当 $r=10$ m 时圆的面积的变化率是多少?

**156. 立方体边的变化** 立方体在其边长为 20 cm 时体积以 1 200 cm$^3$/min 的速率增加. 在这个时刻立方体边长变化的速率是多少?

**157. 并联电阻器** 在附图的电路中把两个 $R_1$ 欧姆和 $R_2$ 欧姆的电阻器并联构成一个 $R$ 欧姆的电阻器，$R$ 的值可以从公式

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$



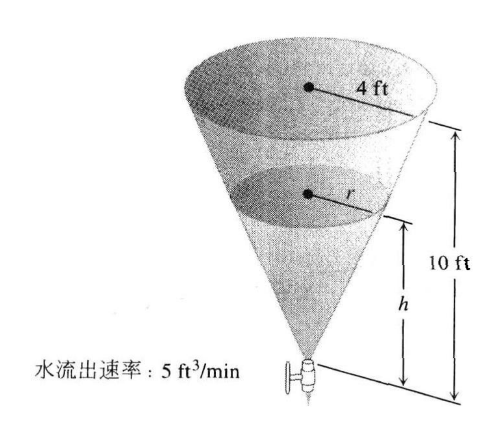

求出. 如果 $R_1$ 以 1 Ω/s 的速率减少而 $R_2$ 以 0.5 Ω/s 的速率增加，当 $R_1=75$ Ω 和 $R_2=50$ Ω 时 $R$ 的变化率是多少?

**158. 串联电路的阻抗** 串联电路的阻抗 $Z$(Ω) 同电阻 $R$(Ω) 和电抗 $X$(Ω) 的关系由公式 $Z=\sqrt{R^2+X^2}$ 表示. 如果 $R$ 以 3 Ω/s 的速率增加而 $X$ 以 2 Ω/s 的速率减少，当 $R=10$ Ω 和 $X=20$ Ω 时阻抗 $Z$ 的变化率是多少?

**159. 运动质点的速率** 运动质点在米制 $xy$ 平面内的坐标 $(x, y)$ 是时间 $t$ 的可微函数，满足条件 $dx/dt=10$ m/s 和 $dy/dt=5$ m/s. 离开原点运动的质点在经过点 $(3,-4)$ 时的速率是多少?

**160. 质点运动** 质点在第一象限内沿曲线 $y=x^{3/2}$ 以这样一种方式运动，它离原点的距离以 11 单位每秒的速率增加. 求 $x=3$ 时的 $dx/dt$.

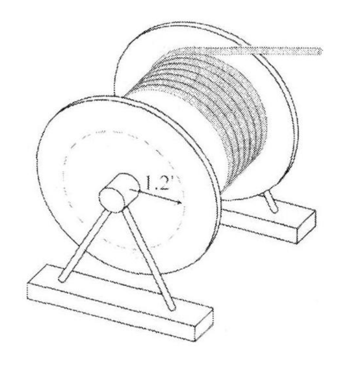
**161. 容器排水** 水从附图所示的圆锥体容器中以 5 ft$^3$/min 的速率排出.




(a) 图中的变量 $h$ 和 $r$ 之间存在什么关系？

(b) 当 $h=6$ ft 时水面下降的速率是多少？

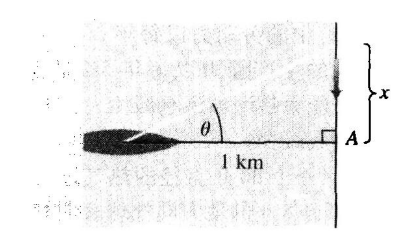
**162. 转动卷线筒** 从一个大卷线筒上牵引电视电缆，把它架设在沿街道的电话线杆上，这时使卷线筒按固定半径的层反绕(参见附图). 如果电缆牵引车以 6 ft/s(约合 4 英里/小时)的不变速率移动，利用方程 $s=r\theta$ 求反绕半径为 1.2 ft 的层时卷线筒转动的速率(弧度/秒)是多少？




**163. 移动探照灯光束** 附图显示一艘离海岸 1 km 的船用探照灯扫视海岸. 探照灯以固定速率 $d\theta/dt=-0.6$ rad/s 转动.

(a) 当灯光照射到点 $A$ 时，光束沿海岸移动的速率是多少？

(b) 探照灯每分钟回转多少次才能使光束移动速率达到 0.6 rad/s？




**164. 在坐标轴上运动的点** 点 $A$ 和 $B$ 按下述方式分别沿 $x$ 轴和 $y$ 轴运动：从原点 $O$ 到直线 $AB$ 的垂直距离 $r$(米)保持不变. 当 $OB=2r$ 和 $B$ 以 $0.3r$ m/s 的速率向 $O$ 运动时，$OA$ 变化的速率是多少？$OA$ 是增加还是减少？

**165.** 求下列函数的线性化：

(a) $\tan x$ 在 $x=-\pi/4$.

(b) $\sec x$ 在 $x=-\pi/4$.

一起画出曲线和线性化的图形.

**166.** 通过组合逼近

$$\frac{1}{1+x}\approx 1-x \quad 及 \quad \tan x\approx x$$

我们可以获得函数 $f(x)=1/(1+\tan x)$ 在 $x=0$ 的一个有用的线性逼近

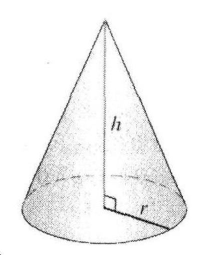
$$\frac{1}{1+\tan x}\approx 1-x$$

证明这个结果是 $1/(1+\tan x)$ 在 $x=0$ 的标准线性逼近.

**167.** 求 $f(x)=\sqrt{1+x}+\sin x-0.5$ 在 $x=0$ 的线性化.

**168.** 求 $f(x)=2/(1-x)+\sqrt{1+x}-3.1$ 在 $x=0$ 的线性化.

**169. 圆锥体的表面积** 假定直立圆锥体的高度从 $h_0$ 变为 $h_0+dh$ 而底半径不变，写出估计圆锥体侧面积变化的公式.




$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$S=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$

(侧面积)

**170. 控制误差**

(a) 为了保证计算立方体表面积的误差不超过 2%，在测量立方体边长时应达到什么精度？

(b) 假定边长的测量达到(a)所要求的精度. 从边长测量计算立方体体积能够达到什么精度？为求出这个精度，估计在体积计算中使用边长测量可能产生的百分数误差.

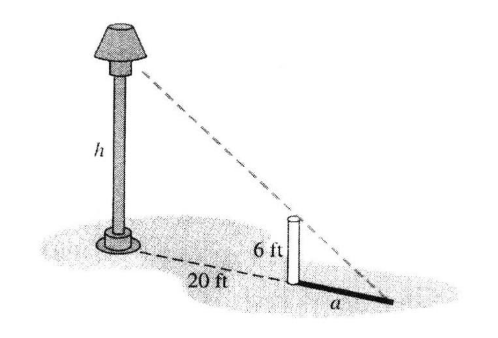
**171. 复合误差** 测出球体大圆周长为 10 cm，可能

包含误差为 0.4 cm. 利用这个测量计算球体半径. 然后用球体半径计算球体的表面积和体积. 估计在计算下列值中的百分数误差:

(a)球体半径. (b)球体表面积.

(c)球体体积.

**172. 求高度** 为了求路灯柱的高度(参见附图),在距离路灯 20 英尺远的地方竖立一根 6 英尺高的杆,并且测出它的影子 $a$ 的长度为 15 英尺,其误差为 1 英寸. 用值 $a=15$ 计算路灯柱的高度并且估计结果的可能误差.




## 第 3 章补充和提高习题

**1.** 像 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 这样的等式称为恒等式,因为等式对于所有的 $\theta$ 值成立. 像 $\sin\theta=0.5$ 这样的等式不是恒等式,因为等式仅对 $\theta$ 的选定值而不是全部值成立. 如果对包含 $\theta$ 的三角恒等式的两端求关于 $\theta$ 的微分,得到的新等式依然是恒等式.

对下列恒等式求微分,证明得到的等式对于所有的 $\theta$ 成立.

(a) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$.

(b) $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$.

**2.** 如果恒等式 $\sin(x+a)=\sin x\cos a+\cos x\sin a$ 关于 $x$ 是可微的,微分后的等式也是恒等式吗? 这个原则是否适用于等式 $x^2-2x-8=0$? 说明理由.

**3.** (a)设

$$f(x)=\cos x,\quad g(x)=a+bx+cx^2$$

求常数 $a$, $b$, $c$ 的值,它们使 $f$ 和 $g$ 满足条件

$$f(0)=g(0),f'(0)=g'(0),f''(0)=g''(0)$$

(b)设

$$f(x)=\sin(x+a)$$
$$g(x)=b\sin x+c\cos x$$

求常数 $b$ 和 $c$ 的值,它们使 $f$ 和 $g$ 满足条件

$$f(0)=g(0),f'(0)=g'(0)$$

(c)在(a)和(b)确定的 $a$, $b$, $c$ 的值,对于 $f$ 和 $g$ 的三阶导数和四阶导数产生什么结果?

**4. 解微分方程**

(a)证明 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=a\cos x+b\sin x$ ($a$ 和 $b$ 是常数)都满足方程

$$y''+y=0$$

(b)为使(a)中的函数满足方程

$$y''(x)+4y=0$$

应如何修改它们? 把这个结果加以推广.

**5. 密切圆** 求 $h$, $k$, $a$ 的值,使圆 $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ 同抛物线 $y=x^2+1$ 在点(1, 2)相切,并且也使这两条曲线的二阶导数在此点有相同的值. 这样同曲线相切且在切点与曲线具有相同二阶导数的圆称为密切圆("密切"(osculate)源于拉丁字 osculari,意思是"接触"). 第 11 章还要讨论密切圆.

**6. 边际收入** 一辆公共汽车可载乘客 60 人. 每趟车乘车的人数 $x$ 和收费($p$ 美元)的关系服从定则 $p=[3-(x/40)]^2$. 对公共汽车公司每趟车的总收入 $r(x)$ 写出表达式. 每趟车达到多少乘客能使边际收入 $dr/dx$ 等于零? 相应的收费是多少? (这个收费使公共汽车公司的收入最大化,所以公司或许应该重新考虑它的收费策略.)

**7. 工业生产能力**

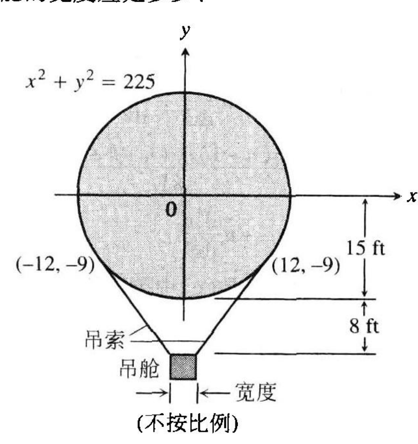
(a)经济学家通常使用相对"增长率"而不用绝对"增长率"的措词. 例如,令 $u=f(t)$ 表示某个已知行业在时间 $t$ 的劳动力人数. (我们把这个函数看成是可微的,虽然它是一个取整数值的阶梯函数.)

令 $v=g(t)$ 表示在时间 $t$ 的劳动力中每人的平均生产能力. 总生产能力则是 $y=uv$. 如果劳动力按每年 4% 的速率增长($du/dt=0.04u$),而每个工人每年的生产能力按 5% 的速率增长($dv/dt=0.05v$),求总生产能力的增长率.

(b)假设(a)中的劳动力以每年 2% 的速率减少,而每人的生产能力以每年 5% 的速率增加,总生产能力是增加还是减少,以及按什么速率增加或减少?

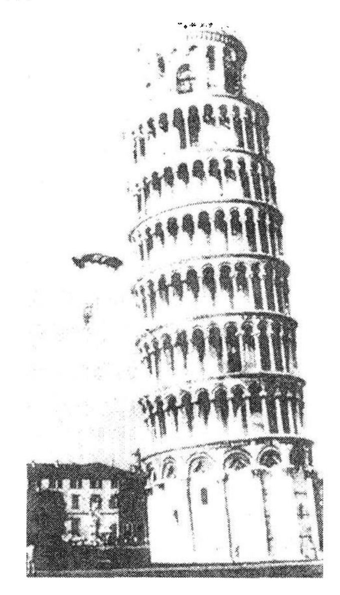
**8. 设计吊舱** 一个 30 ft 直径的热气球的设计者打算在气球下方 8 ft 的地方同气球表面相切的吊索悬挂吊舱,如附图所示. 两条吊索连接吊舱顶边

和它们同气球的切点$(-12,-9)$和$(12,-9)$. 吊舱的宽度应是多少?



(不按比例)

**9. 从比萨斜塔跳伞** 附图照片展示迈克·麦卡锡于1988年8月5日从比萨斜塔顶端跳伞的情景. 画出展现他在跳伞期间的速率图形的粗略图样.



伦敦人迈克·麦卡锡从比萨斜塔跳下, 然后在他说着"这是一项179英尺的低空跳伞世界记录"的同时打开降落伞.

(资料来源:《波士顿环球报》, 1988年8月6日)

**10. 质点运动** 沿坐标线运动的质点在时间$t\geqslant 0$的位置是

$$s=10\cos(t+\pi/4)$$

(a) 质点的起始位置($t=0$)是什么?

(b) 质点在原点左边和右边到达的最远点是什么?

(c) 求质点在(b)中到达点的速度和加速度.

(d) 质点何时首次到达原点? 这时质点的速度、速率和加速度是多少?

**11. 弹射回形针** 在地面上很容易用橡皮筋把一枚回形针向上弹射到64英尺的空中. 在弹射$t$秒后回形针在你手上方的高度是$s=64t-16t^2$.

(a) 多长时间回形针达到它的最大高度? 回形针在脱离你的手时的速度是多少?

(b) 在月球上, 同样的加速度在$t$秒内将把回形针送到$s=64t-2.6t^2$的高度. 大约需要多长时间才能使回形针到达它的最大高度以及达到的高度是多少?

**12. 两个质点的速率** 在$t$秒时, 在坐标线上两个质点的位置为$s_1=3t^3-12t^2+18t+5$ m 和$s_2=-t^3+9t^2-12t$ m. 两个质点何时具有相同的速度?

**13. 质点的速度** 质量$m$为常数的质点沿$x$轴运动, 它的速度$v$和位置$x$满足方程

$$\frac{1}{2}m(v^2-v_0^2)=\frac{1}{2}k(x_0^2-x^2)$$

其中$k$, $v_0$, $x_0$是常数. 证明: 只要$v\neq 0$, 就有

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kx$$

**14. 平均速度与瞬时速度**

(a) 证明: 若运动质点的位置$x$由$t$的二次函数$x=At^2+Bt+C$给出, 则在任何时间区间$[t_1, t_2]$上的平均速度等于在时间区间中点的瞬时速度.

(b) (a)中的结果有什么几何意义?

**15. 求函数**

$$y=\begin{cases}\sin x, & x<\pi\\ mx+b, & x\geqslant\pi\end{cases}$$

中的常数$m$和$b$的全部值, 它们使

(a) $y$在$x=\pi$是连续的.

(b) $y$在$x=\pi$是可微的.

**16. 函数**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在$x=0$有导数吗? 予以说明.

**17.** (a) 在$a$和$b$取什么值时, 函数

$$f(x)=\begin{cases}ax, & x<2\\ ax^2-bx+3, & x\geqslant 2\end{cases}$$

对于$x$的所有值是可微的?

(b) 讨论所得$f$的图形的几何特性.

**18.** (a)在于 $a$ 和 $b$ 取什么值时，函数

$$g(x)=\begin{cases}ax+b, & x\leqslant -1\\ ax^3+x+2b, & x>-1\end{cases}$$

对于 $x$ 的所有值是可微的？

(b)讨论所得 $g$ 的图形的几何特性.

**19. 可微奇函数** 关于 $x$ 的可微奇函数的导数，存在任何特殊性吗？提出答案的理由.

**20. 可微偶函数** 关于 $x$ 的可微偶函数的导数，存在任何特殊性吗？提出答案的理由.

**21.** 假定函数 $f$ 和 $g$ 是在一个包含点 $x_0$ 的整个开区间上定义的，$f$ 在 $x_0$ 是可微的，$f(x_0)=0$，并且 $g$ 在 $x_0$ 是连续的. 证明函数乘积 $fg$ 在 $x_0$ 是可微的. 这个过程表明，例如 $|x|$ 在 $x=0$ 虽然是不可微的，但是乘积 $x|x|$ 在 $x=0$ 是可微的.

**22.** (续习题 21)利用习题 21 的结果，证明下列函数在 $x=0$ 是可微的：

(a) $|x|\sin x$. (b) $x^{2/3}\sin x$. (c) $\sqrt[3]{x}(1-\cos x)$.

(d) $h(x)=\begin{cases}x^2\sin(1/x), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

**23.** 函数

$$h(x)=\begin{cases}x^2\sin(1/x), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

的导数在 $x=0$ 是连续的吗？关于 $k(x)=x\,h(x)$ 的导数，答案是什么？提出答案的理由.

**24.** 假定函数 $f$ 对于 $x$ 和 $y$ 的所有实数值满足下列条件：

(i) $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$.

(ii) $f(x)=1+x\,g(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$.

证明：导数 $f'(x)$ 在 $x$ 的每个值存在且 $f'(x)=f(x)$.

**25. 推广的积法则** 利用数学归纳法证明，若 $y=u_1u_2\cdots u_n$ 是可微函数的有限积，则 $y$ 在它们的共同定义域上是可微的，并且有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du_1}{dx}u_2\cdots u_n+u_1\frac{du_2}{dx}\cdots u_n+\cdots+u_1u_2\cdots u_{n-1}\frac{du_n}{dx}$$

**26. 函数积高阶导数的莱布尼茨法则** 关于可微函数积的高阶导数，莱布尼茨法则表示如下：

(a) $\dfrac{d^2(uv)}{dx^2}=\dfrac{d^2u}{dx^2}v+2\dfrac{du}{dx}\dfrac{dv}{dx}+u\dfrac{d^2v}{dx^2}$

(b) $\dfrac{d^3(uv)}{dx^3}=\dfrac{d^3u}{dx^3}v+3\dfrac{d^2u}{dx^2}\dfrac{dv}{dx}+3\dfrac{du}{dx}\dfrac{d^2v}{dx^2}+u\dfrac{d^3v}{dx^3}$

(c) $\dfrac{d^n(uv)}{dx^n}=\dfrac{d^nu}{dx^n}v+n\dfrac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\dfrac{dv}{dx}+\cdots+\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\dfrac{d^{n-k}u}{dx^{n-k}}\dfrac{d^kv}{dx^k}+\cdots+u\dfrac{d^nv}{dx^n}$

(a)和(b)中的等式是(c)中等式的特例. 利用

$$\binom{m}{k}+\binom{m}{k+1}=\frac{m!}{k!(m-k)!}+\frac{m!}{(k+1)!(m-k-1)!}$$

通过数学归纳法推导(c)中的等式.

**27. 钟摆的周期** 钟摆的周期 $T$(一次完整来回摆动的时间)由公式 $T^2=4\pi^2L/g$ 确定，其中 $T$ 用秒度量，$g=32.2\ \text{ft/s}^2$，$L$ 是摆的长度，用英尺度量. 求下列近似值：

(a)周期 $T=1$ 秒的钟摆的长度.

(b)当(a)中的摆长增加 0.01 ft 时 $T$ 的改变 $dT$.

(c)当摆的周期按(b)中求出的量 $dT$ 改变时，时钟在一天内多计的时间或少计的时间.

**28. 冰立方体的融化** 假定冰立方体在融化时维持其立方体的形状. 把冰立方体的边长记为 $s$，它的体积 $V=s^3$，表面积为 $6s^2$. 设 $V$ 和 $s$ 是时间 $t$ 的可微函数，此外设立方体体积减少的速率同它的表面积成正比(当我们认为融化发生在表面时，这个假设看来有充足的理由：表面的变化改变被融化的裸露冰面的大小). 以数学方式表达，

$$\frac{dV}{dt}=-k(6s^2),k>0$$

负号表明体积是在减少. 我们假定比例因子 $k$ 为常数(它可能同许多因素有关，例如周围空气的相对湿度、温度以及有无太阳光的照射，这里只提到少数几个). 设在一组特定条件下，冰立方体在第 1 小时内失去体积的1/4，并且在 $t=0$ 的体积为 $V_0$. 融化冰立方体需要多长时间？

# 第4章　导数的应用

**概述**　这一章讨论导数的一些重要应用. 我们利用导数求函数的极值，确定和分析图形的形状，计算分式的分子和分母同时趋于零或者无穷大时的极限，以及从数值上求函数等于零的点. 此外，我们介绍从函数的导数复原函数的思想. 在这些应用中，许多问题的关键是中值定理，它的一些系为进入第5章积分法的学习铺平道路.

## 4.1　函数的极值

这一节说明如何从连续函数的导数定位和确定它的极值(极大值或者极小值)。一旦做到这一点，我们就能够求解形形色色的问题，其中寻求在给定条件下处理某些问题的最优化(最佳)方法(参见4.5节).

> **定义**　令 $f$ 是以 $D$ 为定义域的函数. 如果对于 $D$ 中的一点 $c$ 和所有 $x$，有
>
> $$f(x) \leqslant f(c)$$
>
> 就说 $f$ 在点 $c$ 有**绝对极大值**(或者**全局极大值**)；如果对于 $D$ 中的一点 $c$ 和所有 $x$，有
>
> $$f(x) \geqslant f(c)$$
>
> 就说 $f$ 在点 $c$ 有**绝对极小值**(或者**全局极小值**).

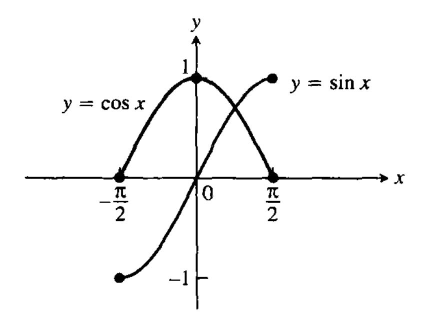



图4.1　正弦函数和余弦函数在区间$[-\pi/2, \pi/2]$上的绝对极值，这些值可能依赖于函数的定义域

例如，函数 $f(x)=\cos x$ 在闭区间$[-\pi/2, \pi/2]$取一个绝对极大值1(1次)和一个绝对极小值0(2次). 在同一区间上，函数 $g(x)=\sin x$ 取一个极大值1和一个极小值 $-1$ (见图4.1).

采用同样定义规则的函数可能具有不同的极值，这取决于函数的定义域. 从下面的例子看出这一点.

**例1**　下列函数在它们的定义域上的极值可以从图4.2中看出.

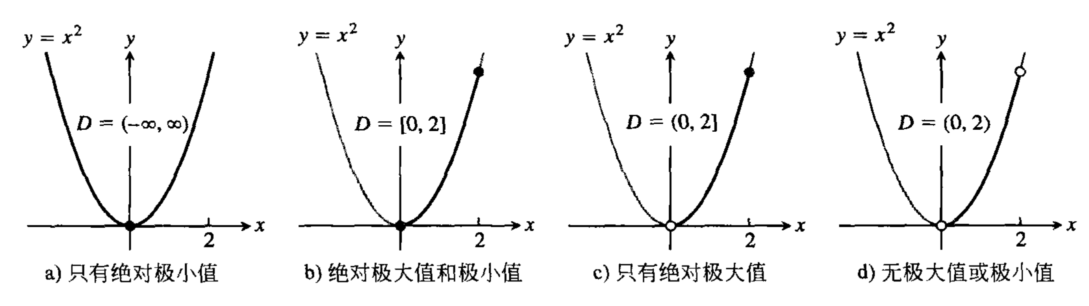



图4.2　例1的图形

| 函数定义规则 | 定义域 $D$ | 在 $D$ 上的绝对极值 |
|---|---|---|
| (a) $y=x^2$ | $(-\infty,\ \infty)$ | 无绝对极大值<br>在 $x=0$ 的绝对极小值为 0 |
| (b) $y=x^2$ | $[0,\ 2]$ | 在 $x=2$ 的绝对极大值为 4<br>在 $x=0$ 的绝对极小值为 0 |
| (c) $y=x^2$ | $(0,\ 2]$ | 在 $x=2$ 的绝对极大值为 4<br>无绝对极小值 |
| (d) $y=x^2$ | $(0,\ 2)$ | 无绝对极值 |

■

下述定理断定，在闭区间$[a,b]$的每个点连续的函数在区间上有绝对极大值和绝对极小值. 我们在画函数图形时要寻找这两种值.

人物传记

丹尼尔·伯努利 (Daniel Bernoulli, 1700—1789)

**定理 1 (极值定理)** 若 $f$ 是闭区间$[a,b]$上的连续函数，则 $f$ 在$[a,b]$达到它的绝对极大值 $M$ 和绝对极小值 $m$. 就是说，在$[a,b]$中存在数 $x_1$ 和 $x_2$，满足 $f(x_1)=m$，$f(x_2)=M$，而对于$[a,b]$中其他的每个 $x$，$m\leqslant f(x)\leqslant M$(见图 4.3).

极值定理的证明需要用到实数系的详尽知识(参见附录 A.7)，在这里不给出证明. 图 4.3 说明闭区间$[a,b]$上的连续函数取绝对极值的可能位置. 正如我们对函数 $y=\cos x$ 的观察，它的绝对极小值(或者绝对极大值)可能出现在区间的两个点或更多的点上.

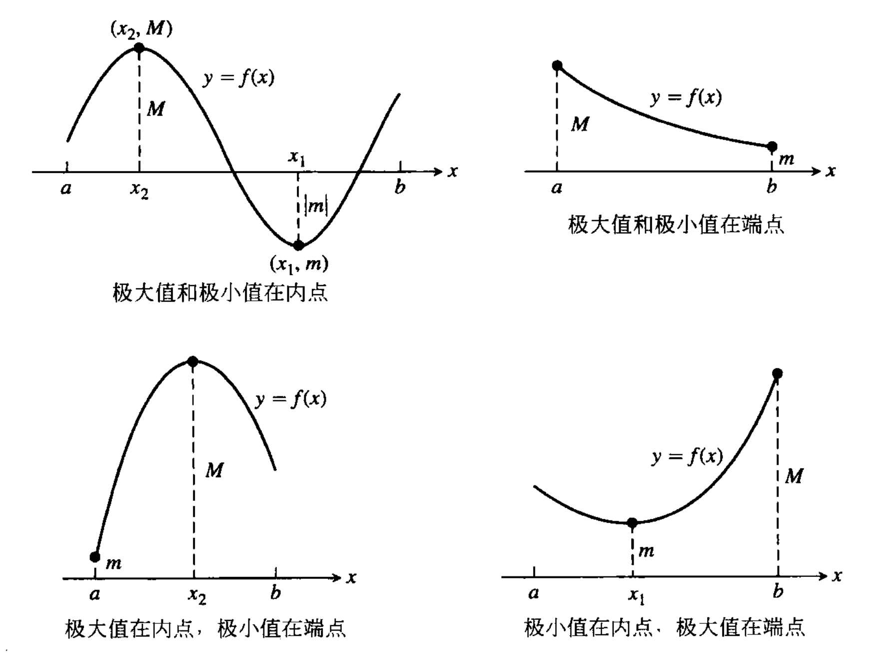



图 4.3　连续函数在闭区间$[a,b]$上取极大值和极小值的某些可能性

定理 1 要求区间是闭区间和有限区间，以及函数是连续函数，这些是关键要素. 如果不满足这些条件，定理的结论不一定成立. 例 1 说明，当区间不同时是闭区间和有限区间时，绝对极值可能不存在. 图 4.4 说明连续性条件不能省略.

### 4.1.1 局部(相对)极值

图4.5显示在一个定义域$[a,b]$上5个点有极值的函数的图形. 函数的绝对极小值出现在$a$,虽然函数在$e$的值小于任何其他邻近点的值. 曲线在$c$的左边升高而在$c$的右边下降,使$f(c)$成为一个局部极大值. 函数在$d$达到它的绝对极大值.

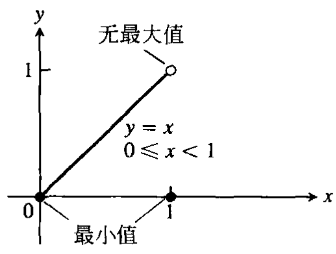



图4.4 即使在一点不连续也能使函数在闭区间上没有最大值或者最小值;函数

$$y=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1\\ 0, & x=1\end{cases}$$

在$[0, 1]$上除$x=1$之外的每个点连续,但是它在$[0, 1]$上设有最高点

**定义** 函数$f$在它的定义域的内点$c$有**局部极大值**,是指对于某个包含$c$的开区间中的所有$x$,有

$$f(x)\leqslant f(c)$$

函数$f$在它的定义域的内点$c$有**局部极小值**,是指对于某个包含$c$的开区间中的所有$x$,有

$$f(x)\geqslant f(c)$$

我们可以把函数局部极值的定义扩展到区间的端点:对于定义域中包含一个端点$c$的某个半开区间内的所有$x$,如果同局部极大值或者局部极小值对应的不等式成立,就定义函数在端点$c$有**局部极大值**或者**局部极小值**. 在图4.5中,函数$f$在$c$和$d$中有局部极大值,而在$a$,$e$和$b$有局部极小值. 局部极值也称为**相对极值**.

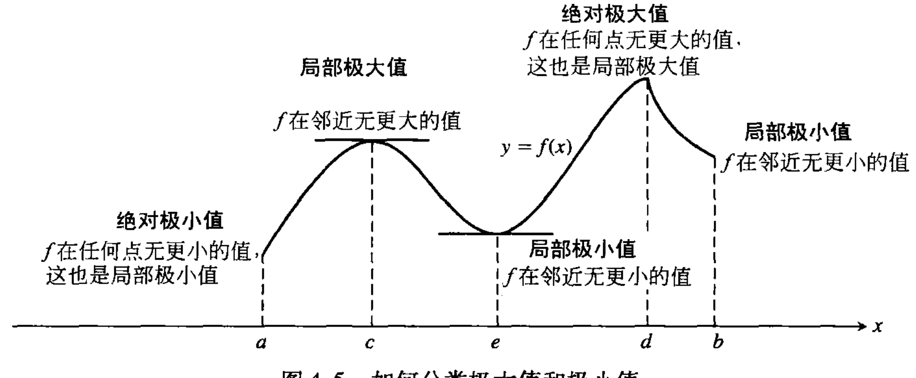



图4.5 如何分类极大值和极小值

一个绝对极大值也是局部极大值. 因为绝对极大值是在整个区间上的最大值,所以它也是紧接邻域中的最大值. 因此,如果存在绝对极大值,所有局部极大值的清单中将自动包含绝对极大值. 同样,如果存在绝对极小值,所有局部极小值的清单中将自动包含绝对极小值.

### 4.1.2 求极值

下面的定理说明,在求函数的极值时,我们通常为什么只需要考察少数的值.

**定理2(关于局部极值的第一导数定理)** 若$f$在其定义域的内点$c$有局部极大值或者局部极小值,且$f'$在$c$有定义,则

$$f'(c)=0$$

**证明** 为了证明在局部极值处$f'(c)=0$,首先证明$f'(c)$不能取正值,然后证明$f'(c)$不能取负值. 既不能为正也不能为负的数只能是零,所以$f'(c)$必定为零. 开始,假定$f$在$x=c$有局部

极大值(见图 4.6)，所以对于所有充分接近 $c$ 的 $x$ 值，$f(x)-f(c)\leqslant 0$. 由于 $c$ 是 $f$ 的定义域的内点，$f'(c)$ 由双侧极限

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

定义. 这表明 $f$ 在 $x=c$ 的右极限和左极限同时存在且等于 $f'(c)$. 当单独考察这两个极限时，求得

$$f'(c)=\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leqslant 0$$

$$(\text{因为}(x-c)>0\text{ 和 }f(x)\leqslant f(c)) \qquad (1)$$

同样，

$$f'(c)=\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geqslant 0$$

$$(\text{因为}(x-c)<0\text{ 和 }f(x)\leqslant f(c)) \qquad (2)$$

由式(1)和式(2)推出 $f'(c)=0$.

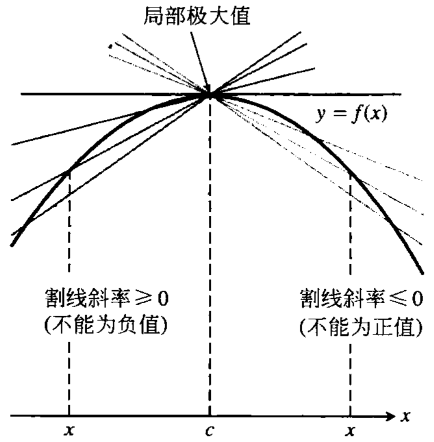



图 4.6 有局部极大值的曲线，在 $c$ 的斜率同时是非正数和非负数的极限，结果为零

这就证明对于局部极大值的定理. 为了证明对于局部极小值的定理，只需使用 $f(x)\geqslant f(c)$，这样使式(1)和式(2)中的不等式颠倒过来. ■

定理 2 表明，函数在有局部极值和存在导数的内点，一阶导数恒为零. 因此，函数 $f$ 仅可能在下列位置有极值(局部极值或全局极值)：

(1) $f'=0$ 的内点，

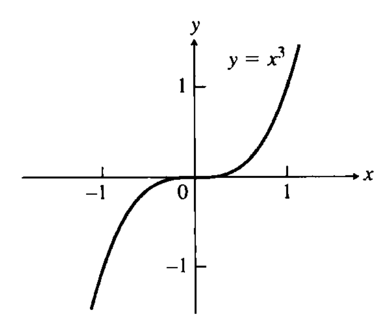
(2) $f'$ 无定义的内点，

(3) $f$ 的定义域的端点.

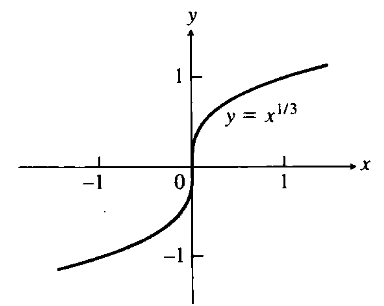
下述定义帮助我们对函数取极值的位置作出概括.

> **定义** 在函数 $f$ 的定义域中，$f'$ 为零或者无定义的内点是 $f$ 的**临界点**.

因此定义域中函数能够取极值的点仅限于临界点和端点. 但是，务必不要错误解释这里的说法. 一个函数在 $x=c$ 可能有不取局部极值的临界点. 例如，函数 $y=x^3$ 和 $y=x^{1/3}$ 以原点为临界点，在原点的值均为零，但是这两个函数在原点右边的值为正而在原点左边的值为负. 所以两个函数在原点都没有局部极值. 相反，每个函数以原点为拐点(参见图 4.7). 拐点在 4.4 节定义和进一步讨论.




a) $y'=3x^2$ 在 $x=0$ 的值为零，但是 $y=x^3$ 在这一点没有极值




b) $y'=(1/3)x^{-2/3}$ 在 $x=0$ 无定义，但是 $y=x^{1/3}$ 在这一点没有极值

图 4.7 在临界点不存在极值

对于极值提出的大多数问题是求连续函数在有限闭区间上的绝对极值. 定理1保证存在这样的极值；定理2则告诉我们，只能在临界点和端点达到绝对极值. 通常我们可以列出这些点并计算对应的函数值，求出其中的最大值和最小值以及它们所在的位置.

**如何求连续函数 $f$ 在有限闭区间上的绝对极值**

(1)求 $f$ 在所有临界点和端点的值.

(2)取这些值中的最大值和最小值.

**例2** 求函数 $f(x)=10x(2-\ln x)$ 在区间 $[1,\ e^2]$ 上的绝对极大值和绝对极小值.

**解** 图4.8暗示，$f$ 在 $x=3$ 附近有它的绝对极大值而在 $x=e^2$ 有绝对极小值0. 我们来检验这个观察结果.

求函数在临界点和端点的值，并从所得结果中取最大值和最小值.

函数 $f$ 的一阶导数是

$$f'(x)=10(2-\ln x)-10x\left(\frac{1}{x}\right)=10(1-\ln x)$$

在定义域 $[1,\ e^2]$ 中的唯一临界点是 $x=e$，在此处 $\ln x=1$. $f$ 在这个临界点的值为

$$f(e)=10e$$

在端点的值为 $f(1)=10(2-\ln 1)=20$

$$f(e^2)=10e^2(2-2\ln e)=0$$

从这几个值中可以看出函数的绝对极大值是 $10e\approx27.2$，出现在内点临界点 $x=e$. 绝对极小值是0，出现在右端点 $x=e^2$. ■

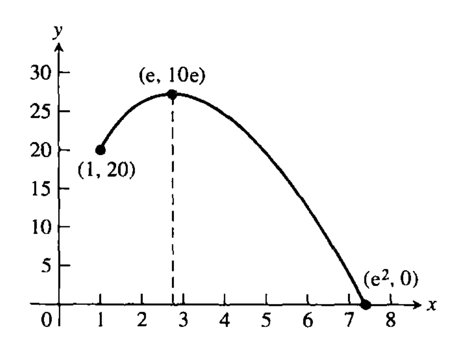



图4.8 函数 $f(x)=10x(2-\ln x)$ 在区间 $[1,\ e^2]$ 上的极值出现在 $x=e$ 和 $x=e^2$ (例2)

**例3** 求函数 $f(x)=x^{2/3}$ 在区间 $[-2,\ 3]$ 上的绝对极大值和绝对极小值.

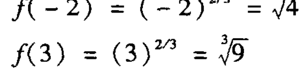
**解** 求函数在临界点和端点的值，并从所得结果中取最大值和最小值. 一阶导数

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

没有零点，但是在内点 $x=0$ 没有定义. $f$ 在这个临界点的值为

$$f(0)=0$$

在端点的值为



$$f(-2)=(-2)^{2/3}=\sqrt[3]{4}$$

$$f(3)=(3)^{2/3}=\sqrt[3]{9}$$

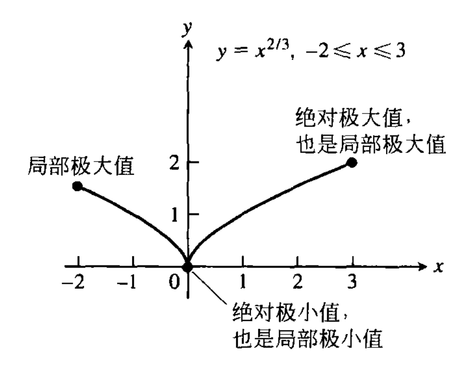
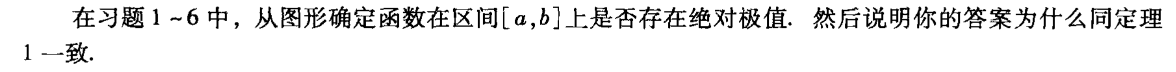



图4.9 函数 $f(x)=x^{2/3}$ 在区间 $[-2,\ 3]$ 上的极值出现在 $x=0$ 和 $x=3$ (例3)

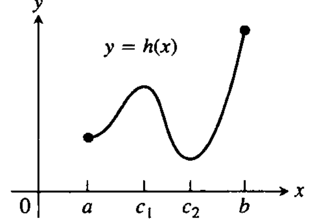
从这几个值可以看出，函数的绝对极大值是 $\sqrt[3]{9}\approx2.08$，出现在右端点 $x=3$. 绝对极小值是0，出现在内点 $x=0$，函数图形在此处有一个尖点(见图4.9). ■

## 习题 4.1

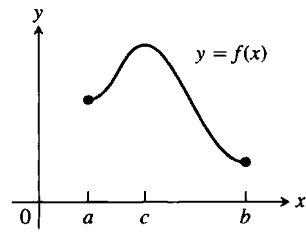


在习题1~6中，从图形确定函数在区间 $[a,b]$ 上是否存在绝对极值. 然后说明你的答案为什么同定理1一致.

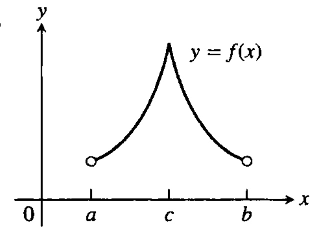
**1.**



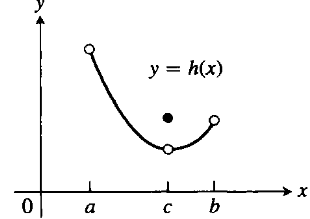

**2.**



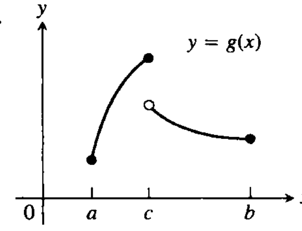

**3.**



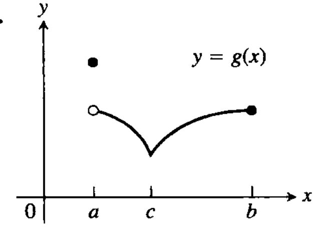

**4.**




**5.**

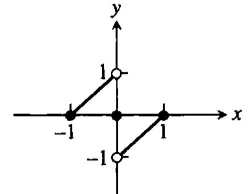



**6.**

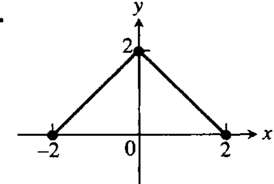



在习题 7 ~ 10 中，求极值以及它们出现的位置.

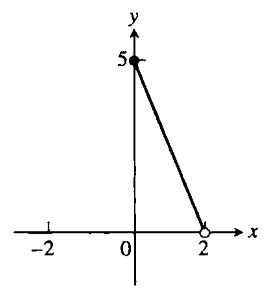
**7.**



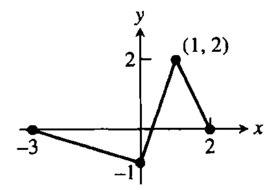

**8.**




**9.**




**10.**




在习题 11 ~ 14 中，指出函数值表同附图中函数图形的对应关系.

**11.**

| $x$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $a$ | 0 |
| $b$ | 0 |
| $c$ | 5 |

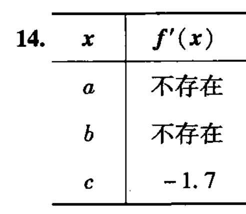
**12.**

| $x$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $a$ | 0 |
| $b$ | 0 |
| $c$ | -5 |

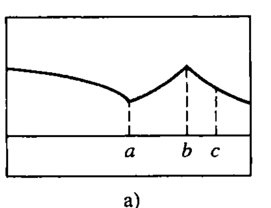
**13.**

| $x$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $a$ | 不存在 |
| $b$ | 0 |
| $c$ | -2 |

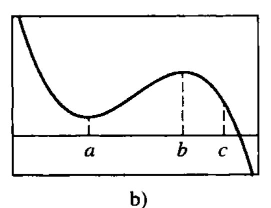
**14.**



| $x$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $a$ | 不存在 |
| $b$ | 不存在 |
| $c$ | -1.7 |

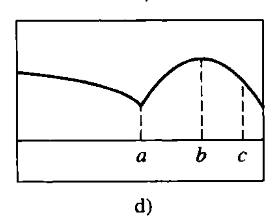



a)




b)

c)




d)

在习题 15 ~ 34 中，求各个函数在给定区间上的绝对极大值和绝对极小值. 然后画出函数的图形. 在图形上标明绝对极值出现的点及其坐标.

**15.** $f(x)=\frac{2}{3}x-5,\quad -2\leqslant x\leqslant 3.$

**16.** $f(x)=-x-4,\quad -4\leqslant x\leqslant 1.$

**17.** $f(x)=x^2-1,\quad -1\leqslant x\leqslant 2.$

**18.** $f(x)=4-x^2,\quad -3\leqslant x\leqslant 1.$

**19.** $F(x)=-\frac{1}{x^2},\quad 0.5\leqslant x\leqslant 2.$

**20.** $F(x)=-\frac{1}{x}$, $-2\leqslant x\leqslant -1$.

**21.** $h(x)=\sqrt[3]{x}$, $-1\leqslant x\leqslant 8$.

**22.** $h(x)=-3x^{2/3}$, $-1\leqslant x\leqslant 1$.

**23.** $g(x)=\sqrt{4-x^2}$, $-2\leqslant x\leqslant 1$.

**24.** $g(x)=-\sqrt{5-x^2}$, $-\sqrt{5}\leqslant x\leqslant 0$.

**25.** $f(\theta)=\sin\theta$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{5\pi}{6}$.

**26.** $f(\theta)=\tan\theta$, $-\frac{\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$.

**27.** $g(x)=\csc x$, $\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$.

**28.** $g(x)=\sec x$, $-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}$.

**29.** $f(t)=2-|t|$, $-1\leqslant t\leqslant 3$.

**30.** $f(t)=|t-5|$, $4\leqslant t\leqslant 7$.

**31.** $g(x)=xe^{-x}$, $-1\leqslant x\leqslant 1$.

**32.** $h(x)=\ln(x+1)$, $0\leqslant x\leqslant 3$.

**33.** $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$, $0.5\leqslant x\leqslant 4$.

**34.** $g(x)=e^{-x^2}$, $-2\leqslant x\leqslant 1$.

在习题35～38中，求函数的绝对极大值和绝对极小值，并指出取极值的位置.

**35.** $f(x)=x^{4/3}$, $-1\leqslant x\leqslant 8$.

**36.** $f(x)=x^{5/3}$, $-1\leqslant x\leqslant 8$.

**37.** $g(\theta)=\theta^{3/5}$, $-32\leqslant\theta\leqslant 1$.

**38.** $h(\theta)=3\theta^{2/3}$, $-27\leqslant\theta\leqslant 8$.

在习题39～54中，求函数的极值及其出现的位置.

**39.** $y=2x^2-8x+9$.

**40.** $y=x^3-2x+4$.

**41.** $y=x^3+x^2-8x+5$.

**42.** $y=x^3-3x^2+3x-2$.

**43.** $y=\sqrt{x^2-1}$.

**44.** $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

**45.** $y=\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}$.

**46.** $y=\sqrt{3+2x-x^2}$.

**47.** $y=\frac{x}{x^2+1}$.

**48.** $y=\frac{x+1}{x^2+2x+2}$.

**49.** $y=e^x+e^{-x}$.

**50.** $y=e^x-e^{-x}$.

**51.** $y=x\ln x$.

**52.** $y=x^2\ln x$.

**53.** $y=\cos^{-1}(x^2)$.

**54.** $y=\sin^{-1}(e^x)$.

在习题55～62中，求函数在每个临界点的导数并确定局部极值.

**55.** $y=x^{2/3}(x+2)$.

**56.** $y=x^{2/3}(x^2-4)$.

**57.** $y=x\sqrt{4-x^2}$.

**58.** $y=x^2\sqrt{3-x}$.

**59.** $y=\begin{cases}4-2x, & x\leqslant 1,\\ x+1, & x>1.\end{cases}$

**60.** $y=\begin{cases}3-x, & x<0,\\ 3+2x-x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

**61.** $y=\begin{cases}-x^2-2x+4, & x\leqslant 1,\\ -x^2+6x-4, & x>1.\end{cases}$

**62.** $y=\begin{cases}-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{15}{4}, & x\leqslant 1,\\ x^3-6x^2+8x, & x>1.\end{cases}$

在习题63和64中，提出答案的理由.

**63.** 令$f(x)=(x-2)^{2/3}$.

(**a**) $f'(2)$是否存在?

(**b**) 证明$f$唯一的局部极限出现在$x=2$.

(**c**) (b)中的结果同极值定理是否矛盾?

(**d**) 对于用$a$代替2后的$f(x)=(x-a)^{2/3}$重做(a)和(b).

**64.** 令$f(x)=|x^3-9x|$.

(**a**) $f'(0)$是否存在?

(**b**) $f'(3)$是否存在?

(**c**) $f'(-3)$是否存在?

(**d**) 确定$f$的全部极值.

**65. 不存在导数的极小值** 函数$f(x)=|x|$在$x=0$有一个绝对极小值，虽然$f$在$x=0$是不可微的. 这个事实同定理2一致吗? 提出答案的理由.

**66. 偶函数** 如果偶函数$f(x)$在$x=c$有局部极大值，关于$f$在$x=-c$的值能够得出什么结论? 提出答案的理由.

**67. 奇函数** 如果奇函数$g(x)$在$x=c$有局部极小值，关于$g$在$x=-c$的值能够得出什么结论? 提出答案的理由.

**68.** 我们知道通过考察连续函数$f(x)$在临界点和端点的值求它的极值. 但是，如果函数没有临界点或者端点，那将会怎样? 这时会出现什么结果? 实际存在这样的函数吗? 提出答案的理由.

**69.** 函数

$$V(x)=x(10-2x)(16-2x), 0<x<5$$

表示一个盒子的体积.

(**a**) 求$V$的极值.

(**b**) 用盒子的体积解释(a)中求出的任何极值.

**70. 三次函数** 考虑三次函数

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

(**a**) 证明$f$可能以0，1或2为临界点. 举出一些例子并画出它们的图形支持你的论据.

(**b**) $f$可能有多少个极值?

**71. 垂直运动物体的最大高度** 垂直运动物体的高度由

$$s=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0,\quad g>0$$

给出，$s$ 以米为单位，$t$ 以秒为单位. 求物体的最大高度.

**72. 峰值交流电流** 假定在任意时间 $t$(以秒为单位)，交流电路中的电流 $i=2\cos t+2\sin t$(以安培为单位). 这个电路电流的峰值(最大值)是多大?

**T** 在习题 73 ~ 76 中，画出函数的图形. 然后求函数在区间上的极值，并说明取极值的位置.

**73.** $f(x)=|x-2|+|x+3|,\quad -5\leqslant x\leqslant 5.$

**74.** $g(x)=|x-1|-|x-5|,\quad -2\leqslant x\leqslant 7.$

**75.** $h(x)=|x+2|-|x-3|,\quad -\infty<x<\infty.$

**76.** $k(x)=|x+1|+|x-3|,\quad -\infty<x<\infty.$

**计算机探究**

在习题 77 ~ 84 中，用一种 CAS(计算机代数系统)帮助求给定函数在指定闭区间上的绝对极值. 执行下列处理步骤：

**(a)** 画出函数在区间上的图形，观察它的一般特性.

**(b)** 求 $f'=(0)$ 的内点.（在某些习题中，可能必须用方程数值求解器求近似解.）可能也需要画出 $f'$ 的图形.

**(c)** 求 $f'$ 不存在的内点.

**(d)** 计算函数在(b)，(c)中求出的所有点以及在区间端点的值.

**(e)** 求函数在区间上的绝对极值，并确定取极值的位置.

**77.** $f(x)=x^4-8x^2+4x+2,\ [-20/25,\ 64/25].$

**78.** $f(x)=-x^4+4x^3-4x+1,\ [-3/4,\ 3].$

**79.** $f(x)=x^{2/3}(3-x),\ [-2,\ 2].$

**80.** $f(x)=2+2x-3x^{2/3},\ [-1,\ 10/3].$

**81.** $f(x)=\sqrt{x}+\cos x,\ [0,\ 2\pi].$

**82.** $f(x)=x^{3/4}-\sin x+\frac{1}{2},\ [0,\ 2\pi].$

**83.** $f(x)=\pi x^2e^{-3x/2},\ [0,\ 5].$

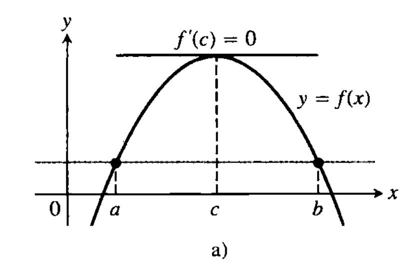
**84.** $f(x)=\ln(2x+x\sin x),\ [1,\ 15].$

## 4.2 中值定理

我们知道常数值函数的导数为零. 但是是否存在导数恒为零的更复杂的函数? 如果两函数在区间上有相同的导数，它们之间有何种关系? 在这一节，我们应用中值定理来回答这些问题以及其他一些问题. 首先介绍一个特例，称为罗尔定理，它被用来证明中值定理.

### 4.2.1 罗尔定理

正如函数图形的暗示，如果可微函数在两个不同点穿过一条水平直线，那么在它们之间至少存在一点，函数图形在这个点的切线是水平直线，而其导数为零(见图 4.10). 现在来描述和证明这个结果.



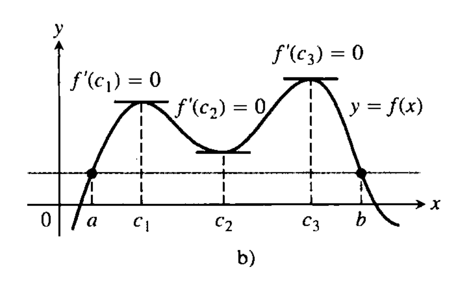




图 4.10 罗尔定理说明，可微函数的曲线在其同水平直线相交的任何两点之间至少有一条水平切线，这种切线可能只有一条，例如 a)，也可能有多条，例如 b)

> **定理 3 (罗尔定理)** 假定 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上每个点是连续的，并且在它的内部 $(a,\ b)$ 的每个点是可微的. 如果 $f(a)=f(b)$，那么在 $(a,\ b)$ 中至少有一个数 $c$ 使 $f'(c)=0$.

**证明** 由于连续性，$f$ 在 $[a,b]$ 上有绝对极大值和绝对极小值. 这两种极值只能出现在

(1) $f'=0$ 的内点，

(2) $f'$ 不存在的内点，

人物传记

迈克尔·罗尔（Michel Rolle，1652—1719）

(3)函数定义域的端点，这种情况就是 $a$ 和 $b$.

按照假设，$f$ 在每个内点有导数. 由此排除(2)的可能性，遗留下的是 $f'=0$ 的内点与两个端点 $a$ 和 $b$.

如果极大值或极小值出现在 $a$ 和 $b$ 之间的一个内点 $c$，那么由 4.1 节定理 2 应有 $f'(c)=0$，已经找到罗尔定理的一个点.

如果绝对极大值和绝对极小值同时出现在两个端点，那么由于 $f(a)=f(b)$，$f$ 必定是常值函数，对于每个点 $x\in[a,b]$，满足 $f(x)=f(a)=f(b)$. 因此 $f'(x)=0$，而点 $c$ 可以取 $(a, b)$ 内的任何点. ■

定理 3 的假设条件是必需的. 如果函数即使在一点是不连续的或不可微的，函数图形可能没有水平切线(见图 4.11).

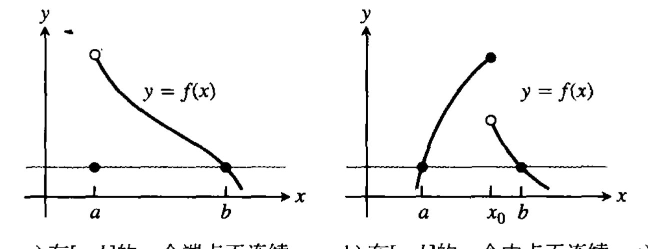



图 4.11 如果罗尔定理的假设条件不成立，函数可能没有水平切线

把罗尔定理同介值定理结合起来，可以证明方程 $f(x)=0$ 在 $f$ 的值具有相反符号的两点之间只有一个实数解.

**例 1** 证明方程 $x^3+3x+1=0$ 恰好有一个实数解.

**解** 令 $y=f(x)=x^3+3x+1$. 导数 $f'(x)=3x^2+3$ 不可能为零(因为它恒为正值). 即使假设 $f$ 在两点 $x=a$ 和 $x=b$ 为零，罗尔定理也能保证在 $a$ 和 $b$ 之间存在一点 $x=c$，$f'$ 在 $c$ 的值为零. 因此，$f$ 不会有一个以上零点. $f$ 实际上只有一个零点，因为介值定理告诉我们，$y=f(x)$ 的图形同 $x$ 轴在 $x=-1$(这里 $y=-3$)和 $x=0$(这里 $y=1$)之间的某一点相交(参见图 4.12). ■

罗尔定理主要用于证明中值定理.

### 4.2.2 中值定理

中值定理是一种倾斜形式的罗尔定理(见图 4.13)，由约瑟夫·路易·拉格朗日首次提出. 中值定理保证存在一点，在这个点的切线同弦 $AB$ 平行.

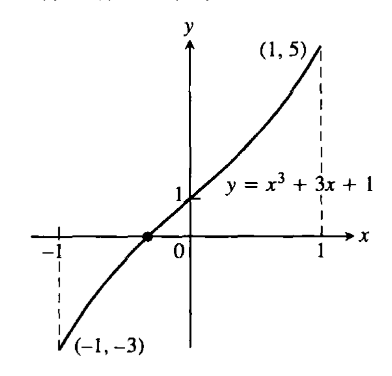



图 4.12 多项式 $y=x^3+3x+1$ 的唯一零点是图中所示的曲线同 $x$ 轴在 $-1$ 与 0 之间的交点(例 1)

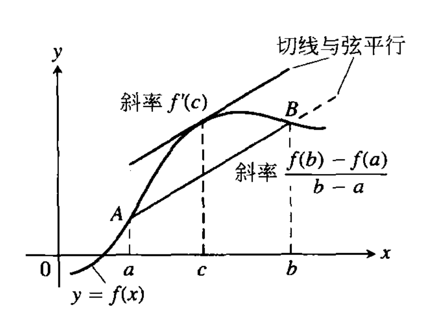



图 4.13 中值定理在几何上说明曲线在 $A$ 和 $B$ 之间的某处至少有一条切线同弦 $AB$ 平行

> **定义 4（中值定理）** 假定 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，并且在区间的内部 $(a, b)$ 上可微. 那么在 $(a, b)$ 中至少存在一点 $c$，在这个点
>
> $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \tag{1}$$

**证明** 画出 $f$ 的图形，并且作一条通过点 $A(a, f(a))$ 和点 $B(b, f(b))$ 的直线（参见图 4.14）. 这条直线是函数

### 人物传记

约瑟夫·路易·拉格朗日（Joseph Louis Lagrange，1736—1813）

$$g(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \tag{2}$$

（点斜式方程）的图形. $f$ 和 $g$ 的图形在 $x$ 的垂直差距为

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x)-g(x) \\ &= f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \end{aligned} \tag{3}$$

图 4.15 把 $f$，$g$ 和 $h$ 的图形显示在一起.

函数 $h$ 满足罗尔定理在 $[a,b]$ 上的假设条件. 它在 $[a,b]$ 上是连续的，而且在 $(a, b)$ 上是可微的，这是因为 $f$ 和 $g$ 都是这样的函数. 此外 $h(a)=h(b)=0$，因为 $f$ 和 $g$ 都通过点 $A$ 和 $B$. 因此，在某个点 $c\in(a, b)$ 有 $h'(c)=0$. 这个点就是等式(1)中所要求的点.

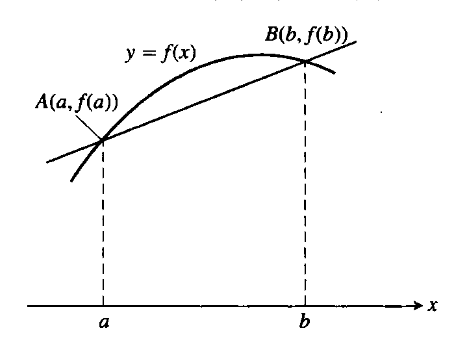



图 4.14 在区间 $[a,b]$ 上 $f$ 的图形和弦 $AB$

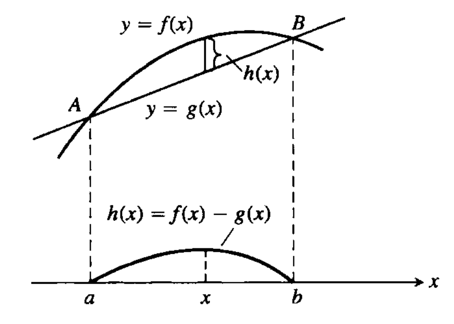



图 4.15 弦 $AB$ 是函数 $g(x)$ 的图形，函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 给出 $f$ 和 $g$ 在 $x$ 的图形之间的垂直距离

为了证明等式(1)，在方程(3)的两端求对 $x$ 的导数，然后置 $x=c$：

$$h'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{（对方程(3)求导数）}$$

$$h'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{（置 } x=c\text{）}$$

$$0=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad (h'(c)=0)$$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{（整理）}$$

这就是我们打算证明的结果. ■

中值定理的假设不要求 $f$ 在 $a$ 或者 $b$ 是可微的. $f$ 在 $a$ 和 $b$ 的连续性是充分条件（见图 4.16）.

**例 2** 函数 $f(x)=x^2$（见图 4.17）对于 $0\leqslant x\leqslant 2$ 是连续的，而且对于 $0<x<2$ 是可微的. 由于 $f(0)=0$ 和 $f(2)=4$，中值定理表明，在区间 $(0, 2)$ 内的某点 $c$，导数 $f'(x)=2x$ 必定具有值 $(4-0)/(2-0)=2$. 在这种（例外）情形可以通过解方程 $2c=2$ 得到 $c=1$. ■

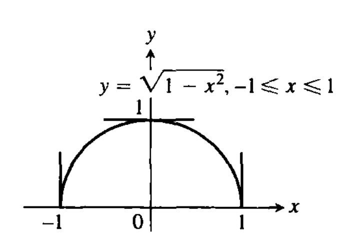



图 4.16 函数$f(x)=\sqrt{1-x^2}$满足中值定理在$[-1, 1]$上的假设条件（和结论），虽然$f$在$-1$和1是不可微的

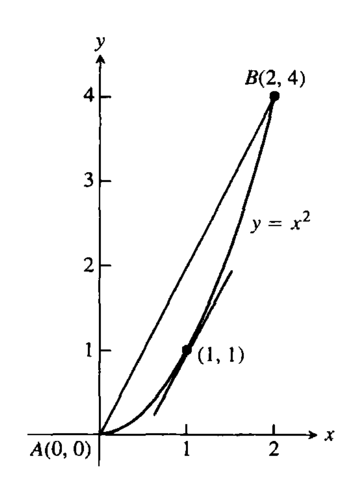



图 4.17 如在例 2 中求出的结果，$c=1$是切线同弦$AB$平行的点

### 4.2.3 物理解释

把数$(f(b)-(f(a))/(b-a)$看成是$f$在$[a,b]$上的平均变化，而$f'(c)$是瞬时变化. 于是中值定理说明，在区间某个内点的瞬时变化必定等于整个区间上的平均变化.

**例 3** 一辆汽车从零起加速，用 8 秒时间行驶 352 英尺，在这 8 秒区间内的平均速度是$352/8=44$ ft/s. 中值定理表明，汽车在加速过程中的某个点，速度计必定恰好达到 30 mph(44 ft/s)（见图 4.18）. ■

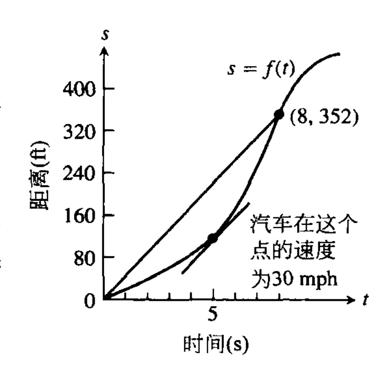



图 4.18 例 3 中汽车行驶的距离与时间的关系

### 4.2.4 数学推论

我们在本节开始曾经提出什么类型的函数在区间上具有零导数的问题. 中值定理的第一个系提供对这个问题的答案.

> **系 1** 若在开区间$(a, b)$的每个点$f'(x)=0$，则对于所有$x\in(a, b)$，有$f(x)=C$，其中$C$为常数.

**证明** 我们要证明$f$在区间$(a,b)$上取常数值. 为此证明，若$x_1$和$x_2$是$(a,b)$中的任意两点，则$f(x_1)=f(x_2)$. 对$x_1$和$x_2$按自左至右的次序编号，即有$x_1<x_2$. 于是$f$在区间$[x_1,x_2]$上满足中值定理的假设：它在$[x_1,x_2]$上的每个点是可微的，因此在其中的每个点也是连续的. 所以，在$x_1$和$x_2$之间的某个点$c$，有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$$

由于整个区间$(a,b)$上$f'=0$，这个等式依次转变为

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=0,\quad f(x_2)-f(x_1)=0 \quad 和 \quad f(x_1)=f(x_2)$$ ■

在本节开始时，还提出过关于区间上两个具有相同导数的函数之间的关系问题. 下面的系告诉我们，在区间上两个这样的函数值之差为常数.

> **系 2** 若在开区间$(a,b)$内的每个点$x$有$f'(x)=g'(x)$，则存在一个常数$C$，使得$f(x)=g(x)+C$对于所有$x\in(a,b)$成立. 就是说，$f-g$在$(a,b)$上为常数.

**证明** 在每个点$x\in(a,b)$，差函数$h=f-g$的导数是

$$h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$$

因此，由系 1，在$(a,\ b)$上$h(x)=C$. 就是说，在$(a,\ b)$上$f(x)-g(x)=C$，所以$f(x)=g(x)+C$. ■

系 1 和系 2 在开区间$(a,b)$不是有限区间时也成立. 就是说，当区间为$(a,-\infty)$，$(-\infty,b)$或者$(-\infty,\infty)$时，这两个系仍然是正确的.

当我们在 4.8 节中讨论反导数时，系 2 起着重要的作用. 例如，它表明，由于$f(x)=x^2$在区间$(-\infty,\infty)$上的导数是$2x$，其他任何在$(-\infty,\infty)$上以$2x$为导数的函数，必定具有公式$x^2+C$，其中$C$是某个常数（见图 4.19）.

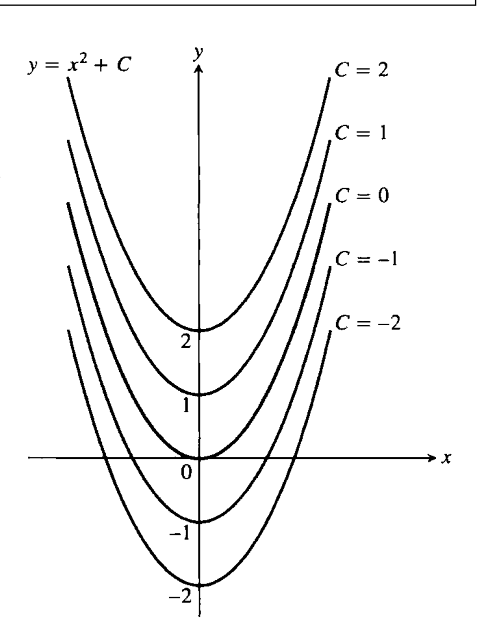



图 4.19 按几何观点，中值定理系 2 表明，在一个区间上具有完全相同导数的函数的图形之间仅相差一个垂直位移；以$2x$为导数的函数是一族抛物线$y=x^2+C$，图中显示的是选定$C$值的抛物线

**例 4** 求函数$f(x)$，它的导数为$\sin x$而且它的图形经过点$(0,\ 2)$.

**解** 由于$f(x)$具有同$g(x)=-\cos x$一样的导数，可知$f(x)=-\cos x+C$，$C$为某个常数. $C$的值可以由条件$f(0)=2$确定（因为$f$的图形经过点$(0,\ 2)$）：

$$f(0)=-\cos(0)+C=2,\quad \text{所以}\quad C=3$$

所求的函数是$f(x)=-\cos x+3$. ■

### 4.2.5 由加速度求速度和位置

中值定理系 2 有助于求物体从静止状态以 9.8 m/s² 的加速度自由下落时的速度函数和位移函数.

我们知道$v(t)$是导数为 9.8 的某个函数. 同时知道$g(t)=9.8t$的导数是 9.8. 由系 2,

$$v(t)=9.8t+C$$

$C$是某个常数. 由于物体从静止状态下落，$v(0)=0$. 因此

$$9.8(0)+C=0,\quad \text{所以}\quad C=0$$

速度函数必定是$v(t)=9.8t$. 如何求位置函数$s(t)$?

我们知道$s(t)$是以$9.8t$为导数的某个函数，同时知道$f(t)=4.9t^2$的导数是$9.8t$. 由系 2,

$$s(t)=4.9t^2+C$$

$C$是某个常数. 如果物体的初始高度为$s(0)=h$，从静止位置向下的度量为正，那么

$$4.9(0)^2+C=h,\quad \text{所以}\quad C=h$$

位置函数必定是$s(t)=4.9t^2+h$.

从函数的变化率求函数的能力是微积分中一种非常有力的工具. 正如我们将在第 5 章见到的那样，它处在数学发展的核心地位.

### 4.2.6 对数法则的证明

在 1.5 节讨论过对数函数的代数性质. 我们可以应用中值定理系 2 证明它们中的每一种性

质. 证明的步骤同求解涉及对数函数的问题一样.

**证明 $\ln bx=\ln b+\ln x$** 论证从观察 $\ln bx$ 和 $\ln x$ 具有同样的导数开始:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(bx)=\frac{b}{bx}=\frac{1}{x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x$$

根据中值定理系 2，这两个函数必定相差一个常数，这就意味着

$$\ln bx=\ln x+C$$

$C$ 是某个常数.

由于上述方程对于所有取正值的 $x$ 成立，它对于 $x=1$ 必定成立. 因此，

$$\ln(b\cdot 1)=\ln 1+C$$
$$\ln b=0+C\quad(\ln 1=0)$$
$$C=\ln b$$

通过代换最后得到

$$\ln bx=\ln b+\ln x$$ ■

**证明 $\ln x^r=r\ln x$** 再次使用具有相同导数的论证方法. 对于所有取正值的 $x$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x^r=\frac{1}{x^r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^r)\quad（链式法则）$$
$$=\frac{1}{x^r}rx^{r-1}\quad（导数幂法则）$$
$$=r\cdot\frac{1}{x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(r\ln x)$$

由于 $\ln x^r$ 和 $r\ln x$ 有相同的导数，

$$\ln x^r=r\ln x+C$$

$C$ 是某个常数. 取 $x=1$，确定 $C=0$，完成我们的证明. ■

在习题 65 中，要求读者证明对数函数的商法则

$$\ln\left(\frac{b}{x}\right)=\ln b-\ln x$$

倒数法则 $\ln(1/x)=-\ln x$ 是商法则的特例. 在商法则中取 $b=1$，并且注意 $\ln 1=0$，即可得到倒数法则.

### 4.2.7 指数法则

自然指数函数 $\mathrm{e}^x$ 的指数法则是自然对数函数 $\ln x$ 的代数性质的推论. 它们由这两种函数之间的逆关系导出.

> **$\mathrm{e}^x$ 的指数法则**
>
> 对于所有的 $x$，$x_1$ 和 $x_2$，自然指数函数 $\mathrm{e}^x$ 服从下列法则:
>
> **(1)** $\mathrm{e}^{x_1}\cdot\mathrm{e}^{x_2}=\mathrm{e}^{x_1+x_2}$ **(2)** $\mathrm{e}^{-x}=\frac{1}{\mathrm{e}^x}$ **(3)** $\frac{\mathrm{e}^{x_1}}{\mathrm{e}^{x_2}}=\mathrm{e}^{x_1-x_2}$ **(4)** $(\mathrm{e}^{x_1})^{x_2}=\mathrm{e}^{x_1x_2}=(\mathrm{e}^{x_2})^{x_1}$

**法则(1)的证明** 令

$$y_1=\mathrm{e}^{x_1}\quad 及\quad y_2=\mathrm{e}^{x_2}\tag{4}$$

于是

$$x_1=\ln y_1\quad 及\quad x_2=\ln y_2\quad（对式(4)两端取对数）$$
$$x_1+x_2=\ln y_1+\ln y_2$$

$$= \ln y_1 y_2 \quad (\text{对数的积法则})$$

$$e^{x_1+x_2} = e^{\ln y_1 y_2} \quad (\text{取指数})$$

$$= y_1 y_2 \quad (e^{\ln u} = u)$$

$$= e^{x_1} e^{x_2}$$

■

法则(4)的证明同上面相似. 法则(2)和法则(3)由法则(1)推出(见习题 67 和 68).

## 习题 4.2

在习题 1 ~ 4 中，对于函数和区间的中值定理的结论，求满足等式

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

的 $c$ 值.

**1.** $f(x)=x^2+2x-1$，$[0,\ 1]$.

**2.** $f(x)=x^{2/3}$，$[0,\ 1]$.

**3.** $f(x)=\sin^{-1}x$，$[-1,\ 1]$.

**4.** $f(x)=\ln(x-1)$，$[2,\ 4]$.

在习题 5 ~ 8 中，哪些函数满足给定区间上的中值定理的假设条件，哪些函数不满足？提出答案的理由.

**5.** $f(x)=x^{2/3}$，$[-1,\ 8]$.

**6.** $f(x)=x^{4/5}$，$[0,\ 1]$.

**7.** $f(x)=\sqrt{x(1-x)}$，$[0,\ 1]$.

**8.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & -\pi\leqslant x<0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

**9.** 函数 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1\\ 0, & x=1\end{cases}$

在 $x=0$ 和 $x=1$ 的值为零，并且在 $(0,\ 1)$ 上是可微的，但是它的导数在 $(0,\ 1)$ 上不可能为零. 为什么会出现这种情况？罗尔定理不是说这个导数在 $(0,\ 1)$ 的某处必定为零吗？提出答案的理由.

**10.** 函数 $f(x)=\begin{cases}3, & x=0\\ -x^2+3x+a, & 0<x<1\\ mx+b, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$

在 $a$，$m$ 和 $b$ 取什么值时满足中值定理在区间 $[0,\ 2]$ 上的假设条件？

**11.** (**a**) 画出下列每个多项式的零点及其一阶导数的零点：

(**i**) $y=x^2-4$.

(**ii**) $y=x^2+8x+15$.

(**iii**) $y=x^3-3x^2+4=(x+1)(x-2)^2$.

(**iv**) $y=x^3-33x^2+216x=x(x-9)(x-24)$.

(**b**) 利用罗尔定理证明：在

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

的每两个零点之间存在

$$nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1$$

的一个零点.

**12.** 假设 $f''$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，并且 $f$ 在这个区间上有 3 个零点. 证明 $f''$ 在 $(a,b)$ 中至少有一个零点. 推广这个结果.

**13.** 证明：若在整个区间 $[a,b]$ 上 $f''>0$，则 $f'$ 在 $[a,b]$ 中至多有一个零点. 如果把条件改为在整个区间 $[a,b]$ 上 $f''<0$，有什么结果？

**14.** 证明三次多项式可能至多有 3 个实数零点.

在习题 15 ~ 22 中，证明函数在给定区间上恰好有一个零点.

**15.** $f(x)=x^4+3x+1$，$[-2,\ -1]$.

**16.** $f(x)=x^3+\dfrac{4}{x^2}+7$，$(-\infty,\ 0)$.

**17.** $g(t)=\sqrt{t}+\sqrt{1+t}-4$，$(0,\ \infty)$.

**18.** $g(t)=\dfrac{1}{1-t}+\sqrt{1+t}-3.1$，$(-1,\ 1)$.

**19.** $r(\theta)=\theta+\sin^2\left(\dfrac{\theta}{3}\right)-8$，$(-\infty,\ \infty)$.

**20.** $r(\theta)=2\theta-\cos^2\theta+\sqrt{2}$，$(-\infty,\ \infty)$.

**21.** $r(\theta)=\sec\theta-\dfrac{1}{\theta^3}+5$，$(0,\ \pi/2)$.

**22.** $r(\theta)=\tan\theta-\cot\theta-\theta$，$(0,\ \pi/2)$.

**23.** 假设 $f(-1)=3$，并且对于所有 $x$ 有 $f'(x)=0$. 那么，对于所有 $x$ 必定有 $f(x)=3$ 吗？提出答案的理由.

**24.** 假设 $f(0)=5$，并且对于所有 $x$ 有 $f'(x)=2$. 那么，对于所有 $x$ 必定有 $f(x)=2x+5$ 吗？提出答案的理由.

**25.** 假设对于所有 $x$ 有 $f'(x)=2x$. 求下列条件下 $f(2)$ 的值：

(**a**) $f(0)=0$；(**b**) $f(1)=0$；　(**c**) $f(-2)=3$.

**26.** 关于导数为常数的函数可能得出什么结论？提出答案的理由.

在习题 27 ~ 32 中，求具有给定导数的所有可能的函数.

**27.** (**a**) $y'=x$.　(**b**) $y'=x^2$.　(**c**) $y'=x^2$.

**28.** (**a**) $y'=2x$.　(**b**) $y'=2x-1$.　(**c**) $y'=3x^2+2x-1$.

29. (a) $y' = -\frac{1}{x}$. (b) $y' = 1 - \frac{1}{x}$.

(c) $y' = 5 + \frac{1}{x}$.

30. (a) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. (b) $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

(c) $y' = 4x - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

31. (a) $y' = \sin 2t$. (b) $y' = \cos\frac{t}{2}$.

(c) $y' = \sin 2t + \cos\frac{t}{2}$.

32. (a) $y' = \sec^2\theta$. (b) $y' = \sqrt{\theta}$.

(c) $y' = \sqrt{\theta} - \sec^2\theta$.

在习题33~36中，求具有给定导数且图形通过点$P$的函数.

33. $f'(x) = 2x - 1$，$P(0, 0)$.

34. $g'(x) = \frac{1}{x} + 2x$，$P(1, -1)$.

35. $f'(x) = e^{2x}$，$P\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

36. $r'(t) = \sec t\tan t - 1$，$P(0, 0)$.

在习题37~40中，给出物体沿坐标线运动的速度和初始位置. 求物体在$t$时的位置.

37. $v = 9.8t + 5$，$s(0) = 10$.

38. $v = 32t - 2$，$s(0.5) = 4$.

39. $v = \sin\pi t$，$s(0) = 0$.

40. $v = \frac{1}{t+2}$，$t > -2$，$s(-1) = \frac{1}{2}$.

在习题41~44中给出物体沿坐标线运动的加速度$a = d^2s/dt^2$，以及初始速度和初始位置. 求物体在时间$t$的位置.

41. $a = e^t$，$v(0) = 20$，$s(0) = 5$.

42. $a = 9.8$，$v(0) = -3$，$s(0) = 0$.

43. $a = -4\sin 2t$，$v(0) = 2$，$s(0) = -3$.

44. $a = \frac{9}{\pi^2}\cos\frac{3t}{\pi}$，$v(0) = 0$，$s(0) = -1$.

45. **温度变化** 把汞温度计从冰箱取出放进沸水中，经过14秒它的温度由$-19$℃上升到100℃. 证明温度计在某处的温度以8.5℃/s的速率升高.

46. 汽车司机在收费亭收到传票，显示她在限速65 mph的收费公路上在2小时内行驶了159英里. 这位司机因车速而受到传询. 为什么？

47. 古航海资料显示，一艘170橹的三排桨战船(古希腊或古罗马战船)一度达到24小时航行184海里的航速. 解释这次航行中战船在某点的航速为什么超过7.5节(海里/小时).

48. 马拉松长跑运动员只用2.2小时跑完纽约城市马拉松赛26.2英里路程. 证明马拉松运动员跑步的速度至少有两次正好是11 mph.

49. 证明在汽车行驶2小时期间的某一时刻，速度计的读数将等于汽车行驶的平均速率.

50. **月球上的自由落体** 在月球上，重力加速度是16 m/s$^2$. 如果一块岩石掉进一条裂缝中，它在30秒后恰好击中裂缝底部之前的速度是多少？

51. ***a*和*b*的几何平均** 两个正数$a$和$b$的几何平均是数$\sqrt{ab}$，对于正数区间$[a,b]$上$f(x) = 1/x$的中值定理结论中的$c$值，证明$c = \sqrt{ab}$.

52. ***a*和*b*的算术平均** 两个数$a$和$b$的算术平均是数$(a+b)/2$. 对于任何区间$[a,b]$上$f(x) = x^2$的中值定理结论中的$c$值，证明$c = (a+b)/2$.

T 53. 画出函数$f(x) = \sin x\sin(x+2) - \sin^2(x+1)$的图形. 图形呈现什么特性？函数为什么具有这种特性？提出答案的理由.

54. **罗尔定理**

(a) 构造一个多项式，它以$x = -2, -1, 0, 1, 2$为零点.

(b) 一起画出$f$及其导数$f'$的图形. 从图形中看出同罗尔定理有什么关系？

(c) $g(x) = \sin x$及其导数的图形显示同样的现象吗？

55. **唯一解** 假定$f$在$[a,b]$上连续且在$(a, b)$上可微. 此外假定$f(a)$和$f(b)$具有相反的符号且在$a$和$b$之间$f' \neq 0$. 证明，在$a$和$b$之间恰好有一次$f(x) = 0$.

56. **平行切线** 假定$f$和$g$在$[a,b]$上可微且有$f(a) = g(a)$和$f(b) = g(b)$. 证明，在$a$和$b$之间至少存在一点，$f$和$g$的图形在这个点的切线是平行直线或者同一条直线. 用草图解释.

57. 如果两个可微函数$f(x)$和$g(x)$的图形从平面上同一点开始且在每个点有同样的变化率. 这两个图形完全相同吗？提出答案的理由.

58. 证明：正弦不等式$|\sin b - \sin a| \leqslant |b - a|$对于任何数$a$和$b$成立.

59. 假定$f$在$a \leqslant x \leqslant b$上是可微的且$f(b) < f(a)$. 证明$f'$在$a$和$b$之间的某个点取负值.

60. 令$f$是在区间$[a,b]$上定义的函数. 为了保证

$$\min f' \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \max f'$$

其中$\min f'$和$\max f'$是指$f'$在$[a,b]$上的最小值和最大值，对$f$应设置什么条件？提出答案的

理由.

**T61.** 设$f'(x)=1/(1+x^4\cos x)$，$0\leqslant x\leqslant 0.1$，并且$f(0)=1$. 利用习题60中的不等式估计$f(0.1)$.

**T62.** 设$f'(x)=1/(1-x^4)$，$0\leqslant x\leqslant 0.1$，并且$f(0)=2$. 利用习题60中的不等式估计$f(0.1)$.

**63.** 令$f$在每个$x$值是可微的，并且假定$f(1)=1$，在$(-\infty, 1)$上$f'<0$，在$(1, \infty)$上$f'>0$.

(a) 证明$f(x)\geqslant 1$对于所有$x$成立.

(b) 必定有$f'(1)=0$吗？予以说明.

**64.** 令$f(x)=px^2+qx+r$是定义在闭区间$[a,b]$上的二次函数. 证明：在$(a, b)$中恰好存在一点$c$，$f$在这个点满足中值定理的结论.

**65.** 利用含相同导数的论据，像证明对数的积法则和幂法则的做法一样，证明商法则性质.

**66.** 利用反三角函数具有类似导数的论据证明：

(a) $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$.

(b) $\sec^{-1}x+\csc^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$.

**67.** 从正文中导出的等式$e^{x_1}e^{x_2}=e^{x_1+x_2}$开始，证明$e^{-x}=1/e^x$对于任何实数$x$成立. 然后证明$e^{x_1}/e^{x_2}=e^{x_1-x_2}$对于任何实数$x_1$和$x_2$成立.

**68.** 证明$(e^{x_1})^{x_2}=e^{x_1x_2}$对于任何实数$x_1$和$x_2$成立.

## 4.3 单调函数与一阶导数检验法

在绘制可微函数图形时，倘若知道函数在区间上什么地方递增(从左至右上升)以及在什么地方递减(从左至右下降)，那是很有帮助的. 这一节确切地定义函数在区间上递增或者递减的含义，并且给出一种检验法，判定函数在何处递增以及在何处递减. 此外说明如何检验函数的临界点确定是否出现局部极值.

### 4.3.1 增函数与减函数

我们证明：增函数只能是具有正值导数的函数；减函数只能是具有负值导数的函数.

> **定义** 设$f$是定义在区间$I$上的函数且$x_1$和$x_2$是$I$中的任意两点.
>
> (1) 如果每当$x_1<x_2$时$f(x_2)>f(x_1)$，就说$f$在$I$上是**递增的**.
>
> (2) 如果每当$x_1<x_2$时$f(x_2)<f(x_1)$，就说$f$在$I$上是**递减的**.
>
> 在$I$上是递增的或者递减的函数称为在$I$上是**单调的**.

重要的是要认识到，增函数和减函数的定义条件必须对于区间$I$上每一对具有$x_1<x_2$的点$x_1$和$x_2$都满足. 由于比较函数值用不等号$<$而不是用$\leqslant$，有时就说$f$在$I$上是严格递增的或者严格递减的. 区间$I$可以是有限的，也可以是无限的.

函数$f(x)=x^2$在区间$(-\infty, 0]$上递减而在$[0, \infty)$上递增，这可以从它的图形中看出(见图4.20). 这个函数$f$在$(-\infty, 0]$和$[0, \infty)$上是单调的，但是在$(-\infty, \infty)$上不是单调的. 请注意，在区间$(-\infty, 0)$上，切线有负斜率，所以一阶导数在这个区间上恒为负值；对于区间$(0, \infty)$，切线有正斜率，一阶导数在这个区间上恒为正值. 下面的结果证实这些观察.

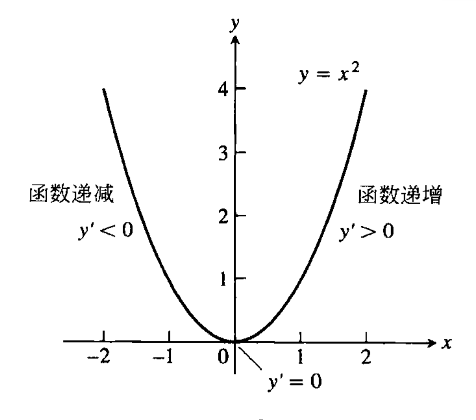



图4.20 函数$f(x)=x^2$在区间$(-\infty, 0]$和$[0, \infty)$上是单调的，但是在$(-\infty, \infty)$上不是单调的

> **系3** 假定函数$f$在区间$[a,b]$上连续且在$(a, b)$上可微. 若在每个点$x\in(a, b)$有$f'(x)>0$，则$f$在$[a,b]$上是递增的. 若在每个点$x\in(a, b)$有$f'(x)<0$，则$f$在$[a,b]$上是递减的.

**证明** 令 $x_1$ 和 $x_2$ 是区间 $(a, b)$ 上满足 $x_1 < x_2$ 的任意两点. 对于区间 $[x_1, x_2]$ 上的函数 $f$ 应用的中值定理表明

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

其中 $c$ 是 $x_1$ 和 $x_2$ 之间的某个数. 这个等式右端的符号与 $f'(c)$ 的符号相同, 因为, $x_2 - x_1$ 是正数. 所以, 当 $f'$ 在 $(a, b)$ 上为正时 $f(x_2) > f(x_1)$, 而 $f'$ 在 $(a, b)$ 上为负时 $f(x_2) < f(x_1)$. ■

下面是应用第一导数检验法确定函数在什么地方递增和递减的方法. 如果 $a < b$ 是函数 $f$ 的两个临界点, 并且 $f'$ 在区间 $(a, b)$ 上存在但是不等于零, 那么 $f'$ 在 $(a, b)$ 上必定取正值或者取负值(见 3.1 节定理 2). 可以确定 $f'$ 在区间上的符号的一种方法是计算 $f'$ 在区间 $(a, b)$ 中某个点 $x$ 的值. 然后应用系 3. 系 3 不仅对于有限区间是正确的, 对于无限区间也是正确的. 我们在下面例子的分析中利用这个事实.

**例 1** 求 $f(x) = x^3 - 12x - 5$ 的临界点, 并且确定 $f$ 是递增和递减的区间.

**解** $f$ 是处处连续和可微的函数. 一阶导数

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x + 2)(x - 2)$$

在 $x = -2$ 和 $x = 2$ 为零. 这两个临界点把 $f$ 的定义域分成区间 $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ 和 $(2, \infty)$. 在这三个区间上 $f'$ 或者为正或者为负. 我们在每个子区间上一个方便的点计算 $f'$ 确定 $f'$ 的符号. 然后通过在每个子区间上应用系 3 确定 $f$ 的特性. 结果汇集在下表中, 而函数的图形在图 4.21 给出.

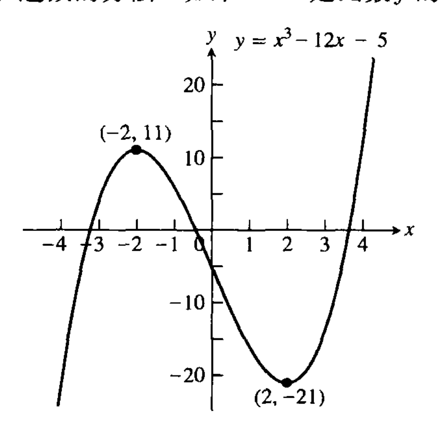



图 4.21 函数 $f(x) = x^3 - 12x - 5$ 在三个单独的区间上是单调的(例 1)

| 区间 | $-\infty < x < -2$ | $-2 < x < 2$ | $2 < x < \infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ 的值 | $f'(-3) = 15$ | $f'(0) = -12$ | $f'(3) = 15$ |
| $f'$ 的符号 | + | − | + |
| $f$ 的特性 | 递增 | 递减 | 递增 |

■

了解函数递增和递减的区间, 我们也就知道如何检验函数局部极值的性质.

### 4.3.2 局部极值的一阶导数检验法

人物传记

埃德蒙·哈雷 (Edmund Halley, 1656—1742)

在图 4.22 中, 对于 $f$ 取极小值的点, 在点的左侧邻近 $f' < 0$, 而在点的右侧邻近 $f' > 0$ (如果取极值的点是端点, 只需考虑一侧的点). 因此函数在极小值的左侧递减而在它的右侧递增. 同样, 对于 $f$ 取极大值的点函数在点的左邻近 $f' > 0$, 而在点的右邻近 $f' < 0$. 因此, 函数在极大值的左侧递增而在它的右侧递减. 总之, 在 $f(x)$ 的局部极值点, $f'(x)$ 改变符号.

这些观察结果导致一种判别可微函数局部极值的存在及性质的检验法.

**局部极值的一阶导数检验法**

假定 $c$ 是连续函数 $f$ 的临界点, 并且 $f$ 在包含 $c$ 的某个区间内的每个点($c$ 本身可能除外)是可微的. 在图形上从左向右经过点 $c$ 移动:

**(1)** 若 $f'$ 在点 $c$ 由负值变为正值, 则 $f$ 在 $c$ 有一个局部极小值;

**(2)** 若 $f'$ 在点 $c$ 由正值变为负值, 则 $f$ 在 $c$ 有一个局部极大值;

**(3)** 若 $f'$ 在点 $c$ 不改变符号(即 $f'$ 在 $c$ 的两侧同时取正值或者同时取负值), 则 $f$ 在 $c$ 不存在局部极值.

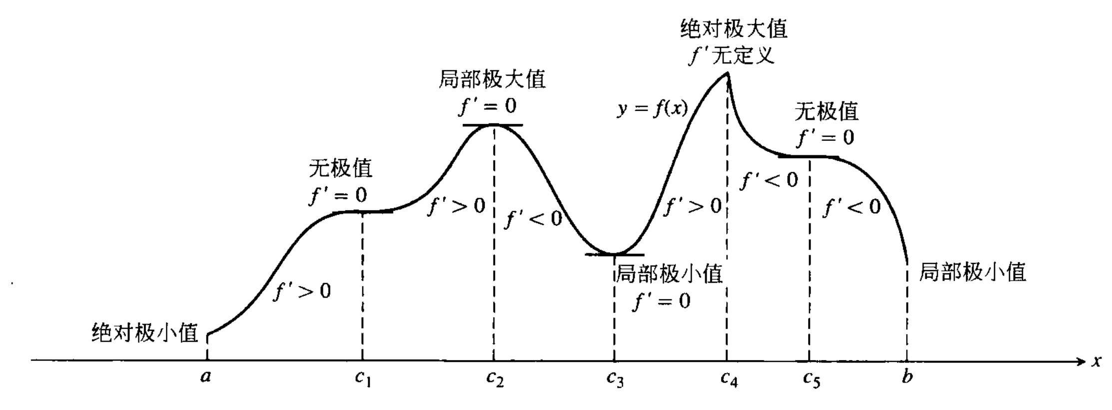



图 4.22 函数的一阶导数说明图形如何上升和下降

在端点的局部极值检验是同样的，不过只考虑端点的一侧.

**证明** 证明(1)：由于$f'$的符号在点 $c$ 由负值变为正值，故存在这样的数 $a$ 和 $b$，在$(a, c)$上$f'<0$，而在$(c, b)$上$f'>0$. 若$x\in(a, c)$，则$f(c)<f(x)$，因为$f'<0$蕴涵$f$在$[a, c]$上是递减的. 若$x\in(c, b)$，则$f(c)<f(x)$，因为$f'>0$蕴涵$f$在$[c, b]$上是递增的. 因此，对于每个$x\in(a, b)$有$f(x)\geqslant f(c)$. 按照定义$f$在 $c$ 有一个局部极小值. (2)和(3)用同样方法证明. ■

**例 2** 求$f(x)=(x^2-3)e^x$ 的临界点. 确定$f$递增和递减的区间. 求函数的局部极值和绝对极值.

**解** 函数$f$对于所有实数是连续的和可微的，所以临界点仅出现在$f'$的零点. 利用积法则，求出导数

$$f'(x)=(x^2-3)\cdot\frac{d}{dx}e^x+\frac{d}{dx}(x^2-3)\cdot e^x=(x^2-3)\cdot e^x+(2x)\cdot e^x=(x^2+2x-3)e^x$$

由于 $e^x$ 不可能为零，这个一阶函数等于零当且仅当

$$x^2+2x-3=0$$

$$(x+3)(x-1)=0$$

零点 $x=-3$ 和 $x=1$ 把 $x$ 轴分成下面三个区间：

| 区间 | $x<-3$ | $-3<x<1$ | $1<x$ |
|---|---|---|---|
| $f'$的符号 | + | - | + |
| $f$的特性 | 递增 | 递减 | 递增 |

从上表可以看出在 $x=-3$ 有一个局部极大值(约为 0.299)，在 $x=1$ 有一个局部极小值(约为 $-5.437$). 局部极小值也是绝对极小值，因为对于$|x|>\sqrt{3}$有$f(x)>0$. $f$没有绝对极大值. 函数在$(-\infty, -3)$和$(1, \infty)$上递增而在$(-3, 1)$上递减. 图 4.23 显示函数的图形. ■

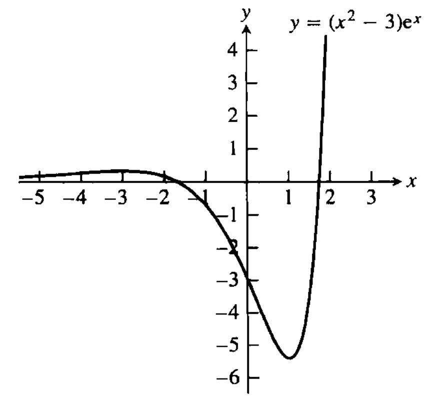



图 4.23 $f(x)=(x^2-3)e^x$ 的图形(例 2)

**例 3** 求 $f(x)=x^{1/3}(x-4)=x^{4/3}-4x^{1/3}$的临界点. 确定$f$递增和递减的区间. 求函数的局部极值和绝对极值.

**解** 函数$f$在所有 $x$ 是连续的，因为它是两个连续函数 $x^{1/3}$和$(x-4)$的乘积. 一阶导数

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(x^{4/3}-4x^{1/3})=\frac{4}{3}x^{1/3}-\frac{4}{3}x^{-2/3}$$

$$= \frac{4}{3}x^{-2/3}(x-1) = \frac{4(x-1)}{3x^{2/3}}$$

在 $x=1$ 为零而在 $x=0$ 无定义. 在定义域没有端点，所以临界点 $x=0$ 和 $x=1$ 是 $f$ 可能取极值的仅有位置.

这两个临界点把 $x$ 轴分成三个区间，$f'$ 在这些区间上或者为正值或者为负值. $f'$ 呈现的符号模式揭示 $f$ 在两个临界点之间的特性. 可以把这些结果显示在下表中：

| 区间 | $x<0$ | $0<x<1$ | $x>1$ |
|---|---|---|---|
| $f'$的符号 | $-$ | $-$ | $+$ |
| $f$的特性 | 递减 | 递减 | 递增 |

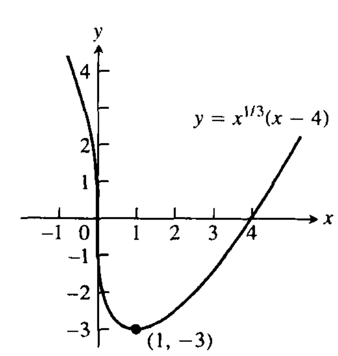



图 4.24 函数 $f(x)=x^{1/3}(x-4)$ 当 $x<1$ 时递减而当 $x>1$ 时递增(例 3)

中值定理系 3 对我们表明，$f$ 在 $(-\infty, 0)$ 上递减，而在 $(1, \infty)$ 上递增. 局部极值的一阶导数检验法告诉我们 $f$ 在 $x=0$ 没有极值($f'$ 不改变符号)，而在 $x=1$ 有局部极小值($f'$ 由负值变为正值).

局部极小值是 $f(1)=1^{1/3}(1-4)=-3$. 这也是一个绝对极小值. 图 4.24 显示关于函数图形的这个值.

请注意，$\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty$，所以 $f$ 的图形在原点有一条垂直切线. ■

## 习题 4.3

在习题 1 ~ 8 中，对于给出导数的函数回答下列问题：

(a) $f$ 的临界点是什么？

(b) $f$ 在什么区间上是递增的或者递减的？

(c) $f$ 在什么点(如果有的话)取局部极大值和局部极小值？

**1.** $f'(x)=x(x-1)$.

**2.** $f'(x)=(x-1)(x+2)$.

**3.** $f'(x)=(x-1)^2(x+2)$.

**4.** $f'(x)=(x-1)^2(x+2)^2$.

**5.** $f'(x)=(x-1)e^{-x}$.

**6.** $f'(x)=(x-7)(x+1)(x+5)$.

**7.** $f'(x)=x^{-1/3}(x+2)$.

**8.** $f'(x)=x^{-1/2}(x-3)$.

在习题 9 ~ 32 中：

(a) 求函数递增和递减的区间.

(b) 然后确定函数的局部极值(如果存在)，指出它们取局部极值的位置.

(c) 哪些极值是绝对极值(如果存在)？

**T** (d) 用一种绘图计算器或计算机绘图器支持你获得的结果.

**9.** $g(t)=-t^2-3t+3$. **10.** $g(t)=-3t^2+9t+5$.

**11.** $h(x)=-x^3+2x^2$. **12.** $h(x)=2x^3-18x$.

**13.** $f(\theta)=3\theta^2-4\theta^3$. **14.** $f(\theta)=6\theta-\theta^3$.

**15.** $f(r)=3r^3+16r$. **16.** $h(r)=(r+7)^3$.

**17.** $f(x)=x^4-8x^2+16$. **18.** $g(x)=x^4-4x^3+4x^2$.

**19.** $H(t)=\frac{3}{2}t^4-t^6$. **20.** $K(t)=15t^3-t^5$.

**21.** $g(x)=x\sqrt{8-x^2}$. **22.** $g(x)=x^2\sqrt{5-x}$.

**23.** $f(x)=\frac{x^2-3}{x-2}$, $x\neq 2$. **24.** $f(x)=\frac{x^3}{3x^2+1}$.

**25.** $f(x)=x^{1/3}(x+8)$. **26.** $g(x)=x^{2/3}(x+5)$.

**27.** $h(x)=x^{1/3}(x^2-4)$. **28.** $k(x)=x^{2/3}(x^2-4)$.

**29.** $f(x)=e^{2x}+e^{-x}$. **30.** $f(x)=e^{\sqrt{x}}$.

**31.** $f(x)=x\ln x$. **32.** $f(x)=x^2\ln x$.

在习题 33 ~ 40 中：

(a) 确定函数在给定定义域的局部极值，并且指出取极值的位置.

(b) 哪些极值是绝对极值(如果存在)？

**T** (c) 用一种绘图计算器或计算机的绘图器支持你获得的结果.

**33.** $f(x)=2x-x^2$, $-\infty<x\leqslant 2$.

**34.** $f(x)=(x+1)^2$, $-\infty<x\leqslant 0$.

**35.** $g(x)=x^2-4x+4$, $1\leqslant x<\infty$.

**36.** $g(x)=-x^2-6x-9$, $-4\leqslant x<\infty$.

**37.** $f(t)=12t-t^3$, $-3\leqslant t<\infty$.

**38.** $f(t)=t^3-3t^2$, $-\infty<t\leqslant 3$.

**39.** $h(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+4x$, $0\leqslant x<\infty$.

**40.** $k(x)=x^3+3x^2+3x+1$, $-\infty<x\leqslant 0$.

在习题41 ~44 中：

(a)求每个函数在给定区间上的局部极值，并且指出取极值的位置.

T (b)一起画出函数及其导数的图形. 说明$f$同$f'$的符号和值有关的特性.

**41.** $f(x)=\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}$, $0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

**42.** $f(x)=-2\cos x-\cos^2 x$, $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$.

**43.** $f(x)=\csc^2 x-2\cot x$, $0<x<\pi$.

**44.** $f(x)=\sec^2 x-2\tan x$, $\frac{-\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$.

在习题45 和46 中，证明函数在给定的$\theta$值有局部极值，并且指出函数具有的局部极值的类型.

**45.** $h(\theta)=3\cos\frac{\theta}{2}$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, 在$\theta=0$和$\theta=2\pi$.

**46.** $h(\theta)=5\sin\frac{\theta}{2}$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, 在$\theta=0$和$\theta=\pi$.

**47.** 假定$y=f(x)$是通过点(1, 1)的可微函数，并且$f'(1)=0$. 画出函数在下列条件下的草图：

(a)对于$x<1$有$f'(x)>0$, 对于$x>1$有$f'(x)<0$;

(b)对于$x<1$有$f'(x)<0$, 对于$x>1$有$f'(x)>0$;

(c)对于$x\neq 1$有$f'(x)>0$;

(d)对于$x\neq 1$有$f'(x)<0$.

**48.** 假定$y=f(x)$是可微函数，画出函数在下列条件下的草图：

(a)$f$在点(1, 1)有局部极小值，在点(3, 3)有局部极大值；

(b)$f$在点(1, 1)有局部极大值，在点(3, 3)有局部极小值；

(c)$f$在点(1, 1)和(3, 3)有局部极大值；

(d)$f$在点(1, 1)和(3, 3)有局部极小值.

**49.** 假定$y=f(x)$是连续函数，画出函数在下列条件下的草图：

(a)$g(2)=2.0$, 对于$x<2$有$0<g'<1$, 当$x\to 2^-$时$g'(x)\to 1^-$, 对于$x>2$有$-1<g'<0$, 当$x\to 2^+$时$g'(x)\to -1^+$;

(b)$g(2)=2$, 对于$x<2$有$g'<0$, 当$x\to 2^-$时$g'(x)\to -\infty$, 对于$x>2$有$g'>0$, 当$x\to 2^+$时$g'(x)\to\infty$.

**50.** 假定$y=h(x)$是连续函数，画出函数在下列条件下的草图：

(a)$h(0)=0$, 对于所有$x$有$-2\leqslant h(x)\leqslant 2$, 当$x\to 0^-$时$h'(x)\to\infty$且当$x\to 0^+$时$h'(x)\to\infty$;

(b)$h(0)=0$, 对于所有$x$有$-2\leqslant h(x)\leqslant 0$, 当$x\to 0^-$时$h'(x)\to\infty$且当$x\to 0^+$时$h'(x)\to -\infty$.

**51.** 定位并确定下列绝对极值：

(a)$\ln(\cos x)$在$[-\pi/4, \pi/3]$上；

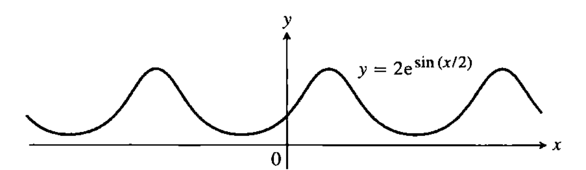
(b)$\cos(\ln x)$在$[1/2, 2]$上.

**52.** (a)证明$f(x)=x-\ln x$对于$x>1$是递增的.

(b)利用(a)证明当$x>1$时$\ln x<x$.

**53.** 求函数$f(x)=e^x-2x$在区间[0, 1]上的绝对极大值和绝对极小值.

**54.** 周期函数$f(x)=2e^{\sin(x/2)}$在何处取它的极值？这些值是什么？




**55.** 求函数$f(x)=x^2\ln(1/x)$的绝对极大值，并且指出取极大值的位置.

**56.** 求函数$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$是递增的和递减的区间. 描述答案的推理过程.

**57.** 当$x$从左向右移动经过点$c=2$时，函数$f(x)=x^3-3x+2$的图形是上升还是下降？提出答案的理由.

**58.** (a)证明：若$x\geqslant 0$, 则$e^x\geqslant 1+x$.

(b)利用(a)的结果证明

$$e^x\geqslant 1+x+\frac{1}{2}x^2$$

**59.** 证明增函数和减函数是一对一函数. 就是证明：若$x_1$, $x_2\in I$且$x_2\neq x_1$, 则$f(x_2)\neq f(x_1)$.

在习题60 ~64 中，利用习题59 的结果，证明函数在它们的定义域上存在反函数. 利用3.7 节定理4 求$df^{-1}/dx$的公式.

**60.** $f(x)=(1/3)x+(5/6)$.

**61.** $f(x)=27x^3$.

**62.** $f(x)=1-8x^3$.

**63.** $f(x)=(1-x)^3$.

**64.** $f(x)=x^{5/3}$.

## 4.4 凹性与曲线绘图

在4.3 节见到，一阶导数对我们如何表明函数在什么地方是增加的，在什么地方是减少的. 在可微函数的临界点，一阶导数检验法说明函数存在局部极大值还是局部极小值，或者说明函数图形在那里持续上升还是持续下降.

在这一节我们看出二阶导数怎样给出关于可微函数图形弯曲或转向的信息. 这种补充信息揭示函数性质的关键特征，所以我们在画函数图形时可以表现这些特征.

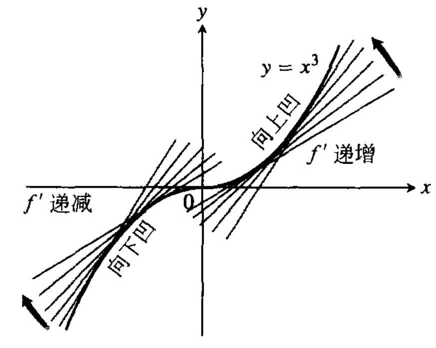



图 4.25 $f(x)=x^3$ 的图形在$(-\infty, 0)$是向下凹的面在$(0, \infty)$上是向上凹的(例 1(a))

### 4.4.1 凹性

正如从图 4.25 中可以见到的那样，曲线$y=x^3$ 随 $x$ 的增加而上升，但是在区间$(-\infty, 0)$和$(0, \infty)$定义的两部分图形以不同的方式转向. 当沿曲线从左侧逼近原点时，曲线转向右侧并且下落到切线之下. 切线在区间$(-\infty, 0)$上的斜率是递减的. 当沿曲线从右侧离开原点时，曲线转向左侧并且上升到切线之上. 切线在区间$(0, \infty)$上的斜率是增加的. 这种转向或者弯曲的特性定义曲线的凹性.

**定义** 可微函数 $y=f(x)$的图形呈现
**(a)** 在开区间 $I$ 上**向上凹**，如果$f'$在 $I$ 上是增加的；
**(b)** 在开区间 $I$ 上**向下凹**，如果$f'$在 $I$ 上是减少的.

如果 $y=f(x)$有二阶导数，应用中值定理系 3 可以断定，$f'$当$f''>0$ 时在 $I$ 上增加，而当$f''<0$ 时在 $I$ 上减少.

**凹性二阶导数检验法**
令 $y=f(x)$是在区间 $I$ 上的二次可微函数.
**(1)** 如果在 $I$ 上$f''>0$，$f$ 在 $I$ 上的图形向上凹.
**(2)** 如果在 $I$ 上$f''<0$，$f$ 在 $I$ 上的图形向下凹.

如果 $y=f(x)$是二次可微函数，在表示二阶导数时我们互换地使用记号$f''$和 $y''$.

**例 1**

**(a)** 曲线 $y=x^3$(见图 4.25)在区间$(-\infty, 0)$上是向下凹的，在其中 $y''=6x<0$，而在区间$(0, \infty)$上是向上凹的，在其中 $y''=6x>0$.

**(b)** 曲线 $y=x^2$(见图 4.26)在区间$(-\infty, \infty)$上是向上凹的，因为它的二阶导数 $y''=2$ 恒为正值. ■

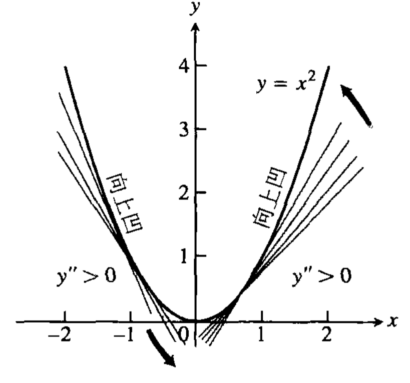



图 4.26 $y=x^2$ 的图形在两个区间上是向上凹的(例 1(b))

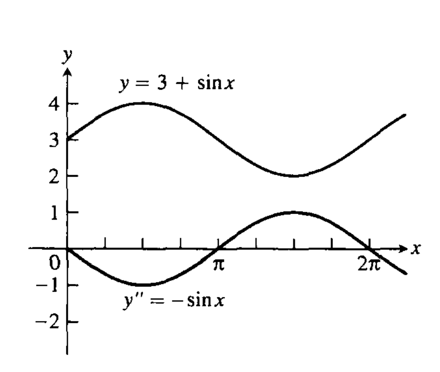



图 4.27 利用 $y''$的图形确定 $y$ 的凹性(例 2)

**例 2** 确定 $y=3+\sin x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的凹性.

**解** $y=3+\sin x$ 的图形在 $(0,\ \pi)$ 上是向下凹的，在其中 $y''=-\sin x$ 为负值. 它在 $(\pi,\ 2\pi)$ 上是向上凹的，在其中 $y''=-\sin x$ 为正值(见图 4.27). ■

### 4.4.2 拐点

例 2 中的曲线 $y=3+\sin x$ 在点 $(\pi,\ 3)$ 改变凹性. 我们称 $(\pi,\ 3)$ 为曲线的*拐点*.

| **定义** 在函数图形上存在切线并且改变凹性的点为**拐点**. |
|---|

在曲线上 $y''$ 在一侧为正而在另一侧为负的点是拐点. 在这样一点，$y''$ 或者为零(因为导数具有介值性质)，或者没有定义. 如果 $y$ 是二次可微函数，$y''$ 在拐点为零而 $y'$ 有局部极大值或局部极小值. 然而，下面的例子显示，在 $y''=0$ 的地方可能不存在拐点.

**例 3** 曲线 $y=x^4$ 在 $x=0$ 没有拐点(见图 4.28). 虽然 $y''=12x^2$ 在那里为零，但是它不改变符号. ■

**例 4** $y=x^{1/3}$ 在 $x=0$ 有一个拐点(见图 4.29)，但是 $y''$ 在那里不存在：

$$y''=\frac{d^2}{dx^2}(x^{1/3})=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^{-2/3}\right)=-\frac{2}{9}x^{-5/3}$$ ■

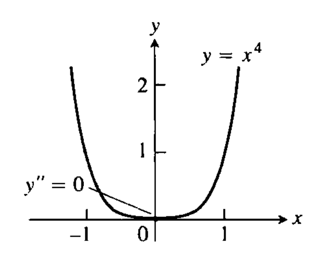



图 4.28 $y=x^4$ 的图形在原点没有拐点，虽然在那里 $y''=0$(例 3)

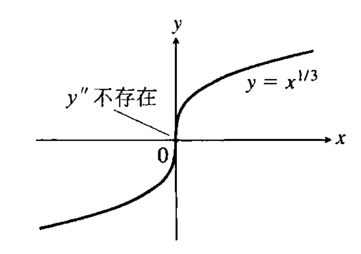



图 4.29 在 $y''$ 不存在的点可能是一个拐点(例 4)

从例 3 看出，二阶导数为零不一定产生拐点. 从例 4 看出拐点也可能出现在二阶导数不存在的地方.

为了把物体沿直线的运动作为时间的函数来研究，我们通常有兴趣了解由二阶导数给出的加速度何时为正或者为负. 物体位置函数的图形上的拐点揭示加速度在何处改变符号.

**例 5** 沿水平直线运动的质点的位置函数为

$$s(t)=2t^3-14t^2+22t-5,\quad t\geqslant 0$$

求速度和加速度，并且描述质点的运动状况.

**解** 速度为

$$v(t)=s'(t)=6t^2-28t+22=2(t-1)(3t-11)$$

而加速度为

$$a(t)=v'(t)=s''(t)=12t-28=4(3t-7)$$

当函数 $s(t)$ 增加时，质点向右移动；当 $s(t)$ 减少时，质点向左移动.

请注意，当 $t=1$ 和 $t=11/3$ 时，一阶导数 $(v=s')$ 为零.

| 区间 | $0<t<1$ | $1<t<11/3$ | $11/3<t$ |
|---|---|---|---|
| $v=s'$的符号 | + | − | + |
| $s$ 的特性 | 增加 | 减少 | 增加 |
| 质点运动 | 向右 | 向左 | 向右 |

质点在时间区间$[0, 1)$和$(11/3, \infty)$向右运动，而在$(1, 11/3)$向左运动. 质点在 $t=1$ 和 $t=11/3$ 处于瞬间稳定(静止).

加速度 $a(t)=s''(t)=4(3t-7)$ 当 $t=7/3$ 时为零.

| 区间 | $0<t<7/3$ | $7/3<t$ |
|---|---|---|
| $a=s''$的符号 | − | + |
| $s$ 的图形 | 向下凹 | 向上凹 |

质点开始时向右运动，与此同时降低速度，然后在时间区间$[0, 7/3]$上处在向左加速度的影响下，当 $t=1$ 开始向左运动. 接着加速度在 $t=7/3$ 时改变方向，但是质点继续向左运动，再在向右加速度影响下降低速度. 当 $t=11/3$ 时质点再次倒转方向：以加速度同样的方向向右运动. ■

### 4.4.3 局部极值二阶导数检验法

有时不考察$f'$在临界点的符号改变，我们可以改用下述检验法确定局部极值的存在和特征.

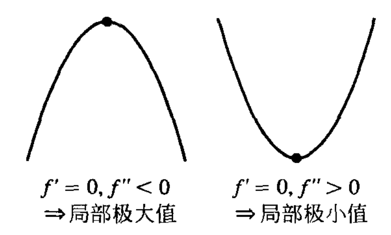
**定理 5（局部极值二阶导数检验法）** 假定$f''$在包含 $x=c$ 的开区间上连续.

**(1)**若$f'(c)=0$ 且$f''(c)<0$，则$f$在 $x=c$ 有绝对极大值.

**(2)**若$f'(c)=0$ 且$f''(c)>0$，则$f$在 $x=c$ 有局部极小值.

**(3)**若$f'(c)=0$ 且$f''(c)=0$，检验法失效. 函数$f$可能有局部极大值或者局部极小值，也可能既无局部极大值也无局部极小值.

右图表示用(1)和(2)检验函数极值.




**证明** 我们来证明第(1)部分. 若$f''(c)<0$，则在包含点 $c$ 的某个开区间 $I$ 上，$f''(c)<0$(因为$f''$是连续的). 因此$f'$在 $I$ 上是减少的. 由于$f'(c)=0$，$f'$在 $c$ 的符号由正变为负，所以，一阶导数检验$f$在 $c$ 有局部极大值.

第(2)部分用类似的方法证明. 对于第(3)部分，以函数 $y=x^4$，$y=-x^4$ 和 $y=x^3$ 作为例子. 这三个函数在 $x=0$ 的一阶导数和二阶导数均为零. 然而在 $x=0$，函数 $y=x^4$ 有局部极小值，$y=x^{-4}$有局部极大值，而 $y=x^3$ 在包含 $x=0$ 的任何开区间上是增加的(既无极大值也无极小值)，所以检验法失效. ■

二阶导数检验法只需知道$f''$在 $c$ 本身的值而不是在包含 $c$ 的一个开区间上的值. 这样使检验法容易应用. 这是有利的方面；不利的方面是检验法在$f''=0$ 或者$f''$在 $x=c$ 不存在时没有结果. 当出现这种情况时，就利用局部极值的一阶导数检验法.

$f'$和$f''$一起向我们说明函数图形的形状，即临界点处于什么位置，在临界点显现什么特性，函数在何处增加和减少，以及曲线怎样像它的凹性所定义的那样转向或弯曲. 我们利用这些信息描绘表现函数主要特征的图形.

**例 6** 绘制函数$f(x)=x^4-4x^3+10$ 的草图，采用下述步骤：

**(a)**确定$f$取极值的位置.

**(b)**寻找$f$增加的区间和减少的区间.

**(c)**寻找$f$图形向上凹和向下凹的区间.

**(d)**描绘$f$图形的一般形状.

(e)画出某些特殊点，像局部极大值点和局部极小值点、拐点和截距. 然后描绘曲线.

**解** 由于存在$f'(x)=4x^3-12x^2$，$f$是连续函数. $f$的定义域是$(-\infty,\infty)$，而$f'$的定义域也是$(-\infty,\infty)$. 因此$f'$的临界点只出现在$f'$的零点. 由于

$$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$$

一阶导数在$x=0$和$x=3$的值为零.

| 区间 | $x<0$ | $0<x<3$ | $3<x$ |
|---|---|---|---|
| $f'$的符号 | − | − | + |
| $f$的特性 | 减少 | 减少 | 增加 |

(a)利用局部极值的一阶导数检验法和上表，看出$f$在$x=0$无极值，而在$x=3$有局部极小值.

(b)利用上表，看出$f$在区间$(-\infty,0]$和$[0,3]$上减少，而在$[3,\infty)$上增加.

(c)$f''(x)=12x^2-24x=12x(x-2)$在$x=0$和$x=2$的值为零.

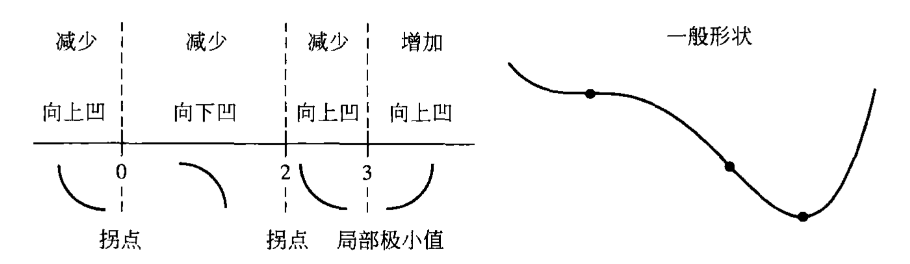
| 区间 | $x<0$ | $0<x<2$ | $2<x$ |
|---|---|---|---|
| $f''$的符号 | + | − | + |
| $f$的特性 | 向上凹 | 向下凹 | 向上凹 |

由此看出$f$在区间$(-\infty,0)$和$(2,\infty)$上向上凹，而在$(0,2)$上向下凹.

(d)综合上面两个表的信息得到

| $x<0$ | $0<x<2$ | $2<x<3$ | $3<x$ |
|---|---|---|---|
| 减少 | 减少 | 减少 | 增加 |
| 向上凹 | 向下凹 | 向上凹 | 向上凹 |

曲线的一般形状如下：




(e)画出曲线的截距(如果可能)以及$y'$和$y''$等于零的点. 指明任何局部极值和拐点. 利用图形的一般形状作引导画出曲线的草图(在需要时画出另外的点). 图4.30显示$f$的图形. ■

例6中的求解步骤给出绘制函数关键特征的过程.

**绘制$y=f(x)$图形的对策**

(1)确定$f$的定义域和曲线可能具有的任何对称性.

(2)求$y''$和$y''$.

(3)求$f$的临界点，并且确定函数在每个临界点的特性.

(4)求曲线增加和减少的区间.

(5)求可能存在的拐点，并且确定曲线的凹性.

(6)确定任何渐近线.

(7)画出关键点，像截距和第(3)~(5)步中求出的点，并且绘制曲线.

**例7** 绘制函数$f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{1+x^2}$的草图.

**解** (1)$f$的定义域是$(-\infty, \infty)$，并且无论对坐标轴或者原点都不存在对称性(见1.1节)

(2)求$f'$和$f''$:

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{1+x^2}$$ ($x$截距在$x=-1$,$y$截距($y=1$)在$x=0$)

$$f'(x)=\frac{(1+x^2)\cdot 2(x+1)-(x+1)^2\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$ (临界点:$x=-1,x=1$)

$$f''(x)=\frac{(1+x^2)^2\cdot 2(-2x)-2(1-x^2)[2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4}$$

$$=\frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$ (代数运算后)

(3)在临界点的特性：由于$f'$在$f$的定义域上处处存在，临界点仅出现在$f'(x)=0$的点$x=\pm 1$(第(2)步). 在$x=-1$，$f''(-1)=1>0$，依据二阶导数检验法有一个相对极小值. 在$x=1$，$f''(1)=-1<0$，依据二阶导数检验法有一个相对极大值.

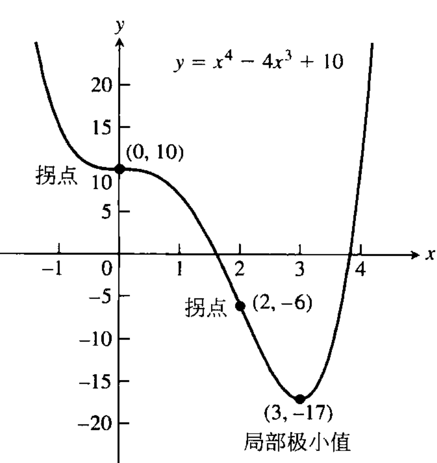



图4.30 $f(x)=x^4-4x^3+10$的图形(例6)

(4)递增和递减：我们看出在区间$(-\infty, -1)$上导数$f'(x)<0$，曲线是递减的；在区间$(-1, 1)$上$f'(x)>0$，曲线是递增的；在区间$(1, \infty)$上$f'(x)<0$，曲线再次是递减的.

(5)拐点：注意二阶导数的分母(第(2)步)恒为正，二阶导数$f''$当$x=-\sqrt{3}$，0，$\sqrt{3}$时为零. 二阶导数在这三点的每一点改变符号，即$f''$在$(-\infty, -\sqrt{3})$上为负，在$(-\sqrt{3}, 0)$上为正，在$(0, \sqrt{3})$上为负，而在$(\sqrt{3}, \infty)$上再次为正，因此，每一点都是拐点. 曲线在区间$(-\infty, -\sqrt{3})$上向下凹，在$(-\sqrt{3}, 0)$上向上凹，在$(0, \sqrt{3})$上向下凹，而在$(\sqrt{3}, \infty)$上再次向上凹.

(6)渐近线：展开$f(x)$的分子，然后对分子和分母同除以$x^2$，得到

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{1+x^2}=\frac{x^2+2x+1}{1+x^2}$$ (展开分子)

$$=\frac{1+(2/x)+(1/x^2)}{(1/x^2)+1}$$ (分子分母同除以$x^2$)

由此看出，当$x\to\infty$时$f(x)\to 1^+$，当$x\to-\infty$时$f(x)\to 1^-$. 因此，直线$y=1$是水平渐近线.

由于$f$在$(-\infty, -1)$上减少，而后在$(-1, 1)$上增加，可知$f(-1)=0$是一个局部极小值. 虽然$f$在$(1, \infty)$上减少，它在这个区间上不会越过水平渐近线$y=1$(从上面趋近这条水平渐近线). 所以图形不会变成负值，$f(-1)=0$也是绝对极小值. 同样，$f(1)=2$是一个绝对极大值，因为图形不会在区间$(-\infty, -1)$上越过渐近线$y=1$(从下面趋近它). 所以，不存在垂直渐近线($f$的值域是$0\leqslant y\leqslant 2$).

(7)$f$的图形在图4.31中画出. 请注意，当$x\to-\infty$时图形在趋近水平渐近线$y=1$时是怎样向下凹的，而当$x\to\infty$时图形在趋近$y=1$时是怎样向上凹的. ■

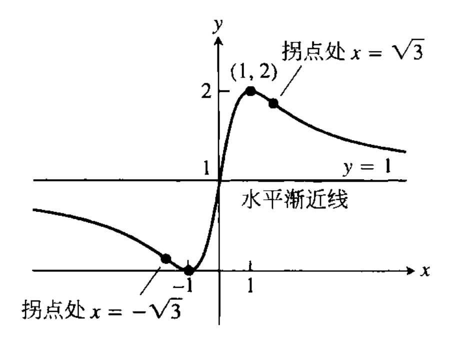



图4.31 $y=\frac{(x+1)^2}{1+x^2}$的图形(例7)

**例8** 绘制$f(x)=e^{2/x}$的草图.

**解** $f$的定义域是$(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$，并且不存在

关于坐标轴和原点的对称性. $f$ 的导数是

$$f'(x)=e^{2/x}\left(-\frac{2}{x^2}\right)=-\frac{2e^{2/x}}{x^2}$$

和

$$f''(x)=\frac{x^2(2e^{2/x})(-2/x^2)-2e^{2/x}(2x)}{x^4}=\frac{4e^{2/x}(1+x)}{x^4}$$

两个导数在 $f$ 的定义域处处存在. 而且, 由于 $e^{2/x}$ 和 $x^2$ 对于所有 $x\neq0$ 都取正值, 看出在定义域上处处有 $f'<0$, 而图形处处减少. 从二阶导数检验见到在 $x=-1$ 有 $f''(x)=0$. 由于 $e^{2/x}>0$ 和 $x^4>0$, 对于 $x<-1$ 有 $f''<0$, 并且对于 $x>-1$ 和 $x\neq0$ 有 $f''>0$. 所以点 $(-1, e^{-2})$ 是拐点. 曲线在区间 $(-\infty, -1)$ 上向下凹, 而在 $(-1, 0)\cup(0, \infty)$ 上向上凹.

从 2.4 节例 12 见到 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0$. 当 $x\to0^+$ 时看出 $\frac{2}{x}\to\infty$, 所以 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\infty$ 而 $y$ 轴是一条垂直渐近线. 此外, 当 $x\to-\infty$ 时 $\frac{2}{x}\to0^-$, 所以 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=e^0=1$. 因此 $y=1$ 是一条水平渐近线. 由于 $f$ 不能取 0 值, 不存在绝对极值. $f$ 的图形在图 4.32 中画出. ■

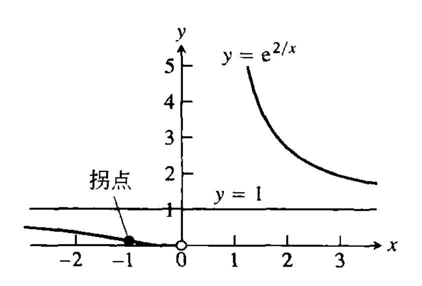
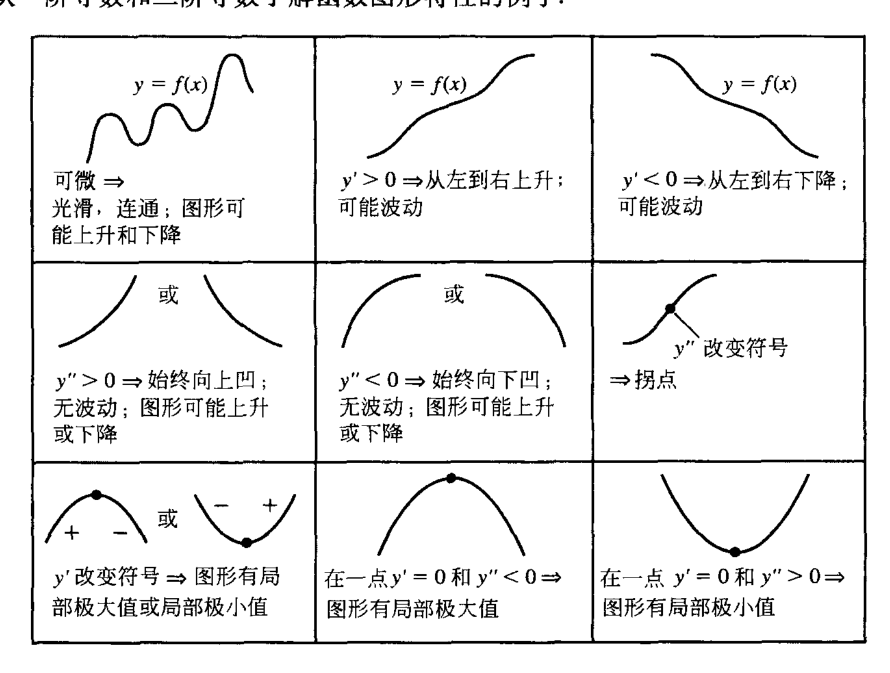



图 4.32 $y=e^{2/x}$ 的图形有一个拐点 $(-1, e^{-2})$, 以直线 $y=1$ 为水平渐近线和 $x=0$ 为垂直渐近线(例 8)

### 4.4.4 来源于导数的函数图形特性

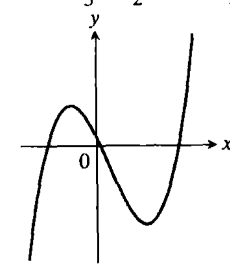
像我们在例 6 至例 8 中见到的那样, 通过检验一阶导数可以了解许多有关二次可微函数 $y=f(x)$ 图形的特性. 可以求函数上升和下降的区间以及函数取极值的位置; 可以从求 $y'$ 的导数了解函数图形在经过上升区间和下降区间时是怎样弯曲的; 可以确定函数图形的形状. 我们从导数不能获得的信息是图形在 $xy$ 平面中是如何置放的. 但是, 正如在 4.2 节中发现的那样, 定位图形所需的补充信息只是 $f$ 在一点的值. 关于渐近线的信息是利用极限(2.4 节和 2.5 节)获得的. 附图给出从一阶导数和二阶导数了解函数图形特性的例子.

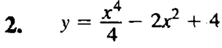


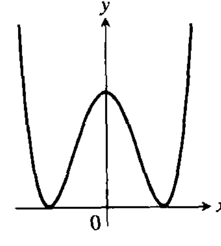
## 习题 4.4

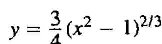
在习题 1 ~ 8 中，识别图形中函数的拐点以及局部极大值和局部极小值. 确定函数向上凹和向下凹的区间.

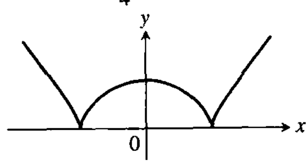
**1.** $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{3}$

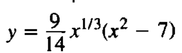


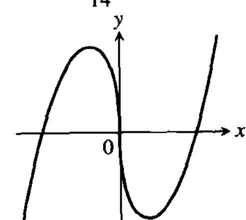
**2.**  $y=\frac{x^4}{4}-2x^2+4$



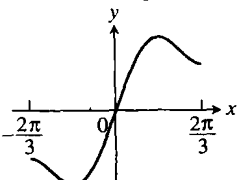
**3.**  $y=\frac{3}{4}(x^2-1)^{2/3}$



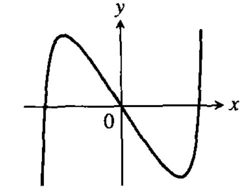
**4.**  $y=\frac{9}{14}x^{1/3}(x^2-7)$



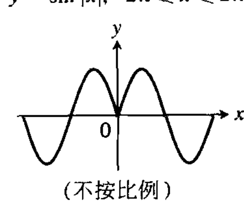
**5.** $y=x+\sin 2x, -\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$



**6.** $y=\tan x-4x, -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

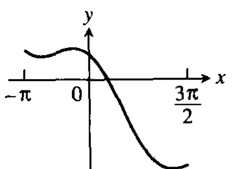


**7.** $y=\sin|x|, -2\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$



（不按比例）

**8.** $y=2\cos x-\sqrt{2}x, -\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$



在习题 9 ~ 42 中，利用 4.4.3 节的绘制图形步骤画方程的图形，包括给出任何局部极值点和拐点的坐标.

**9.** $y=x^2-4x+3$. **10.** $y=6-2x-x^2$.

**11.** $y=x^3-3x+3$. **12.** $y=x(6-2x)^2$.

**13.** $y=-2x^3+6x^2-3$. **14.** $y=(x-2)^3+1$.

**15.** $y=x^4-2x^2=x^2(x^2-2)$.

**16.** $y=-x^4+6x^2-4=x^2(6-x^2)-4$.

**17.** $y=4x^3-x^4=x^3(4-x)$.

**18.** $y=x^4+2x^3=x^3(x+2)$.

**19.** $y=x^5-5x^4=x^4(x-5)$.

**20.** $y=x\left(\frac{x}{2}-5\right)^4$. **21.** $y=x+\sin x$，$0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

**22.** $y=x-\sin x$，$0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

**23.** $y=x^{1/5}$. **24.** $y=x^{2/5}$.

**25.** $y=2x-3x^{2/3}$. **26.** $y=x^{2/3}\left(\frac{5}{2}-x\right)$.

**27.** $y=x\sqrt{8-x^2}$. **28.** $y=(2-x^2)^{3/2}$.

**29.** $y=\frac{x^2-3}{x-2}$，$x\neq 2$. **30.** $y=\frac{x^3}{3x^2+1}$.

**31.** $y=|x^2-1|$.

**32.** $y=\sqrt{|x|}=\begin{cases}\sqrt{-x}, & x\leqslant 0,\\ \sqrt{x}, & x>0.\end{cases}$

**33.** $y=xe^{1/x}$. **34.** $y=\frac{e^x}{x}$.

**35.** $y=\ln(3-x^2)$. **36.** $y=x(\ln x)^2$.

**37.** $y=e^x-2e^{-x}-3x$. **38.** $y=xe^{-x}$.

**39.** $y=\ln(\cos x)$. **40.** $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

**41.** $y=\frac{1}{1+e^{-x}}$. **42.** $y=\frac{e^x}{1+e^x}$.

在习题 43 ~ 62 中，给出连续函数 $y=f(x)$ 的一阶导数. 然后求 $y''$，并利用前述绘制图形过程的第 (2) 步至第 (4) 步，描绘 $f$ 图形的一般形状.

**43.** $y'=2+x-x^2$. **44.** $y'=x^2-x-6$.

**45.** $y'=x(x-3)^2$. **46.** $y'=x^2(2-x)$.

**47.** $y'=x(x^2-12)$. **48.** $y'=(x^2-2x)(x-5)^2$.

**49.** $y'=\sec^2 x$，$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$.

50. $y' = \tan x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

51. $y' = \cot\frac{\theta}{2}$, $0 < \theta < 2\pi$.

52. $y' = \csc^2\frac{\theta}{2}$, $0 < \theta < 2\pi$.

53. $y' = \tan^2\theta - 1$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

54. $y' = 1 - \cot^2\theta$, $0 < \theta < \pi$.

55. $y' = \cos t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

56. $y' = \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

57. $y' = (x+1)^{-2/3}$.

58. $y' = (x-2)^{-1/3}$.

59. $y' = x^{-2/3}(x-1)$.

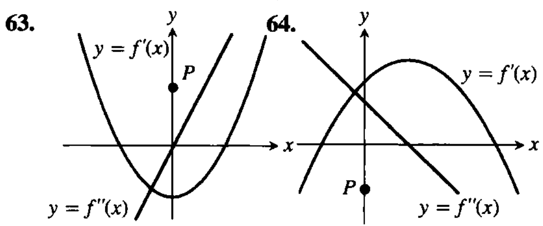
60. $y' = x^{-4/5}(x+1)$.

61. $y' = 2|x| = \begin{cases} -2x, & x \leqslant 0, \\ 2x, & x > 0. \end{cases}$

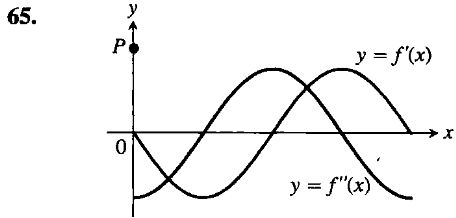
62. $y' = \begin{cases} -x^2, & x \leqslant 0, \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$

在习题 63 ~ 66 中显示函数 $y = f(x)$ 的一阶导数和二阶导数的图形. 复制图形并且在其中加进 $f$ 的近似图形，假定图形经过点 $P$.

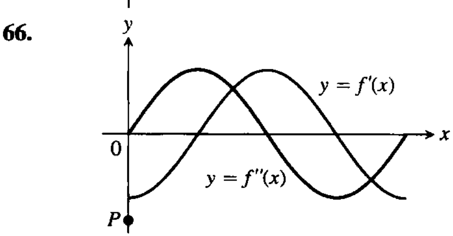
63. 64.



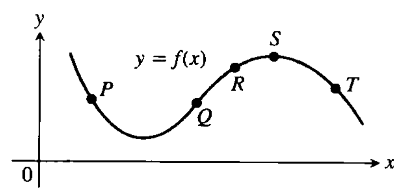

65.




66.




67. 附图显示二次可微函数 $y = f(x)$ 图形的一部分. 在 5 个标出的每一点把 $y'$ 和 $y''$ 的值归类为正、负或零.




68. 画一条连通的光滑曲线 $y = f(x)$ 的草图，已知

$f(-2) = 8$, $f'(2) = f'(-2) = 0$

$f(0) = 4$, 对于 $|x| < 2$ 有 $f'(x) < 0$

$f(2) = 0$, 对于 $x < 0$ 有 $f''(x) < 0$

对于 $|x| > 2$ 有 $f'(x) > 0$，对于 $x > 0$ 有 $f''(x) > 0$

69. 画二次可微函数 $y = f(x)$ 的草图，函数具有下述特性. 在可能的地方标出点的坐标.

| $x$ | $y$ | 导　数 |
|---|---|---|
| $x < 2$ | | $y' < 0$, $y'' > 0$ |
| 2 | 1 | $y' = 0$, $y'' > 0$ |
| $2 < x < 4$ | | $y' > 0$, $y'' > 0$ |
| 4 | 4 | $y' > 0$, $y'' = 0$ |
| $4 < x < 6$ | | $y' > 0$, $y'' < 0$ |
| 6 | 7 | $y' = 0$, $y'' < 0$ |
| $x > 6$ | | $y' < 0$, $y'' < 0$ |

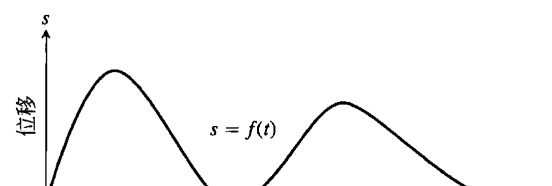
70. 画二次可微函数 $y = f(x)$ 的草图，函数通过点 $(-2, 2)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ 和 $(2, 2)$，并且它的一阶和二阶导数具有下述符号模式：

$y'$: + （−2） − （0） + （2） −

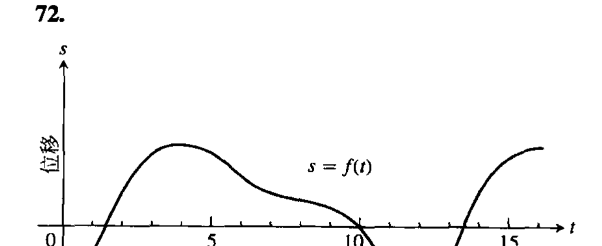
$y''$: − （−1） + （1） −

**沿直线的运动** 习题 71 和 72 中的图形显示在一条坐标线上来回运动的物体的位置 $s = f(t)$. (**a**)运动物体何时背离原点，何时指向原点? (**b**)物体速度大约在什么时间为零? (**c**)物体加速度大约在什么时间为零? (**d**)加速度在什么时间为正，什么时间为负?

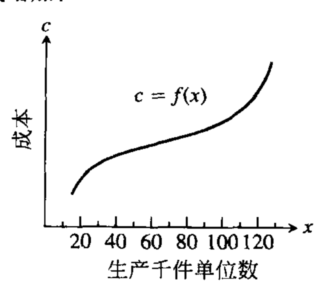
71.



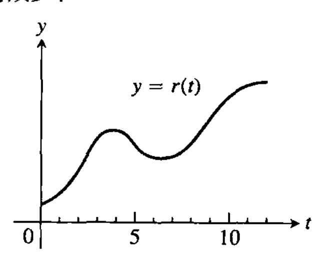
**72.**




**73. 边际成本** 附图显示制造 $x$ 件产品的假设成本 $c=f(x)$. 边际成本大约在什么生产能力由减少转变成增加?




**74.** 附图显示 Widget 公司过去 12 年中的月收入, 边际收入大约在什么时间区间增加, 在什么时间区间减少?




**75.** 假设函数 $y=f(x)$ 的导数是

$$y' = (x-1)^2(x-2)$$

$f$ 的图形在什么点(如果存在)有局部极小值、局部极大值或者拐点?(提示: 画出 $y'$ 符号的模式.)

**76.** 假设函数 $y=f(x)$ 的导数是

$$y' = (x-1)^2(x-2)(x-4)$$

$f$ 的图形在什么点(如果存在)有局部极小值、局部极大值或者拐点?

**77.** $y=f(x)$ 具有 $f(1)=0$ 和 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, 描绘 $f(x)$ 对于 $x>0$ 的曲线. 关于这条曲线的凹性能够得出任何结论吗? 提出答案的理由.

**78.** 函数 $y=f(x)$ 具有不为零的连续二阶导数, 关于函数的图形能够得出任何结论吗? 提出答案的理由.

**79.** 设 $b$, $c$, $d$ 为常数, 曲线 $y=x^3+bx^2+cx+d$ 对于什么 $b$ 值将在 $x=1$ 有一个拐点? 提出答案的理由.

**80. 水平切线** 说明下述结论是正确的或者是错误的.

(a) 每个偶次多项式(最大指数为偶数)至少有一条水平切线.

(b) 每个奇次多项式(最大指数为奇数)至少有一条水平切线.

**81. 抛物线**

(a) 求抛物线

$$y = ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$$

的顶点坐标.

(b) 抛物线在什么区间向上凹? 在什么区间向下凹? 提出答案的理由.

**82.** 二次可微函数 $y=f(x)$ 的图形在每处 $f''(x)=0$ 的地方都改变凹性的结论正确吗? 提出答案的理由.

**83. 二次曲线** 关于二次曲线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的拐点能够得出什么结论? 提出答案的理由.

**84. 三次曲线** 关于三次曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq0)$ 的拐点能够得出什么结论? 提出答案理由.

**计算机探究**

在习题 85~88 中, 求函数图形上拐点(如果存在)的坐标以及图形上函数具有局部极大值或者局部极小值的点的坐标. 然后在一个足够大的区域内画出能够显示所有这些点的函数图形. 在图中添加函数一阶导数和二阶导数的图形. 导数图形和 $x$ 轴的交点的值同函数图形有何关系? 导数图形同函数图形以什么其他方式相关?

**85.** $y=x^5-5x^4-240$. **86.** $y=x^3-12x^2$.

**87.** $y=\dfrac{4}{5}x^5+16x^2-25$.

**88.** $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}-4x^2+12x+20$.

**89.** 一起画出 $f(x)=2x^4-4x^2+1$ 及其一阶导数和二阶导数的图形. 说明 $f$ 图形的特性同 $f'$ 和 $f''$ 的符号和值的关系.

**90.** 在 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 上一起画出 $f(x)=x\cos x$ 及其二阶导数的图形. 说明 $f$ 图形的特性同 $f''$ 的符号和值的关系.

**91.** (a) 在公共屏幕上, 绘制 $f(x)=x^3+kx$ 对于 $k=0$ 与 $k$ 的邻近正值和负值的图形. $k$ 的值显现对图形形状有何影响?

(b) 求 $f'(x)$. 正如你会见到的那样, $f'(x)$ 是 $x$

的二次函数. 求二次式的判别式($ax^2+bx+c$ 的判别式是 $b^2-4ac$). 判别式对于什么 $k$ 值取正值、零或者负值? 判别式对于什么 $k$ 值有两个零点、一个零点或者无零点? 请说明什么 $k$ 值同 $f$ 的图形形状有关?

(c) 用其他 $k$ 值作试验. 当 $k\to-\infty$ 和 $k\to\infty$ 时会出现什么现象?

**92.** (a) 在公共屏幕上, 绘制 $f(x)=x^4+kx^3+6x^2$ $(-2\leqslant x\leqslant 2)$ 对于 $k=-4$ 以及某些邻近整数 $k$ 值的图形. $k$ 值对图形形状显现出何种影响?

(b) 求 $f''(x)$. 正如你会见到的那样, $f''(x)$ 是 $x$ 的二次函数. 这个二次式的判别式是什么(参见习题 91(b))? 判别式对于什么 $k$ 值取正值、零或者负值? $f''(x)$ 对于什么 $k$ 值有两个零点、一个零点或者无零点? 请说明什么 $k$ 值同 $f$ 的图形形状有关?

**93.** (a) 绘制 $y=x^{2/3}(x^2-2)$ 对于 $-3\leqslant x\leqslant 3$ 的图形. 然后利用导数证实屏幕上有关图形的凹性、上升和下降的显示. (为了获得 $x$ 为负值的点, 可能在输入 $x^{2/3}$ 时必须输入 $(x^2)^{1/3}$, 这同你使用的绘图器有关.)

(b) 曲线在 $x=0$ 是否有尖点, 或者是否只有右导数和左导数不相等的角点?

**94.** (a) 绘制 $y=9x^{2/3}(x-1)$ 对于 $-0.5\leqslant x\leqslant 1.5$ 的图形. 然后利用导数证实屏幕上有关图形的凹性、上升和下降的显示. 曲线在原点的右边有什么凹性? (为了获得 $x$ 为负值的点, 可能在输入 $x^{2/3}$ 时必须输入 $(x^2)^{1/3}$, 这同你使用的绘图器有关.)

(b) 曲线在 $x=0$ 是否有尖点, 或者是否只有右导数和左导数不相等的角点?

**95.** 曲线 $y=x^2+3\sin 2x$ 在 $x=-3$ 附近有水平切线吗? 提出答案的理由.

## 4.5 实用的最优化

对一种事物的最优化意味着使它的某个方面达到最大限度或者最小限度. 例如, 使具有固定周长的矩形达到最大面积的尺寸是什么? 使给定体积的圆柱体容器耗费材料最少的尺寸是什么? 应该生产多少件产品才是最赢利的生产流程? 在这一节我们利用导数求解在商业、数学、物理学和经济学中提出的各种最优化问题.

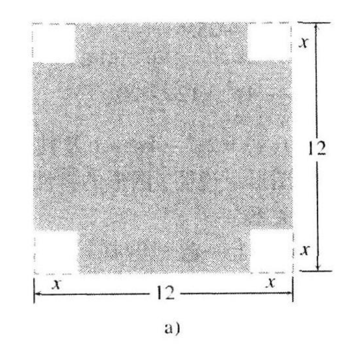
### 4.5.1 商业和工业中的例子

**例 1** 在一块 12 英寸 × 12 英寸锡薄板的四个角上切去一个全等的小正方块, 并向上折边, 构成顶部敞开的盒子. 应从四个角上切除多大的正方块才能使盒子容积保持尽可能地大?

**解** 我们从图 4.33 中的图形开始. 在图中角上小正方形的边长为 $x$ 英寸. 盒子的容积是这个变量的函数:

$$V(x)=x(12-2x)^2=144x-48x^2+4x^3\quad(V=\text{高}\times\text{长}\times\text{宽})$$

由于锡薄板的边长只有 12 英寸, 故 $x\leqslant 6$ 而 $V$ 的定义域是区间 $0\leqslant x\leqslant 6$.



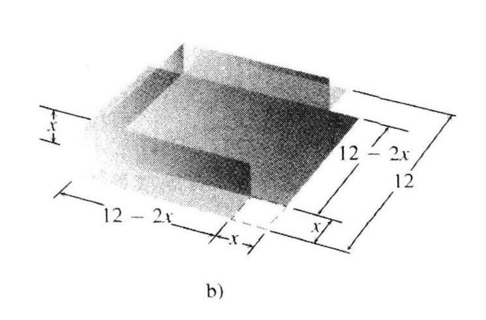




图 4.33 例 1 中敞开的盒子由正方形锡薄板切除四个角后构成, 切除多大的角使盒子容积达到最大?

$V$ 的图形(见图 4.34)暗示在 $x=0$ 和 $x=6$ 时取最小值，而在 $x=2$ 附近取最大值. 为了获得更多结果，我们考察 $V$ 关于 $x$ 的导数：

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=144-96x+12x^2=12(12-8x+x^2)$$

$$=12(2-x)(6-x)$$

在两个零点 $x=2$ 和 $x=6$ 中，只有 $x=2$ 位于函数定义域的内部并构成临界点表. $V$ 在这个临界点的值是

$$V(2)=128$$

在两个端点的值是

$$V(0)=0,\quad V(6)=0$$

最大容积是 128 $\mathrm{in}^3$. 切除的正方块的边长应为 2 in. ■

图 4.34 图 4.33 中画出的盒子的容积作为 $x$ 的函数

**例 2** 要求你设计形状像直立圆柱体(见图 4.35)的 1 公升容器. 使容器用材料最少的尺寸是什么?

**解** 容器的容积：若 $r$ 和 $h$ 以厘米为单位，则容器以立方厘米为单位的容积是

$$\pi r^2 h=1000\quad(1\text{ 升}=1000\text{ cm}^3)$$

容器的表面积：

$$A=\underbrace{2\pi r^2}_{\text{圆柱体两端面积}}+\underbrace{2\pi rh}_{\text{圆柱体侧面积}}$$

我们应如何解释用语"材料最少"? 首先，通常忽略材料的厚度和制作过程中的损耗. 其次，要求 $r$ 和 $h$ 的尺寸在满足 $\pi r^2h=1000$ 的约束条件下使容器的总表面积尽可能地小.

图 4.35 这个 1 公升容器当 $h=2r$ 时用材料最少(例 2)

为了把表面积表示成一个变量的函数，从等式 $\pi r^2h=1000$ 解出一个变量并且把得到的表达式代入表面积公式中. 从等式求解 $h$ 比较简单：

$$h=\frac{1000}{\pi r^2}$$

因此，

$$A=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right)=2\pi r^2+\frac{2000}{r}$$

我们的目标是求 $r>0$ 的值使 $A$ 达到最小值. 图 4.36 暗示存在这样的 $r$ 值.

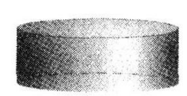
请注意，从图中看出，对于小的 $r$(细长容器，像一段管道)，$\frac{2000}{r}$ 占主导地位，面积 $A$ 变大. 对于大的 $r$(粗短容器，像比萨饼烤盘)，$2\pi r^2$ 占主导地位，面积 $A$ 再次变大.

由于 $A$ 在 $r>0$(一个无端点的区间)上是可微的，它只可能在 $A$ 的一阶导数为零的地方有极小值：

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}=4\pi r-\frac{2000}{r^2}$$

$$0=4\pi r-\frac{2000}{r^2}\quad(\text{设 } \mathrm{d}A/\mathrm{d}r=0)$$



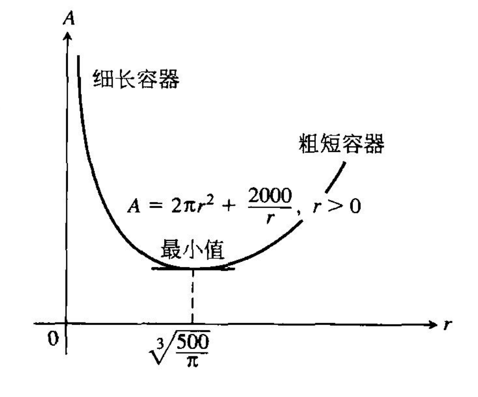




图 4.36 $A=2\pi r^2+\frac{2000}{r}$ 的图形是向上凹的

$$4\pi r^3 = 2000 \quad (\text{乘 } r^2)$$

$$r = \sqrt[3]{500/\pi} \approx 5.42 \quad (\text{求解 } r)$$

在 $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ 时出现什么？

二阶导数
$$\frac{d^2A}{dr^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^3}$$

在 $A$ 的整个定义域上为正. 因此图形处处向上凹而 $A$ 在 $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ 的值是一个绝对极小值.

$h$ 的对应值(作少量代数运算后)为

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{500/\pi} = 2r$$

1 公升的圆柱体容器在其高度等于直径时用材料最少. 此时 $r \approx 5.42$ cm, $h \approx 10.84$ cm. ■

### 4.5.2 数学和物理学中的例子

**例 3** 在半径为 2 的半圆中作一个内接矩形. 矩形可能取得的最大面积是什么？它的尺寸是什么？

**解** 令 $(x, \sqrt{4-x^2})$ 是坐标平面内半圆中内接矩形右上角的坐标(见图 4.37). 于是矩形的长度、高度和面积可以用右下角的位置 $x$ 表示：

长度：$2x$ 高度：$\sqrt{4-x^2}$ 面积：$2x \cdot \sqrt{4-x^2}$

注意应在区间 $0 \leqslant x \leqslant 2$ 中求 $x$ 的值，这是选择矩形右下角位置的区间.

我们的目标是求函数

$$A(x) = 2x\sqrt{4-x^2}$$

在定义域 $[0, 2]$ 上的绝对极大值.

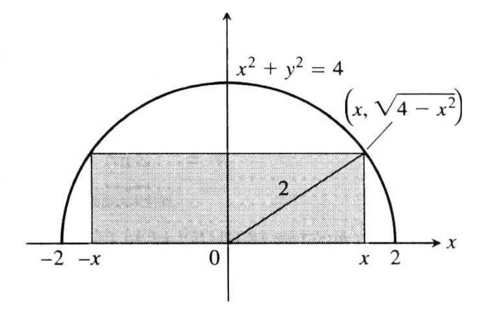



图 4.37 例 3 半圆中的内接矩形

导数
$$\frac{dA}{dx} = \frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2}$$

当 $x = 2$ 时无定义，而在

$$\frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2} = 0$$

$$-2x^2 + 2(4-x^2) = 0$$

$$8 - 4x^2 = 0$$

$$x^2 = 2 \text{ 或 } x = \pm\sqrt{2}$$

时等于零. 两个零点 $x = \sqrt{2}$ 和 $x = -\sqrt{2}$ 中只有 $x = \sqrt{2}$ 位于 $A$ 的定义域内并构成临界点表. $A$ 在这个临界点的值是

$$A(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\sqrt{4-2} = 4$$

在端点的值是

$$A(0) = 0, \quad A(2) = 0$$

当矩形高度是 $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{2}$ 和长度是 $2x = 2\sqrt{2}$ 时面积具有最大值 4. ■

人物传记

威尔布鲁德·斯涅耳·罗彦(Willebrord Snell van Royen, 1580—1626)

**例 4** 光速依赖于光传播的介质，并且通常在越稠密的介质中传播速度越慢. 光学中的费马原理说明，光线沿着传播时间最小的路径从一点传播到另一点. 求光线从光速为 $c_1$ 的介质中一点 $A$ 传播到光速为 $c_2$ 的介质中一点 $B$ 的传播路径.

**解** 由于光线沿一条最快路径由 $A$ 传到 $B$，我们所求的路径将使传播时间达到最小. 假定 $A$ 和 $B$ 位于 $xy$ 平面内，并且分开两种介质的直线是 $x$ 轴(见图 4.38).

在均匀的介质中，光线的速度为常数. “最短时间”意味着“最短路径”，而光线将沿直线传播. 因此从 $A$ 到 $B$ 的路径包含从 $A$ 到一个边界点 $P$ 的线段，再接一条从 $P$ 到 $B$ 的线段. 距离等于速度与时间的乘积，所以

$$\text{时间} = \frac{\text{距离}}{\text{速度}}$$

光线从 $A$ 传播到 $P$ 所需的时间为

$$t_1 = \frac{AP}{c_1} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1}$$

从 $P$ 传播到 $B$，时间为

$$t_2 = \frac{PB}{c_2} = \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{c_2}$$

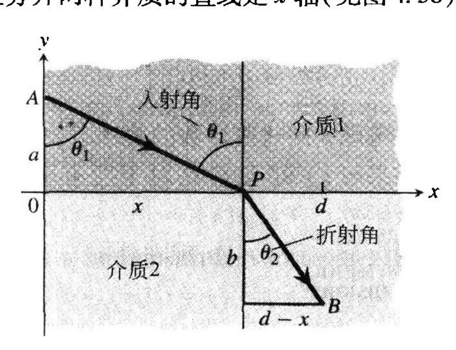



图 4.38 光线从一种介质传播到另一种更稠密的介质时发生折射(偏离它的传播路径)(例 4)

从 $A$ 传播到 $B$ 的时间是这两个时间的和：

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{c_2}$$

这个等式把 $t$ 表示成 $x$ 在定义域$[0, d]$上的可微函数，我们需要求 $t$ 在这个闭区间上的绝对极小值. 求出导数

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d - x}{c_2\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}$$

用图 4.38 中的角 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ 表示导数，

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sin\theta_1}{c_1} - \frac{\sin\theta_2}{c_2}$$

如果把 $x$ 限制在区间 $0 \leqslant x \leqslant d$ 内，那么 $t$ 在 $x = 0$ 有负导数而在 $x = d$ 有正导数. 按照导数的介值定理(3.1 节)，存在一点 $x_0 \in [0, d]$，在这个点 $\frac{dt}{dx} = 0$(见图 4.39). 由于 $\frac{dt}{dx}$ 是 $x$ 的增函数(见习题 52)，只存在一个这样的点. 在这个点

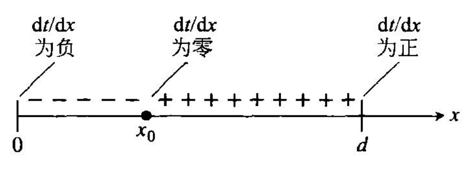



图 4.39 例 4 中 $\frac{dt}{dx}$ 的符号模式

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2}$$

这个等式称为**斯涅耳定律**或者**折射定律**，是光学理论中的一个重要原理，它描述光线传播经过的路径. ■

## 4.5.3 经济学中的例子

假定：

$r(x)$ = 销售 $x$ 件产品的收入

$c(x)$ = 生产 $x$ 件产品的成本

$$p(x) = r(x) - c(x) = \text{从生产和销售} x \text{件产品获得的利润}$$

当生产和销售 $x$ 件产品时，**边际收入**、**边际成本**和**边际利润**分别是导数

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = \text{边际收入}$$

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = \text{边际成本}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \text{边际利润}$$

我们来考虑 $p$ 同这些导数的关系.

如果 $r(x)$ 和 $c(x)$ 是对于所有 $x>0$ 的可微函数，并且 $p(x)=r(x)-c(x)$ 有一个极大值，那么它出现在使 $p'(x)=0$ 的生产量. 由于 $p'(x)=r'(x)-c'(x)$，$p'(x)=0$ 意味着

$$r'(x)-c'(x)=0 \quad \text{或} \quad r'(x)=c'(x)$$

因此

> 在边际收入同边际成本相等时的生产量产生最大利润(见图 4.40).

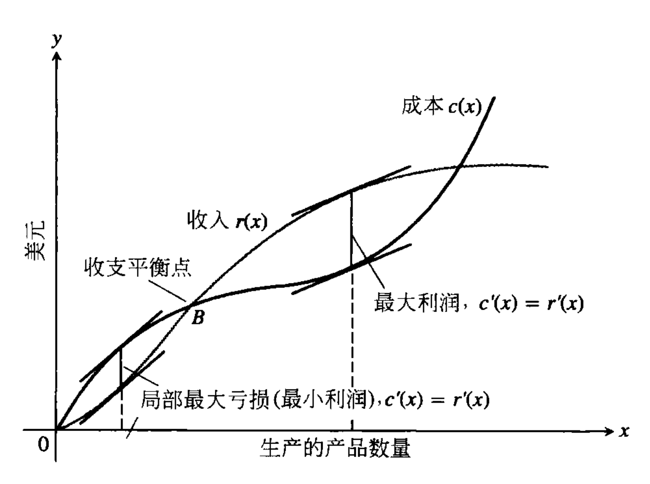



图 4.40 典型的成本函数(费用函数)图形开始向下凹，随后转向上凹，在收支平衡点 $B$ 同收入曲线相交：在 $B$ 的左边，公司处于亏损经营；在 $B$ 的右边，公司处于盈利经营；在 $c'(x)=r'(x)$ 的点出现最大利润；再向右，成本超过收入(可能由于劳动力成本和原材料成本升高以及市场饱和的共同影响)，生产量再度成为不盈利的

**例 5** 假设 $r(x)=9x$，$c(x)=x^3-6x^2+15x$，其中 $x$ 代表千件产品的数量. 这时存在达到最大利润的生产量吗？如果存在，最大利润是什么？

**解** 注意 $r'(x)=9$，$c'(x)=3x^2-12x+15$. 达到最大利润的生产量满足

$$3x^2-12x+15=9 \quad (\text{置 } c'(x)=r'(x))$$

即

$$3x^2-12x+6=0$$

这个二次方程的两个解是

$$x_1=\frac{12-\sqrt{72}}{6}=2-\sqrt{2}\approx 0.586$$

$$x_2=\frac{12+\sqrt{72}}{6}=2+\sqrt{2}\approx 3.414$$

达到最大利润的可能生产量是 $x\approx 0.568$ 千件产品或者 $x\approx 3.414$ 千件产品. $p(x)=r(x)-c(x)$ 的二阶导数是 $p''(x)=-c''(x)$，因为 $r''(x)$ 处处为零. 因此 $p''(x)=6(2-x)$，它在 $x=2+\sqrt{2}$ 取负值而在 $x=2-\sqrt{2}$ 取正值. 按照二阶导数检验法，最大利润出现在 $x=3.414$ 附近(在那里收入超过成本)，而最大亏损出现在 $x=0.586$ 附近. $r(x)$ 和 $c(x)$ 的图形显示在图 4.41 中. ■

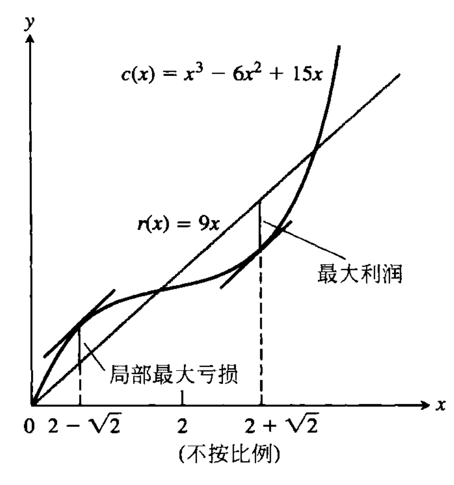



图 4.41 例 5 的成本曲线和收入曲线

## 习题 4.5

每当求解一元函数的极大值或者极小值问题时，我们鼓励画出同解题相适应的函数在定义域上的图形. 这种图形会在计算之前为你提供见解，同时对于了解你的答案准备一个可视环境.

1. **最小周长** 对于面积为 16 $\mathrm{in}^2$ 的矩形，可能的最小周长是多少？它的尺寸是什么？

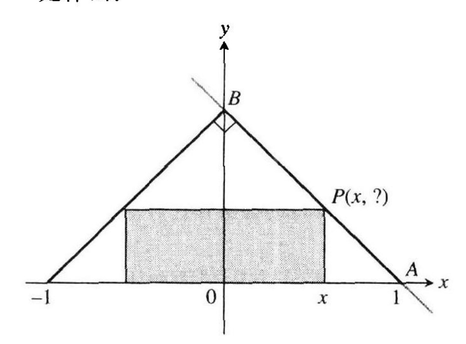
2. 证明：在周长为 8 m 的所有矩形中面积最大的矩形是正方形.

3. 附图显示斜边为 2 单位长的等腰直角三角形的一个内接矩形.

(a) 用 $x$ 表示点 $P$ 的 $y$ 坐标.（提示：写出直线 $AB$ 的方程.）

(b) 通过 $x$ 表示矩形的面积.

(c) 矩形可能具有的最大面积是多大？它的尺寸是什么？




4. 一个矩形的底边在 $x$ 轴上，它上方的两个顶点在抛物线 $y=12-x^2$ 上. 矩形可能具有的最大面积是多大？它的尺寸是什么？

5. 计划用一块 8 英寸 × 15 英寸的硬纸板制作一个盒子，在四个角上切除一个全等的正方块，并且向上折四个侧面. 用这种方法能够制作盒子的最大体积是多大？它的尺寸是什么？

6. 计划用一条从$(a, 0)$到$(0, b)$的长 20 单位的线段在第一象限围成一个角. 证明由此线段围成的三角形的面积在 $a=b$ 时达到最大.

7. **最佳构建篱笆计划** 一片矩形农田的一边将以河为界，其他三边以单股电线的篱笆为界. 安排用 800 m 电线，能够围成的最大农田面积是多大？它的长宽是多少？

8. **最短篱笆** 一块 216 $m^2$ 的矩形豌豆种植地用一道篱笆围住，并由另一道同一边平行的篱笆分隔成两个相等部分. 当要求篱笆总长度最短时外部篱笆的长宽是多少？需要用多长的篱笆？

9. **设计储物槽** 你的铁工厂同一家造纸公司签订合同，设计与建立底部呈正方形的长方体钢制无盖储料槽，容积为 500 $ft^3$. 储料槽用不锈钢薄钢板沿槽体边缘焊接而成. 作为产品工程师，你的任务是确定储料槽的底部尺寸和高度，使其重量尽可能地小.

(a) 你通知车间采用什么尺寸？

(b) 简单描述你是如何考虑重量的.

10. **收集雨水** 为了收集流散的雨水，建筑一座容积为 1125 $ft^3$ 的长方体无盖水池，水池底部是边长为 $x$ ft 的正方形，深度为 $y$ ft，顶部与地面齐平. 同水池相关的建筑费用不仅包含材料成本费，也涉及同乘积 $xy$ 成正比的土方挖掘费.

(a) 如果总成本为

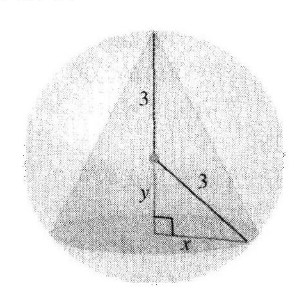
$$c = 5(x^2 + 4xy) + 10xy$$

那么 $x$ 和 $y$ 取什么值将使它达到最小值？

(b) 对(a)中的成本函数给出一个可能的概述.

11. **设计招贴画** 你在设计一幅矩形招贴画，其中包含画面 50 $in^2$，上下边距 4 in，左右边距 2 in. 采用什么总体尺寸将使用纸量达到最小？

12. 求附图中半径为 3 的球体能够容纳内接正圆锥体的最大体积.




13. 一个三角形的两边是 $a$ 和 $b$，它们之间的夹角为 $\theta$. $\theta$ 取什么值将使三角形的面积达到最大？$\left(提示：A=\frac{1}{2}ab\sin\theta.\right)$

14. **设计容器** 设计一个体积为 1000 $cm^3$ 的无盖正圆柱体，采用什么尺寸将使容器最轻？把所得结果同例 2 中的结果作比较.

15. **设计容器** 你在设计一个 1000 $cm^3$ 的正圆柱体容器，设计时要考虑制造中的浪费问题. 在切割容器侧面的铝板时没有材料浪费，但是容器以 $r$ 为半径的顶部和底部是从边长为 $2r$ 单位的正方形铝板切割的. 容器所用铝板的总面积为

$$A = 8r^2 + 2\pi rh$$

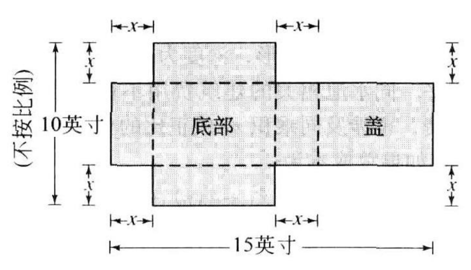
而不是例 2 中的 $A=2\pi r^2+2\pi rh$. 在例 2 中，最经济容器的 $h$ 和 $r$ 之比是 2 比 1. 当前这个比是多少？

T 16. **设计带盖的盒子** 一块硬纸板的尺寸为 10 in × 15 in. 如附图所示，从 10 in 一边的两个角上切除相等的正方形. 从另外两个角上切除相等的矩形，使纸板能够折成带盖的长方体盒子.

(a) 写出盒子容积 $V(x)$ 的公式.

(b) 求问题中 $V$ 的定义域并画出 $V$ 在定义域上的图形.

(c) 利用图形方法求最大容积以及给出最大容




积的 $x$ 值.

(d) 通过分析证实在(c)中得到的结果.

T 17. **设计纸箱** 如附图所示，把一块 24 in × 36 in 的硬纸板对半折叠成 24 in × 18 in 的矩形. 然后在折叠的矩形的四个角上切除边长为 $x$ 的全等正方形. 然后展开折叠的纸板，向上折起边上六个板片构成有侧面和带盖的盒子.

(a) 写出盒子容积 $V(x)$ 的公式.

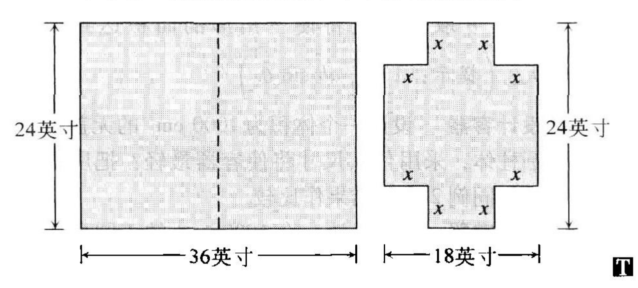
(b) 求问题中 $V$ 的定义域并且画出 $V$ 在定义域上的图形.

(c) 利用图形方法求最大容积以及给出最大容积的 $x$ 值.

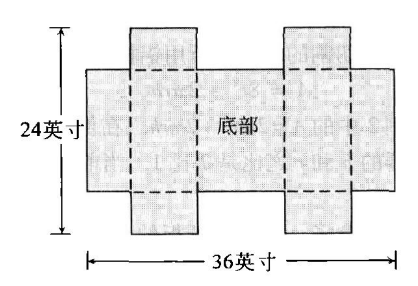
(d) 通过分析证实在(c)中得到的结果.

(e) 求产生 1120 $\text{in}^3$ 容积的 $x$ 值.

(f) 写一段描述出现在(b)中的问题的文字.



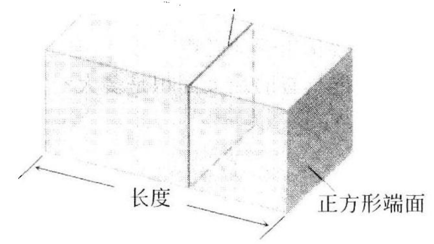

然后展开纸板




18. 一个矩形内接于曲线 $y = 4\cos(0.5x)$ 从 $x = -\pi$ 到 $x = \pi$ 的拱形弧段之下. 达到最大面积的矩形的尺寸是什么？矩形的最大面积是多大？

19. 求半径为 10 cm 的球体能够容纳的体积最大的内接正圆柱体的尺寸. 内接正圆柱体的最大体积是多大？

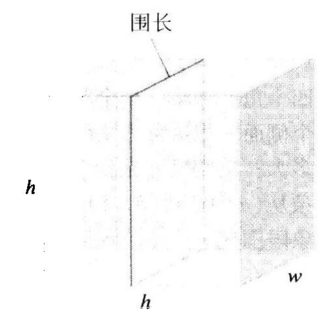
20. (a) 美国邮政局对国内投递只接受长度和围长(腰围长度)之和不超过 108 in 的邮件盒. 采用什么尺寸将使带正方形端面的邮件盒达到最大可能的体积？




T (b) 画出 108 in 邮件盒(长度加围长 = 108 in)的体积作为其长度的函数的图形，并且把所见结果同(a)的答案作比较.

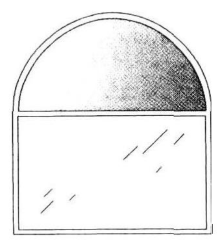
21. (续习题 20)

(a) 假定不用带正方形端面而用带正方形侧面的邮件盒，使其尺寸为 $h \times h \times w$ 而围长等于 $2h + 2w$. 如今采用什么尺寸将使邮件盒的体积达到最大？




T (b) 画出体积作为 $h$ 的函数的图形，并且把所见结果同(a)的答案作比较.

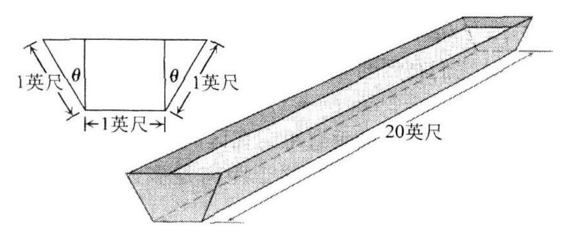
22. 一扇窗户由一个矩形和一个半圆形构成. 矩形部分用透明玻璃，而半圆形部分用有色玻璃(每单位面积透过的光线仅为透明玻璃的一半). 假定窗户的总周长是固定的. 求允许透射最多光线时窗户两部分的比例. 忽略窗框的厚度.



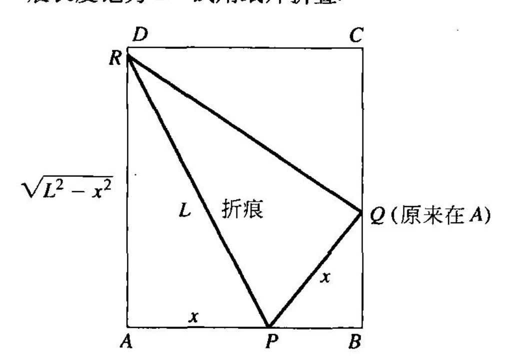
23. 地窖(不包括底部)由一个圆柱体覆盖一个半球体构成. 地窖表面每平方单位的造价，半球体

顶盖部分为圆柱体侧面部分的两倍. 如果地窖体积固定并且保持最低造价，确定地窖采用的尺寸. 忽略地窖的厚度和由于结构出现的材料浪费.

**24.** 图中的饲料槽由所示的尺寸构成. 仅有角 $\theta$ 可以改变. 使饲料槽容积达到最大值的 $\theta$ 值是什么？




**25. 折叠纸片** 一张 8.5 in × 11 in 的矩形纸片置放在一个平面上. 如图所示，把纸片的一个角折叠到较长的对边，并压住在那里直到纸面变平整. 问题是要求使折痕的长度尽可能小. 把折痕长度记为 $L$. 试用纸片折叠.




(a) 证明 $L^2 = \dfrac{2x^3}{2x - 8.5}$.

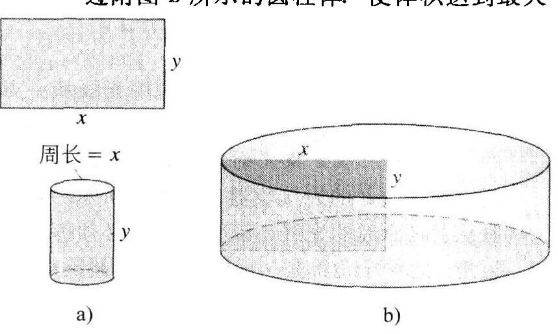
(b) 使 $L^2$ 达到最小值的 $x$ 值是多少？

(c) $L$ 的最小值是多少？

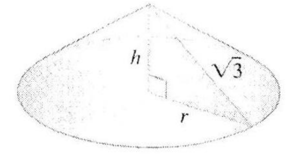
**26. 构造圆柱体** 比较下面两个设计问题的答案.

(a) 把一块周长 36 cm 和尺寸为 $x$ cm × $y$ cm 的矩形薄板卷成附图 a 所示的圆柱体. 使体积达到最大的 $x$ 值和 $y$ 值是什么？

(b) 把同一块薄板围绕长度为 $y$ 的一边旋转扫过附图 b 所示的圆柱体. 使体积达到最大的 $x$ 值和 $y$ 值是什么？




**27. 构造圆锥体** 把斜边长 $\sqrt{3}$ m 的直角三角形围绕一个侧边旋转产生直立圆锥体. 求用这种方法能够构造最大体积的圆锥体的半径、高度和体积.




**28.** 设 $f(x) = x^2 + \dfrac{a}{x}$. $a$ 取什么值将使

(a) $f$ 在 $x = 2$ 有局部极小值？

(b) $f$ 在 $x = 1$ 有一个拐点？

**29.** 证明 $f(x) = x^2 + \dfrac{a}{x}$ 对于任何 $a$ 值均不存在局部极大值.

**30.** 设 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$. $a$ 取什么值将使

(a) $f$ 在 $x = -1$ 有局部极大值和在 $x = 3$ 有局部极小值？

(b) $f$ 在 $x = 4$ 有局部极小值和在 $x = 1$ 有一个拐点？

**31. 垂直运动** 一个垂直运动物体的高度由

$$s = -16t^2 + 96t + 112$$

确定，其中 $s$ 以英尺为单位，$t$ 以秒为单位. 求

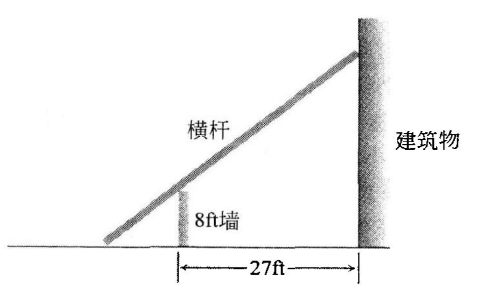
(a) 物体在 $t = 0$ 时的速度.

(b) 物体的最大高度以及达到这个高度的时间.

(c) 物体在 $s = 0$ 时的速度.

**32. 最快路径** 简妮在离海岸 2 英里的小船上，她想到达离船最近点的岸边前方 6 英里的海滨村庄. 她划船的速度为 2 mph，走路的速度为 5 mph. 简妮的小船在什么地方靠岸能使她抵达村庄所需的时间最短？

**33. 最短横杆** 附图显示一道 8 ft 高的墙竖立在离建筑物 27 ft 的地方. 求能从墙外地上达到建筑物侧面的最短直线横杆的长度.

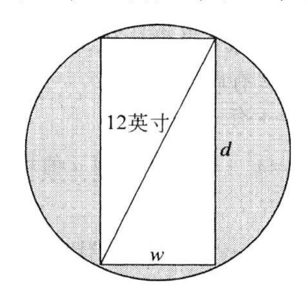



**T34. 梁的强度** 矩形木梁的强度 $S$ 与同它的宽度和厚度平方的乘积成正比(参见附图).

(a) 求能够从直径为 12 in 的圆柱体原木锯出强度最大的梁的尺寸.

(b) 画出 $S$ 作为梁的宽度 $w$ 的函数的图形，假定比例常数 $k=1$. 说明所见图形同(a)中的答案是一致的.

(c) 在同一屏幕上画出 $S$ 作为梁的厚度 $d$ 的函数的图形，也取 $k=1$. 对两个图形进行比较并且同(a)中的答案作比较. 当把 $k$ 改变为某个其他值时有什么结果？尝试一下.




**T 35. 梁的刚度** 矩形梁的刚度 $S$ 同它的宽度和厚度 3 次方的乘积成正比.

(a) 求能够从直径为 12 in 的圆柱体原木锯出刚度最大的梁的尺寸.

(b) 画出 $S$ 作为梁的宽度 $w$ 的函数的图形，假定比例常数 $k=1$. 说明所见图形同(a)中的答案是一致的.

(c) 在同一屏幕上画出 $S$ 作为梁的厚度 $d$ 的函数的图形，也取 $k=1$. 对两个图形进行比较并且同(a)中的答案作比较. 当把 $k$ 改变为某个其他值时有什么结果？尝试一下.

**36. 质点在直线上的运动** 两个运动质点在 $s$ 轴上的位置为 $s_1=\sin t$ 和 $s_2=\sin(t+\pi/3)$，$s_1$ 和 $s_2$ 以米为单位，$t$ 以秒为单位.

(a) 两个质点在区间 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 上什么时间相遇？

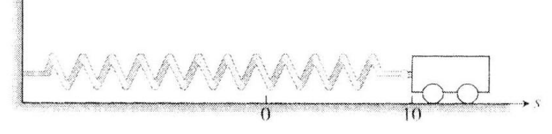
(b) 两个质点在什么时间相距最远？

(c) 两个质点之间的距离在区间 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 上什么时间变化最快？

**37. 无摩擦小车** 把一辆用弹簧连接在墙上的无摩擦小车拖离它的平衡位置 10 cm，在时间 $t=0$ 松开使小车来回滚动 4 秒钟. 它在时间 $t$ 的位置是 $s=10\cos \pi t$.

(a) 小车的最大速度是多大？它在什么时间滚动最快？它在这时处于什么位置？这时小车的加速度有多大？

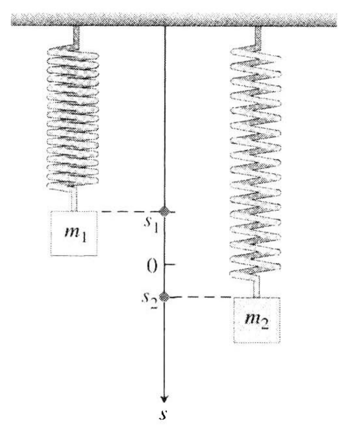
(b) 小车加速度为最大时的位置在何处？它在这时的速度有多大？




**38.** 两个并排悬挂在弹簧上的物体的位置分别是 $s_1=2\sin t$ 和 $s_2=\sin 2t$.

(a) 它们在区间 $0<t$ 上何时相互错过？（提示：$\sin 2t=2\sin t\cos t$）

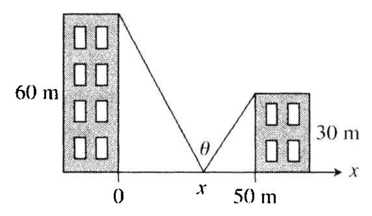
(b) 它们之间的垂直距离在区间 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 上何时达到最大值？这个距离是多大？（提示：$\cos 2t=2\cos^2 t-1$）




**39. 选择太阳能站地址** 按照合同要在附图所示的两座建筑物之间的东-西联线的地面上建一个太阳能站. 把它放在距离较高建筑物多远的地方才能使太阳每天在其顶上通过的小时数达到最大值？从观察

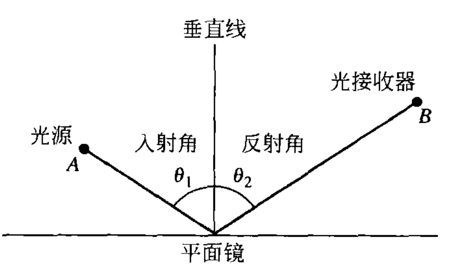
$$\theta=\pi-\cot^{-1}\frac{x}{60}-\cot^{-1}\frac{50-x}{30}$$

开始. 然后求使 $\theta$ 达到最大值的 $x$ 值.




**40. 费马光学原理** 费马光学原理说明光线从一点到另一点的传播总是沿着一条使传播时间最短的路径进行. 从光源 $A$ 射出的光线经过平面镜反射到达点 $B$ 的光接收器，如附图所示. 对于服从费马原理的光线，证明入射角必须等于反射角，这两个角都是从反射面的垂直线起度量.（这个结果也可以不用微积分推导. 你或许宁

愿采用一种纯粹几何的论证.)




41. **锡瘟疫** 把金属锡保存在 13.2 ℃以下的环境，它会慢慢变成易碎的并碎裂成一种灰色粉末. 如果锡制品在低温下放几年，它们最后会自动碎裂成这种灰色粉末. 多年前见过自己教堂的锡管道碎裂的欧洲人把这种变化称为*锡瘟疫*，因为它似乎有接触传染性，而在实际上这是因为这种灰色粉末是它自身形成的催化剂.

化学反应中的催化剂是控制反应速率的一种物质，使反应本身不是固定不变的. 自动催化反应是这样一种反应，它的产物是其自身形成的催化剂. 这种反应在开始催化剂用量很少时可能是慢速的，而在最后当原有物质大部分用尽后反应进程又是慢速的，但是在物质本身和它的催化剂产物都充裕时，反应以较快的速度进行.

在某些情况下，有理由认为反应速率 $v=\frac{dx}{dt}$同原物质数量和催化剂产物数量成正比，就是说，可以把 $v$ 单独视为 $x$ 的函数，并且

$$v=kx(a-x)=kax-kx^2$$

其中 $x$ = 产物的数量，$a$ = 开始时物质的数量，$k$ 是一个常数.

速率 $v$ 在 $x$ 取什么值时达到极大值? $v$ 的极大值是多大?

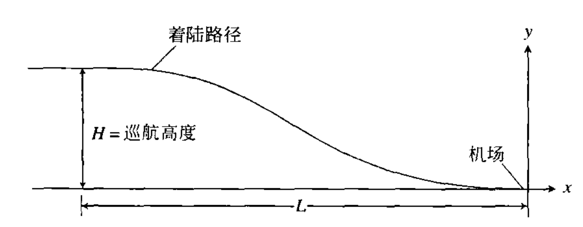
42. **飞机着陆路径** 如附图所示，飞机在开始向机场跑道降落时的高度为 $H$，飞机离机场的水平地面距离为 $L$. 假设飞机着陆路径是 3 次多项式函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 代表的曲线，其中 $y(-L)=H$，$y(0)=0$.

(a) $\frac{dy}{dx}$在 $x=0$ 的值是什么?

(b) $\frac{dy}{dx}$在 $x=-L$ 的值是什么?

(c) 利用$\frac{dy}{dx}$在 $x=0$ 和 $x=-L$ 的值以及 $y(0)=0$ 和 $y(-L)=H$，证明

$$y(x)=H\left[2\left(\frac{x}{L}\right)^3+3\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$




43. 生产与分销每个背包的成本为 $c$ 美元，如果每个背包卖 $x$ 美元，销售量由

$$n=\frac{a}{x-c}+b(100-x)$$

确定，其中 $a$ 和 $b$ 是正值常数，使利润达到最大值的销售价格是多少?

44. 你经营的旅行社提供下述服务价格：如果参加旅行的人数为 50 人(登记旅行的最低人数)，每人 200 美元；增加一人，每人降低 2 美元，最多可增加到总数 80 人. 导游费为 6000 美元(固定费用)再加每人 32 美元. 多少人参加旅游能使你获得最大利润?

45. **威尔逊批量公式** 库存管理中的一个重要公式，表明每周订购、支付和保存商品的平均成本为

$$A(q)=\frac{km}{q}+cm+\frac{hq}{2}$$

其中 $q$ 是当商品(鞋子、收音机、扫帚或其他可能的物品)库存量达到低限时的订购量，$k$ 是提出一次订单的费用(无论多长时间提出订单，其值相同)，$c$ 是一件商品的价格(常数)，$m$ 是每周销售商品的数量(常数)，$h$ 是每件商品每周的保管费用(把空间、公用设施、保险和安全费用考虑在内的常数).

(a) 作为库存经理，你的工作是寻求使 $A(q)$ 达到最小值的订购量，这个量是多少? (用于寻找答案的这个公式称为*威尔逊批量公式*.)

(b) 运输费用有时依赖于订购量，在这种情况下更实用的方法使用 $k+bq$ 代替 $k$，这是 $k$ 与 $q$ 的常数倍数之和. 这时最经济的订购量是多少?

46. **生产量** 证明：平均成本最低的生产量(如果存在)是平均成本等于边际成本时的生产量.

47. 证明：若收入函数和成本函数分别是 $r(x)=6x$ 和 $c(x)=x^3-6x^2+15x$，则你能达到的最好结果是收支平衡(收入和成本相等).

48. **生产量** 假设生产 $x$ 件产品的成本是 $c(x)=x^3-20x^2+20000x$. 求使生产 $x$ 件产品的平均成本达到最小值的生产量.

**49. 药物敏感性**(续 3.2 节习题 58)　通过寻找导数 $\frac{dR}{dM}$达到最大值的 $M$ 值，求人体最敏感的药物剂量，其中

$$R = M^2\left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3}\right)$$

而 $C$ 为常数.

**50. 我们怎样咳嗽**

(a) 在咳嗽时，气管收缩增加空气流出速度. 这就提出气管应该收缩到何等程度才能使气流达到最大速度以及在咳嗽时气管是否真正收缩到这种程度的问题.

在对气管壁的弹性以及关于接近气管壁的空气如何因摩擦而减慢作出合理假设之下，平均气流速度可以用方程

$$v = c(r_0 - r)r^2 \text{cm/s}, \quad \frac{r_0}{2} \leqslant r \leqslant r_0$$

模拟，其中 $r_0$ 是气管在不呼吸时以厘米计的半径，$c$ 是正常数，它的值部分依赖于气管的长度.

证明，当 $r = \frac{2}{3}r_0$ 时，也就是当气管收缩大约 33.3% 时，$v$ 取最大值. 明显的事实是，咳嗽时 X 光照片充分证实有关气管收缩的这个结果.

T (b) 取 $r_0 = 0.5$，$c = 1$，画出 $v$ 在区间 $0 \leqslant r \leqslant 0.5$ 上的图形. 把所见结果同 $r = \frac{2}{3}r_0$ 时 $v$ 取最大值的断言作比较.

**51. 关于正整数的一个不等式**　证明：若 $a$，$b$，$c$，$d$ 是正整数，则

$$\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)}{abcd} \geqslant 16$$

**52. 例 4 中的导数 $\frac{dt}{dx}$**

(a) 证明　$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

是 $x$ 的递增函数.

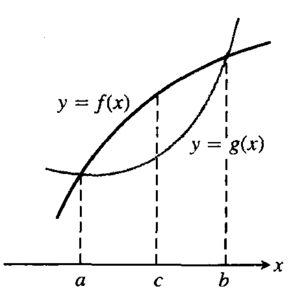
(b) 证明　$g(x) = \dfrac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$

是 $x$ 的递减函数.

(c) 证明　$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{x}{c_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \dfrac{d - x}{c_2\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$

是 $x$ 的递增函数.

**53.** 令 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是附图所示的可微函数. 点 $c$ 是两条曲线之间的垂直距离达到最大的点. 关于两条曲线在点 $c$ 的切线有什么特殊性质？提出答案的理由.




**54.** 要求你确定函数 $f(x) = 3 + 4\cos x + \cos 2x$ 是否恒为负值.

(a) 解释为什么你只需考虑在区间 $[0, 2\pi]$ 内的 $x$ 值.

(b) $f$ 恒为负值吗？说明理由.

**55.** (a) 函数 $y = \cot x - \sqrt{2}\csc x$ 在区间 $0 < x < \pi$ 上有一个绝对极大值. 试求这个值.

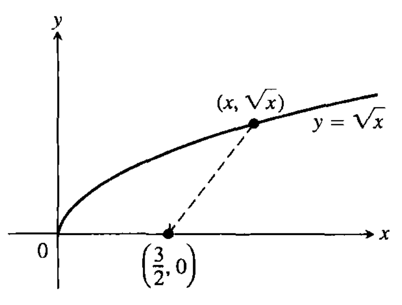
T (b) 画出函数的图形，并且把所见结果同 (a) 中的答案作比较.

**56.** (a) 函数 $y = \tan x + 3\cot x$ 在区间 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 上有一个绝对极小值. 试求这个值.

T (b) 画出函数的图形，并且把所见结果同 (a) 中的答案作比较.

**57.** (a) 曲线 $y = \sqrt{x}$ 是如何同点 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 靠近的？(提示：如果取距离平方的最小值，可以避免平方根.)

T (b) 一起画出距离函数和 $y = \sqrt{x}$ 的图形，并且说明所见结果同 (a) 中的答案是一致的.




**58.** (a) 半圆 $y = \sqrt{16 - x^2}$ 是如何同点 $(1, \sqrt{3})$ 靠近的？

T (b) 一起画出距离函数和 $y = \sqrt{16 - x^2}$ 的图形，并且说明所见结果同 (a) 中的答案是一致的.

## 4.6 不定式与洛必达法则

约翰·伯努利发现了利用导数在分式的分子和分母同时趋于零或无穷大时计算分式极限的法则. 这个法则就是当今以格劳梅·洛必达命名的洛必达法则. 洛必达是一位法兰西贵族，他写了第一本介绍微分学的教科书，这条法则首次出现在这本书中.

**人物传记**

格劳梅·弗兰科斯·安托万·洛必达
(Guillaume François Antoine del'Hôpital, 1661—1704)

约翰·伯努利
(Johann Bernoulli, 1667—1748)

### 4.6.1 不定式$\frac{0}{0}$

如果连续函数$f(x)$和$g(x)$在$x=a$同时为零，那么

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

不能通过代入$x=a$求得. 这样代入产生没有意义的无法计算的表达式$\frac{0}{0}$. 我们用$\frac{0}{0}$作为称为**不定式**的一种表达式的记号. 在某些情况下，导致不定式的极限可以通过项的消去、重新排列或者其他代数操作得到，但是并非总是如此. 在第2章用过这种方法，即在2.4节求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$时采用的重要分析手段. 我们曾经取得用极限

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

计算导数的成功，并且当代入$x=a$时这个极限总是产生同$\frac{0}{0}$等价的不定式. 洛必达法则使我们能够利用求导数获得的结果来计算极限，而用其他法求这种极限会导致不定式.

> **定理6（洛必达法则）** 假设$f(a)=g(a)=0$，$f$和$g$在包含$a$的开区间$I$上是可微函数，并且当$x\neq a$时$g'(a)\neq 0$. 那么
>
> $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$
>
> 假定这个等式右端的极限存在.

定理6的证明在本节最后给出.

**例1**

**(a)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3-\cos x}{1}=\frac{3-\cos x}{1}\Big|_{x=0}=2.$

**(b)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1}=\frac{1}{2}.$

**(c)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-x/2}{x^2}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1/2)(1+x)^{-1/2}-1/2}{2x}\qquad\left(仍然是\frac{0}{0}，再次微分\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-(1/4)(1+x)^{-3/2}}{2}=-\frac{1}{8}.\qquad\left(不是\frac{0}{0}，求得极限\right)$

**(d)** $\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$

$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\quad\left(仍然是\frac{0}{0}\right)$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}\quad\left(仍然是\frac{0}{0}\right)$

$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.\quad\left(不是\frac{0}{0}，求得极限\right)$ ■

**注意** 在对$f/g$应用洛必达法则时，要用$g$的导数除$f$的导数，不要掉进求$\frac{f}{g}$的导数的陷阱. 使用的商是$\frac{f'}{g'}$,而不是$\left(\frac{f}{g}\right)'$.

我们把例 1 中采取的步骤小结如下.

> **应用洛必达法则**
>
> 在用洛必达法则求
>
> $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$
>
> 时，只要仍然得到在$x=a$的不定式$\frac{0}{0}$，就继续对$f$和$g$求导数. 但是当这两个导数中的一个或者另一个在$x=a$不再是 0 时，就停止求导数过程. 洛必达法则不适用于分子或分母具有有限非零极限的情形.

**例 2** 注意正确地应用洛必达法则:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x+x^2}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{1+2x}=\frac{0}{1}=0\quad\left(不是\frac{0}{0},求得极限\right)$$

到此为止的计算是正确的，但是如果继续求导数，试图再次应用洛必达法则，就得到

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x+x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{1+2x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

这是错误的结果. 洛必达法则只能应用于给出不定式的极限，而$\frac{0}{1}$不是不定式. ■

洛必达法则也可以应用于单侧极限.

**例 3**

**(a)** $\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x^2}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$

$=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x}{2x}=\infty.\quad(x>0 时为正)$

> **附注**
>
> 回忆一下，记号$\infty$和$+\infty$的含义是相同的.

**(b)** $\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x^2}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$

$=\lim_{x\to0^-}\frac{\cos x}{2x}=-\infty.\quad(x<0 时为负)$ ■

### 4.6.2 不定式$\frac{\infty}{\infty}$，$\infty\cdot 0$ 和 $\infty-\infty$

在我们试图用代入 $x=a$ 求 $x\to a$ 的极限时，有时得到像$\frac{\infty}{\infty}$，$\infty\cdot 0$，$\infty-\infty$ 这样不确定的表达式而不是不定式$\frac{0}{0}$. 首先考虑不定式$\frac{\infty}{\infty}$.

在高等微积分教程中，像证明不定式$\frac{0}{0}$的洛必达法则一样，也证明适用于不定式$\frac{\infty}{\infty}$的洛必达法则. 如果 $x\to a$ 时 $f(x)\to\pm\infty$ 和 $g(x)\to\pm\infty$，那么

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

只要右端的极限存在. 在记号 $x\to a$ 中，$a$ 可以是有限的，也可以是无穷大. 同时，$x\to a$ 可以用单侧极限 $x\to a^+$ 或者 $x\to a^-$ 代替.

**例 4** 求下列极限：

(a) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\sec x}{1+\tan x}$.　(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$.　(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}$.

**解** (a) 分式的分子和分母在 $x=\frac{\pi}{2}$不连续，所以我们考察此处的单侧极限. 为了应用洛必达法则，可以选择以 $x=\frac{\pi}{2}$为端点的任意开区间 $I$.

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\sec x}{1+\tan x}\quad\left(\text{左极限不定式}\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$=\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\sec x\tan x}{\sec^2 x}=\lim_{x\to(\pi/2)^-}\sin x=1$$

右极限不定式$\frac{-\infty}{-\infty}$的值也等于 1. 所以双侧极限等于 1.

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1/x}{1/\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0.$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\infty.$ ■

下面我们把注意力转向不定式$\infty\cdot 0$ 和$\infty-\infty$. 这两种不定式有时可以用代数方法转变成不定式$\frac{0}{0}$或者$\frac{\infty}{\infty}$. 这里同样不是把$\infty\cdot 0$ 或者$\infty-\infty$看成一个数，它们只不过是考察极限时表示函数特性的记号. 下面举出如何求这两种不定式极限的例子.

**例 5** 求下列极限：

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)$.　(b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x$.

**解**

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)\quad(\infty\cdot 0)$

$=\lim\limits_{h\to 0^+}\left(\frac{1}{h}\sin h\right)=1.\quad$ (令 $h=1/x$)

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/\sqrt{x}}\quad(\infty/\infty)$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/2x^{3/2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-2\sqrt{x})=0.$ ■

**例 6** 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$.

**解** 若$x\to 0^+$，则$\sin x\to 0^+$而

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\to\infty-\infty$$

同样，若$x\to 0^-$，则$\sin x\to 0^-$而

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\to-\infty-(-\infty)=-\infty+\infty$$

两种形式都没有揭示极限中的实际情况. 为了求出极限，首先合并两个分式：

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin x}{x\sin x}\quad(\text{公分母是 } x\sin x)$$

然后对结果应用洛必达法则：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}\quad\left(\frac{0}{0}\right)\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}\quad\left(\text{仍然是}\frac{0}{0}\right)\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0\end{aligned}$$

■

### 4.6.3 不定幂

导致不定式$1^\infty$，$0^0$和$\infty^0$的极限有时可以通过首先对函数取对数来处置. 我们利用洛必达法则求对数表达式的极限，然后取幂还原结果获得原来函数的极限. 这个过程由指数函数的连续性和2.6节定理11证明是正确的，并且用公式表示如下：

> 若$\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)=L$，则
>
> $$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}e^{\ln f(x)}=e^L$$
>
> 其中$a$可以取有限值或者无穷大.

**例 7** 应用洛必达法则证明$\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x}=e$.

**解** 这个极限导致不定式$1^\infty$. 我们令$f(x)=(1+x)^{1/x}$并且求$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln f(x)$. 由于

$$\ln f(x)=\ln(1+x)^{1/x}=\frac{1}{x}\ln(1+x)$$

应用洛必达法则得到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\ln f(x)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}\quad\left(\frac{0}{0}\right)\\&=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=\frac{1}{1}=1\end{aligned}$$

因此，$\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x}=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\ln f(x)}=e^1=e$. ■

**例 8** 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}x^{1/x}$.

**解** 这个极限导致不定式$\infty^0$. 令$f(x)=x^{1/x}$并且求$\lim\limits_{x\to\infty}\ln f(x)$. 由于

$$\ln f(x)=\ln x^{1/x}=\frac{\ln x}{x}$$

洛必达法则给出

$$\lim_{x\to\infty}\ln f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\quad\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=\frac{0}{1}=0$$

因此，$\lim_{x\to\infty}x^{1/x}=\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}e^{\ln f(x)}=e^0=1$. ■

### 4.6.4 洛必达法则的证明

洛必达法则的证明以柯西中值定理为基础，这个中值定理涉及两个函数而不是一个函数. 我们首先证明柯西定理，然后证明如何从它导出洛必达法则.

人物传记

奥古斯丁·路易·柯西 (Augustin-Louis Cauchy，1789—1857)

**定理7（柯西中值定理）** 假定 $f$ 和 $g$ 在 $[a,b]$ 上连续且在 $(a,b)$ 上处处可微，此外假定在整个 $(a,b)$ 上 $g'(x)\neq 0$. 那么在 $(a,b)$ 内存在一点 $c$，使得

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

**证明** 我们应用4.2节的中值定理两次. 第一次用它证明 $g(a)\neq g(b)$. 因为如果 $g(b)$ 等于 $g(a)$，那么对于 $a$ 和 $b$ 之间的某个 $c$，中值定理将给出

$$g'(c)=\frac{g(b)-g(a)}{b-a}=0$$

由于在 $(a,b)$ 内 $g'(x)\neq 0$，这是不可能的.

第二次对函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$$

应用中值定理. 在 $f$ 和 $g$ 是连续和可微的区间，这个函数是连续和可微的，且 $F(b)=F(a)=0$. 因此在 $a$ 和 $b$ 之间存在数 $c$ 使 $F'(c)=0$. 这个等式当用 $f$ 和 $g$ 表示时变成

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g'(c)]=0$$

或者

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$ ■

请注意，4.2节的中值定理是定理7取 $g(x)=x$ 时的特例.

柯西中值定理对于由参数方程 $x=g(t)$ 和 $x=f(t)$ 定义的曲线 $C$ 有一种几何解释. 由3.5节等式(2)，参数曲线在 $t$ 的斜率由

$$\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{f'(t)}{g'(t)}$$

给出，所以 $\frac{f'(c)}{g'(c)}$ 是曲线在 $t=c$ 时切线的斜率. 连接 $C$ 上两点 $(g(a),f(a))$ 和 $(g(b),f(b))$ 的割线的斜率为

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

定理7表明，在区间 $(a,b)$ 内存在一个参数值 $c$，对于这个 $c$，曲线在点 $((g(c),f(c))$ 的切线的斜率同连接点 $(g(a),f(a))$ 和 $(g(b),f(b))$ 的割线的斜率相等. 这个几何上的结果如图4.42所示. 注意，可能存在一个以上这样的参数值 $c$.

下面我们来证明洛必达法则.

**洛必达法则的证明** 首先证实对于 $x\to a^+$ 情形的极限等式. 然后将其中的方法几乎不加改变地应用到 $x\to a^-$ 的情形, 并且把两种情形结合起来就得到证明.

假定 $x$ 位于 $a$ 的右边. 那么 $g'(x)\neq 0$, 并且可以对闭区间 $[a,x]$ 应用柯西中值定理. 这个步骤产生 $a$ 和 $x$ 之间的一个常数 $c$, 满足

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$$

但是 $f(a)=g(a)=0$, 所以

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(x)}{g(x)}$$

由于 $c$ 总是在 $a$ 和 $x$ 之间, 当 $x$ 趋近 $a$ 时 $c$ 趋近 $a$. 因此

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a^+}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

这就证实 $x$ 从右边趋近 $a$ 时的洛必达法则. 在 $x$ 从左边趋近 $a$ 的情形, 洛必达法则通过对闭区间 $[x,a]$ $(x<a)$ 应用柯西中值定理得到证明. ■

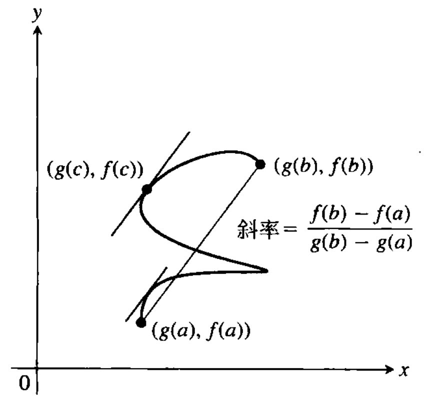



图 4.42 至少存在一个参数值 $t=c$ $(a<c<b)$, 对 $c$ 而言, 曲线在点 $(g(c),f(c))$ 的切线的斜率同连接点 $(g(a),f(a))$ 和 $(g(b),f(b))$ 的割线的斜率相等

## 习题 4.6

在习题 1 ~ 6 中, 用洛必达法则求极限. 然后用第 2 章学习的方法求极限.

**1.** $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$.

**2.** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$.

**3.** $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x}{7x^2+1}$.

**4.** $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{4x^3-x-3}$.

**5.** $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

**6.** $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x}{x^3+x+1}$.

在习题 7 ~ 46 中, 用洛必达法则求极限.

**7.** $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$.

**8.** $\lim_{x\to -5}\frac{x^2-25}{x+5}$.

**9.** $\lim_{t\to -3}\frac{t^3-4t+15}{t^2-t-12}$.

**10.** $\lim_{t\to 1}\frac{t^3-1}{4t^3-t-3}$.

**11.** $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x}{7x^3+3}$.

**12.** $\lim_{x\to\infty}\frac{x-8x^2}{12x^2+5x}$.

**13.** $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t^2}{t}$.

**14.** $\lim_{t\to 0}\frac{\sin 5t}{2t}$.

**15.** $\lim_{x\to 0}\frac{8x^2}{\cos x-1}$.

**16.** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$.

**17.** $\lim_{\theta\to\pi/2}\frac{2\theta-\pi}{\cos(2\pi-\theta)}$.

**18.** $\lim_{x\to -\pi/3}\frac{3\theta+\pi}{\sin(\theta+(\pi/3))}$.

**19.** $\lim_{\theta\to\pi/2}\frac{1-\sin\theta}{1+\cos 2\theta}$.

**20.** $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x-\sin\pi x}$.

**21.** $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln(\sec x)}$.

**22.** $\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln(\csc x)}{(x-(\pi/2))^2}$.

**23.** $\lim_{t\to 0}\frac{t(1-\cos t)}{t-\sin t}$.

**24.** $\lim_{t\to 0}\frac{t\sin t}{1-\cos t}$.

**25.** $\lim_{x\to(\pi/2)^-}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sec x$.

**26.** $\lim_{x\to(\pi/2)^-}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x$.

**27.** $\lim_{\theta\to 0}\frac{3^{\sin\theta}-1}{\theta}$.

**28.** $\lim_{\theta\to 0}\frac{(1/2)^{\theta}-1}{\theta}$.

**29.** $\lim_{x\to 0}\frac{x2^x}{2^x-1}$.

**30.** $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{2^x-1}$.

**31.** $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{\log_2 x}$.

**32.** $\lim_{x\to\infty}\frac{\log_2 x}{\log_3(x+3)}$.

**33.** $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x^2+2x)}{\ln x}$.

**34.** $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(e^x-1)}{\ln x}$.

**35.** $\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{5y+25}-5}{y}$.

**36.** $\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{ay+a^2}-a}{y}$, $a>0$.

**37.** $\lim_{x\to\infty}(\ln 2x-\ln(x+1))$.

**38.** $\lim_{x\to 0^+}(\ln x-\ln\sin x)$.

**39.** $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}$.

**40.** $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3x+1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

**41.** $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

**42.** $\lim_{x\to 0^+}(\csc x-\cot x+\cos x)$.

**43.** $\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta-1}{e^{\theta}-\theta-1}$.

**44.** $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-(1+h)}{h^2}$.

**45.** $\lim_{t\to\infty}\frac{e^t+t^2}{e^t-t}$.

**46.** $\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}$.

在习题 47 ~ 56 中, 求极限.

**47.** $\lim_{x\to 1^+}x^{1/(1-x)}$.

**48.** $\lim_{x\to 1^+}x^{1/(x-1)}$.

**49.** $\lim_{x\to\infty}(\ln x)^{1/x}$.

**50.** $\lim_{x\to e^+}(\ln x)^{1/(x-e)}$.

**51.** $\lim_{x\to 0^+}x^{-1/\ln x}$.

**52.** $\lim_{x\to\infty}x^{1/\ln x}$.

53. $\lim_{x\to\infty}(1+2x)^{1/(2\ln x)}$.　54. $\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{1/x}$.

55. $\lim_{x\to 0^+}x^x$.　56. $\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

在习题 57 ~ 60 中，洛必达法则无助于求极限. 如果试用洛必达法则，只能出现不断的重复. 请改用某种其他方法求极限.

57. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+1}}$.　58. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}$.

59. $\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\sec x}{\tan x}$.　60. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\cot x}{\csc x}$.

61. 下面两个求极限的过程，哪个是正确的，哪个是错误的？提出答案的理由.

(a) $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-3}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{2x}=\frac{1}{6}$.

(b) $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-3}=\frac{0}{6}=0$.

62. 下面两个求极限的过程，哪个是正确的，哪个是错误的？提出答案的理由.

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{x^2-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2}{2x-\cos x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{2+\sin x}=\frac{2}{2+0}=1$.

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{x^2-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2}{2x-\cos x}=\frac{-2}{0-1}=2$.

63. 下面的计算只有一个是正确的. 哪一个是正确的？其他计算为什么是错误的？提出答案的理由.

(a) $\lim_{x\to 0^+}x\ln x=0\cdot(-\infty)=0$.

(b) $\lim_{x\to 0^+}x\ln x=0\cdot(-\infty)=-\infty$.

(c) $\lim_{x\to 0^+}x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{(1/x)}=\frac{-\infty}{\infty}=-1$.

(d) $\lim_{x\to 0^+}x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{(1/x)}$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1/x)}{(-1/x^2)}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$.

64. 对于下面给出的函数和区间，求满足柯西中值定理结论的全部 $c$ 值.

(a) $f(x)=x$, $g(x)=x^2$, $(a, b)=(-2, 0)$.

(b) $f(x)=x$, $g(x)=x^2$, $(a, b)$ 是任意区间.

(c) $f(x)=x^3/3-4x$, $g(x)=x^2$, $(a,b)=(0,3)$.

65. **连续延拓**　求 $c$ 的值使函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{9x-3\sin 3x}{5x^3}, & x\neq 0\\ c, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 连续. 解释你求的 $c$ 值为什么符合要求.

**T** 66. **不定式 $\infty-\infty$**

(a) 通过在 $x$ 值的适当大的区间上画出函数 $f(x)=x-\sqrt{x^2+x}$ 的图形，估计

$$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+x})$$

的值.

(b) 再通过洛必达法则求极限，证实你的估计. 作为第一步，用分式 $\frac{x+\sqrt{x^2+x}}{x+\sqrt{x^2+x}}$ 乘 $f(x)$ 并且简化新的分子.

**T** 67. **不定式 $\frac{0}{0}$**　通过画出函数图形估计

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-(3x+1)\sqrt{x}+2}{x-1}$$

的值. 然后用洛必达法则证实你的估计.

68. 本题考察极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$$

同极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

之间的差别.

(a) 利用洛必达法则证明

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

**T** (b) 一起画出

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x \text{ 和 } g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

对于 $x\geqslant 0$ 的图形. 如何比较 $f$ 和 $g$ 的特性？估计 $\lim_{x\to\infty}f(x)$ 的值.

(c) 通过用洛必达法则计算极限，证实你对 $\lim_{x\to\infty}f(x)$ 的估计.

69. 证明

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{r}{k}\right)^k=e^r$$

70. 给定 $x>0$，求下列极大值(如果存在)：

(a) $x^{1/x}$.

(b) $x^{1/x^2}$.

(c) $x^{1/x^n}$ ($n$ 为正整数).

(d) 证明：对于每个正整数 $n$ 有 $\lim_{x\to\infty}x^{1/x^n}=1$.

**T** 71. **$(\sin x)^x$ 在 $[0, \pi]$ 上的连续延拓**

(a) 画出 $f(x)=(\sin x)^x$ 在区间 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 上的图形. 对 $f$ 指定什么值会使它在 $x=0$ 连续？

(b) 通过用洛必达法则求 $\lim_{x\to 0^+}f(x)$，证实你的结论.

(c) 返回到图形上来，估计 $f$ 在 $[0, \pi]$ 上的极

大值. $f$ 大约在何处取极大值?

**(d)** 在同一窗口画出 $f'$ 的图形，通过观察图形在何处同 $x$ 轴相交，提高你在(c)中作出的估计. 为了简化计算，可以在 $f'$ 的表达式中去除指数因子，只画指数因子为零的图形.

**T72.** 函数 $(\sin x)^{\tan x}$（续习题 71）

**(a)** 在区间 $-7\leqslant x\leqslant 7$ 上画出 $f(x)=(\sin x)^{\tan x}$ 的图形. 如何计算图形中的间隙? 间隙的宽度有多大?

**(b)** 再画出 $f$ 在区间 $0\leqslant x\leqslant \pi$ 上的图形. 函数在 $x=\frac{\pi}{2}$ 无定义，但是图形在这个点没有间断. 这里出现什么情况? 图形显现对 $f$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 给出什么值?（提示：用洛必达法则求 $f$ 在 $x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ 和 $x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+$ 时的极限.）

**(c)** 继续考察(b)中的图形，尽可能准确地求出 $f$ 的极大值和极小值，并且估计使 $f$ 取极大值和极小值时的 $x$ 值.

## 4.7 牛顿法

本节讨论一种数值方法，称为**牛顿法**或者**牛顿-拉弗森法**，这是用于求方程 $f(x)=0$ 近似解的一种方法. 实质上它是在 $y=f(x)$ 为零的附近用切线代替函数的图形.（使 $f$ 为零的 $x$ 值是函数 $f$ 的根和方程 $f(x)=0$ 的解.）

### 4.7.1 牛顿法的步骤

为了估计方程 $f(x)=0$ 的解，牛顿法的目标是产生逼近方程解的一系列逼近. 把 $x_0$ 作为第一个逼近，那么，在有利的情况下，这个方法通过逐步向 $f$ 图形同 $x$ 轴的交点移动，执行求解的其余步骤（见图 4.43）. 方法的每一步用 $f$ 的一个线性化的零点逼近 $f$ 的零点. 下面说明它的求解步骤.

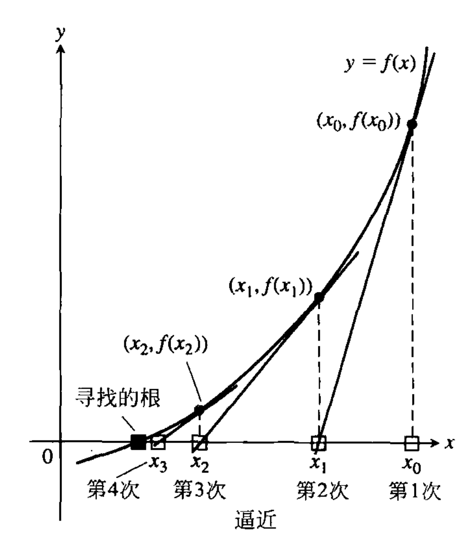



图 4.43 牛顿法从初始猜测 $x_0$ 开始，在有利情况下每步改进一次猜测值

初始估计值 $x_0$ 可以从图形或者单纯凭猜测得到. 然后，牛顿法用曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 的切线逼近曲线，切线同 $x$ 轴的交点称为 $x_1$（见图 4.43）. 数 $x_1$ 通常比 $x_0$ 是对解的更好逼近. 曲线在 $(x_1, f(x_1))$ 的切线同曲线的交点 $x_2$ 是这个序列中下一个逼近. 继续进行下去，用每个逼近产生下一个逼近，直到获得足够接近函数根的逼近为止.

我们可以用下述方法导出产生逐次逼近的公式. 给定逼近 $x_n$，曲线在点 $(x_n, f(x_n))$ 的点斜式方程是

$$y=f(x_n)+f'(x_n)(x-x_n)$$

可以通过置 $y=0$ 求它同 $x$ 轴的交点（见图 4.44）：

$$0=f(x_n)+f'(x_n)(x-x_n)$$

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x-x_n$$

$$x=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (\text{如果} f'(x_n)\neq 0)$$

这个 $x$ 值是下一个逼近 $x_{n+1}$.

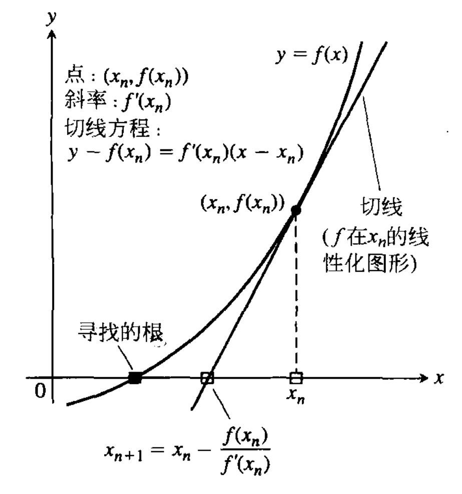



图 4.44 牛顿法相继步骤的几何表示：从 $x_n$ 向上至曲线，再沿切线向下求 $x_{n+1}$

下面给出牛顿法的小结.

> **牛顿法的步骤**
>
> (1)对方程$f(x)=0$的解猜测一个初始逼近$x_0$. $y=f(x)$的图形可能有助于这种猜测.
>
> (2)使用公式
>
> $$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\quad 如果f'(x_n)\neq 0 \tag{1}$$
>
> 由第1个逼近获得第2个逼近，由第2个逼近获得第3个逼近，等等.

### 4.7.2 应用牛顿法

牛顿法的应用通常包含大量数值计算，这使它们非常适合于在计算机或计算器上进行. 不过，即使是用手工方式计算(可能是冗长而乏味的)，也对求解方程提供一种很有力的方法.

**例** 求曲线$y=x^3-x$同水平线$y=1$的交点的$x$坐标.

**解** 曲线同直线在$x^3-x=1$或者$x^3-x-1=0$时相交. 那么，$f(x)=x^3-x-1$何时等于零? 由于$f(1)=-1$，$f(2)=5$，由中值定理可知，在区间(1, 2)内有$f$的一个根(见图4.45).

我们以$x_0=1$为初始值对$f$应用牛顿法. 结果显示在表4.1和图4.46中.

在$n=5$，我们得到结果$x_6=x_7=1.324\,717\,959$. 当$x_{n+1}=x_n$时，公式(1)表明$f(x_n)=0$. 我们已经求出$f(x)=0$取9位小数的一个解.

**表4.1 以$x_0=1$对$f(x)=x^3-x-1$应用牛顿法的结果**

| $n$ | $x_n$ | $f(x_n)$ | $f'(x_n)$ | $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | −1 | 2 | 1.5 |
| 1 | 1.5 | 0.875 | 5.75 | 1.347 826 087 |
| 2 | 1.347 826 087 | 0.100 682 173 | 4.449 905 482 | 1.325 200 399 |
| 3 | 1.325 200 399 | 0.002 058 362 | 4.268 468 292 | 1.324 718 174 |
| 4 | 1.324 718 174 | 0.000 000 924 | 4.264 634 722 | 1.324 717 957 |
| 5 | 1.324 717 957 | −1.8672E-13 | 4.264 632 999 | 1.324 717 957 |

■

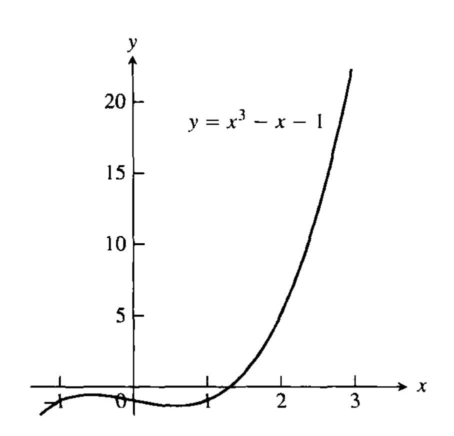



图4.45 $f(x)=x^3-x-1$的图形同$x$轴相交一次；这是我们欲求的根

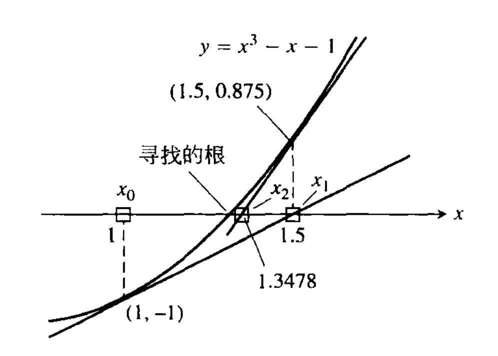



图4.46 表4.1中的前3个$x$值(取4位小数)

在图4.47中，我们指出例中的求解过程可以从曲线上$x_0=3$的点$B_0(3,23)$开始. 点$B_0$距离$x$轴很远，但是在$B_0$的切线同$x$轴相交于(2.12, 0)附近，所以$x_1$依然是对$x_0$的改进. 如果我

们对$f(x)=x^3-x-1$ 和$f'(x)=3x^2-1$ 像前面那样重复利用等式(1)，可以证实在 7 步之内得到 9 位小数的解$x_7=x_6=1.324\ 717\ 957$.

### 4.7.3 逼近的收敛性

在第 8 章我们确切地定义牛顿法中近似值 $x_n$ 收敛的概念. 直观上这是指当逼近的次数 $n$ 无限增加时 $x_n$ 同欲求的根 $r$ 任意地接近.（这个概念同 2.4 节定义的函数 $g(t)$ 当 $t$ 趋近无穷大时的极限的概念相似.）

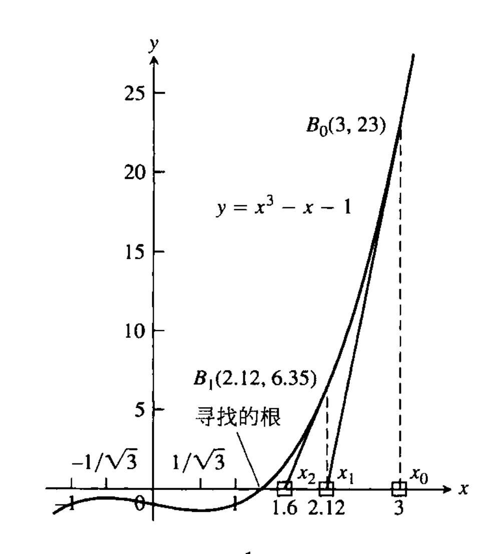



图 4.47 以 $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$右边的任意 $x_0$ 值为初始值将会得到根

实际上，牛顿法的收敛速度是很可观的，但是不能保证收敛. 检验收敛的一种方法是在开始时画出函数图形，估计出一个适合的初始值 $x_0$. 可以从计算 $|f(x_n)|$ 检验是否得到更接近函数零点的逼近，并且通过计算 $|x_n-x_{n+1}|$ 检查逼近是不是收敛的.

**牛顿法并非总是收敛的.** 例如，如果

$$f(x)=\begin{cases}-\sqrt{r-x}, & x<r\\ \sqrt{x-r}, & x\geqslant r\end{cases}$$

$f$ 的图形将像图 4.48 那样. 如果从 $x_0=r-h$ 开始，得到 $x_1=r+h$，随后的逼近在这两个值之间更迭. 无论进行多少次迭代都无法获得比第一次猜测更接近根的逼近.

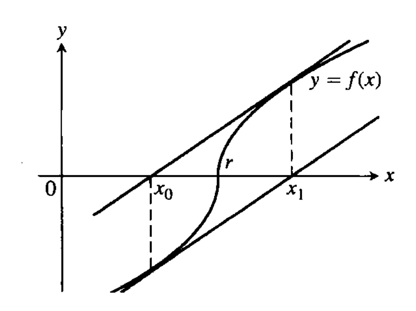
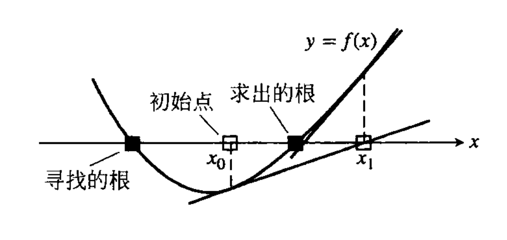



图 4.48 牛顿法收敛. 从 $x_0$ 开始达到 $x_1$，然后再回到 $x_0$，无法得到同 $r$ 更接近的近似值

**如果牛顿法收敛，它收敛到一个根.** 但是，需要注意，存在方法收敛然而没有收敛到根的情况. 所幸这种情况是很少见的.

**当牛顿法收敛到一个根时，它可能不是你想要的根.** 图 4.49 说明发生这种情况的两种可能途径.



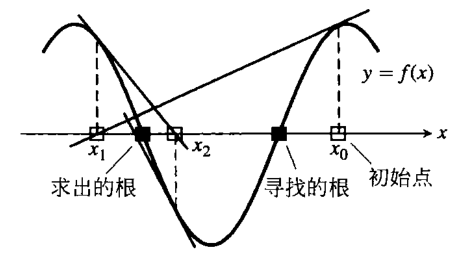




图 4.49 如果初始值距离根太远，牛顿法可能错过欲求的根

## 习题 4.7

1. 用牛顿法估计方程 $x^2+x-1=0$ 的解. 从 $x_0=-1$ 开始求左边的解，从 $x_0=1$ 开始求右边的解. 然后，在每种情况下，求 $x_2$.
2. 用牛顿法估计方程 $x^3+3x+1=0$ 的一个实数解. 从 $x_0=0$ 开始. 然后求 $x_2$.
3. 用牛顿法估计函数$f(x)=x^4+x-3$ 的两个零点. 从 $x_0=-1$ 开始求$f$左边的零点，从 $x_0=1$ 开始求$f$右边的零点. 然后，在每种情况下，求 $x_2$.

**4.** 用牛顿法估计函数$f(x)=2x-x^2+1$的两个零点. 从$x_0=0$开始求$f$左边的零点，从$x_0=2$开始求$f$右边的零点. 然后，在每种情况下，求$x_2$.

在习题5和习题6中，用牛顿法求方程的全部实根，准确到6位小数.

**5.** $e^{-x}=2x+1$.　　**6.** $\tan^{-1}x=1-2x$.

**7. 猜测根** 假定你的首次猜测是运气好的，就是说$x_0$正好是$f(x)=0$的根. 设$f'(x_0)$有定义且不为零，那么$x_1$及其后的逼近会出现什么情况?

**8. 估计π值** 打算用牛顿法求解方程$\cos x=0$，估计$\frac{\pi}{2}$的值准确到5位小数. 取什么初始值是要紧的事情吗? 提出答案的理由.

**9. 振荡** 证明，如果$h>0$，对函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0\\ \sqrt{-x}, & x<0\end{cases}$$

应用牛顿法，当$x_0=h$时得到$x_1=-h$，而当$x_0=-h$时得到$x_1=h$. 画出显示出现什么情况的图形.

**10. 获得越来越差的逼近** 对$f(x)=x^{1/3}$应用牛顿法，从$x_0=1$开始，并计算$x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$. 求$|x_n|$的公式. 当$n\to$时$|x_n|$会出现什么情况? 画出显示出现这种情况的图形.

**11.** 解释下列4句话为什么是求解相同的问题:

(i) 求$f(x)=x^3-3x-1$的根.

(ii) 求曲线$y=x^3$同直线$y=3x+1$交点的$x$坐标.

(iii) 求曲线$y=x^3-3x$同水平线$y=1$交点的$x$坐标.

(iv) 求$g(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2-x+5$的导数等于零的$x$值.

**12. 确定行星的位置** 为了计算行星的空间坐标，必须求解像$x=1+0.5\sin x$这样的方程. 画出函数$f(x)=x-1-0.5\sin x$的图形暗示函数在$x=1.5$附近有一个根. 应用一次牛顿法改进这个估计值. 就是说从$x_0=1.5$开始并且求$x_1$. (这个根准确到5位小数的值是1.49870.) 记住用弧度计算.

**T13. 曲线相交** 曲线$y=\tan x$同直线$y=2x$在$x=0$和$x=\frac{\pi}{2}$之间相交. 用牛顿法求交点.

**T14. 四次方程的实数解** 用牛顿法求方程$x^4-2x^3-x^2-2x+2=0$的两个实数解.

**T15.** (a) 方程$\sin 3x=0.99-x^2$有多少个解?

(b) 用牛顿法求出它们.

**16. 曲线相交**

(a) $\cos 3x$能够等于$x$吗? 提出答案的理由.

(b) 用牛顿法求它们在何处相等.

**17.** 求函数$f(x)=2x^4-4x^2+1$的4个实数零点.

**T18. 估计π值** 用牛顿法求解方程$\tan x=0$估计$\pi$值，以$x_0=3$为初始值，准确到计算器能够显示的小数位数.

**19. 曲线相交** $x$取什么值使$e^{-x^2}=x^2-x+1$?

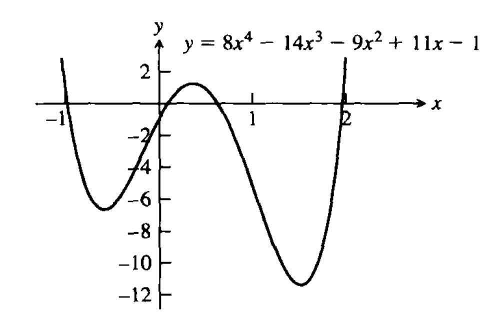
**20. 曲线相交** $x$取什么值使$\ln(1-x^2)=x-1$?

**21.** 用2.6节的介值定理证明$f(x)=x^3+2x-4$在$x=1$和$x=2$之间有一个根. 然后求这个根，准确到5位小数.

**22. 分解4次式因式** 求因式分解

$$8x^4-14x^3-9x^2+11x-1$$
$$=8(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)(x-r_4)$$

中$r_1$至$r_4$的近似值.




**T23. 收敛到不同零点** 用牛顿法求$f(x)=4x^4-4x^2$的零点，用下列给定的初始值:

(a) $x_0=-2$和$x_0=-0.8$，位于$(-\infty,-\sqrt{2}/2)$内.

(b) $x_0=-0.5$和$x_0=0.25$，位于$(-\sqrt{21}/7,\sqrt{21}/7)$内.

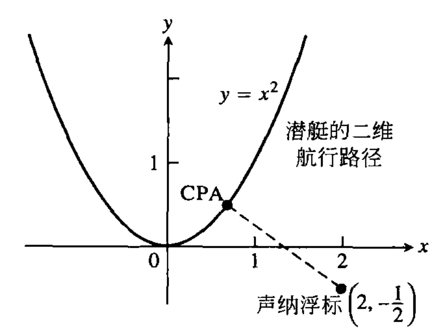
(c) $x_0=0.8$和$x_0=2$，位于$(\sqrt{2}/2,\infty)$内.

(d) $x_0=-\sqrt{21}/7$和$x_0=\sqrt{21}/7$.

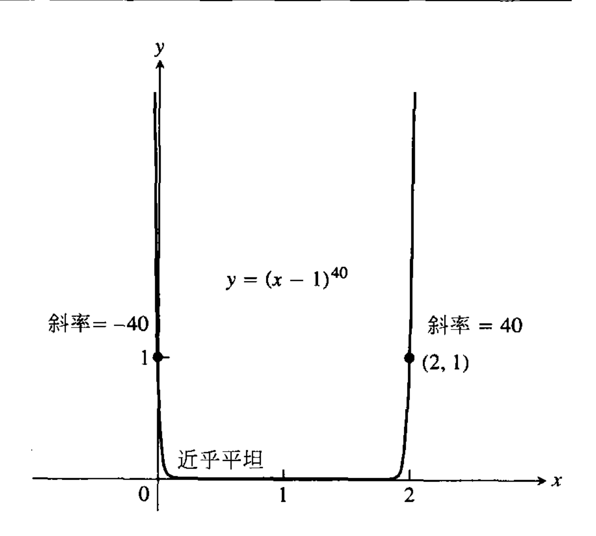
**24. 声纳浮标问题** 在潜艇定位问题中，经常需要寻找潜艇到达水中一个声纳浮标(声音探测器)的航道最近点(CPA). 假定潜艇沿抛物线路径$y=x^2$航行，而浮标位于点$\left(2,-\frac{1}{2}\right)$.

(a) 证明使潜艇同浮标之间的距离达到最小的 $x$ 值是方程 $x=\frac{1}{x^2+1}$ 的解.

(b) 用牛顿法求解方程 $x=\frac{1}{x^2+1}$.




**25. 在根处接近平坦的曲线** 某些曲线非常平坦，以致实际上在牛顿法终止时给出的近似值同根的有用的估计值相差甚远. 试用牛顿法求 $f(x)=(x-1)^{40}$ 的根，以 $x_0=2$ 为初始值，观察你的计算机结果同根 $x=1$ 接近到什么程度.




**26. 求离子浓度** 当试图在盐酸的氢氧化镁饱和溶液中确定酸性程度时，推导出水合氢离子 $[H_3O^+]$ 浓度的方程

$$\frac{3.64\times10^{-11}}{[H_3O^+]^2}=[H_3O^+]+3.6\times10^{-4}$$

为了求 $[H_3O^+]$ 的值，设 $x=10^4[H_3O^+]$，并且把方程转化成

$$x^3+3.6x^2-36.4=0$$

然后用牛顿法求解这个方程. 对 $x$ 获得什么值(准确到两位小数)? 对 $[H_3O^+]$ 获得什么值?

## 4.8 反导数

我们已经学习了如何求函数的导数. 然而，许多问题要求我们从函数的已知导数(从它的已知变化率)重新获得函数. 例如，可能已知物体从初始高度下落的速度函数，并且需要知道它在任何时刻的高度. 更为一般的问题是从函数 $F(x)$ 的导数 $f(x)$ 求函数 $F$. 如果存在这样的 $F$，那么称它为 $f$ 的*反导数*.

### 4.8.1 求反导数

> **定义** 如果对于区间 $I$ 上的所有 $x$ 有 $F'(x)=f(x)$，那么 $F$ 是 $f$ 的一个**反导数**.

从函数 $F(x)$ 的导数 $f(x)$ 重新获得函数 $F$ 的过程称为*反微分法*. 我们用如 $F$ 这样的大写字母表示 $f$ 的反导数，用 $G$ 表示 $g$ 的反导数，等等.

**例 1** 求下列每个函数的反导数:

(a) $f(x)=2x$.　　(b) $g(x)=\cos x$.　　(c) $h(x)=\frac{1}{x}+2e^{2x}$.

**解**

(a) $F(x)=x^2$.　　(b) $G(x)=\sin x$.　　(c) $H(x)=\ln|x|+e^{2x}$.

每个答案可以通过求导数核对. $F(x)=x^2$ 的导数是 $2x$，$G(x)=\sin x$ 的导数是 $\cos x$，而 $H(x)=\ln|x|+e^{2x}$ 的导数是 $\frac{1}{x}+2e^{2x}$. ■

函数 $F(x)=x^2$ 并非仅有的以 $2x$ 为导数的函数. 函数 $x^2+1$ 具有同样的导数. 所以，对于任

何常数 $C$，$x^2+C$ 也是以 $2x$ 为导数的函数. 还存在其他这样的函数吗？

4.2 节的中值定理系 2 给出答案：函数的任何两个反导数相差一个常数. 所以函数 $x^2+C$ 构成 $f(x)=2x$ 的全部反导数，其中 $C$ 为**任意常数**. 更为一般的结果如下：

> **定理 8** 若 $F$ 是 $f$ 在区间 $I$ 上的反导数，则 $f$ 在 $I$ 上最一般的反导数是
> $$F(x)+C$$
> 其中 $C$ 是任意常数.

因此，$f$ 在 $I$ 上最一般的反导数是*函数族* $F(x)+C$，它们的图形是相互垂直的平移. 从这个函数族中指定特别的 $C$ 值就能选取一个特定的反导数. 下面的例子说明可以如何指定这样的值.

**例 2** 求 $f(x)=3x^2$ 的反导数 $F(x)$，满足 $F(1)=-1$.

**解** 由于 $x^3$ 的导数是 $3x^2$，一般形式的反导数

$$F(x)=x^3+C$$

给出 $f(x)$ 的全部反导数. 由条件 $F(1)=-1$ 确定 $C$ 的一个特别值. 在 $F(x)=x^3+C$ 中代入 $x=1$ 得到

$$F(1)=(1)^3+C=1+C$$

由于 $F(1)=-1$，解出 $C=-2$. 所以

$$F(x)=x^3-2$$

是满足 $F(1)=-1$ 的反导数. 注意，指定这个 $C$ 值从曲线族 $y=x^3+C$ 选取的特定曲线通过平面上的点 $(1,-1)$（见图 4.50）. ■

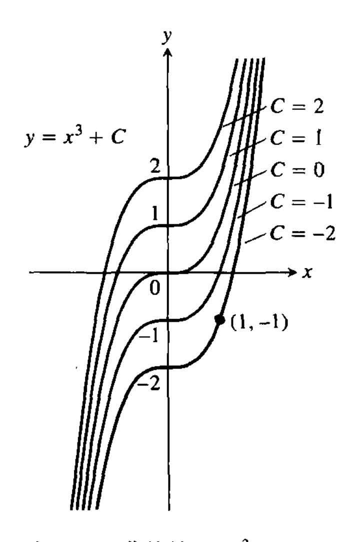



图 4.50 曲线族 $y=x^3+C$ 不重叠地充满坐标平面，在例 2 中确定 $y=x^3-2$ 是通过已知点 $(1,-1)$ 的一条曲线

通过各种微分法法则的反向计算，可以导出求反导数的公式和法则. 在每一种情形，表示给定函数反导数的一般表达式中存在一个任意常数 $C$. 表 4.2 给出一些重要函数的反导数公式.

表 4.2 中求反导数的法则很容易证实，通过对一般反导数公式求微分就可以得到它左边的函数. 例如，$\frac{\tan kx}{k}+C$ 的导数是 $\sec^2 kx$，无论常数 $C$ 或者 $k\neq 0$ 是什么样的值，这就证实 $\sec^2 kx$ 的最一般反导数公式.

**表 4.2 反导数公式，$k$ 是非零常数**

| 函 数 | 一般反导数 | 函 数 | 一般反导数 |
|---|---|---|---|
| (1) $x^n$ | $\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C,\quad n\neq -1$ | (8) $e^{kx}$ | $\frac{1}{k}e^{kx}+C$ |
| (2) $\sin kx$ | $-\frac{1}{k}\cos kx+C$ | (9) $\frac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert+C,\ x\neq 0$ |
| (3) $\cos kx$ | $\frac{1}{k}\sin kx+C$ | (10) $\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}$ | $\frac{1}{k}\sin^{-1}kx+C$ |
| (4) $\sec^2 kx$ | $\frac{1}{k}\tan kx+C$ | (11) $\frac{1}{1+k^2x^2}$ | $\frac{1}{k}\tan^{-1}kx+C$ |
| (5) $\csc^2 kx$ | $-\frac{1}{k}\cot kx+C$ | (12) $\frac{1}{x\sqrt{k^2x^2-1}}$ | $\sec^{-1}kx+C,\ kx>1$ |
| (6) $\sec kx\tan kx$ | $\frac{1}{k}\sec kx+C$ | (13) $a^{kx}$ | $\left(\frac{1}{k\ln a}\right)a^{kx}+C,\ a>0,\ a\neq 1$ |
| (7) $\csc kx\cot kx$ | $-\frac{1}{k}\csc kx+C$ | | |

**例 3** 求下列函数的一般反导数：

(a) $f(x)=x^5$.　(b) $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.　(c) $h(x)=\sin 2x$.

(d) $i(x)=\cos\frac{x}{2}$.　(e) $j(x)=e^{-3x}$.　(f) $k(x)=2^x$.

**解**

(a) $F(x)=\frac{x^6}{6}+C$.　(公式(1)，取 $n=5$)

(b) $g(x)=x^{-1/2}$，所以

$G(x)=\frac{x^{1/2}}{1/2}+C=2\sqrt{x}+C$.　(公式(1)，取 $n=-1/2$)

(c) $H(x)=\frac{-\cos 2x}{2}+C$.　(公式(2)，取 $k=2$)

(d) $I(x)=\frac{\sin(x/2)}{1/2}+C=2\sin\frac{x}{2}+C$.　(公式(3)，取 $k=1/2$)

(e) $J(x)=-\frac{1}{3}e^{-3x}+C$.　(公式(8)，取 $k=-3$)

(f) $K(x)=\left(\frac{1}{\ln 2}\right)2^x+C$.　(公式(13)，取 $a=2$，$k=1$) ■

其他导数法则也导至相应的反导数法则. 可以对反导数作加法和减法以及用常数相乘.

表 4.3 中的反导数公式，很容易通过对反导数求导数并且证实结果同原来函数一致而得到证明. 公式(2)是公式(1)取 $k=-1$ 时的特例.

**表 4.3　反导数的线性法则**

| | 函　数 | 一般反导数 |
|---|---|---|
| (1) 常数倍法则： | $kf(x)$ | $kF(x)+C$，$k$ 为常数 |
| (2) 负值法则： | $-f(x)$ | $-F(x)+C$ |
| (3) 和或差法则： | $f(x)\pm g(x)$ | $F(x)\pm G(x)+C$ |

**例 4** 求 $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}+\sin 2x$ 的一般反导数.

**解** 对例 3 中的函数 $g$ 和 $h$ 有 $f(x)=3g(x)+h(x)$. 由于 $G(x)=2\sqrt{x}$ 是例 3(b) 中 $g(x)$ 的反导数，由反导数的常数倍法则推出 $3G(x)=3\cdot 2\sqrt{x}=6\sqrt{x}$ 是 $3g(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ 的反导数. 同样，从例 3(c) 可知 $H(x)=(-\frac{1}{2})\cos 2x$ 是 $h(x)=\sin 2x$ 的反导数. 于是，由反导数的和法则得到

$$F(x)=3G(x)+H(x)+C=6\sqrt{x}-\frac{1}{2}\cos 2x+C$$

是 $f(x)$ 的一般反导数公式，其中 $C$ 是任意常数. ■

反导数扮演着几种重要的角色，求反导的方法和技巧是微积分学的重要组成部分. (这是第 7 章讨论的主题.)

### 4.8.2 初值问题与微分方程

求函数 $f(x)$ 的反导数与求满足方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x)$$

的函数$f(x)$是同一个问题. 上面的方程称为**微分方程**，因为方程中包含被求微分的未知函数$y$. 为了对它求解，需要找出满足方程的函数$y(x)$. 这个函数通过求$f(x)$的反导数得到. 我们通过指定初值条件

$$y(x_0) = y_0$$

确定反微分法过程中出现的任意常数. 这个条件表示当$x=x_0$时$y(x)$的值为$y_0$. 微分方程和初值条件的结合称为**初值问题**. 这样的问题在所有科学分支中起着重要作用.

函数$f(x)$最一般的反导数$F(x)+C$(在例2中是$x^3+C$)给出微分方程$\frac{dy}{dx}=f(x)$的**通解**$y=F(x)+C$. 通解给出方程的全部解(存在无穷多个解，每个常数值$C$对应一个解). 我们通过求通解**解**微分方程. 然后通过求满足初值条件$y(x_0)=y_0$的**特解**解初值问题. 在例2中，函数$y=x^3-2$是微分方程$\frac{dy}{dx}=3x^2$满足初值条件$y(1)=-1$的特解.

### 4.8.3 反导数与运动

我们已经知道物体位置函数的导数给出物体运动的速度，物体速度的导数给出它的加速度. 如果已知物体的加速度，那么通过求反导数能够重新获得它的速度，从速度的反导数能够重新获得它的位置函数. 这个过程被当作4.2节系2的一种应用. 至此，我们有了用反导数的术语和概念构架，现在从微分方程的观点重新讨论这个问题.

**例5** 在以12 ft/s速率上升的气球上，一个包裹在距离地面80 ft的高度从气球下落. 包裹经过多长时间到达地面?

**解** 令$v(t)$表示包裹在时间$t$的速度，$s(t)$表示包裹在地面之上的高度. 地球表面附近的加速度是32 ft/s$^2$. 假定没有其他外力作用在下落的包裹上，我们有

$$\frac{dv}{dt} = -32$$

其中负号是由于地球引力作用在$s$减小的方向上. 这个微分方程导致下述初值问题:

$$\frac{dv}{dt} = -32 \quad (\text{微分方程})$$

$$v(0) = 12 \quad (\text{初值条件})$$

这是包裹运动的数学模型. 求解这个初值问题得到包裹下落的速度.

(1)解微分方程: $-32$的反导数的一般公式是

$$v = -32t + C$$

求出微分方程的通解后，利用初值条件求问题的特解.

(2)计算$C$的值:

$$12 = -32(0) + C \quad (\text{初值条件}\ v(0) = 12)$$

$$C = 12$$

初值问题的解是

$$v = -32t + 12$$

由于速度是高度的导数，而包裹在$t=0$下落时的高度是80 ft，我们有了第二个初值问题:

$$\frac{ds}{dt} = -32t + 12 \quad (\text{微分方程,在上面方程中设}\ v = ds/dt)$$

$$s(0) = 80 \quad (\text{初值条件})$$

解这个初值问题求作为$t$的函数的高度.

(1)解微分方程: 求$-32t+12$的一般反导数，得到

$$s = -16t^2 + 12t + C$$

(2)计算 $C$ 的值：

$$80 = -16(0)^2 + 12(0) + C \quad (\text{初值条件 } s(0) = 80)$$
$$C = 80$$

包裹在时间 $t$ 距离地面的高度为

$$s = -16t^2 + 12t + 80$$

利用这个解：为了求包裹到达地面所需的时间，设 $s$ 等于零并且求解 $t$：

$$-16t^2 + 12t + 80 = 0$$
$$-4t^2 + 3t + 20 = 0$$
$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{329}}{-8} \quad (\text{二次公式})$$
$$t \approx -1.89, \quad t \approx 2.64$$

包裹大约从气球下落 2.64 秒后到达地面.（负根在物理上没有意义.） ■

### 4.8.4 不定积分

采用一种特殊记号表示函数 $f$ 的全部反导数的集合.

> **定义** $f(x)$ 的全部反导数的集合是 $f$ 关于 $x$ 的**不定积分**，用
>
> $$\int f(x)\,dx$$
>
> 表示. 符号 $\int$ 是**积分号**. 函数 $f$ 是积分的**被积函数**，$x$ 是**积分变量**.

利用这个记号，我们把例 1 中的解重写如下：

$$\int 2x\,dx = x^2 + C, \quad \int \cos x\,dx = \sin x + C, \quad \int\left(\frac{1}{x} + 2e^{2x}\right)dx = \ln|x| + e^{2x} + C$$

这个记号同反导数的主要应用有关，这将在第 5 章探讨. 反导数在计算无限和的极限中起着关键作用，在第 5 章描述的称为*微积分基本定理*的中心结果中，这是一种意想不到的和奇特的作用.

**例 6** 计算 $\int(x^2 - 2x + 5)\,dx$ 的值.

**解** 如果我们知道 $\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x$ 是 $x^2 - 2x + 5$ 的一个反导数，就能够把积分作为

$$\int(x^2 - 2x + 5)\,dx = \overbrace{\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x}^{\text{反导数}} + \underbrace{C}_{\text{任意常数}}$$

来计算.

如果不知道反导数，立即可以用和法则、差法则和常数倍法则逐项产生反导数：

$$\int(x^2 - 2x + 5)\,dx = \int x^2 dx - \int 2x\,dx + \int 5dx = \int x^2 dx - 2\int x\,dx + 5\int 1\,dx$$
$$= \left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) - 2\left(\frac{x^2}{2} + C_2\right) + 5(x + C_3)$$
$$= \frac{x^3}{3} + C_1 - x^2 - 2C_2 + 5x + 5C_3$$

这个公式比它所需的形式更加复杂. 如果把 $C_1$，$-2C_2$ 和 $5C_3$ 合并成任意常数 $C = C_1 - 2C_2 +$

$5C_3$，公式就简化成

$$\frac{x^3}{3}-x^2+5x+C$$

并且同样给出全部应有的反导数. 由于这个原因，即使在选择逐项积分时也推荐直接使用最后的形式，写成

$$\int(x^2-2x+5)\,dx=\int x^2dx-\int 2\,x\,dx+\int 5\,dx=\frac{x^3}{3}-x^2+5x+C$$

就是说，可以对每一部分求出最简单的反导数，并且在最后添加任意积分常数. ■

## 习题 4.8

在习题 1 ~ 24 中，求每个函数的反导数. 尽可能采用心算方式. 用微积分法核对答案.

1. (a) $2x$. (b) $x^2$. (c) $x^2-2x+1$.
2. (a) $6x$. (b) $x^7$. (c) $x^7-6x+8$.
3. (a) $-3x^{-4}$. (b) $x^{-4}$. (c) $x^{-4}+2x+3$.
4. (a) $2x^{-3}$. (b) $\frac{x^{-3}}{2}+x^2$. (c) $-x^{-3}+x-1$.
5. (a) $\frac{1}{x^2}$. (b) $\frac{5}{x^2}$. (c) $2-\frac{5}{x^2}$.
6. (a) $-\frac{2}{x^3}$. (b) $\frac{1}{2x^3}$. (c) $x^3-\frac{1}{x^3}$.
7. (a) $\frac{3}{2}\sqrt{x}$. (b) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. (c) $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$.
8. (a) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$. (b) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$. (c) $\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.
9. (a) $\frac{2}{3}x^{-1/3}$. (b) $\frac{1}{3}x^{-2/3}$. (c) $-\frac{1}{3}x^{-4/3}$.
10. (a) $\frac{1}{2}x^{-1/2}$. (b) $-\frac{1}{2}x^{-3/2}$. (c) $-\frac{3}{2}x^{-5/2}$.
11. (a) $\frac{1}{x}$. (b) $\frac{7}{x}$. (c) $1-\frac{5}{x}$.
12. (a) $\frac{1}{3x}$. (b) $\frac{2}{5x}$. (c) $1+\frac{4}{3x}-\frac{1}{x^2}$.
13. (a) $-\pi\sin\pi x$. (b) $3\sin x$. (c) $\sin\pi x-3\sin 3x$.
14. (a) $\pi\cos\pi x$. (b) $\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}$. (c) $\cos\frac{\pi x}{2}+\pi\cos x$.
15. (a) $\sec^2x$. (b) $\frac{2}{3}\sec^2\frac{x}{3}$. (c) $-\sec^2\frac{3x}{2}$.
16. (a) $\csc^2x$. (b) $-\frac{3}{2}\csc^2\frac{3x}{2}$. (c) $1-8\csc^2 2x$.
17. (a) $\csc x\cot x$. (b) $-\csc 5x\cot 5x$. (c) $-\pi\csc\frac{\pi x}{2}\cot\frac{\pi x}{2}$.
18. (a) $\sec x\tan x$. (b) $4\sec 3x\tan 3x$. (c) $\sec\frac{\pi x}{2}\tan\frac{\pi x}{2}$.
19. (a) $e^{3x}$. (b) $e^{-x}$. (c) $e^{x/2}$.
20. (a) $e^{-2x}$. (b) $e^{4x/3}$. (c) $e^{-x/5}$.
21. (a) $3^x$. (b) $2^{-x}$. (c) $\left(\frac{5}{3}\right)^x$.
22. (a) $x^{\sqrt{3}}$. (b) $x^{\pi}$. (c) $x^{\sqrt{2}-1}$.
23. (a) $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$. (b) $\frac{1}{2(x^2+1)}$. (c) $\frac{1}{1+4x^2}$.
24. (a) $x-\left(\frac{1}{2}\right)^x$. (b) $x^2+2^x$. (c) $\pi^x-x^{-1}$.

在习题 25 ~ 70 中，求最一般的反导数或者不定积分. 用微分法核对答案.

25. $\int(x+1)\,dx$.
26. $\int(5-6x)\,dx$.
27. $\int\left(3t^2+\frac{t}{2}\right)dt$.
28. $\int\left(\frac{t^2}{2}+4t^3\right)dt$.
29. $\int(2x^3-5x+7)\,dx$.
30. $\int(1-x^2-3x^5)\,dx$.
31. $\int\left(\frac{1}{x^2}-x^2-\frac{1}{3}\right)dx$.
32. $\int\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{x^3}+2x\right)dx$.
33. $\int x^{-1/3}\,dx$.
34. $\int x^{-5/4}\,dx$.
35. $\int(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})\,dx$.
36. $\int\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$.
37. $\int\left(8y-\frac{2}{y^{1/4}}\right)dy$.
38. $\int\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{y^{5/4}}\right)dy$.
39. $\int 2x(1-x^{-3})\,dx$.
40. $\int x^{-3}(x+1)\,dx$.
41. $\int\frac{t\sqrt{t}+\sqrt{t}}{t^2}\,dt$.
42. $\int\frac{4+\sqrt{t}}{t^3}\,dt$.
43. $\int(-2\cos t)\,dt$.
44. $\int(-5\sin t)\,dt$.
45. $\int 7\sin\frac{\theta}{3}\,d\theta$.
46. $\int 3\cos 5\theta\,d\theta$.
47. $\int(-3\csc^2x)\,dx$.
48. $\int\left(-\frac{\sec^2x}{3}\right)dx$.
49. $\int\frac{\csc\theta\cot\theta}{2}\,d\theta$.
50. $\int\frac{2}{5}\sec\theta\tan\theta\,d\theta$.
51. $\int(e^{3x}+5e^{-x})\,dx$.
52. $\int(2e^x-3e^{-2x})\,dx$.

**53.** $\int(\mathrm{e}^{-x}+4^{x})\mathrm{d}x$.　**54.** $\int(1.3)^{x}\mathrm{d}x$.

**55.** $\int(4\sec x\tan x-2\sec^{2}x)\mathrm{d}x$.

**56.** $\int\frac{1}{2}(\csc^{2}x-\csc x\cot x)\mathrm{d}x$.

**57.** $\int(\sin 2x-\csc^{2}x)\mathrm{d}x$.　**58.** $\int(2\cos 2x-3\sin 3x)\mathrm{d}x$.

**59.** $\int\frac{1+\cos 4t}{2}\mathrm{d}t$.　**60.** $\int\frac{1-\cos 6t}{2}\mathrm{d}t$.

**61.** $\int\left(\frac{1}{x}-\frac{5}{x^{2}+1}\right)\mathrm{d}x$.　**62.** $\int\left(\frac{2}{\sqrt{1-y^{2}}}-\frac{1}{y^{1/4}}\right)\mathrm{d}y$.

**63.** $\int 3x^{\sqrt{3}}\mathrm{d}x$.　**64.** $\int x^{\sqrt{2}-1}\mathrm{d}x$.

**65.** $\int(1+\tan^{2}\theta)\mathrm{d}\theta$.　**66.** $\int(2+\tan^{2}\theta)\mathrm{d}\theta$.

(提示:$1+\tan^{2}\theta=\sec^{2}\theta$.)

**67.** $\int\cot^{2}x\,\mathrm{d}x$.　**68.** $\int(1-\cot^{2}x)\mathrm{d}x$.

(提示:$1+\cot^{2}x=\csc^{2}x$.)

**69.** $\int\cos\theta(\tan\theta+\sec\theta)\mathrm{d}\theta$.　**70.** $\int\frac{\csc\theta}{\csc\theta-\sin\theta}\mathrm{d}\theta$.

用微分法证实习题 71 ~ 82 中的公式.

**71.** $\int(7x-2)^{3}\mathrm{d}x=\frac{(7x-2)^{4}}{28}+C$.

**72.** $\int(3x+5)^{-2}\mathrm{d}x=-\frac{(3x+5)^{-1}}{3}+C$.

**73.** $\int\sec^{2}(5x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\tan(5x-1)+C$.

**74.** $\int\csc^{2}\left(\frac{x-1}{3}\right)\mathrm{d}x=-3\cot\left(\frac{x-1}{3}\right)+C$.

**75.** $\int\frac{1}{(x+1)^{2}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x+1}+C$.

**76.** $\int\frac{1}{(x+1)^{2}}\mathrm{d}x=\frac{x}{x+1}+C$.

**77.** $\int\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\ln(x+1)+C,x>-1$.

**78.** $\int x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{x}+C$.

**79.** $\int\frac{\mathrm{d}x}{a^{2}+x^{2}}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$.

**80.** $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}=\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$.

**81.** $\int\frac{\tan^{-1}x}{x^{2}}\mathrm{d}x=\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^{2})-\frac{\tan^{-1}x}{x}+C$.

**82.** $\int(\sin^{-1}x)^{2}\mathrm{d}x=x(\sin^{-1}x)^{2}-2x+2\sqrt{1-x^{2}}\sin^{-1}x+C$.

**83.** 下列公式孰对孰错?对每个答案提出简短理由:

(a) $\int x\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{x^{2}}{2}\sin x+C$.

(b) $\int x\sin x\,\mathrm{d}x=-x\cos x+C$.

(c) $\int x\sin x\,\mathrm{d}x=-x\cos x+\sin x+C$.

**84.** 下列公式孰对孰错?对每个答案提出简短理由.

(a) $\int\tan\theta\sec^{2}\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\sec^{3}\theta}{3}+C$.

(b) $\int\tan\theta\sec^{2}\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\tan^{2}\theta+C$.

(c) $\int\tan\theta\sec^{2}\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\sec^{2}\theta+C$.

**85.** 下列公式孰对孰错?对每个答案提出简短理由.

(a) $\int(2x+1)^{2}\mathrm{d}x=\frac{(2x+1)^{3}}{3}+C$.

(b) $\int 3(2x+1)^{2}\mathrm{d}x=(2x+1)^{3}+C$.

(c) $\int 6(2x+1)^{2}\mathrm{d}x=(2x+1)^{3}+C$.

**86.** 下列公式孰对孰错?对每个答案提出简短理由.

(a) $\int\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x=\sqrt{x^{2}+x+C}$.

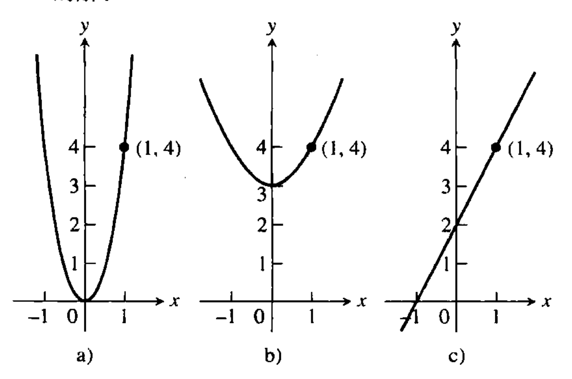
(b) $\int\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x=\sqrt{x^{2}+x}+C$.

(a) $\int\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(\sqrt{2x+1})^{3}+C$.

**87.** 下面哪一幅图形表示初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x,\quad 当 x=1 时 y=4$$

的解?

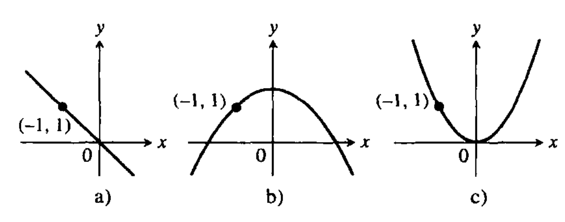



提出答案的理由.

**88.** 下面哪一幅图形表示初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-x,\quad 当 x=-1 时 y=1$$

的解?




提出答案的理由.

在习题 89 ~ 110 中，求解初值问题.

89. $\frac{dy}{dx}=2x-7$; $y(2)=0$.

90. $\frac{dy}{dx}=10-x$; $y(0)=-1$.

91. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2}+x$, $x>0$; $y(2)=1$.

92. $\frac{dy}{dx}=9x^2-4x+5$; $y(-1)=0$.

93. $\frac{dy}{dx}=3x^{-2/3}$; $y(-1)=-5$.

94. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $y(4)=0$.

95. $\frac{ds}{dt}=1+\cos t$; $s(0)=4$.

96. $\frac{ds}{dt}=\cos t+\sin t$; $s(\pi)=1$.

97. $\frac{dr}{d\theta}=-\pi\sin\pi\theta$; $r(0)=0$.

98. $\frac{dr}{d\theta}=\cos\pi\theta$; $r(0)=1$.

99. $\frac{dv}{dt}=\frac{1}{2}\sec t\tan t$; $v(0)=1$.

100. $\frac{dv}{dt}=8t+\csc^2 t$; $v\left(\frac{\pi}{2}\right)=-7$.

101. $\frac{dv}{dt}=\frac{3}{t\sqrt{t^2-1}}$, $t>1$; $v(2)=0$.

102. $\frac{dv}{dt}=\frac{8}{1+t^2}+\sec^2 t$; $v(0)=1$.

103. $\frac{d^2y}{dx^2}=2-6x$; $y'(0)=4$, $y(0)=1$.

104. $\frac{d^2y}{dx^2}=0$; $y'(0)=2$, $y(0)=0$.

105. $\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{2}{t^3}$; $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=1}=1$, $r(1)=1$.

106. $\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{3t}{8}$; $\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=4}=3$, $s(4)=4$.

107. $\frac{d^3y}{dx^3}=6$; $y''(0)=-8$, $y'(0)=0$, $y(0)=5$.

108. $\frac{d^3\theta}{dt^3}=0$; $\theta''(0)=-2$, $\theta'(0)=-\frac{1}{2}$, $\theta(0)=\sqrt{2}$.

109. $y^{(4)}=-\sin t+\cos t$; $y'''(0)=7$, $y''(0)=y'(0)=-1$, $y(0)=0$.

110. $y^{(4)}=-\cos x+8\sin 2x$; $y'''(0)=0$, $y''(0)=y'(0)=1$, $y(0)=3$.

111. 求 $xy$ 平面内通过点(9, 4)的曲线 $y=f(x)$，它在每个点的斜率是 $3\sqrt{x}$.

112. (a)求具有下列性质的曲线 $y=f(x)$：

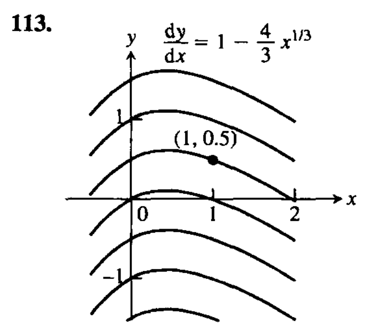
(i) $\frac{d^2y}{dx^2}=6x$;

(ii)它的图形通过点(0,1)，并且在这个点有水平切线；

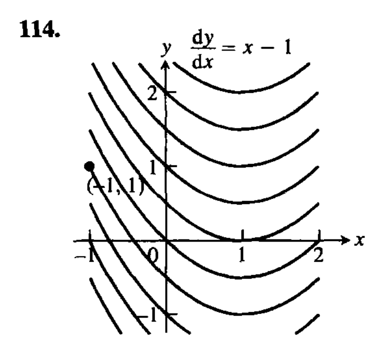
(b)像这样的曲线有多少条？你是怎样知道的？

习题 113 ~ 116 显示微分方程的解曲线. 在每题中求经过标出点的曲线方程.

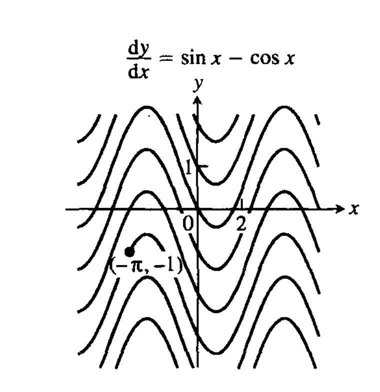
113.



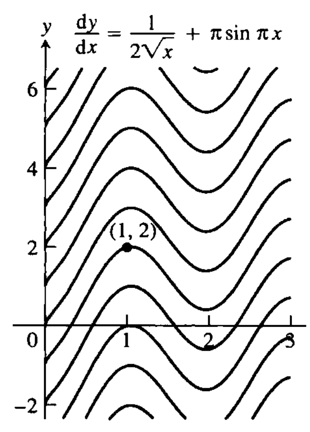

114.




115.



116.




**117. 从速度的反导数求位移**

(a) 假定沿 $s$ 轴运动的物体的速度为

$$\frac{ds}{dt} = v = 9.8t - 3$$

(i) 求物体从 $t=1$ 到 $t=3$ 时间区间上的位移，已知 $t=0$ 时 $s=5$；

(ii) 求物体从 $t=1$ 到 $t=3$ 时的位移，已知 $t=0$ 时 $s=-2$；

(iii) 最后求物体从 $t=1$ 到 $t=3$ 时的位移，已知 $t=0$ 时 $s=s_0$.

(b) 假定物体沿坐标线运动的位置 $s$ 是时间 $t$ 的可微函数. 如果说一旦知道速度函数 $\frac{ds}{dt}$ 的一个反导数，就能求出物体从 $t=a$ 到 $t=b$ 的位移，即使不知道物体在其中任何一个时间的确切位置. 这种说法是正确的吗？提出答案的理由.

**118. 从地面升空的火箭** 一枚火箭以 20 $m/s^2$ 的恒定加速度从地面升空. 火箭在一分钟后的飞行速度有多大？

**119. 及时停车** 假设你驾驶汽车在公路上以 60 mph(88 ft/s)的稳定速度行驶，当发现前方一起交通事故时猛踩刹车. 为了使车子在 242 ft 的距离内停止下来需要多大恒定的负加速度？为了求解执行下述处理步骤：

(1) 解初值问题：

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -k \quad (\text{微分方程}, k \text{是常数})$$

当 $t=0$ 时 $\frac{ds}{dt}=88, s=0$（初值条件，时间和距离的测定从踩刹车时算起）

(2) 求满足 $\frac{ds}{dt}=0$ 的 $t$ 值（答案中将包含 $k$）.

(3) 对于从第(2)步得到的 $t$ 值，求使 $s=242$ 的 $k$ 值.

**120. 停摩托车** 在伊利诺伊州摩托车驾驶员安全纲要中，要求摩托车驾驶员能够在 45 ft 的距离内刹住以 30 mph(44 ft/s)速度行驶的摩托车. 为此需要多大恒定的负加速度？

**121. 沿坐标线的运动** 质点在坐标线上以

$$a = d^2s/dt^2 = 15\sqrt{t} - (3/\sqrt{t})$$

的加速度运动，在 $t=1$ 时满足条件 $\frac{ds}{dt}=4$ 和 $s=0$. 求

(a) 由 $t$ 表示的速度 $v=\frac{ds}{dt}$.

(b) 由 $t$ 表示的位置 $s$.

T **122. 锤子和羽毛** 阿波罗 15 号的宇航员戴维·斯柯特在月球上降落一把锤子和一片羽毛，以显示所有物体在真空中以相同的（恒定）加速度降落. 他在月球表面大约 4 ft 高的地方降落这两件东西，从降落过程的电视画面尺寸可见，锤子和羽毛比在地球上降落更慢. 它们在地球表面的真空条件下，降落 4 ft 只需半秒钟. 锤子和羽毛在月球表面降落 4 ft 需要多长时间？为求出这个时间，对于 $s$ 作为 $t$ 的函数求解下面的初值问题：

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -5.2 \text{ ft/s}^2 (\text{微分方程})$$

当 $t=0$ 时 $\frac{ds}{dt}=0, s=4$（初值条件）

然后求出使 $s$ 等于 0 的 $t$ 值.

**123. 恒加速度运动** 物体以恒加速度 $a$ 沿坐标线运动，位置 $s$ 的标准方程为

$$s = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + s_0 \qquad (1)$$

其中 $v_0$ 和 $s_0$ 是物体在 $t=0$ 时的速度和位置. 通过求解下面的初值问题导出这个方程：

$$\frac{d^2s}{dt^2} = a (\text{微分方程})$$

当 $t=0$ 时 $\frac{ds}{dt}=v_0, s=s_0$（初值条件）

**124. 行星表面附近的自由落体** 对于行星表面附近的自由落体，由于重力产生的加速度 $g$ 的值（以长度/$s^2$ 为单位）是常量，方程(1)的形式为

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0 \qquad (2)$$

其中 $s$ 是物体在行星表面之上的高度. 方程中带有负号是因为加速度向下作用于 $s$ 减小的方向上. 在 $t=0$ 时如果物体上升，速度 $v_0$ 为正，如果物体下降，$v_0$ 为负.

不用习题 123 的结果,可以通过求解一个相应的初值问题直接导出方程(2). 这个初值问题是什么? 求解它,证实你提出的初值问题是正确的,在进行中解释你求解的步骤.

**125.** 假设

$$f(x) = \frac{d}{dx}(1 - \sqrt{x}), g(x) = \frac{d}{dx}(x + 2)$$

求

(a) $\int f(x)\,dx$.　　(b) $\int g(x)\,dx$.

(c) $\int[-f(x)]\,dx$.　　(d) $\int[-g(x)]\,dx$.

(e) $\int[f(x) + g(x)]\,dx$.　　(f) $\int[f(x) - g(x)]\,dx$.

**126. 解的唯一性**　如果可微函数 $y = F(x)$ 和 $y = G(x)$ 都是区间 $I$ 上的初值问题.

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad y(x_0) = y_0$$

的解,对于 $I$ 中的每个 $x$ 必定有 $F(x) = G(x)$ 吗? 提出答案的理由.

**计算机探究**

用一种 CAS(计算机代数系统)求解习题 127 ~ 130 中的初值问题. 绘制曲线的图形.

**127.** $y' = \cos^2 x + \sin x,\ y(\pi) = 1$.

**128.** $y' = \frac{1}{x} + x,\ y(1) = -1$.

**129.** $y' = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}},\ y(0) = 2$.

**130.** $y'' = \frac{2}{x} + \sqrt{x},\ y(1) = 0,\ y'(1) = 0$.

## 第 4 章复习指导问题

**1.** 关于闭区间上的连续函数的极值能够讲述什么?

**2.** 函数在其定义域上存在局部极值或者绝对极值的含义是什么? 局部极值同绝对极值有什么关系(如果存在)? 举出一些例子.

**3.** 如何求闭区间上的连续函数的绝对极值? 举出一些例子.

**4.** 罗尔定理的假设和结论是什么? 这些假设是必需的吗? 说明理由.

**5.** 中值定理的假设和结论是什么? 对这个定理可以作什么物理解释?

**6.** 阐述中值定理的 3 个系.

**7.** 某些情况下,在得知 $f'$ 和得知 $f$ 在一点 $x = x_0$ 的值后能够确定函数 $f(x)$. 举一个例子说明如何确定.

**8.** 什么是局部极值的一阶导数检验法? 举出如何应用它的一些例子.

**9.** 如何检验二次可微函数确定函数图形在何处向上凹或者向下凹? 举出一些例子.

**10.** 什么是拐点? 举一个例子. 拐点有时具有什么物理意义?

**11.** 什么是局部极值的二阶导数检验法? 举出如何应用它的一些例子?

**12.** 函数的导数对于函数图形的形状能够提供什么资料?

**13.** 列举绘制多项式函数图形的步骤. 用一个例子说明.

**14.** 什么是尖点? 举出一些例子.

**15.** 列举绘制有理函数图形的步骤. 用一个例子说明.

**16.** 概述求解最大值-最小值问题的一般对策. 举出一些例子.

**17.** 描述洛必达法则. 怎样分辨什么时候使用和什么时候不能使用这个法则? 举一个例子.

**18.** 有时你能怎样处理导至不定式 $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \cdot 0$ 和 $\infty - \infty$ 的极限? 举出一些例子.

**19.** 有时你能怎样处理导至不定式 $1^\infty$, $0^0$ 和 $\infty^\infty$ 的极限? 举出一些例子.

**20.** 描述求解方程的牛顿法. 举一个例子. 牛顿法的理论依据是什么? 采用这个方法需要注意的某些事项是什么?

**21.** 一个函数能够存在多个反导数吗? 如果存在,那么在反导数之间有什么关系? 予以说明.

**22.** 什么是不定积分? 如何计算一个不定积分? 你知道求不定积分的什么一般公式?

**23.** 有时你能怎样求解 $\frac{dy}{dx} = f(x)$ 这种形式的微分方程?

**24.** 什么是初值问题? 如何求解一个初值问题? 举一个例子.

**25.** 如果已知物体沿坐标线运动的加速度是时间的函数,为了求物体的位置函数,还需要知道什么? 举一个例子.

## 第 4 章实习习题

1. 函数 $f(x)=x^2+2x+\tan x$ 存在任何局部极大值或极小值吗？提出答案的理由.
2. 函数 $g(x)=\csc x+2\cot x$ 存在任何局部极大值吗？提出答案的理由.
3. 函数 $f(x)=(7+x)(11-3x)^{1/3}$ 存在一个绝对极小值或一个绝对极大值吗？如果存在,求出它们；如果不存在,说明不存在的原因. 列出 $f$ 的全部临界点.
4. 求使函数

$$f(x)=\frac{ax+b}{x^2-1}$$

在 $x=3$ 具有局部极值 1 的 $a$ 和 $b$ 的值. 这个局部极值是局部极小值还是局部极大值？提出答案的理由.

5. 函数 $g(x)=e^x-x$ 存在一个绝对极小值或一个绝对极大值吗？如果存在,求出它们；如果不存在,说明不存在的原因. 列出 $g$ 的全部临界点.
6. 函数 $f(x)=\dfrac{2e^x}{1+x^2}$ 存在一个绝对极小值或一个绝对极大值吗？如果存在,求出它们；如果不存在,说明不存在的原因. 列出 $f$ 的全部临界点.

在习题 7 和 8 中,求 $f$ 在区间上的绝对极大值和绝对极小值.

7. $f(x)=x-2\ln x, 1\leqslant x\leqslant 3$.
8. $f(x)=(4/x)+\ln x^2, 1\leqslant x\leqslant 4$.
9. 对于所有 $x$ 定义的最大整数函数 $f(x)=\lfloor x\rfloor$ 在区间 $[0,1)$ 的每个点取局部极大值. 这些局部极大值也可能是 $f$ 的局部极小值吗？提出答案的理由.
10. (a) 举出一个可微函数 $f$ 的例子,它在某点 $c$ 的导数为零,即使 $f$ 在 $c$ 既无局部极大值也无局部极小值.
    (b) 这种情况同 4.1 节定理 2 如何保持一致？提出答案的理由.
11. 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 虽然在区间 $0<x<1$ 上是连续的,但是它在这个区间上既无极大值,也无极小值. 这同连续函数的极值定理矛盾吗？为什么？
12. 函数 $y=|x|$ 在区间 $-1\leqslant x<1$ 上的极大值和极小值是什么？注意这个区间不是闭区间. 这同连续函数的极值定理一致吗？为什么？
13. **T** 一幅大到足以显示函数全局特性的图形也许不能展现函数的局部特征. $f(x)=(x^8/8)-(x^6/2)-x^5+5x^3$ 的图形就属于这种情况.
    (a) 画出 $f$ 在区间 $-2.5\leqslant x\leqslant 2.5$ 上的图形. 图形在什么地方显现出局部极值或者拐点？
    (b) 然后分解 $f'(x)$ 的因式并且证明 $f$ 在 $x=\sqrt[3]{5}\approx 1.70998$ 有一个局部极大值,在 $x=\pm\sqrt{3}\approx\pm 1.73205$ 有局部极小值.
    (c) 放大图形,寻找显示在 $x=\sqrt[3]{5}$ 和 $x=\sqrt{3}$ 出现极值的视窗.

    此处要表明的是,如果不用微积分,三个极值中两个极值的存在可能被忽略. 在任何正常的函数图形上,函数值足够密集,以致许多值在屏幕上落入一个像素范围内.

    (来源: *Uses of Technology in the Mathematics Curriculum*(《科学技术在数学课程中的应用》), Benny Evans, Jerry Johnson, 俄克拉荷马州立大学,1990 年出版,国家科学基金会资助.)
14. **T** (续习题 13)
    (a) 画出 $f(x)=(x^8/8)-(2/5)x^5-5x-(5/x^2)+11$ 在区间 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 上的图形. 图形在什么地方显现出局部极值或者拐点？
    (b) 证明 $f$ 在 $x=\sqrt[7]{5}\approx 1.2585$ 有一个局部极大值,在 $x=\sqrt[3]{2}\approx 1.2599$ 有一个局部极小值.
    (c) 放大图形,寻找显示在 $x=\sqrt[7]{5}$ 和 $x=\sqrt[3]{2}$ 出现极值的视窗.
15. (a) 证明函数 $g(x)=\sin^2 t-3t$ 在其定义域的每个区间上减少.
    (b) 方程 $\sin^2 t-3t=5$ 有多少个解？提出答案的理由.
16. (a) 证明函数 $y=\tan\theta$ 在其定义域的每个区间上增加.
    (b) 如果 ($a$) 中的结论确实是正确的,那么如何解释 $\tan\pi=0$ 小于 $\tan(\pi/4)=1$ 这个事实？
17. (a) 证明方程 $x^4+2x^2-2=0$ 在区间 $[0,1]$ 上恰好有一个解.
    **T** (b) 求这个解,准确到尽可能多的小数位数.
18. (a) 证明函数 $f(x)=x/(x+1)$ 在其定义域的每个区间上增加.
    (b) 证明函数 $f(x)=x^3+2x$ 没有局部极大值或者局部极小值.
19. **水库中的蓄水** 由于降大雨,水库蓄水量在 24 小时内增加 1400 英亩 - 英尺. 证明在降雨期间的某个时刻水库容量增加的速率超过 225 000 加

仑/分.(1 英亩 - 英尺 = 43 560 立方英尺,即 1 英亩 × 1 英尺的容积. 1 立方英尺 = 7.48 加仑.)

**20.** 公式 $F(x)=3x+C$ 对于每个 $C$ 值给出不同的函数. 但是,所有这些函数具有对 $x$ 的相同导数,即 $F'(x)=3$. 这些函数是仅有的导数为 3 的可微函数吗? 是否还有其他这样的函数? 提出答案的理由.

**21.** 证明

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}\right)=\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x+1}\right)$$

虽然

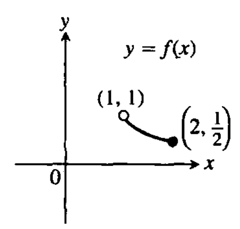
$$\frac{x}{x+1}\neq-\frac{1}{x+1}$$

这同中值定理系 2 矛盾吗? 提出答案的理由.

**22.** 计算 $f(x)=x^2/(x^2+1)$ 和 $g(x)=-1/(x^2+1)$ 的一阶导数. 关于这两个函数的图形能够得出什么结论?

在习题 23 和 24 中,利用图形回答问题.

**23.** 确定 $f$ 的任何全局极值以及它们出现的 $x$ 值.

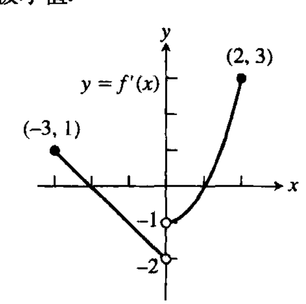



**24.** 估计函数 $y=f(x)$ 的区间:

(**a**) $f$ 在区间上增加.

(**b**) $f$ 在区间上减少.

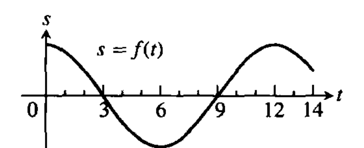
(**c**) 利用给出的 $f'$ 的图形指出函数任何极值出现的地方,以及每个极值是相对极大值还是相对极小值.



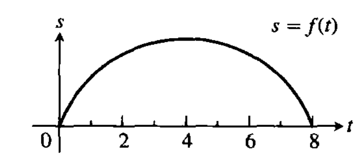

在习题 25 和 26 中,每幅图形是物体在坐标线上运动的位置函数 $s=f(t)$ 的图形($t$ 代表时间). 大约在什么时间(如果有)(**a**) 物体的速度等于零? (**b**) 物体的加速度等于零? 大约在什么时间区间上 (**c**) 物体向前运动? (**d**) 物体向后运动?



**25.**




**26.**




在习题 27 ~ 42 中,画出曲线的图形.

**27.** $y=x^2-(x^3/6)$.

**28.** $y=x^3-3x^2+3$.

**29.** $y=-x^3+6x^2-9x+3$.

**30.** $y=(1/8)(x^3+3x^2-9x-27)$.

**31.** $y=x^3(8-x)$.

**32.** $y=x^2(2x^2-9)$.

**33.** $y=x-3x^{2/3}$.

**34.** $y=x^{1/3}(x-4)$.

**35.** $y=x\sqrt{3-x}$.

**36.** $y=x\sqrt{4-x^2}$.

**37.** $y=(x-3)^2e^x$.

**38.** $y=xe^{-x^2}$.

**39.** $y=\ln(x^2-4x+3)$.

**40.** $y=\ln(\sin x)$.

**41.** $y=\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$.

**42.** $y=\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$.

在习题 43 ~ 48 中,给出函数 $y=f(x)$ 的一阶导数. (**a**) $f$ 的图形在什么点(如果存在)有局部极大值、局部极小值或者拐点? (**b**) 描绘函数图形的一般形状.

**43.** $y'=16-x^2$.

**44.** $y'=x^2-x-6$.

**45.** $y'=6x(x+1)(x-2)$.

**46.** $y'=x^2(6-4x)$.

**47.** $y'=x^4-2x^2$.

**48.** $y'=4x^2-x^4$.

在习题 49 ~ 52 中,画出函数的图形. 然后利用函数的一阶导数说明所见的图形.

**49.** $y=x^{2/3}+(x-1)^{1/3}$.

**50.** $y=x^{2/3}+(x-1)^{2/3}$.

**51.** $y=x^{1/3}+(x-1)^{1/3}$.

**52.** $y=x^{2/3}-(x-1)^{1/3}$.

在习题 53 ~ 60 中,画出函数的草图.

**53.** $y=\frac{x+1}{x-3}$.

**54.** $y=\frac{2x}{x+5}$.

**55.** $y=\frac{x^2+1}{x}$.

**56.** $y=\frac{x^2-x+1}{x}$.

**57.** $y=\frac{x^3+2}{2x}$.

**58.** $y=\frac{x^4-1}{x^2}$.

**59.** $y=\frac{x^2-4}{x^2-3}$.

**60.** $y=\frac{x^2}{x^2-4}$.

在习题 61 ~ 72 中,利用洛必达法则求极限.

**61.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}$.

**62.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^a-1}{x^b-1}$.

63. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\tan x}{x}$.

64. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x+\sin x}$.

65. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\tan(x^2)}$.

66. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$.

67. $\lim\limits_{x\to\pi/2^-}\sec 7x\cos 3x$.

68. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\sec x$.

69. $\lim\limits_{x\to 0}(\csc x-\cot x)$.

70. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

71. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x})$.

72. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-1}-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right)$.

在习题 73 ~ 84 中求极限.

73. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10^x-1}{x}$.

74. $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{3^\theta-1}{\theta}$.

75. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\sin x}-1}{e^x-1}$.

76. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{-\sin x}-1}{e^x-1}$.

77. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5-5\cos x}{e^x-x-1}$.

78. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4-4e^x}{xe^x}$.

79. $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{t-\ln(1+2t)}{t^2}$.

80. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sin^2(\pi x)}{e^{x-4}+3-x}$.

81. $\lim\limits_{t\to 0^+}\left(\dfrac{e^t}{t}-\dfrac{1}{t}\right)$.

82. $\lim\limits_{y\to 0^+}e^{-1/y}\ln y$.

83. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{b}{x}\right)^{kx}$.

84. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{7}{x^2}\right)$.

85. 两个非负数之和为 36. 在下列条件下求这两个数:

(a)它们的平方根之差尽可能地大;

(b)它们的平方根之和尽可能地大.

86. 两个非负数之和为 20, 在下列条件下求这两个数:

(a)一个数同另一个数的平方根之积尽可能地大;

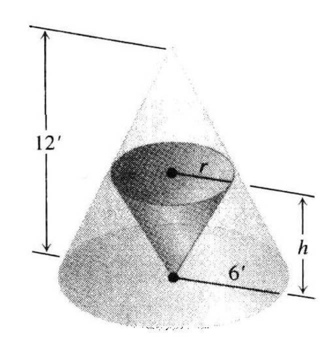
(b)一个数同另一个数的平方根之和尽可能地大.

87. 等腰三角形以原点为顶点,底边同 $x$ 轴平行,在 $x$ 轴上方的两个顶点落在曲线 $y=27-x^2$ 上. 求三角形可能具有的最大面积.

88. 客户请求你设计一个无盖的长方体不锈钢大缸. 缸的底部呈正方形,容积为 32 $\text{ft}^3$,用 1/4 英寸的钢板焊接而成,并且具有最轻重量. 你推荐采用什么尺寸?

89. 求最大直立圆柱体的高度和半径,使其能够放进半径为$\sqrt{3}$的球体内.

90. 附图显示两个直立圆锥体,一个倒立于另一个的内部. 两个圆锥体的底面平行,小圆锥体的顶点位于大圆锥体底面的中心. $r$ 和 $h$ 取什么值将使小圆锥体具有最大可能的体积?




91. **制造轮胎** 你的公司一天能够制造 $100\times x$ 个 A 级轮胎和 $100\times y$ 个 B 级轮胎,其中 $0\leqslant x\leqslant 4$,并且

$$y=\frac{40-10x}{5-x}$$

生产一个 A 级轮胎的利润为生产一个 B 级轮胎的两倍. 获得最大利润的每种轮胎生产量是多少?

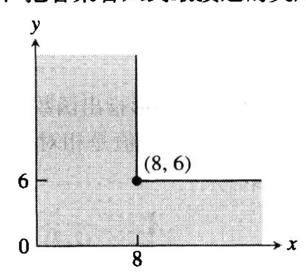
92. **质点运动** $x$ 轴上两个质点的位置由 $s_1=\cos t$ 和 $s_2=\cos(t+\pi/4)$ 确定.

(a)两个质点相距最远时的距离是多大?

(b)两个质点何时碰撞?

T 93. **无盖盒子** 无盖的长方形盒子由 10 in × 16 in 纸板在四个角上切除边长相等的正方形后向上折成. 用分析方法求达到最大容积的盒子的尺寸和最大容积. 用图形支持你的答案.

94. **梯子问题** 附图显示走廊的一角,能够以平卧方式绕这个角搬运的梯子的最大近似长度(英尺)是多少? 把答案舍入到最接近的英尺数.




95. 令 $f(x)=3x-x^3$. 证明方程 $f(x)=-4$ 在区间 [2,3]上有一个解,并且用牛顿法求出它.

96. 令 $f(x)=x^4-x^3$. 证明方程 $f(x)=75$ 在区间 [3,4]上有一个解,并且用牛顿法求出它.

在习题 97 ~ 120 中,求不定积分(最一般的反导数). 通过微分法核对你的答案.

97. $\int(x^3+5x-7)\,dx$.

98. $\int\left(8t^3-\dfrac{t^2}{2}+t\right)dt$.

99. $\int\left(3\sqrt{t}+\dfrac{4}{t^2}\right)dt$.

100. $\int\left(\dfrac{1}{2\sqrt{t}}-\dfrac{3}{t^4}\right)dt$.

101. $\int\dfrac{dr}{(r+5)^2}$.

102. $\int\dfrac{6\,dr}{(r-\sqrt{2})^3}$.

103. $\int 3\theta\sqrt{\theta^2+1}\,\mathrm{d}\theta$.

104. $\int \frac{\theta}{\sqrt{7+\theta^2}}\mathrm{d}\theta$.

105. $\int x^3(1+x^4)^{-1/4}\mathrm{d}x$.

106. $\int (2-x)^{3/5}\mathrm{d}x$.

107. $\int \sec^2\frac{s}{10}\,\mathrm{d}s$.

108. $\int \csc^2\pi s\,\mathrm{d}s$.

109. $\int \csc\sqrt{2}\theta\cot\sqrt{2}\theta\,\mathrm{d}\theta$.

110. $\int \sec\frac{\theta}{3}\tan\frac{\theta}{3}\mathrm{d}\theta$.

111. $\int \sin^2\frac{x}{4}\mathrm{d}x$.

112. $\int \cos^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$ $\left(提示: \cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)$.

113. $\int\left(\frac{3}{x}-x\right)\mathrm{d}x$.

114. $\int\left(\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$.

115. $\int\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t$.

116. $\int(5^s+s^5)\,\mathrm{d}s$.

117. $\int\theta^{1-\pi}\mathrm{d}\theta$.

118. $\int 2^{\pi+r}\mathrm{d}r$.

119. $\int\frac{3}{2x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$.

120. $\int\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{16-\theta^2}}$.

在习题 121 ~ 124 中,求解初值问题.

121. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^2+1}{x^2}$; $y(1)=-1$.

122. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$; $y(1)=1$.

123. $\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=15\sqrt{t}+\frac{3}{\sqrt{t}}$; $r'(1)=8, r(1)=0$.

124. $\frac{\mathrm{d}^3r}{\mathrm{d}t^3}=-\cos t$; $r''(0)=r'(0)=0, r(0)=-1$.

125. 下面(a)和(b)中的积分可能都是正确的吗?予以说明.

(a) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\sin^{-1}x+C$.

(b) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=-\int-\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=-\cos^{-1}x+C$.

126. 下面(a)和(b)中的积分可能都是正确的吗?予以说明.

(a) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=-\int-\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=-\cos^{-1}x+C$.

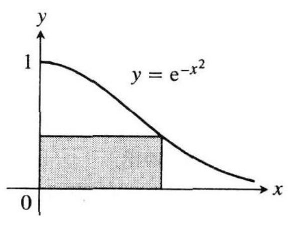
(b) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{1-(-u)^2}}$ $\quad(x=-u,\ \mathrm{d}x=-\mathrm{d}u)$

$=\int\frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$

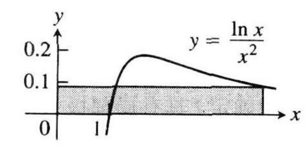
$=\cos^{-1}u+C$

$=\cos^{-1}(-x)+C.\quad(u=-x).$

127. 附图所示矩形的一边在正 $y$ 轴上,一边在正 $x$ 轴上,矩形右上方的顶点在曲线 $y=\mathrm{e}^{-x^2}$ 上. 给出最大面积的矩形尺寸是什么? 这个最大面积是多少?




128. 附图所示矩形的一边在正 $y$ 轴上,一边在正 $x$ 轴上,矩形右上方的顶点在曲线 $y=(\ln x)/x^2$ 上. 给出最大面积的矩形尺寸是什么? 这个最大面积是多少?




在习题 129 和 130 中,求每个函数在给定区间上的绝对极大值和绝对极小值.

129. $y=x\ln 2x-x$, $\left[\frac{1}{2\mathrm{e}},\frac{\mathrm{e}}{2}\right]$.

130. $y=10x(2-\ln x)$, $(0,\mathrm{e}^2]$.

在习题 131 和 132 中,求函数的绝对极大值和绝对极小值,并且说明函数在何处取绝对极大值和绝对极小值.

131. $f(x)=\mathrm{e}^{x/\sqrt{x^4+1}}$.

132. $g(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

**T**133. 画出下列函数的图形,并且利用图形定位和估计极值,确定拐点的坐标,以及确定图形向上凹和向下凹的区间. 然后通过求函数的导数证实你的估计.

(a) $y=(\ln x)/\sqrt{x}$.

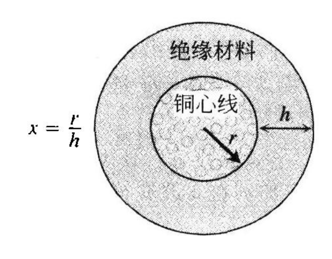
(b) $y=\mathrm{e}^{-x^2}$.

(c) $y=(1+x)\mathrm{e}^{-x}$.

**T**134. 画出 $f(x)=x\ln x$ 的图形. 这个函数显现有绝对极小值吗? 用微积分证实你的答案.

**T**135. 画出 $f(x)=(\sin x)^{\sin x}$ 在区间 $[0,3\pi]$ 上的图形. 说明你从图形中看出什么?

136. 水下圆截面传输电缆由不导电绝缘材料包裹铜心线构成. 如果 $x$ 表示铜心线半径同绝缘材料厚度之比,已知传输信号的速率由公式 $v=x^2\ln(1/x)$ 给出. 设铜心线半径为 1 cm,多大的绝缘材料厚度 $h$ 将使电缆达到最大传输速率?



## 第 4 章补充和提高习题

1. 对于在区间上极大值和极小值相等的函数能作什么说明？提出答案的理由.
2. 不连续函数在闭区间上不能同时具有绝对极大值和绝对极小值这个说法成立吗？提出答案的理由.
3. 关于在开区间上或者半开区间上的连续函数的极值能够得出什么结论？提出答案的理由.
4. **局部极值** 利用导数

$$\frac{df}{dx}=6(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$$

的 ± 符号模式确定 $f$ 具有局部极大值和局部极小值的点.

5. **局部极值**

(a) 假定 $y=f(x)$ 的一阶导数为

$$y'=6(x+1)(x-2)^2$$

$f$ 的图形在什么点（如果存在）具有局部极大值、局部极小值或者拐点？

(b) 假定 $y=f(x)$ 的一阶导数为

$$y'=6x(x+1)(x-2)$$

$f$ 的图形在什么点（如果存在）具有局部极大值、局部极小值或者拐点？

6. 如果对于所有 $x$ 有 $f'(x)\leqslant 2$，$f$ 在区间 $[0,6]$ 上能够增加的最大值是多少？提出答案的理由.
7. **约束函数** 假定 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续，$c$ 是这个区间的内点. 证明：若在 $[a,c)$ 上 $f'(x)\leqslant 0$ 且在 $(c,b]$ 上 $f'(x)\geqslant 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不会小于 $f(c)$.
8. **不等式**

(a) 证明 $-1/2\leqslant x/(1+x^2)\leqslant 1/2$ 对于每个 $x$ 值成立.

(b) 假定 $f$ 是以 $f'(x)=x/(1+x^2)$ 为导数的函数. 利用(a)中的结果，证明

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\frac{1}{2}|b-a|$$

对于任何 $a$ 和 $b$ 成立.

9. $f(x)=x^2$ 在 $x=0$ 的导数为零，但是 $f$ 不是常值函数. 这同中值定理的系中所说具有零导数的函数为常数相矛盾吗？提出答案的理由.
10. **极值点和拐点** 令 $h=fg$ 是 $x$ 的两个可微函数 $f$ 和 $g$ 的积.

(a) 如果 $f$ 和 $g$ 是正的，在 $x=a$ 有局部极大值，并且 $f'$ 和 $g'$ 在 $a$ 改变符号，$h$ 在 $a$ 有局部极大值吗？

(b) 如果 $f$ 和 $g$ 的图形在 $x=a$ 有拐点，$h$ 的图形在 $a$ 有拐点吗？

在两种情况下，如果答案是肯定的，请给出证明. 如果答案是否定的，举出一个反例.

11. **求函数** 利用下述条件求公式 $f(x)=(x+a)/(bx^2+cx+2)$ 中 $a$，$b$，$c$ 的值：

(i) $a$，$b$，$c$ 的值为 0 或 1；

(ii) $f$ 的图形经过点 $(-1,0)$；

(iii) 直线 $y=1$ 是 $f$ 图形的渐近线.

12. **水平切线** 对于曲线 $y=x^3+kx^2+3x-4$ 而言，常数 $k$ 取哪个值或哪些值使曲线恰好有一条水平切线？
13. **最大内接三角形** 点 $A$ 和点 $B$ 位于一个单位圆的直径的端点，点 $C$ 在圆周上. 当三角形 $ABC$ 为等腰三角形时的面积最大这个结论正确吗？你是怎样知道的？
14. **二阶导数检验法的证明** 局部极大值和局部极小值的二阶导数检验法(4.4 节)表明：

(a) 若 $f'(c)=0$ 和 $f''(c)<0$，则 $f$ 在 $x=c$ 有局部极大值.

(b) 若 $f'(c)=0$ 和 $f''(c)>0$，则 $f$ 在 $x=c$ 有局部极小值.

为了证明论断(a)，令 $\varepsilon=(1/2)|f''(c)|$. 然后利用

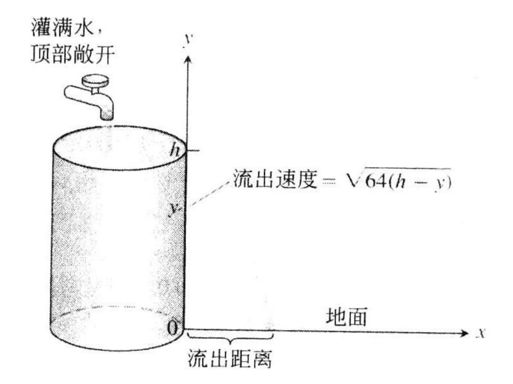
$$f''(c)=\lim_{h\to0}\frac{f'(c+h)-f'(c)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f'(c+h)}{h}$$

这个事实推断，对于某个 $\delta>0$，

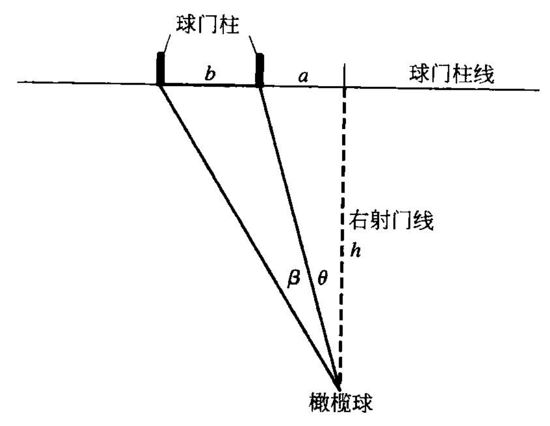
$$0<|h|<\delta\Rightarrow\frac{f'(c+h)}{h}<f''(c)+\varepsilon<0$$

因此，$f'(c+h)$ 在 $-\delta<h<0$ 时为正而在 $0<h<\delta$ 时为负. 用类似的方法证明论断(b).

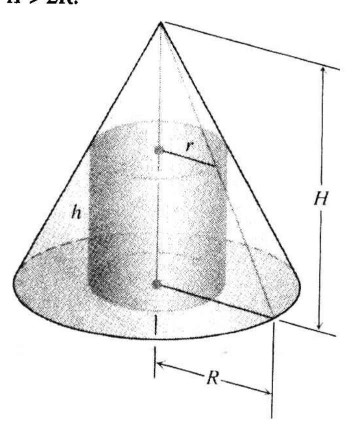
15. **水桶凿孔** 要求在附图所示（见下页）水桶侧面的某个高度凿孔，使泄出的水流冲到离水桶尽可能远的地面上. 如果在桶的顶部附近凿孔，由于那里的压力较小，水流出的速度较慢，但是在空中花费较长时间. 如果在桶的底部附近凿孔，水流出的速度较快，但是只有较短的下落时间. 什么地方是凿孔的最佳位置（如果存在）？（提示：流出的水粒从高度 $y$ 落到地面需要多长时间？）
16. **踢进 3 分球** 一位美式橄榄球运动员想在一条右射门线上踢进球门一个 3 分球. 假定两根球门柱相距 $b$ 英尺，右射门线距离右球门柱 $a>0$




英尺(参见附图). 求运动员处于最大角度 $\beta$ 时到球门柱线的距离 $h$. 假设橄榄球场是平地球场.




**17. 带不同答案的最大值-最小值问题** 有时最大值-最小值问题的解同物体尺寸的比例有关. 作为一个例子，假设在半径为 $R$ 和高度为 $H$ 的直立圆锥体内内接半径为 $r$ 和高度为 $h$ 的直立圆柱体，如附图所示. 求 $r$ 的值(用 $R$ 和 $H$ 表示)，使圆柱体的总面积(包括顶部和底部)达到最大值. 你将会看到，这个解依赖于 $H \leqslant 2R$ 或者 $H > 2R$.



**18. 求参数最小值** 对于所有正值 $x$，求使 $mx - 1 + (1/x)$ 大于或者等于零的正常数 $m$ 的最小值.

**19.** 计算下列极限：

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 5x}{3x}$.　(b) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 5x\cot 3x$.

(c) $\lim\limits_{x\to 0} x\csc^2\sqrt{2x}$.　(d) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sec x - \tan x)$.

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\tan x}$.　(f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x\sin x}$.

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec x - 1}{x^2}$.　(h) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$.

**20.** 对于下列极限，洛必达法则无能为力. 请用某种其他方法求极限：

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x}+5}$.　(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x+7\sqrt{x}}$.

**21.** 假设一家公司每周用 $y = a + bx$ 美元的成本生产 $x$ 件产品. 它每周能够以每件 $p = c - ex$ 美元的价格销售 $x$ 件产品. $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ 都是正常数.

(a) 什么生产水平能产生最大利润?

(b) 相应的价格是多少?

(c) 每周在这种生产水平下的利润是多少?

(d) 如果政府对每件销售出的产品征税 $t$ 美元，每件产品应以什么价格销售才能达到最大利润? 对这种价格同税前价格之间的差别作出评论.

**22. 估计倒数(不用除法)** 如果对函数 $f(x) = (1/x) - a$ 应用牛顿法求根，能够估计数 $a$ 的倒数而不用 $a$ 相除. 例如，如果 $a = 3$，牵涉的函数是 $f(x) = (1/x) - 3$.

(a) 画出 $y = (1/x) - 3$ 的图形. 图形同 $x$ 轴在什么地方相交?

(b) 证明这时牛顿法的递推公式是

$$x_{n+1} = x_n(2 - 3x_n)$$

所以不需要做除法.

**23.** 为了求 $x = \sqrt[q]{a}$，对 $f(x) = x^q - a$ 应用牛顿法. 这里假定 $a$ 是正实数而 $q$ 是正整数. 证明 $x_1$ 是 $x_0$ 和 $a/x_0^{q-1}$ 的"加权平均"，并且求下列方程中的系数 $m_0$ 和 $m_1$：

$$x_1 = m_0 x_0 + m_1\left(\frac{a}{x_0^{q-1}}\right),\quad \begin{aligned} &m_0 > 0, m_1 > 0,\\ &m_0 + m_1 = 1.\end{aligned}$$

如果 $x_0$ 和 $a/x_0^{q-1}$ 相等，可以得出什么结论? 在这种情况下 $x_1$ 的值是什么?

**24.** 直线族 $y = ax + b$($a$，$b$ 是任意常数)的特征可以用关系式 $y'' = 0$ 表达. 求所有圆族

$$(x-h)^2 + (y-h)^2 = r^2$$

满足的相似关系式，其中 $h$ 和 $r$ 是任意常数.（提示：从给出的方程和接连求导数得到的两个方程的方程组消去 $h$ 和 $r$.）

**25.** **14 世纪提出的自由落体问题** 14 世纪中叶德国萨克森州的艾伯特(1316～1390)提出一个自由落体的模型：假定物体下落的速度同下落的距离成正比. 所以，认为下落 20 英尺的物体比下落 10 英尺的物体运动可能快两倍似乎是合理的. 除此之外，那时没有足够精确的仪器用来验证别的结果. 今天，通过求解艾伯特模型中隐含的初值问题，可以看出它的模型同实际情况究竟相差多远. 求解这个问题，并且从图形上对求出的解和方程 $s=16t^2$ 做比较. 你将看出艾伯特模型描述的运动在开始时太慢，而在不久后就变得比实际速度快得多.

**T26.** **分组验血** 在第二次世界大战期间，需要对大量新兵实施验血. 对 $N$ 位士兵验血有两种标准方法：第一种方法，对每人单独检验；第二种方法，把 $x$ 位士兵的血样集中在一起，作为一个大血样检验. 如果检验结果呈阴性，那么所有 $x$ 位士兵通过这次检验. 如果检验结果呈阳性，再对每位士兵做单独检验，需要总共进行 $x+1$ 次检验. 利用第二种方法和某些概率论可以证明，平均而言，检验的总次数 $y$ 将是

$$y = N\left(1 - q^x + \frac{1}{x}\right)$$

试用 $q=0.99$ 和 $N=1000$，求使 $y$ 达到最小的整数值 $x$. 同时求使 $y$ 达到最大的整数值 $x$.（第二种结果对实际情况是不重要的.）第二次世界大战中使用的分组验血方法比个别验血方法节省 80% 以上，但是不是用上面给出的 $q$ 值.

**27.** 假定一辆汽车的刹车产生 $k$ ft/s$^2$ 的恒定负加速度. **(a)** 确定把以 60 m/h(88 ft/s)行驶的汽车在离踩刹车地点起的 100 ft 距离内停下来，$k$ 必须取什么值. **(b)** 使用同一个 $k$ 值，以 30 m/h 行驶的汽车在停止之前将行驶多远？

**28.** 令 $f(x)$，$g(x)$ 是两个连续的可微函数，满足关系 $f'(x)=g(x)$ 和 $f''(x)=-f(x)$. 令 $h(x)=f^2(x)+g^2(x)$. 如果 $h(0)=5$，求 $h(10)$.

**29.** 是否可能有一条曲线，满足条件 $d^2y/dx^2$ 处处等于零，以及当 $x=0$ 时 $y=0$ 和 $dy/dx=1$？提出答案的理由.

**30.** 求 $xy$ 平面内的曲线方程，曲线通过点(1, −1)，它在 $x$ 的斜率恒为 $3x^2+2$.

**31.** 一个质点沿 $x$ 轴运动. 它的加速度为 $a=-t^2$. 在 $t=0$ 时，质点位于原点. 在质点运动过程中，它达到点 $x=b$(其中 $b>0$)，但是不越过 $b$. 确定质点在 $t=0$ 时的速度.

**32.** 质点以加速度 $a=\sqrt{t}-(1/\sqrt{t})$ 运动. 假定在 $t=0$ 时，速度 $v=4/3$，位置 $s=-4/15$. 求

**(a)** 由 $t$ 表示的速度 $v$.

**(b)** 由 $t$ 表示的位置 $s$.

**33.** 已知 $f(x)=ax^2+2bx+c$，$a>0$. 通过考察极小值，证明对于所有实数 $x$，$f(x)\geqslant 0$ 当且仅当 $b^2-ac\leqslant 0$.

**34.** **施瓦茨不等式**

**(a)** 在习题 33 中，令

$$f(x) = (a_1x+b_1)^2 + (a_2x+b_2)^2 + \cdots + (a_nx+b_n)^2$$

并且推导施瓦茨不等式：

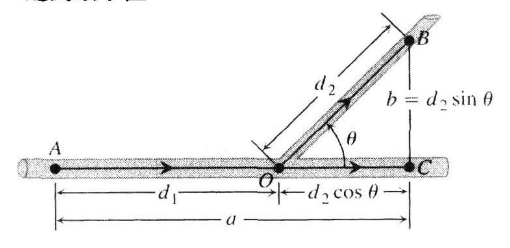
$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

**(b)** 证明，仅当存在一个实数 $x$ 使 $a_ix$ 等于 $-b_i$ 对于从 1 到 $n$ 的每个 $i$ 值成立时，施瓦茨不等式中保持等号.

**35.** **血管系统的最佳分叉角度模型** 在一个流动系统中，当小管道从大管道分叉时，我们可能要求它以这样一个角度分流：按某种节约能量的观点它是最佳的. 例如，如附图所示，可能要求沿 $AOB$ 段的流动由于摩擦引起的能量损失达到最小. 在这个图示中，$B$ 是小管道延伸到的给定点，$A$ 是 $B$ 的上游大管道中的一点，$O$ 是管道的分叉点. 由泊肃叶提出的定律说明，在无湍流的流动中由于摩擦引起的能量损失同路径的长度成正比，而同管道半径的 4 次方成反比. 因此，沿 $AO$ 的能量损失为 $(kd_1)/R^4$，沿 $OB$ 的能量损失为 $(kd_2)/r^4$，其中 $k$ 是常数，$d_1$ 是 $AO$ 的长度，$d_2$ 是 $OB$ 的长度，$R$ 是大管道的半径，$r$ 是小管道的半径. 夹角 $\theta$ 的选择是使这两种损失之和

$$L = k\frac{d_1}{R^4} + k\frac{d_2}{r^4}$$

达到最小值.



在我们的模型中，假设 $AC = a$ 和 $BC = b$ 是固定的，因此满足关系

$$d_1 + d_2 \cos\theta = a, \quad d_2 \sin\theta = b$$

所以

$$d_2 = b \csc\theta$$

$$d_1 = a - d_2 \cos\theta = a - b \cot\theta$$

我们可以把总的能量损失表示成 $\theta$ 的函数：

$$L = k\left(\frac{a - b\cot\theta}{R^4} + \frac{b\csc\theta}{r^4}\right)$$

(**a**) 证明使 $\mathrm{d}L/\mathrm{d}\theta$ 等于零的 $\theta$ 的临界值是

$$\theta_c = \cos^{-1}\frac{r^4}{R^4}$$

(**b**) 如果管道半径之比为 $r/R = 5/6$，估计(a)中给出的最优分叉角(准确到度数).

# 第5章 积 分 法

**概述** 经典几何学的巨大成就之一，是获得三角形的面积公式以及球体和锥体的面积和体积公式. 在这一章讨论计算这些几何对象和其他更为一般的几何形体的面积和体积的方法. 我们建立的这种方法称为**积分法**，它是计算范围远远超出面积和体积的一种工具. 积分在统计学、自然科学和工程技术中是极为重要的. 它使我们能够对大量应用领域的问题进行计算，从概率和平均值，到能源消耗和水坝闸门承受的压力，等等.

## 5.1 用有限和作估计

这一节展示如何估计像面积、平均值以及物体超越时间运动的距离这样一些量，它们都可以用有限和作逼近. 在5.3节将会见到，有限和是定义积分的基础.

### 5.1.1 面积

以曲线为边界的区域的面积，可以用一组矩形面积的和逼近. 使用的矩形越多，逼近的准确度越高.

例如，假定需要求阴影区域 $R$ 的面积，这个区域处在 $x$ 轴之上和曲线 $y=1-x^2$ 的图形之下，并且介于两条垂直线 $x=0$ 和 $x=1$ 之间(见图5.1). 可惜，对于计算像区域 $R$ 这样具有曲线边界的一般形状的区域面积，没有简单的几何公式.

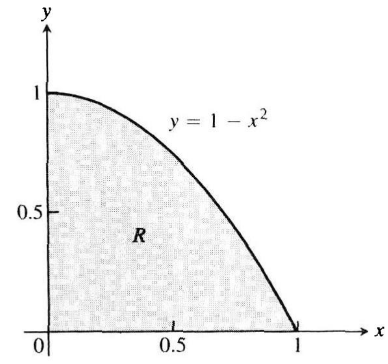
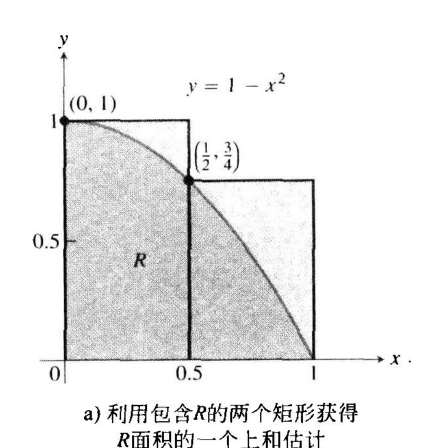
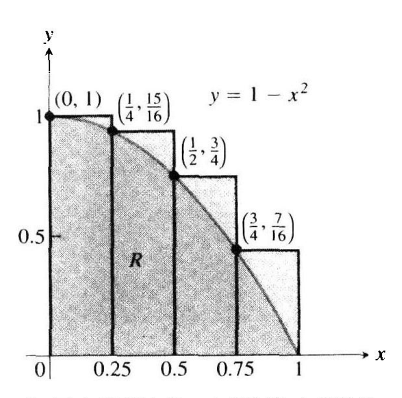



图5.1 不能用一个简单的公式求区域 $R$ 的面积

尽管没有可以用于确定 $R$ 的准确面积的方法，但是我们能够用一种简便的方法逼近它. 图5.2a 显示两个矩形共同包含区域 $R$. 每个矩形的宽度为1/2，而它们从左至右的高度为1和3/4. 每个矩形的高度是函数 $f$ 在构成矩形底边的[0, 1]中的子区间上的最大值，通过在子区间左端点对 $f$ 求值获得. 这两个矩形的总面积逼近区域 $R$ 的面积 $A$：




a) 利用包含R的两个矩形获得R面积的一个上和估计




b) 四个矩形给出一个更好的上和估计

图5.2 两种估计都超过 $R$ 面积的实际值

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8} = 0.875$$

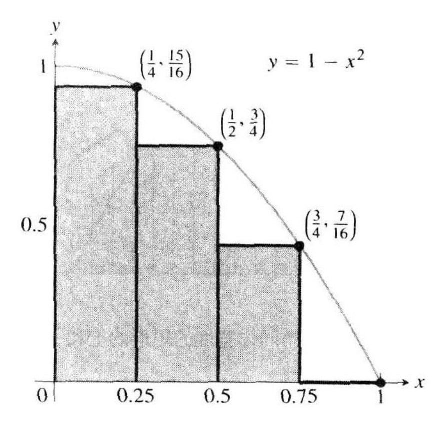
这个估计大于实际的面积 $A$，因为这两个矩形包含 $R$. 我们把 0.875 称为**上和**，因为它是通过把每个矩形的高度取为 $f(x)$ 对于矩形底边区间内一点 $x$ 的的最大值（最上值）获得的. 在图 5.2b 中，我们用共同包含 $R$ 的 4 个更窄的矩形改进面积的估计，每个矩形的宽度为 1/4. 这 4 个矩形给出面积的逼近

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{32} = 0.78125$$

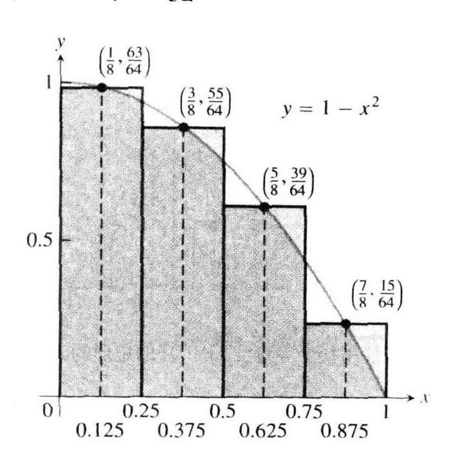
由于这 4 个矩形包含 $R$，它仍然大于 $A$.

假定我们改用包含在区域 $R$ 内部的 4 个矩形估计面积，如图 5.3a 所示. 同前面一样，每个矩形的宽度为 1/4，但是矩形的高度更小，并且整个矩形处于 $f$ 图形的下方. 函数 $f(x) = 1 - x^2$ 是区间 $[0, 1]$ 上的减函数，所以每个矩形的高度用函数 $f$ 在构成矩形底边的子区间右端点的值给出. 第 4 个矩形的高度为零，因此对面积不贡献值. 这 4 个矩形的高度等于 $f(x)$ 对于每个底边子区间内一点 $x$ 的最小值，它们的和给出面积的**下和**逼近，

$$A \approx \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} = \frac{17}{32} = 0.53125$$




a) 包含在$R$中的矩形给出$R$面积实际值的低估计




b) 中点准则用的矩形是那些高度等于 $y=f(x)$在其底边中点的值的矩形

图 5.3

这个估计小于面积 $A$，因为 4 个矩形全部位于区域 $R$ 的内部. $A$ 的实际值位于上和与下和这两者之间的某处：

$$0.53125 < A < 0.78125$$

通过考察上和逼近和下和逼近，我们不仅得到面积的估计，同时也得到用这两种估计的可能误差的一个界，因为面积的实际值是它们之间的某个值. 这里的误差不会大于两者之差 $0.78125 - 0.53125 = 0.25$.

还有一种估计能够利用矩形得到，它们的高度是 $f$ 在其底边中点的值（见图 5.3b）. 这种估计方法称为逼近面积的**中点准则**. 中点准则给出的估计介于上和与下和之间，但是不能肯定它是实际面积的高估计或者低估计. 像前面那样用 4 个宽度为 1/4 的矩形，中点准则估计 $R$ 的面积为

$$A \approx \frac{63}{64}\cdot\frac{1}{4}+\frac{55}{64}\cdot\frac{1}{4}+\frac{39}{64}\cdot\frac{1}{4}+\frac{15}{64}\cdot\frac{1}{4}=\frac{172}{64}\cdot\frac{1}{4}=0.671\,875$$

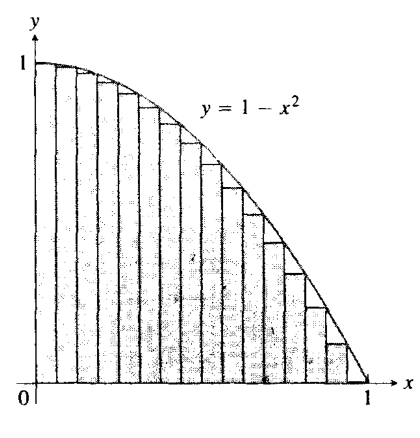
在每一种求和方法中，都把定义函数 $f$ 的区间 $[a,b]$ 细分成等宽度（也称为长度）$\Delta x=(b-a)/n$ 的 $n$ 个子区间，并且在每个子区间内的一点求 $f$ 的值：第1个区间内的 $c_1$，第2个子区间内的 $c_2$，依此类推. 于是所有有限和都具有

$$f(c_1)\Delta x+f(c_2)\Delta x+f(c_3)\Delta x+\cdots+f(c_n)\Delta x$$

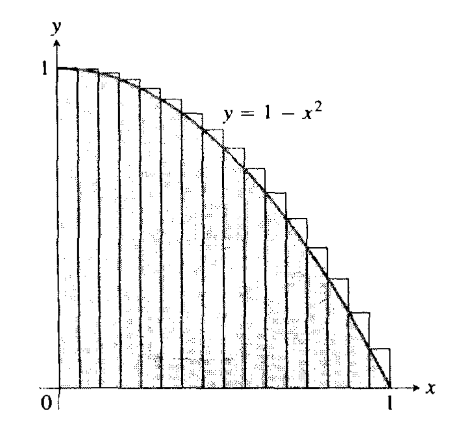
这种形式. 通过取越来越多的矩形，而每个矩形的宽度一次比一次小，这些有限和显现对区域 $R$ 实际面积越来越好的逼近.

图 5.4a 显示用 16 个等宽的矩形作为 $R$ 面积的下和逼近. 它们的面积之和为 0.634 765 625，这个值看起来同 $R$ 的实际面积很接近，但是仍然小于实际面积，因为这些矩形位于 $R$ 的内部.

图 5.4b 显示用 16 个等宽的矩形作为 $R$ 面积的上和逼近. 它们的面积之和为 0.697 265 625，这个值略大于实际面积，因为这些矩形一起包含 $R$. 用 16 个矩形的中点准则给出的总面积逼近为 0.666 992 187 5，不过不能立即肯定这个值大于还是小于 $R$ 的实际面积.




a) 使用16个等宽度$\Delta x=1/16$的矩形的下和




b) 使用16个同样宽度的矩形的上和

图 5.4

**例 1** 表 5.1 显示对 $R$ 的面积的上和逼近及下和逼近，使用 2 个矩形至 1000 个矩形. 在 5.2 节将会见到，对于像 $R$ 这样的区域，如何通过取当每个矩形宽度趋近零及矩形数目趋近无穷大时的极限，获得面积的准确值. 采用那里提出的方法，可以证明 $R$ 的准确面积是 2/3. ■

### 5.1.2 物体的移动距离

假定已知一辆向公路干线行驶而不改变方向的汽车的速度函数 $v(t)$，我们需要确定它在时间 $t=a$ 到 $t=b$ 之间行驶多少路程. 如果已知 $v(t)$ 的反导数 $F(t)$，那么通过设定 $s(t)=F(t)+C$ 可以求出汽车的位置函数 $s(t)$. 然后，通过计算位置的改变量 $s(b)-s(a)$ 可以求出汽车行驶的距离(参见 4.8 节习题 117). 如果速度函数是由汽车里程表在不同时间的读数确定的，没有可以用来获得速度函数的反导数的公式，我们应该采取什么步骤？

**表 5.1 $R$ 的面积的有限和逼近**

| 子区间数目 | 下　和 | 中点准则 | 上　和 |
|---|---|---|---|
| 2 | 0.375 | 0.6875 | 0.875 |
| 4 | 0.531 25 | 0.671 875 | 0.781 25 |
| 16 | 0.634 765 625 | 0.666 992 187 5 | 0.697 265 625 |
| 50 | 0.6566 | 0.6667 | 0.6766 |
| 100 | 0.661 65 | 0.666 675 | 0.671 65 |
| 1000 | 0.666 166 5 | 0.666 666 75 | 0.667 166 5 |

当不知道速度函数 $v(t)$ 的反导数时，可以像前面那样应用有限和逼近汽车行驶距离的相同

做法. 我们把区间$[a,b]$细分成很短的时间区间，汽车在每个小区间上完全被当做常数. 然后，用通常的距离公式

$$距离 = 速度 \times 时间$$

逼近汽车在每个子区间上行驶的距离，并且越过$[a,b]$对全部结果求和.

假定划分的子区间像

$|\leftarrow\Delta t\rightarrow|\leftarrow\Delta t\rightarrow|\leftarrow\Delta t\rightarrow|$

$a \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad b \quad t\,(s)$

所有子区间具有相等的长度$\Delta t$. 在第1个子区间内选取一个数$t_1$. 如果把$\Delta t$取为很小的数，以致车速在这个短暂的时间间隔内几乎没有什么变化，那么汽车在第1个时间区间内的行驶距离约为$v(t_1)\Delta t$. 如果$t_2$是第2个子区间内的一个数，那么汽车在这第2个时间区间内行驶的距离约为$v(t_2)\Delta t$. 汽车在所有时间区间内行驶的距离的总和为

$$D \approx v(t_1)\Delta t + v(t_2)\Delta t + \cdots + v(t_n)\Delta t$$

其中$n$是子区间的总数.

**例2** 假设直立向空中发射的炮弹的速度函数是$f(t) = 160 - 9.8t$ m/s. 利用刚才描述的求和方法估计炮弹在前3秒内上升的距离. 这个和同准确值435.9 m接近到什么程度?

**解** 我们考察用不同区间数目以及选择不同求值点的结果. 注意$f(t)$是减函数，所以选择左端点给出上和估计，而选择右端点给出下和估计.

(**a**)用3个长度为1的子区间，选择在左端点求$f$的值，这样给出一个上和$D$:

$t_1 \quad t_2 \quad t_3$

$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad t$

$|\leftarrow\Delta t\rightarrow|$

用$f$在$t=0$, 1, 2的值，我们有

$$D \approx f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + f(t_3)\Delta t$$
$$= [160 - 9.8(0)](1) + [160 - 9.8(1)](1) + [160 - 9.8(2)](1) = 450.6$$

(**b**)用3个长度为1的子区间，选择在右端点求$f$的值，这样给出一个下和:

$t_1 \quad t_2 \quad t_3$

$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad t$

$|\leftarrow\Delta t\rightarrow|$

用$f$在$t=1$, 2, 3的值，我们有

$$D \approx f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + f(t_3)\Delta t$$
$$= [160 - 9.8(1)](1) + [160 - 9.8(2)](1) + [160 - 9.8(3)](1) = 421.2$$

(**c**)用6个长度为1/2的子区间，选择在两个端点求$f$的值，这样得到一个上和$D$以及一个下和$D$:

$t_1 \; t_2 \; t_3 \; t_4 \; t_5 \; t_6 \qquad t_1 \; t_2 \; t_3 \; t_4 \; t_5 \; t_6$

$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad t \qquad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad t$

$\Delta t \qquad \Delta t$

用$f$在左端点的值给出上和$D \approx 443.25$；用$f$在右端点的值给出下和$D \approx 428.55$.

这两种用6个子区间的估计，比用3个子区间的估计更接近准确值. 当所用的子区间越小时，结果的准确度越高.

正如可以从表 5.2 中看出的那样，用左端点的上和从上方接近准确值 435.9，而用右端点的下和从下方接近这个值. 实际值位于这些上和与下和之间. 在最接近的几个估计项中，误差大小为 0.23.

$$\text{误差大小} = |\text{实际值} - \text{计算值}| = |435.9 - 435.67| = 0.23$$

$$\text{误差百分数} = \frac{0.23}{435.9} \approx 0.05\%$$

从表中最后两栏有理由得出结论，炮弹在前 3 秒飞行期间大约上升 436 米.

**表 5.2 炮弹飞行距离估计**

| 子区间数目 | 每个子区间的长度 | 上 和 | 下 和 |
|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 450.6 | 421.2 |
| 6 | 1/2 | 443.25 | 428.55 |
| 12 | 1/4 | 439.57 | 432.22 |
| 24 | 1/8 | 437.74 | 434.06 |
| 48 | 1/16 | 436.82 | 434.98 |
| 96 | 1/32 | 436.36 | 435.44 |
| 192 | 1/64 | 436.13 | 435.67 |

■

### 5.1.3 物体的位移和移动距离

如果物体以位置函数 $f(t)$ 沿坐标线运动而不改变方向，像在例 2 那样，我们可以通过在很小区间上对物体的移动距离求和，计算从 $t=a$ 到 $t=b$ 移动的总距离. 如果物体在运动中改变方向一次或者多次，那么需要利用物体运动的速率 $|v(t)|$，即物体的速度函数 $v(t)$ 的绝对值，求总的移动距离. 同例 2 一样，用速度本身仅给出物体的**位移**的估计 $s(b)-s(a)$，即它的初始位置和终止位置之间的差.

为了弄清原因，把时间区间 $[a,b]$ 划分成充分小的等长子区间 $\Delta t$，使得物体从时间 $t_{k-1}$ 到 $t_k$ 的速度变化不大. 在这种情况下，$v(t_k)$ 给出速度在整个区间上一个令人满意的逼近. 因此，在这段时间区间物体的位置坐标的改变约为

$$v(t_k)\Delta t$$

这个改变量当 $v(t_k)$ 取正值时为正，而当 $v(t_k)$ 取负值时为负.

对于任何一种改变，物体在这段时间子区间移动的距离约为

$$|v(t_k)|\Delta t$$

**物体移动的总距离**近似等于和

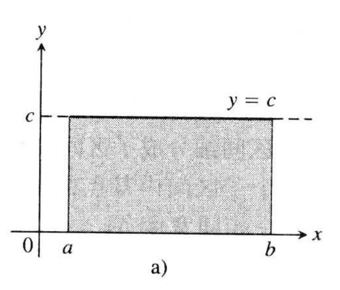
$$|v(t_1)|\Delta t + |v(t_2)|\Delta t + \cdots + |v(t_n)|\Delta t$$

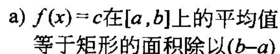
### 5.1.4 非负函数的平均值

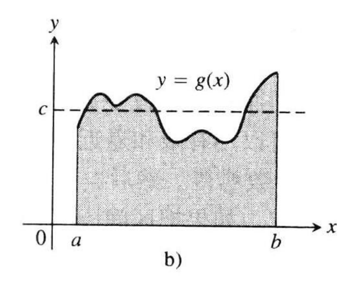
包含 $n$ 个数 $x_1$，$x_2$，…，$x_n$ 的集合的平均值是通过对它们求和再除以 $n$ 得到的. 但是，连续函数 $f$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值是什么？这样一个函数可以取无限个值. 例如，在一座城市的某个地方，每天温度的上升和下降是一个连续函数. 如果说这座城市一天内的平均温度是华氏 73 度，这是指什么意思？

当一个函数是常数时，这种问题很容易回答. 取常数值 $c$ 的函数在区间 $[a,b]$ 上的平均值为 $c$. 当 $c$ 为正数时，函数在 $[a,b]$ 上的图形是一个高度为 $c$ 的矩形. 这时函数的平均值在几何上可以解释成这个矩形的面积除以它的宽度 $(b-a)$（见图 5.5a).

如果需要求非常数值函数的平均值，像对图 5.5b 中的函数 $g(x)$ 那样，那么平均值是什么？对于这个图形，我们可以把它想象成在晃动一桶水时，包围在 $x=a$ 和 $x=b$ 的桶壁之间的水面高度的瞬间图像. 当水动荡时，它在每点的高度是变化的，但是水面的平均高度相同. 为了求水面的平均高度，我们让它平静下来，直到变成平面，这一高度为常数. 最后的高度 $c$ 等于函数 $g$ 的图形下方的面积除以 $(b-a)$. 由此引出平均值的定义，我们把非负函数在区间 $[a,b]$ 上的平均值定义为函数图形下方的面积除以区间长度 $(b-a)$. 为了使这个定义是有效的，我们需要准确地理解图形下方的面积的含义. 这种理解将从 5.3 节获得，不过现在先来考察两个简单的例子.




b) $g(x)$在$[a,b]$上的平均值等于它的图形下方的面积除以$(b-a)$

图 5.5

**例 3** 函数$f(x)=3x$在区间$[0, 2]$上的平均值是什么？

**解** 这个平均值等于函数图形下方的面积除以区间的宽度. 在这种情况下，我们无需用有限和逼近来估计函数图形下方区域的面积：高为6和底为2的三角形的面积等于6(见图5.6). 区间宽度为$b-a=2-0=2$. 函数的平均值是$6/2=3$. ■

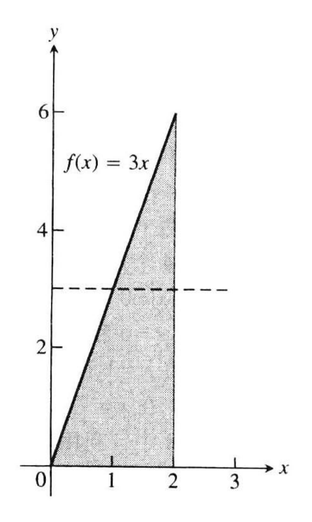



图 5.6 函数$f(x)=3x$在区间$[0, 2]$上的平均值为3(例3)

**例 4** 估计函数$f(x)=\sin x$在区间$[0, \pi]$上的平均值.

**解** 观察图5.7中$\sin x$在0和$\pi$之间的图形，可以看出它的平均高度是0和1之间的某个值. 为了求出这个平均值，需要计算函数图形下方的面积$A$，然后用区间长度$\pi-0=\pi$相除.

我们没有确定这种面积的简单方法，所以用有限和去逼近它. 为了获得一个上和逼近，把一起包含区间$[0, \pi]$上$y=\sin x$图形下方和$x$轴上方的区域的8个宽度同为$\pi/8$的矩形的面积相加. 对于这些矩形的高度，选择$\sin x$在每个子区间上的最大值. 在一个特定的子区间上，这个最大值可能出现在左端点、右端点或者它们之间的某个点. 计算$\sin x$在这个点的值得到用于求上和的矩形的高度. 然后用这些矩形面积的和估计总面积(见图5.7)：

$$A\approx\left(\sin\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{5\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{7\pi}{8}\right)\cdot\frac{\pi}{8}$$

$$\approx(0.38+0.71+0.92+1+1+0.92+0.71+0.38)\cdot\frac{\pi}{8}=(6.02)\cdot\frac{\pi}{8}\approx 2.365$$

为了估计$\sin x$的平均值，用$\pi$除估计出的面积，得到逼近值$2.365/\pi\approx 0.753$.

由于这是用上和逼近面积，这个估计大于$\sin x$在区间$[0, \pi]$上的实际平均值. 如果使用越来越多的矩形，每个矩形的宽度越来越小，就会得到越来越接近实际平均值的估计. 利用5.3节中讨论的方法，将证明实际平均值是$2/\pi\approx 0.64$.

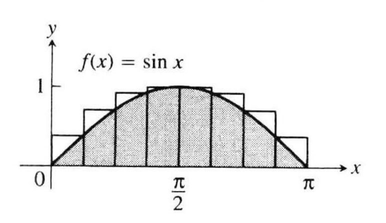



图 5.7 利用8个矩形计算$\sin x$在$[0, \pi]$的平均值，逼近$f(x)=\sin x$在0和$\pi$之间的图形下方的面积(例4)

同前面一样，我们也完全可以利用位于$y=\sin x$的图形下方的矩形计算下和逼近，或者利用中点准则.

在5.3节将会看到，在每一种情况，只要所有矩形的宽度足够小，逼近值都接近实际面积. ■

### 5.1.5 小结

正值函数图形下方的面积，不改变方向的运动物体移动的距离，以及非负函数在某个区间上的平均值，这些量都可以用有限和逼近. 首先我们把区间细分成子区间，在每个特定的子区间上把相应的函数$f$当做常数看待. 然后，用函数$f$在每个子区间内某点的值乘以子区间的宽度，并且把这些乘积加在一起. 如果把区间$[a,b]$细分成$n$个相同宽度$\Delta x=(b-a)/n$的子区间，并且$f(c_k)$是$f$在第$k$个子区间内某个选定点$c_k$的值，那么这个过程给出形式为

$$f(c_1)\Delta x+f(c_2)\Delta x+f(c_3)\Delta x+\cdots+f(c_n)\Delta x$$

的有限和. 对于$c_k$的选择可能使$f$在第$k$个子区间上取最大值或者最小值，也可能取它们之间的某个值. 实际值处于由上和与下和给出的逼近值之间. 我们注意到，当取更多宽度更小的子区间时，有限和逼近得到改进.

### 习题 5.1

在习题1～4中，利用有限和逼近估计函数图形下方的面积，采用

(a) 宽度相等的两个矩形的下和；

(b) 宽度相等的4个矩形的下和；

(c) 宽度相等的两个矩形的上和；

(d) 宽度相等的4个矩形的上和.

**1.** $f(x)=x^2$，在$x=0$和$x=1$之间.

**2.** $f(x)=x^3$，在$x=0$和$x=1$之间.

**3.** $f(x)=1/x$，在$x=1$和$x=5$之间.

**4.** $f(x)=4-x^2$，在$x=-2$和$x=2$之间.

在习题5～8中，利用矩形估计函数图形下方的面积，矩形的高度由函数在矩形底边中点的值给出(中点准则)，首先用两个矩形，然后用4个矩形.

**5.** $f(x)=x^2$，在$x=0$在$x=1$之间.

**6.** $f(x)=x^3$，在$x=0$在$x=1$之间.

**7.** $f(x)=1/x$，在$x=1$在$x=5$之间.

**8.** $f(x)=4-x^2$，在$x=-2$在$x=2$之间.

**9. 物体移动的距离** 附表显示一台模型火车机车沿轨道行驶10秒内的速度，利用长度为1的10个子区间估计机车行驶的距离：

(a) 用左端点的速度值；(b) 用右端点的速度值.

| 时间(s) | 速度(in/s) | 时间(s) | 速度(in/s) |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 6 | 11 |
| 1 | 12 | 7 | 6 |
| 2 | 22 | 8 | 2 |
| 3 | 10 | 9 | 6 |
| 4 | 5 | 10 | 0 |
| 5 | 13 | | |

**10. 漂移物向上游移动的距离** 假设你坐在涨潮的河岸上观察一只随潮水向上游漂移的瓶子. 在1小时内，每5分钟记录一次潮水的流速，结果如附表所示. 瓶子在这一小时内向上游移动的距离大约是多少？利用长度为5的12个子区间作估计：

(a) 用左端点的速度值；

(b) 用右端点的速度值.

| 时间(min) | 速度(m/s) | 时间(min) | 速度(m/s) |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 35 | 1.2 |
| 5 | 1.2 | 40 | 1.0 |
| 10 | 1.7 | 45 | 1.8 |
| 15 | 2.0 | 50 | 1.5 |
| 20 | 1.8 | 55 | 1.2 |
| 25 | 1.6 | 60 | 0 |
| 30 | 1.4 | | |

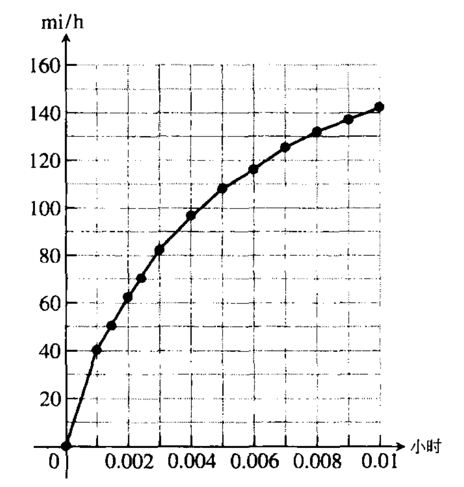
**11. 公路的长度** 假定你和同伴驾驶汽车行驶在蜿蜒崎岖的沙石公路上，汽车的速度计能够使用，但是里程表(里程计数器)损坏，为了计算这条特殊公路伸延的长度，你每隔10秒记录一次车速，结果显示在附表中. 用两种速度值估计这段公路的长度：

(a) 左端点的速度值；(b) 右端点的速度值.

| 时间(s) | 速度(转换成 ft/s)(30 mi/h = 44 ft/s) | 时间(s) | 速度(转换成 ft/s)(30 mi/h = 44 ft/s) |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 70 | 15 |
| 10 | 44 | 80 | 22 |
| 20 | 15 | 90 | 35 |
| 30 | 35 | 100 | 44 |
| 40 | 30 | 110 | 30 |
| 50 | 44 | 120 | 35 |
| 60 | 35 | | |

**12. 由速度数据求距离** 附表给出一辆归式赛车在 36 秒(10/1000 小时)内由 0 加速到 142 mi/h 的速度数据.

| 时间(h) | 速度(mi/h) | 时间(h) | 速度(mi/h) |
|---|---|---|---|
| 0.0 | 0 | 0.006 | 116 |
| 0.001 | 40 | 0.007 | 125 |
| 0.002 | 62 | 0.008 | 132 |
| 0.003 | 82 | 0.009 | 137 |
| 0.004 | 96 | 0.010 | 142 |
| 0.005 | 108 | | |




(a) 利用矩形估计汽车在其达到 142 mi/h 这 36 秒时间内行驶多少里程.

(b) 汽车大约经过多少秒达到这段路程的中点? 那时的车速大约是多少?

**13. 受空气阻力的自由落体** 物体从直升机上垂直下落. 物体下落速度越来越快, 但是由于空气阻力, 它的加速度(速度的变化率)随时间下降. 加速度用 $\mathrm{ft/s^2}$ 度量, 并且记录下落后 5 秒内每秒的加速度如下:

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 32.00 | 19.41 | 11.77 | 7.14 | 4.33 | 2.63 |

(a) 求 $t=5$ 时速度的上和估计.

(b) 求 $t=5$ 时速度的下和估计.

(c) 求 $t=3$ 时物体下落距离的上和估计.

**14. 抛射体移动的距离** 物体从海平面上以 400 ft/s 的初速度垂直向上抛射.

(a) 假定重力是作用于物体的唯一外力, 对于物体经过 5 秒后的速度给出一个上和估计. 对于重力加速度使用 $g=32\ \mathrm{ft/s^2}$.

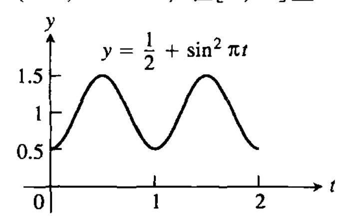
(b) 对于物体在 5 秒后达到的高度求一个下和估计.

在习题 15～18 中, 利用有限和估计函数 $f$ 在给定区间上的平均值, 通过把区间划分为长度相等的 4 个子区间并且计算 $f$ 在子区间中点的值.

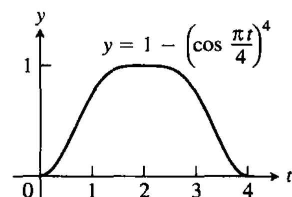
**15.** $f(x)=x^3$, 在 $[0, 2]$ 上.

**16.** $f(x)=1/x$, 在 $[1, 9]$ 上.

**17.** $f(t)=(1/2)+\sin^2\pi t$, 在 $[0, 2]$ 上.




**18.** $f(t)=1-\left(\cos\frac{\pi t}{4}\right)^4$, 在 $[0, 4]$ 上.




**19. 海水污染** 石油从海上失事的油轮中泄漏. 由下表记录的石油在每小时增加的泄漏量, 表明油轮的损坏在加剧.

| 时间(h) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 泄漏(gal/h) | 50 | 70 | 97 | 136 | 190 |
| 时间(h) | 5 | 6 | 7 | 8 | |
| 泄漏(gal/h) | 265 | 369 | 516 | 720 | |

(a) 对 5 小时后石油泄漏的总量给出一个上和估计和下和估计.

(b) 对 8 小时后石油泄漏的总量重复作(a)中的估计.

(c) 在前 8 小时后, 油轮继续以 720 gal/h 的速率泄漏. 如果油轮最初装载 25 000 加仑石油, 在最坏情况下石油全部漏完大约要经历多少小时, 在最佳情况下要经历多少小时?

**20. 空气污染** 一座发电厂通过燃烧石油发电. 燃烧过程中产生的污染物经过烟囱的过滤器排放到空气中. 随着时间的推移, 过滤器的效率下降, 而在最终当排放的污梁物超过国家标准时必须更换. 在每个月底进行测量, 由此确定污染物向大气排放的速率, 其记录如下:

| 月份 | 1月 | 2月 | 3月 | 4月 | 5月 | 6月 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 污染物排放速率(吨/天) | 0.20 | 0.25 | 0.27 | 0.34 | 0.45 | 0.52 |
| 月份 | 7月 | 8月 | 9月 | 10月 | 11月 | 12月 |
| 污染物排放速率(吨/天) | 0.63 | 0.70 | 0.81 | 0.85 | 0.89 | 0.95 |

(**a**)假设一个月按 30 天计算，并且新过滤器每天仅允许排放 0.05 吨污染物. 对到 6 月底排放的污染物的总吨数给出一个上和估计. 其下和估计是多少？

(**b**)在最佳情况下，排放到大气中的污染物的总吨数大约到什么时候将达到 125 吨？

**21.** 一个正 $n$ 边形内接于半径为 1 的圆的，计算对于下列 $n$ 值的多边形的面积：

(**a**)$n=4$(正方形).

(**b**)$n=8$(8 边形).

(**c**)$n=16$.

(**d**)把(a)，(b)，(c)中的面积同圆面积作比较.

**22.** (练习题 21)

(**a**)在半径为 1 的圆内内接一个正 $n$ 边形，计算通过对多边形顶点引出半径形成的 $n$ 个全等三角形之一的面积.

(**b**)计算这个内接多边形的面积当 $n\to\infty$ 时的极限.

(**c**)对于半径为 $r$ 的圆重复(a)和(b)的计算.

**计算机探究**

在习题 23~26 中，用一种 CAS(计算机代数系统)执行下列处理步骤：

(**a**)绘制函数在给定区间上的图形.

(**b**)把区间细分成 $n=100$，200 和 1000 个长度相等的子区间，并且求函数在每个子区间中点的值.

(**c**)计算在(b)中产生的函数值的平均值.

(**d**)对于 $n=1000$ 的划分，利用在(c)中计算的平均值从方程 $f(x)=$(平均值) 求解 $x$.

**23.** $f(x)=\sin x$，在$[0,\ \pi]$上.

**24.** $f(x)=\sin^2 x$，在$[0,\ \pi]$上.

**25.** $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$，在$\left[\dfrac{\pi}{4},\ \pi\right]$上.

**26.** $f(x)=x\sin^2\dfrac{1}{x}$，在$\left[\dfrac{\pi}{4},\ \pi\right]$上.

## 5.2 有限和的 Σ 记号和极限

在 5.1 节中用有限和作估计时，我们遇到带有许多项(例如表 5.1 中多达 1000 项)的求和. 在这一节介绍一种很方便的记号，用于表示包含大量项数的求和. 在描述记号并且介绍它的若干性质之后，考察有限和逼近当项数趋近无穷大时出现的情况.

### 5.2.1 有限和与 Σ 记号

**Σ 记号**使我们能够把许多项的和写成紧凑形式

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

希腊字母 Σ(第 18 个希腊字母的大写，对应于英语字母 $S$)代表“求和”. **求和下标** $k$ 指示求和的首项(在 Σ 记号下方的数字)和末项(在 Σ 记号上方的数字). 可以用任何字母表示下标，但是习惯上常用小写字母 $i$，$j$，$k$.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

下标$k$在 $k=n$ 终止

求和记号(第18个希腊字母的大写)

$a_k$ 是第$k$项的公式

下标$k$从 $k=1$ 开始

这样，我们可以写出

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2+11^2=\sum_{k=1}^{11}k^2$$

和

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)=\sum_{i=1}^{100}f(i)$$

**例 1**

| 用$\sum$记号表示和 | 展开和，对每个值 $k$ 写出一项 | 和 的 值 |
|---|---|---|
| $\sum_{k=1}^{5} k$ | $1+2+3+4+5$ | $15$ |
| $\sum_{k=1}^{3}(-1)^k k$ | $(-1)^1(1)+(-1)^2(2)+(-1)^3(3)$ | $-1+2-3=-2$ |
| $\sum_{k=1}^{2}\frac{k}{k+1}$ | $\frac{1}{1+1}+\frac{2}{2+1}$ | $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$ |
| $\sum_{k=4}^{5}\frac{k^2}{k-1}$ | $\frac{4^2}{4-1}+\frac{5^2}{5-1}$ | $\frac{16}{3}+\frac{25}{4}=\frac{139}{12}$ |

■

求和的下限不是必须取 1；它可以是任何整数.

**例 2** 用$\sum$记号表示和式 $1+3+5+7+9$.

**解** 产生和式中各项的公式随求和的下限改变，但是产生的各项应保持相同. 通常，最简单的下限是从 $k=0$ 或者 $k=1$ 开始.

$$\text{从 } k=0 \text{ 开始：} \quad 1+3+5+7+9=\sum_{k=0}^{4}(2k+1)$$

$$\text{从 } k=1 \text{ 开始：} \quad 1+3+5+7+9=\sum_{k=1}^{5}(2k-1)$$

$$\text{从 } k=2 \text{ 开始：} \quad 1+3+5+7+9=\sum_{k=2}^{6}(2k-3)$$

$$\text{从 } k=-3 \text{ 开始：} \quad 1+3+5+7+9=\sum_{k=-3}^{1}(2k+7)$$

■

当我们有如

$$\sum_{k=1}^{3}(k+k^2)$$

这种形式的和时，可以重新排列它的项，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3}(k+k^2)&=(1+1^2)+(2+2^2)+(3+3^2)\\&=(1+2+3)+(1^2+2^2+3^2)\quad(\text{重新组合项})\\&=\sum_{k=1}^{3}k+\sum_{k=1}^{3}k^2\end{aligned}$$

这说明一条求有限和的一般法则：

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$$

下面给出 4 条这样的法则. 它们的正确性证明可以用数学归纳法给出(参见附录 A.2)

**有限和的代数运算法则**

(1) 和法则 $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

(2) 差法则 $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

(3) 常数倍法则 $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k$ （任意数 $c$）

(4) 常数值法则 $\sum_{k=1}^{n}c=n\cdot c$ （$c$ 是任意常数值）

**例 3**

(a) $\sum_{k=1}^{n}(3k-k^2)=3\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2$. （差法则与常数倍法则）

(b) $\sum_{k=1}^{n}(-a_k)=\sum_{k=1}^{n}(-1)\cdot a_k=-1\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k=-\sum_{k=1}^{n}a_k$. （常数倍法则）

(c) $\sum_{k=1}^{3}(k+4)=\sum_{k=1}^{3}k+\sum_{k=1}^{3}4$ （和法则）

$=(1+2+3)+(3\cdot 4)$ （常数值法则）

$=6+12=18.$

(d) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=n\cdot\frac{1}{n}=1.$ （常数值法则，$1/n$ 是常数） ■

**人物传记**

卡尔·弗里德里希·高斯
(Carl Friedrich Gauss, 1777—1855)

人们在过去许多年发现了有限和求值的各种公式. 这些公式中最著名的当推求前 $n$ 个整数和的公式(据说这个公式是高斯在 8 岁时发现的)，以及前 $n$ 个整数的平方和与立方和的公式.

**例 4** 证明前 $n$ 个整数的和为 $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$.

**解** 这个公式表明前 4 个整数的和为 $\frac{(4)(5)}{2}=10$.

这个预计由加法证实是正确的：

$$1+2+3+4=10$$

为了证明公式在一般情况下成立，我们两次写出和式的各项，第一次向前求和，第二次向后求和：

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & n \\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & 1 \end{array}$$

把第 1 列的两项相加，得到 $1+n=n+1$. 同样，把第 2 列的两项相加，得到 $2+(n-1)=n+1$. 显然，任何一列的两项之和都是 $n+1$. 当把每列等于 $n+1$ 的 $n$ 个列加在一起时，得到总数 $n(n+1)$. 由于这是所求和的 2 倍，所以前 $n$ 个整数的和等于 $n(n+1)/2$. ■

前 $n$ 个整数的平方和与立方和的公式用数学归纳法证明(参见附录 A.2). 我们把这两个公式写在下面.

| | |
|---|---|
| **前 $n$ 个整数的平方和** | $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ |
| **前 $n$ 个整数的立方和** | $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ |

### 5.2.2 有限和的极限

在 5.1 节考察的有限和逼近，随着项数增加及子区间宽度(长度)变窄而越发精确. 下面的例子说明，当子区间的宽度趋近零及子区间数目增加到无穷大时如何计算有限和的极限值.

**例 5** 对于处在区间[0, 1]上函数 $y=1-x^2$ 图形下方和 $x$ 轴上方的区域 $R$ 的面积，利用宽度趋近零和个数趋近无穷大的等宽矩形的下和逼近求极限值(参见图 5.4a).

**解** 使用宽度 $\Delta x=(1-0)/n$ 的 $n$ 个等宽矩形计算下和逼近，然后考察当 $n\to\infty$ 时产生的结果. 从把区间[0, 1]细分成 $n$ 个宽度相等的子区间

$$\left[0,\frac{1}{n}\right],\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right],\cdots,\left[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n}\right]$$

开始. 每个子区间的宽度为 $1/n$. 函数 $y=1-x^2$ 在[0, 1]上是减函数，它在每个子区间上的最小值出现在右端点. 所以，下和逼近由子区间$[(k-1)/n, k/n]$上高度为 $f(k/n)=1-(k/n)^2$ 的那些矩形的面积构成：

$$f\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

用 $\Sigma$ 记号表示这个和并且化简，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left(1-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{k^2}{n^3}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}-\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3} \quad \text{（差法则）}\\ &= n\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 \quad \text{（常数值法则与常数倍法则）}\\ &= 1-\left(\frac{1}{n^3}\right)\frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{（前 } n \text{ 个整数的平方和）}\\ &= 1-\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} \quad \text{（展开分子）}\end{aligned}$$

我们获得了对于任何 $n$ 成立的下和表达式. 取这个表达式当 $n\to\infty$ 时的极限，看出当子区间数目增大和子区间宽度趋近零时，这个下和收敛：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}\right)=1-\frac{2}{6}=\frac{2}{3}$$

这个下和逼近收敛于2/3. 用同样的计算证明，上和逼近也收敛于2/3(见习题35). 任何有限和逼近在5.1节小结指出的意义下也收敛于同一个值. 这是因为，可以证明任何有限和逼近被限制在下和逼近与上和逼近之间. 基于这个理由，导致把区域 $R$ 的面积定义为这个极限值. 在5.3节我们在一般条件下讨论这种有限和逼近的极限. ■

人物传记

格奥尔格·弗里德里希·伯恩哈德·黎曼
(Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826—1866)

### 5.2.3 黎曼和

有限和逼近的极限理论是由德国数学家伯恩哈德·黎曼创立的. 现在我们引入**黎曼和**的概念，这是在下一节要讨论的定积分理论的基础.

讨论从定义在闭区间$[a,b]$上的任意函数 $f$ 开始. 像图5.8显示的函数 $f$，可能取负值也可能取正值. 我们把区间$[a,b]$细分成若干子区间，对它们不必取相同的宽度(或长度)，并且用5.1节同样的方法建立有限和逼近的和式. 为此，在 $a$ 和 $b$ 之间选取 $n-1$ 个点$\{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\}$且满足

$$a<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<b$$

为了保持记号一致，用 $x_0$ 表示 $a$ 和 $x_n$ 表示 $b$，所以

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

集合 $P=\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$ 称为区间$[a,b]$的一个**划分**.

划分 $P$ 把$[a,b]$分成 $n$ 个闭子区间

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$$

这些子区间的第1个是$[x_0, x_1]$，第2个是$[x_1,$

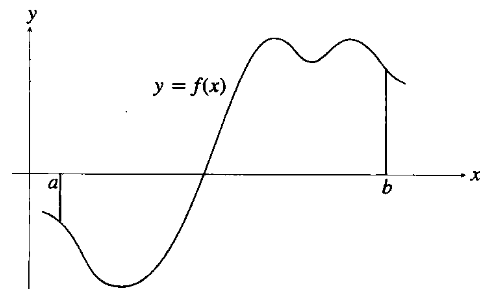
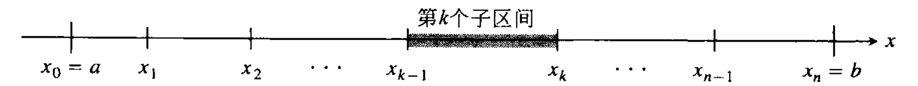
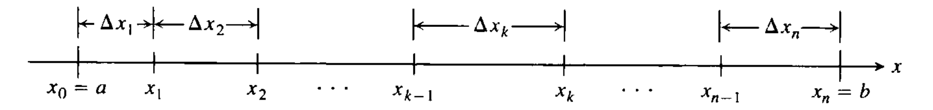



图 5.8

$x_2$]，而对 1 和 $n$ 之间的某个整数 $k$，**第 $k$ 个子区间**是[$x_{k-1}$，$x_k$].




第 1 个子区间[$x_0$，$x_1$]的宽度用 $\Delta x_1$ 表示，第 2 个子区间[$x_2$，$x_3$]的宽度用 $\Delta x_2$ 表示，第 $k$ 个子区间的宽度为 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. 如果所有 $n$ 个子区间的宽度相等，那么它们的共同宽度 $\Delta x$ 等于$(b-a)/n$.




在每个子区间内选择某个点. 第 $k$ 个子区间[$x_{k-1}$，$x_k$]内点称为 $c_k$. 然后在每个子区间上竖放一个垂直的矩形，从 $x$ 轴伸延到同曲线在点($c_k$，$f(c_k)$)接触. 这些矩形可能位于 $x$ 轴的上方或下方(取决于$f(x_k)$取正值还是负值)，或者当$f(x_k)=0$ 时矩形落在 $x$ 轴上(见图 5.9).

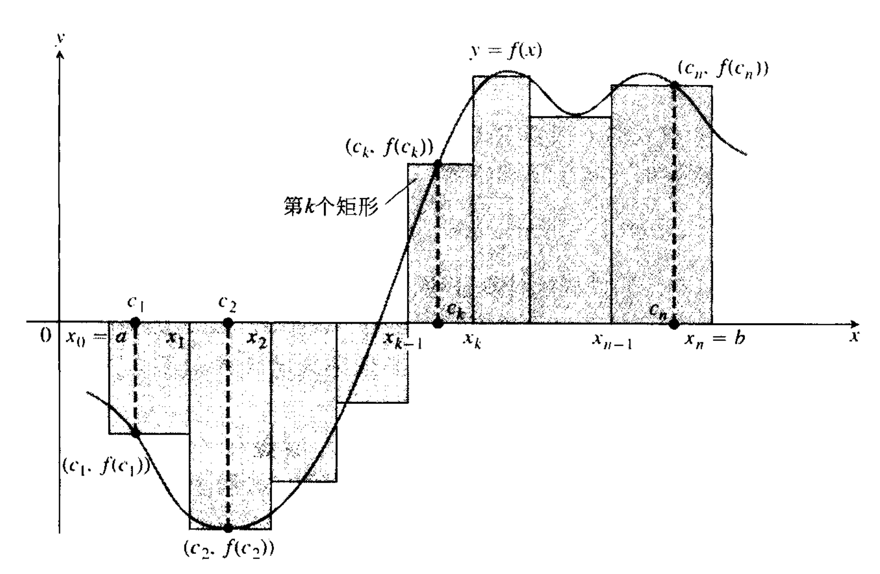



图 5.9 用矩形逼近函数 $y=f(x)$ 的图形同 $x$ 轴之间的区域

在每个子区间上建立乘积$f(c_k)\cdot\Delta x_k$. 这个乘积以$f(c_k)$的符号为转移可以是正数或负数，自然也可以为零. 当$f(c_k)>0$ 时，乘积$f(c_k)\cdot\Delta x_k$ 是高度$f(c_k)$和宽度 $\Delta x_k$ 的矩形的面积. 当$f(c_k)<0$ 时，乘积$f(x_k)\cdot\Delta x_k$ 为负数，是宽度 $\Delta x_k$ 从 $x$ 轴下降至负数$f(c_k)$的矩形面积的负值.

最后，对所有这些乘积求和，得到

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

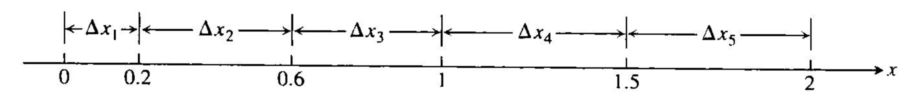
和 $S_P$ 称为 **$f$ 在区间[$a$,$b$]上的黎曼和**. 存在许许多多这样的和，它们依赖于对划分 $P$ 的选择以及在子区间中对点 $c_k$ 的选择.

在例 5 中，所有子区间具有相等的宽度 $\Delta x=1/n$，只要增加子区间的数量 $n$，就能使它们的宽度减小. 当划分的子区间具有不同的宽度时，可以通过控制最宽的(最长的)子区间宽度

保证所有子区间都是很小的. 我们把划分 $P$ 的**范数**定义为所有子区间宽度中的最大宽度，记为 $\|P\|$. 如果 $\|P\|$ 是一个很小的数，那么划分 $P$ 中的所有子区间的宽度都是很小的. 下面考察一个涉及这些概念的例子.

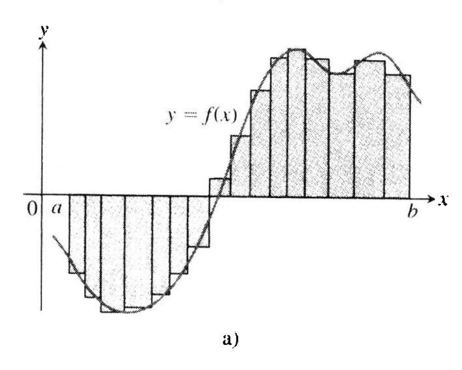
**例 6** 集合 $P=\{0, 0.2, 0.6, 1, 1.5, 2\}$ 是区间 $[0, 2]$ 的一个划分. $P$ 有 5 个子区间：

$$[0,0.2],[0.2,0.6],[0.6,1],[1,1.5],[1.5,2]$$

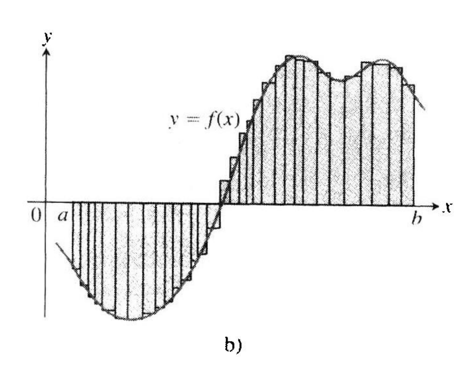



这些子区间的长度为 $\Delta x_1=0.2$，$\Delta x_2=0.4$，$\Delta x_3=0.4$，$\Delta x_4=0.5$. 最长子区间的长度是 0.5，所以划分的范数为 $\|P\|=0.5$. 在本例中有两个子区间具有这个长度. ■

同闭区间 $[a,b]$ 的一个划分相关的任何黎曼和，定义一个矩形集合，它们逼近介于连续函数 $f$ 的图形和 $x$ 轴之间的区域. 正如从图 5.10 得到的启示，当划分的范数趋近零时，导致矩形集合以递增的精度逼近这个区域. 在下一节将会看到，如果 $f$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，那么，无论怎样选择划分及其子区间中的点 $c_k$ 来构造黎曼和，当由划分的范数控制的子区间宽度趋近零时，它趋近一个极限值.




a)




b)

图 5.10 图 5.9 的曲线和用 $[a,b]$ 的更细划分建立的矩形集合：划分越细，各个矩形的底边越小，它们以递增的精度逼近 $f$ 的图形和 $x$ 轴之间的区域

## 习题 5.2

在习题 1 ~ 6 中，把和式写成不用 $\Sigma$ 记号的形式. 然后计算它们的值.

**1.** $\sum_{k=1}^{2}\frac{6k}{k+1}$.　　**2.** $\sum_{k=1}^{3}\frac{k-1}{k}$.

**3.** $\sum_{k=1}^{4}\cos k\pi$.　　**4.** $\sum_{k=1}^{5}\sin k\pi$.

**5.** $\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k+1}\sin\frac{\pi}{k}$.　　**6.** $\sum_{k=1}^{4}(-1)^{k}\cos k\pi$.

**7.** 下列哪个 $\Sigma$ 记法表示 $1+2+4+8+16+32$？

**(a)** $\sum_{k=1}^{6}2^{k-1}$.　**(b)** $\sum_{k=0}^{5}2^{k}$.　**(c)** $\sum_{k=-1}^{4}2^{k+1}$.

**8.** 下列哪个 $\Sigma$ 记法表示 $1-2+4-8+16-32$？

**(a)** $\sum_{k=1}^{6}(-2)^{k-1}$.　**(b)** $\sum_{k=0}^{5}(-1)^{k}2^{k}$.

**(c)** $\sum_{k=-2}^{3}(-1)^{k+1}2^{k+2}$.

**9.** 下列哪个算式同另外两个算式是不等价的？

**(a)** $\sum_{k=2}^{4}\frac{(-1)^{k-1}}{k-1}$.　**(b)** $\sum_{k=0}^{2}\frac{(-1)^{k}}{k+1}$.

**(c)** $\sum_{k=-1}^{1}\frac{(-1)^{k}}{k+2}$.

**10.** 哪个下列算式同另外两个算式是不等价的？

**(a)** $\sum_{k=1}^{4}(k-1)^{2}$.　**(b)** $\sum_{k=-1}^{3}(k+1)^{2}$.

**(c)** $\sum_{k=-3}^{-1}k^{2}$.

在习题 11 ~ 16 中，用 $\Sigma$ 记法表示和式. 答案

的形式将取决于你对求和下限的选择.

**11.** $1+2+3+4+5+6$.

**12.** $1+4+9+16$.

**13.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$.

**14.** $2+4+6+8+10$.

**15.** $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$.

**16.** $-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}-\frac{5}{5}$.

**17.** 假设 $\sum_{k=1}^{n} a_k=-5$ 及 $\sum_{k=1}^{n} b_k=6$. 求下列和式的值:

(**a**) $\sum_{k=1}^{n} 3a_k$. (**b**) $\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{6}$.

(**c**) $\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k)$. (**d**) $\sum_{k=1}^{n} (a_k-b_k)$.

(**e**) $\sum_{k=1}^{n} (b_k-2a_k)$.

**18.** 假设 $\sum_{k=1}^{n} a_k=0$ 及 $\sum_{k=1}^{n} b_k=1$. 求下列和式的值:

(**a**) $\sum_{k=1}^{n} 8a_k$. (**b**) $\sum_{k=1}^{n} 250b_k$.

(**c**) $\sum_{k=1}^{n} (a_k+1)$. (**d**) $\sum_{k=1}^{n} (b_k-1)$.

在习题 19 ~ 28 中,计算和式的值.

**19.** (**a**) $\sum_{k=1}^{10} k$. (**b**) $\sum_{k=1}^{10} k^2$. (**c**) $\sum_{k=1}^{10} k^3$.

**20.** (**a**) $\sum_{k=1}^{13} k$. (**b**) $\sum_{k=1}^{13} k^2$. (**c**) $\sum_{k=1}^{13} k^3$.

**21.** $\sum_{k=1}^{7} (-2k)$. **22.** $\sum_{k=1}^{5} \frac{\pi k}{15}$.

**23.** $\sum_{k=1}^{6} (3-k^2)$. **24.** $\sum_{k=1}^{6} (k^2-5)$.

**25.** $\sum_{k=1}^{5} k(3k+5)$. **26.** $\sum_{k=1}^{7} k(2k+1)$.

**27.** $\sum_{k=1}^{5} \frac{k^3}{225}+\left(\sum_{k=1}^{5} k\right)^3$. **28.** $\left(\sum_{k=1}^{7} k\right)^2-\sum_{k=1}^{7} \frac{k^3}{4}$.

在习题29 ~ 32 中,画出每个函数$f(x)$ 在给定区间上的图形. 把区间划分成 4 个长度相等的子区间. 然后在图形中添加同黎曼和 $\sum_{n=1}^{4} f(c_k)\Delta x_k$ 相联系的矩形的草图,假设 $c_k$ 是第 $k$ 个子区间的(**a**) 左端点,(**b**) 右端点,(**c**) 中点.(对每个矩形集合分别画出单图.)

**29.** $f(x)=x^2-1,[0,2]$.

**30.** $f(x)=-x^2,[0,1]$.

**31.** $f(x)=\sin x,[-\pi,\pi]$.

**32.** $f(x)=\sin x+1,[-\pi,\pi]$.

**33.** 求划分 $P=\{0,1.2,1.5,2.3,2.6,3\}$ 的范数.

**34.** 求划分 $P=\{-2,-1.6,-0.5,0,0.8,1\}$ 的范数.

在习题 35 ~ 40 中,对于函数$f(x)$ 通过把区间 $[a,b]$ 划分成 $n$ 个长度相等的子区间获得求上和的公式. 然后取这些和当 $n\to\infty$ 时的极限,计算区间 $[a,b]$ 上曲线下方区域的面积.

**35.** $f(x)=1-x^2$,在区间$[0,1]$ 上.

**36.** $f(x)=2x$,在区间$[0,3]$ 上.

**37.** $f(x)=x^2+1$,在区间$[0,3]$ 上.

**38.** $f(x)=3x^2$,在区间$[0,1]$ 上.

**39.** $f(x)=x+x^2$,在区间$[0,1]$ 上.

**40.** $f(x)=3x+2x^2$,在区间$[0,1]$ 上.

## 5.3 定积分

对于定义在闭区间$[a,b]$上的函数, 在 5.2 节利用具有相同宽度(或长度)$(b-a)/n$ 的 $n$ 个子区间, 考察了有限和的极限. 在这一节, 我们考虑更为一般的黎曼和在$[a,b]$的划分的范数趋近零时的极限. 对于一般的黎曼和, 无需要求划分的子区间宽度是相等的. 这样, 黎曼和的极限过程导致闭区间$[a,b]$上函数$f(x)$的定积分定义.

### 5.3.1 黎曼和的极限

定积分的定义建立在这样的思想基础上, 对于某些函数而言, 当区间$[a,b]$的划分的范数趋近零时, 相应黎曼和的值趋近某个一个极限值 $I$. 我们用这种收敛概念表明, 只要划分的范数充分小(所以它的全部子区间具有足够小的宽度), 黎曼和将趋近这个数 $I$. 我们引进符号 $\varepsilon$ 作为指示黎曼和同 $I$ 必须如何接近的小正数, 同时引进符号 $\delta$ 作为指示划分的范数必须如何小才能使黎曼和收敛的第二个小正数. 下面给出定积分的确切定义.

> **定义**　令$f(x)$是定义在闭区间$[a,b]$上的函数,称数$I$是**$f$在$[a,b]$上的定积分**,以及$I$是黎曼和$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$的极限,是指满足下述条件:
>
> 给定任意数$\varepsilon>0$,存在一个相应的数$\delta>0$,使得对于$[a,b]$的每个具有$\|P\|<\delta$的划分$P=\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$,以及在$[x_{k-1}, x_k]$中选取的任意$c_k$,不等式
>
> $$\left|\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k - I\right| < \varepsilon$$
>
> 成立.

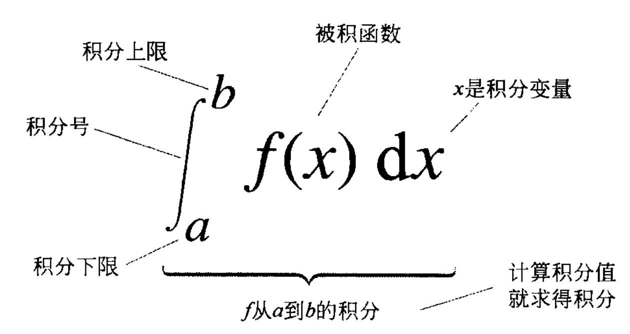
莱布尼茨为定积分引进一种记号,捕捉定积分作为黎曼和极限的结构. 他想象定积分是有限和$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$变成函数值$f(x)$乘"无穷小"子区间宽度$\mathrm{d}x$的无限和. 求和符号$\sum$在极限情况下用积分符号$\int$代替,它的来源是字母"$S$". 函数值$f(c_k)$用函数值$f(x)$的连续选择代替. 子区间宽度$\Delta x_k$变成微分$\mathrm{d}x$. 这就仿佛我们是在求$f(x)\cdot\mathrm{d}x$形式的乘积当$x$由$a$变化到$b$时的全部和. 尽管这个记号捕捉一个积分的创建过程,但是黎曼和的定义才给出定积分的确切含义.

### 5.3.2　定积分的记号和存在性

在定积分的定义中,表示数$I$的符号是

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

读作"$x$的函数$f$ $\mathrm{d}x$从$a$到$b$的积分",有时也读成"$x$的函数$f$关于$x$从$a$到$b$的积分". 积分符号中的各个组成部分也有它们的名称:




当积分定义的条件满足时,就说$f$在$[a,b]$上的黎曼和**收敛**于定积分$I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$和$f$在$[a,b]$上是**可积的**. 对于范数趋近零的划分$P$有许多选择,对于每个划分的点$c_k$也有多种选择. 无论作什么样的选择,当我们总是得到相同的极限$I$时,存在定积分. 如果极限存在,把它写成定积分

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

当每个划分具有$n$个相等的子区间时,每个子区间的宽度$\Delta x=(b-a)/n$,也写成

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x = I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

在划分的范数趋近零和子区间数目趋近无穷大时,任何黎曼和总是取得极限.

函数在任何特定区间上的定积分的值取决于函数本身,同选择什么字母代表它的自变量无

关. 如果决定用 $t$ 或者 $u$ 代替 $x$，就把积分写成

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad 或 \quad \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u \quad 而不用 \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

无论怎样书写积分，它总是定义为黎曼和的极限的同一个数. 由于选用什么字母是无关紧要的，我们把积分变量称为**虚变量**.

由于在取黎曼和的极限中有着如此多的选择，要证明存在这样一个极限似乎是很困难的. 然而，结论是无论作出什么样的选择，同连续函数联系的黎曼和收敛于同一个极限.

> **定理 1（定积分存在定理）** 连续函数是可积的. 就是说，如果函数 $f$ 在区间 $[a,b]$ 上是连续的，那么它在 $[a,b]$ 上的定积分存在.

按照极值定理(4.1 节定理 1)，当 $f$ 为连续函数时，可以选择 $c_k$ 使 $f(c_k)$ 取 $f$ 在 $[x_{k-1},x_k]$ 上的最大值，给出一个上和，可以选择 $c_k$ 使 $f(c_k)$ 取 $f$ 在 $[x_{k-1},x_k]$ 上的最小值，给出一个下和. 可以挑选 $[x_{k-1},\ x_k]$ 的中点、右端点 $x_k$ 或者某个随机点作为 $c_k$. 可以取相等宽度或者可变宽度的划分. 我们在每一种情形得到 $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ 当 $\|P\|\to 0$ 时的同一个极限. 定理 1 中隐含的思想是同划分联系的黎曼和既不大于划分的上和,也不小于划分的下和. 上和与下和当 $\|P\|\to 0$ 时收敛于同一个极限. 所有其他的黎曼和介于上和与下和之间,并且取相同的极限. 定理 1 的证明涉及遵循这种思想对函数、划分以及极限进行细致分析. 定理留待高等微积分教程证明. 习题 80 和 81 给出这种证明的指示.

关于如何计算定积分，定理 1 没有作出任何说明. 在 5.4 节将通过定积分同求反导数过程的联系建立一种计算方法.

### 5.3.3 可积函数与不可积函数

定理 1 向我们表明，区间 $[a,b]$ 上的连续函数在区间上是可积的. 非连续函数可能是可积的，也可能是不可积的. 可积的非连续函数包括 $[a,b]$ 上的增函数，以及分段连续函数(在本章后面补充和提高习题 11 ~ 18 中定义). (分段连续函数在区间 $[a,b]$ 内除开有限个点外是连续的. )缺乏可积性的函数必定是极端不连续的，以致介于函数图形同 $x$ 轴之间的区域不能用逐渐增加的小矩型的面积之和逼近. 下面举出一个不可积函数的例子.

**例 1** 函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & 若\ x\ 为有理数\\ 0, & 若\ x\ 为无理数\end{cases}$$

在区间 $[0,\ 1]$ 上不存在黎曼积分. 支持这个结论的根据是这样一个事实，在任何两个数之间同时存在有理数和无理数. 因此，这个函数在 $[0,\ 1]$ 上急剧地上下跳变，以致对于它的图形之下和 $x$ 轴之上的区域不能用矩形集合逼近，无论矩形的宽度多么小. 事实上，我们证明上和逼近与下和逼近收敛于不同的极限值.

如果选择区间 $[0,1]$ 的一个划分 $P$，并且挑选 $c_k$ 为 $f$ 在 $[x_{k-1},\ x_k]$ 上取最大值的点，那么对应的黎曼和是

$$U=\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}(1)\Delta x_k=1$$

这是因为每个子区间 $[x_{k-1},x_k]$ 都含有有理数 $c_k$，在其上 $f(c_k)=1$. 注意，划分中的子区间长度之和为 1，即 $\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=1$. 所以每个这样的黎曼和等于 1,而使用这种选择的黎曼和的极限等于 1.

另一方面，如果挑选 $c_k$ 为 $f$ 在 $[x_{k-1},x_k]$ 上取最小值的点，那么黎曼和是

$$L = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}(0)\Delta x_k = 0$$

这是由于每个子区间 $[x_{k-1},x_k]$ 都含有无理数 $c_k$，在其上 $f(c_k)=0$. 使用这种选择的黎曼和的极限等于零.

既然黎曼和的极限依赖于对 $c_k$ 的选择，所以函数 $f$ 是不可积的. ■

### 5.3.4 定积分的性质

在把 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 定义成和式 $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ 的极限时，我们是从左至右移动经过区间 $[a,b]$ 的. 如果改为从右至左移动，从 $x_0=b$ 开始到 $x_n=a$ 结束，那么会有什么结果?这时，黎曼和中的每个 $\Delta x_k$ 将改变其符号，因为 $x_k-x_{k-1}$ 现在为负数面非正数. 在每个子区间内采用同样的选择，任何黎曼和将改变符号，从而改变作为黎曼和极限的积分 $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$ 的符号. 由于在前面没有说明反向积分的含义，由此引出定义

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

积分的另外一个扩展是当 $a=b$ 时在宽度为零的区间上的积分. 由于 $f(c_k)\Delta x_k$ 在区间宽度 $\Delta x_k=0$ 时为零，我们定义

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

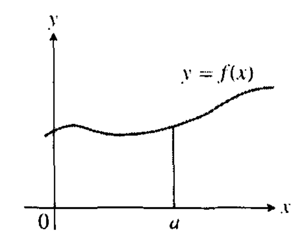
下面的定理2说明积分的7种性质，其中包括前面讨论的两种性质，把它们作为积分遵循的法则给出. 这些法则在计算积分的过程中是非常有用的. 为了简化计算我们将要反复引用它们.

法则(2)至法则(7)带有显示在图5.11中的几何解释. 图中的那些函数是正值函数，但是法则适用于一般的可积函数.

**定理2** 当 $f$ 和 $g$ 是可积函数时，定积分遵守表5.3中的法(1)至法则(7).

**表5.3 定积分遵守的法则**

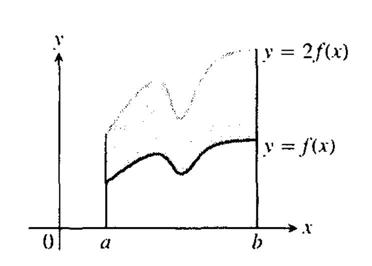
| 积分法则 | 公式 |
|---|---|
| (1) 积分顺序 | $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ （定义） |
| (2) 零宽度区间积分 | $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$ （也是定义） |
| (3) 常数倍积分 | $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ （$k$ 是任意数） |
| | $\int_a^b -f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ （$k=-1$） |
| (4) 和与差积分 | $\int_a^b (f(x)\pm g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ |
| (5) 积分的可加性 | $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ |
| (6) 积分的最大值-最小值不等式 | 若 $f$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 $\max f$ 和最小值 $\min f$，则 |
| | $\min f\cdot(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \max f\cdot(b-a)$ |
| (7) 优势积分 | 在 $[a,b]$ 上 $f(x)\geqslant g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ |
| | 在 $[a,b]$ 上 $f(x)\geqslant 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$ （特例） |




a) 零宽度区间积分：

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

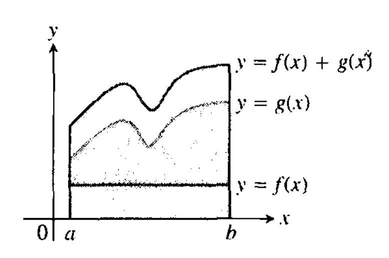
(一点之下的面积为0)




b) 常数倍积分：

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

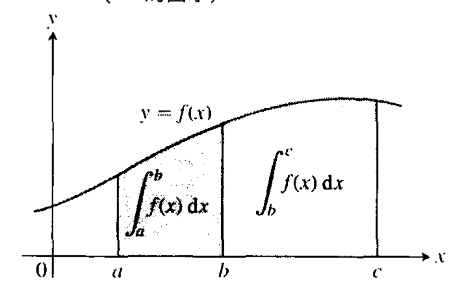
(k=2的图示)




c) 和积分：

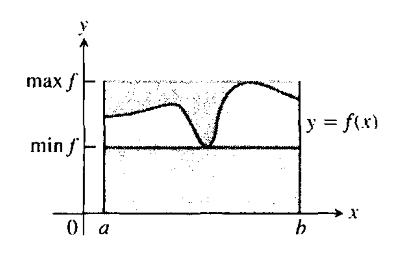
$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(面积相加)



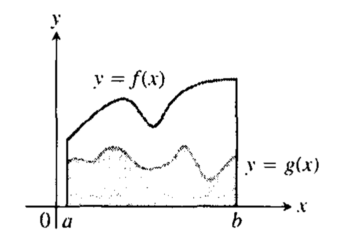

d) 定积分的可加性：

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$




e) 积分的最大值-最小值不等式：

$$\min f\cdot(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \max f\cdot(b-a)$$




f) 优势积分：

在$[a,b]$上 $f(x) \geqslant g(x)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

图 5.11　表 5.3 中法则(2) ~ (7)的几何解释

表 5.3 中的法则(1)和(2)是积分的定义，至于法则(3)至法则(7)则是必须证明的. 下面给出这些法则之一的证明. 对于表中的其他法则可以给出类似的证明.

**法则(6)的证明**　法则(6)说明$f$在$[a,b]$上的积分不会小于$f$的最小值同区间长度的乘积，同时不会大于$f$的最大值同区间长度的乘积. 原因在于，对于区间$[a,b]$的每一种划分以及对于点$c_k$的每一个选择，有

$$\min f\cdot(b-a) = \min f\cdot\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k \quad \left(\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = b-a\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \min f \cdot \Delta x_k \quad (\text{常数倍法则})$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \quad (\min f \leqslant f(c_k))$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \max f \cdot \Delta x_k \quad (f(c_k) \leqslant \max f)$$
$$= \max f \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \quad (\text{常数倍法则})$$
$$= \max f \cdot (b - a)$$

总之，$f$在$[a,b]$上的所有黎曼和满足不等式

$$\min f \cdot (b-a) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \leqslant \max f \cdot (b-a)$$

因此，作为它们的极限的积分也满足同样的不等式. ■

**例 2** 假设

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 5, \quad \int_{1}^{4} f(x)\,dx = -2, \quad \int_{-1}^{1} h(x)\,dx = 7$$

那么有

(1) $\int_{4}^{1} f(x)\,dx = -\int_{1}^{4} f(x)\,dx = -(-2) = 2.$ （法则(1)）

(2) $\int_{-1}^{1} [2f(x) + 3h(x)]\,dx = 2\int_{-1}^{1} f(x)\,dx + 3\int_{-1}^{1} h(x)\,dx$ （法则(3)和(4)）

$= 2(5) + 3(7) = 31.$

(3) $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{4} f(x)\,dx = 5 + (-2) = 3.$ （法则(5)） ■

**例 3** 证明$\int_{0}^{1} \sqrt{1+\cos x}\,dx$ 的值小于或者等于$\sqrt{2}$.

**解** 定积分的最大值-最小值不等式(法则(6))说明，$\min f \cdot (b-a)$ 是$\int_{a}^{b} f(x)\,dx$的积分值的一个下界，而 $\max f \cdot (b-a)$ 是一个上界. $\sqrt{1+\cos x}$ 在$[0,1]$上的最大值是$\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$，所以

$$\int_{0}^{1} \sqrt{1+\cos x}\,dx \leqslant \sqrt{2} \cdot (1-0) = \sqrt{2}$$ ■

### 5.3.5 非负函数图形下方的面积

对于以曲线为边界的区域，我们吸取用越来越多的矩形逼近一个区域的思想，使区域面积的概念精确化. 非负连续函数图形下方的面积用一个定积分定义.

> **定义** 如果，$y = f(x)$是闭区间$[a,b]$上的非负可积函数，那么$[a,b]$**上曲线** $y = f(x)$ **下方的面积**是$f$从$a$到$b$的积分
>
> $$A = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

对于以任何连续函数的图形为边界的区域，我们首次有了对区域面积的严格定义. 现在把这个定义应用到下面的简单例子计算直线下方的面积，其中可以证实新的面积定义同以前的面积概念是一致的.

**例 4** 计算$\int_{0}^{b} x\,dx$ 并且求区间$[0,b]$上在 $y = x$ 之下的面积$A$，其中 $b > 0$.

**解** 关注的区域是图 5.12 所示的三角形. 我们用两种方法计算它的面积.

**(a)** 为了计算作为黎曼和的极限的定积分，对于范数趋近零的划分计算 $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$. 定理 1 表明，如何选择划分或者点 $c_k$ 是无关紧要的，只要范数趋近零. 所有选择都给出完全相同的极限. 所以考虑把区间 $[0,b]$ 细分成同样宽度 $\Delta x=(b-0)/n=b/n$ 的 $n$ 个子区间，并且在每个子区间内选取右端点作为 $c_k$. 划分是

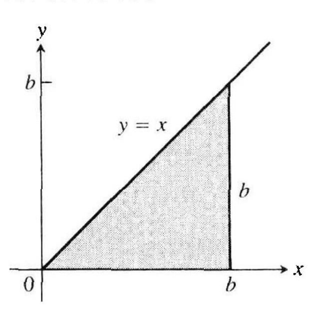


图 5.12 例 4 中的区域是一个三角形

$$P=\left\{0,\frac{b}{n},\frac{2b}{n},\frac{3b}{n},\cdots,\frac{nb}{n}\right\}$$

而 $c_k=\frac{kb}{n}$. 所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x &= \sum_{k=1}^{n}\frac{kb}{n}\cdot\frac{b}{n} \quad (f(c_k)=c_k)\\ &=\sum_{k=1}^{n}\frac{kb^2}{n^2}\\ &=\frac{b^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k \quad (\text{常数倍法则})\\ &=\frac{b^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{前 } n \text{ 个整数之和})\\ &=\frac{b^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 和 $\|P\|\to 0$ 时，右端最后这个表达式具有极限 $b^2/2$. 因此，

$$\int_0^b x\mathrm{d}x=\frac{b^2}{2}$$

**(b)** 由于这个面积等于一个非负函数的定积分，可以利用底宽为 $b$ 和高为 $y=b$ 的三角形的面积公式，快速推导出这个定积分. 这个面积是 $A=(1/2)b\cdot b=b^2/2$. 再次得到 $\int_0^b x\mathrm{d}x=b^2/2$ 的结论. ■

例 4 可以推广到 $f(x)=x$ 在任何闭区间 $[a,b]$ 上的积分，其中 $0<a<b$：

$$\begin{aligned}\int_a^b x\,\mathrm{d}x &= \int_a^0 x\,\mathrm{d}x+\int_0^b x\,\mathrm{d}x \quad (\text{法则}(5))\\ &=-\int_0^a x\,\mathrm{d}x+\int_0^b x\,\mathrm{d}x \quad (\text{法则}(1))\\ &=-\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2} \quad (\text{例 }4)\end{aligned}$$

最后，得到对于积分 $f(x)=x$ 的下述法则：

$$\int_a^b x\mathrm{d}x=\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2},\quad a<b \qquad (1)$$

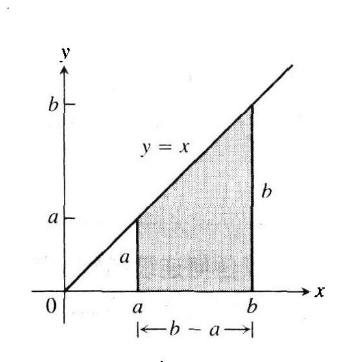


图 5.13 这个梯形区域的面积为 $A=(b^2-a^2)/2$

这个计算公式给出图 5.13 所示梯形区域的面积. 公式(1)

在 $a$ 和 $b$ 为负数时仍然成立. 当$a<b<0$ 时，定积分值$(b^2-a^2)/2$ 是一个负数，它是从 $x$ 轴下降到直线 $y=x$ 的梯形面积的负值. 当 $a<0$ 和 $b>0$ 时，公式(1)同样成立，定积分给出两个面积之间的差，即区间$[0,b]$之上图形下方的面积减去区间$[a,0]$之下图形上方的面积.

下面两个积分公式可以利用同例 4 类似的黎曼和计算证实(习题 75 和 76).

$$\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a),\quad c\text{是任意常数} \tag{2}$$

$$\int_a^b x^2\mathrm{d}x = \frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3},\quad a<b \tag{3}$$

### 5.3.6 再讨论连续函数的平均值

在 5.1 节我们非形式地引入了非负连续函数 $f$ 在区间$[a,b]$上的平均值，导致把这个平均值定义成用$(b-a)$除 $y=f(x)$图形下方的面积. 这个结果用积分记号写成

$$\text{平均值} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

利用这个公式可以给出任何连续函数(或者可微函数)的平均值的确切定义，无论它们是正值函数或负值函数，或者是同时取正值和负值的函数.

另一方面，可以采用下面的推理过程. 从 $n$ 个数的算术平均值是这些数之和用 $n$ 相除的算术概念开始. 连续函数 $f$ 在区间$[a,b]$上能够取无穷多值，但是仍然可以按顺序对它们抽样. 我们把$[a,b]$细分成 $n$ 个宽度同为 $\Delta x=(b-a)/n$ 的子区间，并且在每个子区间内的一点 $c_k$ 计算 $f$ 的值(见图 5.14). $n$ 个抽样值的平均值为

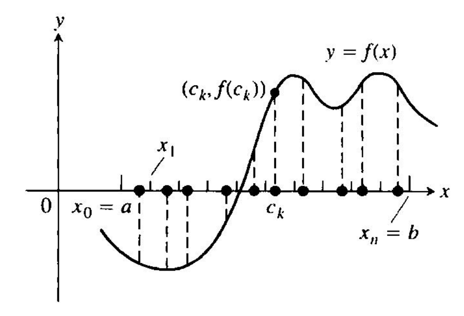


图 5.14 函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的抽样值

$$\begin{aligned}\frac{f(c_1)+f(c_2)+\cdots+f(c_n)}{n} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\\ &= \frac{\Delta x}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\quad\left(\Delta x=\frac{b-a}{n},\quad\text{所以}\frac{1}{n}=\frac{\Delta x}{b-a}\right)\\ &= \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x\end{aligned}$$

这个平均值是用$(b-a)$除 $f$ 在$[a,b]$上的黎曼和得到的. 当增加样本数量并且令划分的范数趋近零时，平均值趋近 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. 两种观点都导致下述定义.

**定义** 如果 $f$ 是区间$[a,b]$上的可积函数，那么它在$[a,b]$上的**平均值**(也称为**均值**)是

$$\operatorname{av}(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

**例 5** 求 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ 在区间$[-2,\ 2]$上的平均值.

**解** 我们知道，$f(x)=\sqrt{4-x^2}$ 作为一个函数，它的图形是半径为 2 以原点为圆心的上半圆(见图 5.15).

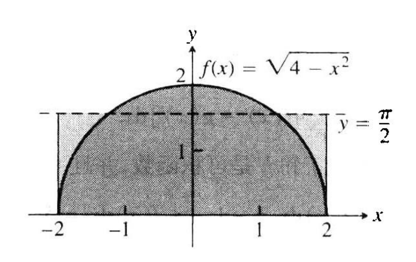


图 5.15 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ 在$[-2,\ 2]$上的平均值为 $\pi/2$(例 5)

这个从 $-2$ 到 2 的 $x$ 轴与半圆之间的面积可以利用几何公式计算：

$$\text{面积} = \frac{1}{2}\cdot\pi r^2 = \frac{1}{2}\cdot\pi(2)^2 = 2\pi$$

因为 $f$ 是非负函数，这个面积也是函数 $f$ 从 $-2$ 到 2 的积分值：

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = 2\pi$$

因此，$f$ 的平均值为

$$\text{av}(f) = \frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{1}{4}(2\pi) = \frac{\pi}{2}$$ ■

## 习题 5.3

在习题 1 ~ 8 中，把极限表示成定积分.

**1.** $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2\Delta x_k$，其中 $P$ 是 $[0,2]$ 的划分.

**2.** $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} 2c_k^3\Delta x_k$，其中 $P$ 是 $[-1,0]$ 的划分.

**3.** $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} (c_k^2-3c_k)\Delta x_k$，其中 $P$ 是 $[-7,5]$ 的划分.

**4.** $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{c_k}\right)\Delta x_k$，其中 $P$ 是 $[1,4]$ 的划分.

**5.** $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1-c_k}\Delta x_k$，其中 $P$ 是 $[2,3]$ 的划分.

**6.** $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{4-c_k^2}\Delta x_k$，其中 $P$ 是 $[0,1]$ 的划分.

**7.** $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} (\sec c_k)\Delta x_k$，其中 $P$ 是 $[-\pi/4,0]$ 的划分.

**8.** $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} (\tan c_k)\Delta x_k$，其中 $P$ 是 $[0,\pi/4]$ 的划分.

**9.** 假定 $f$ 和 $g$ 是可积函数，并且

$$\int_1^2 f(x)\,dx = -4,\quad \int_1^5 f(x)\,dx = 6,\quad \int_1^5 g(x)\,dx = 8$$

利用表 5.3 中的法则求下列积分：

**(a)** $\int_2^2 g(x)\,dx$.　　**(b)** $\int_5^1 g(x)\,dx$.

**(c)** $\int_1^2 3f(x)\,dx$.　　**(d)** $\int_2^5 f(x)\,dx$.

**(e)** $\int_1^5 [f(x)-g(x)]\,dx$.

**(f)** $\int_1^5 [4f(x)-g(x)]\,dx$.

**10.** 假定 $f$ 和 $h$ 是可积函数，并且

$$\int_1^9 f(x)\,dx = -1,\quad \int_7^9 f(x)\,dx = 5,\quad \int_7^9 h(x)\,dx = 4$$

利用表 5.3 中的法则求下列积分：

**(a)** $\int_1^9 -2f(x)\,dx$.　　**(b)** $\int_7^9 [f(x)+h(x)]\,dx$.

**(c)** $\int_7^9 [2f(x)-3h(x)]\,dx$.　　**(d)** $\int_9^1 f(x)\,dx$.

**(e)** $\int_1^7 f(x)\,dx$.　　**(f)** $\int_9^7 [h(x)-f(x)]\,dx$.

**11.** 假定 $\int_1^2 f(x)\,dx = 5$. 求下列积分：

**(a)** $\int_1^2 f(u)\,du$.　　**(b)** $\int_1^2 \sqrt{3}f(z)\,dz$.

**(c)** $\int_2^1 f(t)\,dt$.　　**(d)** $\int_1^2 [-f(x)]\,dx$.

**12.** 假定 $\int_{-3}^{0} g(t)\,dt = \sqrt{2}$. 求下列积分：

**(a)** $\int_0^{-3} g(t)\,dt$.　　**(b)** $\int_{-3}^{0} g(u)\,du$.

**(c)** $\int_{-3}^{0} [-g(x)]\,dx$.　　**(d)** $\int_{-3}^{0} \frac{g(r)}{\sqrt{2}}\,dr$.

**13.** 假定 $f$ 是可积函数，并且 $\int_0^3 f(z)\,dz = 3$，$\int_0^4 f(z)\,dz = 7$. 求下列积分：

**(a)** $\int_3^4 f(z)\,dz$.　　**(b)** $\int_4^3 f(t)\,dt$.

**14.** 假定 $n$ 是可积函数，并且 $\int_{-1}^{1} h(r)\,dr = 0$，$\int_{-1}^{3} h(r)\,dr = 6$. 求下列积分：

**(a)** $\int_1^3 h(r)\,dr$.　　**(b)** $-\int_3^1 h(u)\,du$.

在习题 15 ~ 22 中，画出被积函数的图形，并且利用面积求积分.

**15.** $\int_{-2}^{4}\left(\frac{x}{2}+3\right)dx$.　　**16.** $\int_{1/2}^{3/2}(-2x+4)\,dx$.

**17.** $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$.　　**18.** $\int_{-4}^{0}\sqrt{16-x^2}\,dx$.

**19.** $\int_{-2}^{1}|x|\,dx$.　　**20.** $\int_{-1}^{1}(1-|x|)\,dx$.

**21.** $\int_{-1}^{1}(2-|x|)\,dx$.　　**22.** $\int_{-1}^{1}(1+\sqrt{1-x^2})\,dx$.

在习题 23 ~ 26 中，利用面积求积分.

**23.** $\int_0^b \frac{x}{2}\,dx$，　$b>0$.　　**24.** $\int_0^b 4x\,dx$，　$b>0$.

**25.** $\int_a^b 2s\,ds$, $0<a<b$. **26.** $\int_a^b 3t\,dt$, $0<a<b$.

在习题27 ~ 38中,利用公式(1) ~ (3)求积分.

**27.** $\int_1^{\sqrt{2}} x\,dx$. **28.** $\int_{0.5}^{2.5} x\,dx$.

**29.** $\int_{\pi}^{2\pi} \theta\,d\theta$. **30.** $\int_{\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}} r\,dr$.

**31.** $\int_0^{\sqrt[3]{7}} x^2 dx$. **32.** $\int_0^{0.3} s^2 ds$.

**33.** $\int_0^{1/2} t^2 dt$. **34.** $\int_0^{\pi/2} \theta^2 d\theta$.

**35.** $\int_a^{2a} x\,dx$. **36.** $\int_a^{\sqrt{3}a} x\,dx$.

**37.** $\int_0^{\sqrt[3]{b}} x^2 dx$. **38.** $\int_0^{3b} x^2 dx$.

在习题 39 ~ 50 中,利用表 5.3 中的法则和公式(1) ~ (3) 求积分.

**39.** $\int_3^1 7dx$. **40.** $\int_0^{-2} \sqrt{2}dx$.

**41.** $\int_0^2 5x\,dx$. **42.** $\int_3^5 \frac{x}{8}\,dx$.

**43.** $\int_0^2 (2t-3)\,dt$. **44.** $\int_0^{\sqrt{2}} (t-\sqrt{2})\,dt$.

**45.** $\int_2^1 \left(1+\frac{z}{2}\right)\,dz$. **46.** $\int_3^0 (2z-3)\,dz$.

**47.** $\int_1^2 3u^2 du$. **48.** $\int_{1/2}^1 24\,u^2 du$.

**49.** $\int_0^2 (3x^2+x-5)\,dx$. **50.** $\int_1^0 (3x^2+x-5)\,dx$.

在习题51 ~ 54 中,利用定积分求区间[0,$b$] 上在给定曲线同 $x$ 轴之间的区域的面积.

**51.** $y = 3x^2$. **52.** $y = \pi x^2$.

**53.** $y = 2x$. **54.** $y = \frac{x}{2} + 1$.

在习题55 ~ 62 中,画出函数的图形,并且求函数在给定区间上的平均值.

**55.** $f(x) = x^2 - 1$ 在$[0,\sqrt{3}]$上.

**56.** $f(x) = -\frac{x^2}{2}$ 在[0,3]上.

**57.** $f(x) = -3x^2 - 1$ 在[0,1]上.

**58.** $f(x) = 3x^2 - 3$ 在[0,1]上.

**59.** $f(t) = (t-1)^2$ 在[0,3]上.

**60.** $f(t) = t^2 - t$ 在[-2,1]上.

**61.** $g(x) = |x| - 1$ 在(**a**)[-1,1],(**b**)[1,3] 和 (**c**)[-1,3]上.

**62.** $h(x) = -|x|$ 在(**a**)[-1,0],(**b**)[0,1] 和 (**c**)[-1,1]上.

**63.** 当 $a$ 和 $b$ 取什么值时积分 $\int_a^b (x-x^2)\,dx$ 达到最大值?(提示:被积函数在何处取正值?)

**64.** 当 $a$ 和 $b$ 取什么值时积分 $\int_a^b (x^4-2x^2)\,dx$ 达到最小值?

**65.** 利用最大值-最小值不等式求积分 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ 之值的上界和下界.

**66.** (续习题65)利用最大值-最小值不等式求积分

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^2}\,dx \text{ 和} \int_{0.5}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

之值的上界和下界. 对它们求和改进对积分

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

的估计.

**67.** 证明:积分 $\int_0^1 \sin(x^2)\,dx$ 的值不可能取2.

**68.** 证明:积分 $\int_0^1 \sqrt{x+8}\,dx$ 的值介于 $2\sqrt{2}\approx 2.8$ 与 3 之间.

**69.** **非负值函数的积分** 利用最大值-最小值不等式证明:若 $f$ 是可积函数,则

$$f(x) \geqslant 0,\ a \leqslant x \leqslant b \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$$

**70.** **非正值函数的积分** 证明:若 $f$ 是可积函数,则

$$f(x) \leqslant 0,\ a \leqslant x \leqslant b \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$$

**71.** 利用对于 $x\geqslant 0$ 成立的不等式 $\sin x \leqslant x$,求积分

$$\int_0^1 \sin x\,dx$$

之值的一个上界.

**72.** 不等式 $\sec x \geqslant 1 + \frac{x^2}{2}$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上成立. 利用这个不等式求积分

$$\int_0^1 \sec x\,dx$$

之值的一个下界.

**73.** 如果 av($f$) 实际上是可积函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的标准取值,那么数 av($f$) 在$[a,b]$上应具有与 $f$ 相同的积分. 是这样吗?就是说,

$$\int_a^b \mathrm{av}(f)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

成立吗?提出答案的理由.

**74.** 如果在区间$[a,b]$上的可积函数 $f$ 和 $g$ 的平均值遵守下列法则,那将是美妙的:

(**a**) $\mathrm{av}(f+g) = \mathrm{av}(f) + \mathrm{av}(g)$.

(**b**) $\mathrm{av}(kf) = k\,\mathrm{av}(f)$ (对任何数 $k$).

(c) $\text{av}(f) \leqslant \text{av}(g)$，如果在$[a,b]$上$f(x) \leqslant g(x)$.

这些法则究竟是否保持？提出答案的理由.

**75.** 像在例 4(a)中那样，利用黎曼和的极限证实公式(2).

**76.** 像在例 4(a)中那样，利用黎曼和的极限证实公式(3).

**77. 增函数的上和与下和**

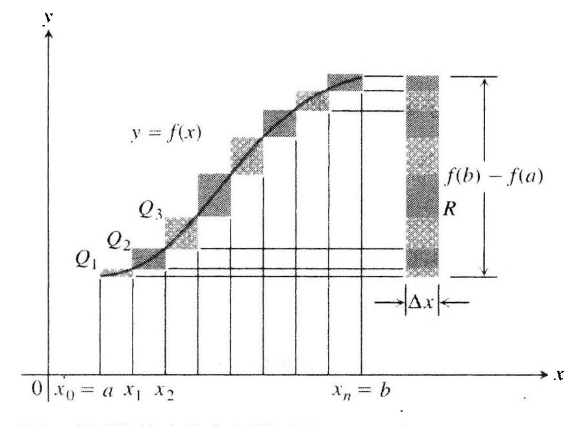
(a)假定连续函数$f(x)$的图形当$x$从左至右越过区间$[a,b]$移动时稳定上升. 令$P$是把$[a,b]$分成长度为$\Delta x=(b-a)/n$的$n$个子区间的划分. 参考附图证明，$f$在这个划分上的上和与下和之差从图形上可以表示成一个矩形$R$的面积，它的尺寸为$[f(b)-f(a)]\times\Delta x$.（提示：上和与下和的差$U-L$是图中的小矩形的面积之和，这些小矩形的对角线$Q_0Q_1$，$Q_1Q_2$，…，$Q_{n-1}Q_n$处于沿曲线的位置. 当把这些小矩形从水平方向移动到$R$上时没有重叠部分.）

(b)假定$[a,b]$划分的子区间长度$\Delta x_k$是变化而不是相等的. 证明

$$U-L \leqslant |f(b)-f(a)|\Delta x_{\max}$$

其中$\Delta x_{\max}$是$P$的范数，因此有

$$\lim_{\|P\|\to 0}(U-L)=0$$




**78. 减函数的上和与下和**(续习题 77)

(a)像在习题 77 中那样画出连续函数$f(x)$的图形，$f$的值当$x$从左至右越过区间$[a,b]$时稳定下降. 令$P$是把$[a,b]$分成长度相等的子区间的划分. 求一个$U-L$的表达式，同习题 77(a)中求出的$U-L$表达式相似.

(b)假定划分$P$的子区间长度$\Delta x_k$是变化的而不是相等的. 证明习题 77(b)中的不等式

$$U-L \leqslant |f(b)-f(a)|\Delta x_{\max}$$

仍然成立，因此$\lim_{\|P\|\to 0}(U-L)=0$.

**79.** 利用公式

$$\sin h+\sin 2h+\sin 3h+\cdots+\sin mh = \frac{\cos(h/2)-\cos((m+(1/2))h)}{2\sin(h/2)}$$

按下面两个步骤求曲线$y=\sin x$下方从$x=0$到$x=\pi/2$的面积：

(a)把区间$[0,\pi/2]$细分成长度相等的$n$个子区间，并且计算相应的上和$U$；

(b)然后，求$U$当$n\to\infty$和$\Delta x=(b-a)/n\to 0$时的极限.

**80.** 假定$f$是区间$[a,b]$上的连续函数和非负函数，如习题 81 的附图所示. 通过插入所示的点

$$x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_k, \cdots, x_{n-1}$$

把$[a,b]$分成长度为$\Delta x_1=x_1-a$，$\Delta x_2=x_2-x_1$，…，$\Delta x_n=b-x_{n-1}$的$n$个子区间，这些子区间的长度不必是相等的.

(a)如果$m_k=\min\{f(x)\mid x$属于第$k$个子区间$\}$，说明下和

$$L=m_1\Delta x_1+m_2\Delta x_2+\cdots+m_n\Delta x_n$$

同附图 a 中的阴影区域之间的联系.

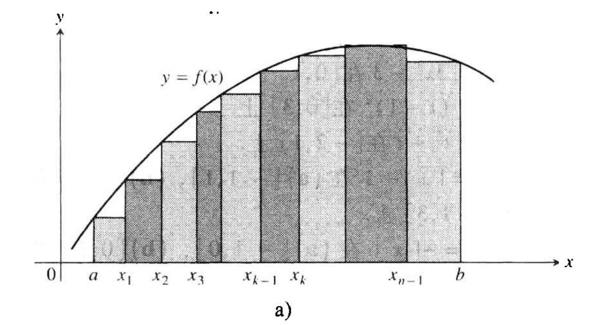
(b)如果$M_k=\max\{f(x)\mid x$属于第$k$个子区间$\}$，说明上和

$$U=M_1\Delta x_1+M_2\Delta x_2+\cdots+M_n\Delta x_n$$

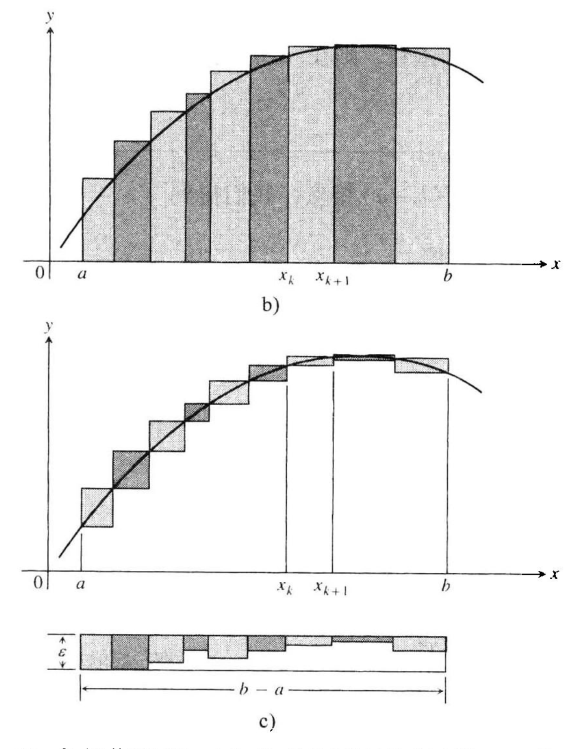
同附图 b 中的阴影区域之间的联系.

(c)说明$U-L$同附图 c 中沿曲线的阴影区域之间的联系.

**81.** 我们称函数$f(x)$在区间$[a,b]$上是**一致连续的**，是指对于给定的任意数$\varepsilon>0$，存在这样一个数$\delta>0$，使得只要$x_1$，$x_2$在$[a,b]$中，并且$|x_1-x_2|<\delta$，就有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 可以证明，在$[a,b]$上的连续函数是一致连续的. 利用这一结果和附图证明：如果$f$是连续函数，并且给定$\varepsilon>0$，那么只要取最大的$\Delta x_k$足够小，就可以使$U-L\leqslant\varepsilon\cdot(b-a)$.




a)




**82.** 如果你以 30 mi/h 的平均速率航行 150 mi，然后在同样的 150 mi 航程上以 50 mi/h 的速率返回. 你航行的平均速率是多少？提出答案的理由.（来源：David H. Pleacher，*The Mathematics Techer*(《数学教师》)，第 85 卷，第 6 期，445-446 页，1992 年 9 月.）

**计算机探究**

如果你的 CAS(计算机代数系统)能够绘制同黎曼和相联系的矩形集合，请用它画出习题 83 ~ 88 中那些同黎曼和有关的收敛于积分的矩形. 在每题中使用长度相等的 $n=4$，10，20，50 个子区间.

**83.** $\int_0^1 (1-x)\,dx = \frac{1}{2}$.  **84.** $\int_0^1 (x^2+1)\,dx = \frac{4}{3}$.

**85.** $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx = 0$.  **86.** $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\, dx = 1$.

**87.** $\int_{-1}^{1} |x|\, dx = 1$.

**88.** $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$ （积分值约为 0.693）.

在习题 89 ~ 96 中，用一种 CAS(计算机代数系统)执行下列处理步骤：

(**a**) 绘制函数在给定区间上的图形.

(**b**) 把区间划分成 $n=100$，200，1000 个长度相等的子区间，并且求函数在每个子区间中点的值.

(**c**) 计算(b)中求出的函数值的平均值.

(**d**) 利用在(c)中对于 $n=1000$ 的划分算出的平均值，求解方程 $f(x)=$(平均值)中的 $x$.

**89.** $f(x)=\sin x$ 在$[0, \pi]$上.

**90.** $f(x)=\sin^2 x$ 在$[0, \pi]$上.

**91.** $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ 在$\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$上.

**92.** $f(x)=x\sin^2\frac{1}{x}$ 在$\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$上.

**93.** $f(x)=xe^{-x}$ 在$[0, 1]$上.

**94.** $f(x)=e^{-x^2}$ 在$[0, 1]$上.

**95.** $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在$[2, 5]$上.

**96.** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 在$\left[0, \frac{1}{2}\right]$上.

## 5.4 微积分基本定理

这一节介绍微积分基本定理，这是积分学的中心定理. 它把积分法同微分法联系起来，使我们能够用被积函数的反导数求积分，而不必再像在 5.3 节那样通过取黎曼和的极限计算积分. 莱布尼茨和牛顿揭示了这种联系，由此引发了数学的全面繁荣，从而促进了其后 200 余年间的科学技术革命.

> 人物传记
>
> 艾萨克·牛顿爵士 (Sir Isaac Newton，1642—1727)

在这个过程中，我们介绍中值定理的积分形式，它是积分学中另外一个重要的定理，并且被用于证明微积分基本定理.

### 5.4.1 定积分的中值定理

在前面一节，我们把连续函数 $f$ 在闭区间$[a,b]$上的平均值定义为积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 除以区间的宽度$(b-a)$. 定积分的中值定理断言，函数 $f$ 在区间上必定至少取一次这个平均值.

图 5.16 显示在区间$[a,b]$上定义的一个正连续函数 $y=f(x)$ 的图形. 中值定理从几何上说明，在$[a,b]$中存在一个数 $c$，以函数的平均值 $f(c)$ 为高和$(b-a)$为底的矩形的面积恰好等于 $f$ 从 $a$ 到 $b$ 的图形下方区域的面积.

**定理 3（定积分的中值定理）** 若$f$是区间$[a,b]$上的连续函数，则在$[a,b]$内的某个点$c$，

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

**证明** 如果在最大值–最小值不等式（表 5.3 法则(6)）用$(b-a)$相除，我们得到

$$\min f \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \max f$$

由于$f$是连续的，连续函数的介值定理(2.6 节)说明$f$必须取介于$\min f$和$\max f$之间的每个值. 因此它必定在$[a,b]$内的某个点$c$取值$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. ■

在这里$f$的连续性是重要前提. 一个不连续的函数可能永远不会等于它的平均值(见图 5.17).

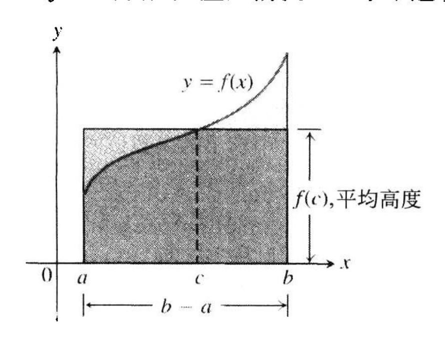



图 5.16 在中值定理中，$f(c)$ 的值在一定意义下是$f$在$[a,b]$上的平均高度(或平均值). 当$f\geqslant 0$时，矩形的面积等于$f$从$a$到$b$的图形下方区域的面积，即

$$f(c)(b-a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

图 5.17 非连续函数不一定取它的平均值

**例 1** 证明：若$f$在$a\neq b$的区间$[a,b]$上连续，且

$$\int_a^b f(x)\,dx=0$$

则在$[a,b]$内至少出现一次$f(x)=0$.

**解** $f$在$[a,b]$上的平均值为

$$\text{av}(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\cdot 0=0$$

由中值定理，$f$在某点$c\in[a,b]$取这个值. ■

### 5.4.2 基本定理第 1 部分

若$f$是在有限区间$I$上的可积函数，则从任何固定数$a\in I$到另外一个数$x\in I$的积分定义一个新函数$F$，它在$x$的值为

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \qquad (1)$$

例如，如果$f$是非负函数，并且$x$位于$a$的右边，那么$F(x)$是$f$图形下方从$a$到$x$的面积(见图 5.18). 变量$x$是一个积分的积分上限，然而$F(x)$就像一个实变量的任何其他实值

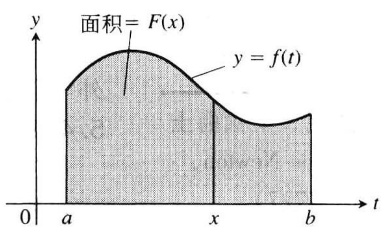



图 5.18 当$f$是非负函数和$x>a$时，由等式(1)定义的函数$F(x)$给出$f$的图形下方从$a$到$x$的面积

函数. 对于每个输入 $x$ 的值，有一个严格定义的输出数值，在这种情况下就是 $f$ 从 $a$ 到 $x$ 的定积分.

等式(1)给出定义新函数的一种方法(参见5.7节)，然而当前它的重要性还在于建立积分和导数之间的联系. 如果 $f$ 是任意连续函数，那么基本定理断言 $F$ 是 $x$ 的可微函数，它的导数就是 $f$ 本身. 在每个 $x$ 值，它断定

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

为了获得对这个结论为什么成立的某些见解，我们考察它隐含的几何意义.

若在区间 $[a,b]$ 上 $f\geqslant 0$，则从导数的定义计算 $F'(x)$ 意味着取差商

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

当 $h\to 0$ 时的极限. 对于 $h>0$，差商的分子由两个面积相减得到，所以它是 $f$ 的图形下方从 $x$ 到 $x+h$ 的面积(见图5.19). 如果 $h$ 很小，可以从图5.19看出，这个面积近似等于高度为 $f(x)$ 和宽度为 $h$ 的矩形的面积. 就是说，

$$F(x+h) - F(x) \approx hf(x)$$

在这个近似近式的两端除以 $h$ 并且令 $h\to 0$，有理由预期

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

这个结果即使在函数 $f$ 不为正值时也是正确的，并且构成微积分基本定理的第1部分.

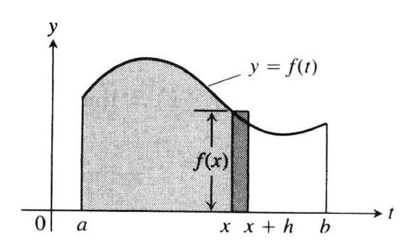



图5.19 在等式(1)中，$F(x)$ 是 $x$ 左边区域的面积，同样 $F(x+h)$ 是 $x+h$ 左边区域的面积，于是差商 $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ 近似等于 $f(x)$，即所示矩形的高度

**定理4(微积分基本定理第1部分)** 若 $f$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则 $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ 在 $[a,b]$ 上是连续的，并且在 $(a,b)$ 上是可微的，而它的导数就是 $f(x)$，即

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \tag{2}$$

在证明定理4之前，我们考察几个例子，以便对定理的论断有更好的认识.

**例2** 利用基本定理求下列函数的导数 $\frac{dy}{dx}$:

**(a)** $y = \int_a^x \cos t\,dt$.  **(b)** $y = \int_x^5 3t\sin t\,dt$.  **(c)** $y = \int_1^{x^2} \cos t\,dt$.

**解**

**(a)** $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x \cos t\,dt = \cos x$ (等式(2)取 $f(t) = \cos t$).

**(b)** $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\int_x^5 3t\sin t\,dt = \frac{d}{dx}\left(-\int_5^x 3t\sin t\,dt\right)$ (表5.3法则(1))

$$= -\frac{d}{dx}\int_5^x 3t\sin t\,dt$$

$= -3x\sin x$. (等式(2)取 $f(t) = 3t\sin t$)

**(c)** 积分上限不是 $x$ 而是 $x^2$，这使 $y$ 成为两个函数

$$y = \int_1^u \cos t\,\mathrm{d}t \quad 和 \quad u = x^2$$

的复合函数. 因此，在求 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 时必须应用链式法则：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_1^u \cos t\,\mathrm{d}t\right)\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos u\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos(x^2)\cdot 2x = 2x\cos x^2$$ ■

**定理 4 的证明** 当 $x$ 和 $x+h$ 在区间 $(a,b)$ 内时，直接对函数 $F(x)$ 应用导数定义证明基本定理. 这意味着写出差商

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \tag{3}$$

并且证明，对于 $(a,\ b)$ 内的每个 $x$，它在 $h\to 0$ 时的极限是数 $f(x)$. 因此，

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \quad （表 5.3 法则(5)）$$

按照定积分中值定理，最后这个表达式在取极限之前的值是 $f$ 在区间 $(x,x+h)$ 内的取值之一. 也就是说，对于这个区间内的某个数 $c$，有

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = f(c) \tag{4}$$

当 $h\to 0$ 时 $x+h$ 趋近 $x$，迫使 $c$ 也趋近 $x$(因为 $c$ 被限制在 $x$ 和 $x+h$ 之间). 由于 $f$ 在 $x$ 是连续的，所以 $f(c)$ 趋近 $f(x)$：

$$\lim_{h\to 0} f(c) = f(x) \tag{5}$$

最后，我们有

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{h\to 0} f(c) \quad （等式(4)）$$

$$= f(x) \quad （等式(5)）$$

如果 $x=a$ 或 $x=b$，那么把式(3)的极限分别解释成用 $h\to 0^+$ 或 $h\to 0^-$ 的单侧极限. 于是，由 3.1 节的定理 1 证明，$F$ 对于 $[a,b]$ 的每个点是连续的. 证明完毕. ■

### 5.4.3 基本定理第 2 部分(求值定理)

现在转到微积分基本定理第 2 部分. 这部分讨论如何求定积分的值而不用计算黎曼和的极限. 我们采用的方法是求反导数，并且在积分的上限和下限计算反导数的值.

> **定理 4（续）(微积分基本定理第 2 部分)** 若函数 $f$ 在区间 $[a,b]$ 的每个点是连续的，而 $F$ 是 $f$ 在 $[a,b]$ 上的任意反导数，则有
>
> $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

**证明** 基本定理第 1 部分表明 $f$ 存在反导数，即

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

因此，如果 $F$ 是 $f$ 的任意反导数，那么对于 $a<x<b$ 有 $F(x)=G(x)+C$，$C$ 是某个常数(根据 4.2 节导数中值定理系 2). 由于 $F$ 和 $G$ 都是 $[a,b]$ 上的连续函数，可以看出，通过取 $x\to a^+$ 和 $x\to b^-$ 的单侧极限，当 $x=a$ 和 $x=b$ 时 $F(x)=G(x)+C$ 也成立.

求 $F(b)-F(a)$ 的值，得到

$$F(b)-F(a)=[G(b)+C]-[G(a)+C]=G(b)-G(a)$$
$$=\int_a^b f(t)\,dt-\int_a^a f(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt-0=\int_a^b f(t)\,dt$$ ■

定理说明，对于计算$f$在$[a,b]$上的定积分，我们需要做的全部工作是：

(1)求$f$的反导数$F$；

(2)计算积分值$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

表示$F(b)-F(a)$的常用记号是

$$F(x)\Big]_a^b \quad 或 \quad \Big[F(x)\Big]_a^b$$

$F$包含一项时用前一种记号表示，$F$包含多项时用后一种记号表示.

**例 3**

**(a)** $\int_0^{\pi}\cos x\,dx=\sin x\Big]_0^{\pi}=\sin\pi-\sin 0=0-0=0.$

**(b)** $\int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\sin^{-1}x\Big]_0^{1/2}=\sin^{-1}\frac{1}{2}-\sin^{-1}0=\frac{\pi}{6}-0=\frac{\pi}{6}.$

**(c)** $\int_1^4\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)dx=\Big[x^{3/2}-2\ln x\Big]_1^4=[4^{3/2}-2\ln 4]-[1^{3/2}-2\ln 1]$

$$=[8-\ln 16]-[1-0]=7-\ln 16.$$ ■

例3中采用的方法比用黎曼和计算容易得多.

基本定理的结论说明几件事：首先，等式(2)可以改写成

$$\frac{d}{dt}\int_a^x f(t)\,dt=\frac{dF}{dx}=f(x)$$

这表示如果先对函数$f$积分，然后对结果微分，那么就回复到函数$f$. 其次，等式

$$\int_a^x\frac{dF}{dt}dt=\int_a^x f(t)\,dt=F(x)-F(a)$$

同样表示，如果先对函数$F$微分，然后对结果积分，那么就回复到函数$F$(相差一个积分常数). 在一定意义上，积分和微分的过程是彼此"逆转的". 此外，基本定理说明，每个连续函数$f$有一个反导数$F$. 最后，它还说明，对于每个连续函数$f$，微分方程$\frac{dy}{dx}=f(x)$在在一个解(即任意函数$y=F(x)+c$).

### 5.4.4 总面积

黎曼和包含像$f(c_k)\Delta_k$这样的项，当$f(c_k)$取正值时这种项给出一个矩形的面积. 当$f(c_k)$取负值时，乘积$f(c_k)\Delta_k$为矩形面积的负值. 当把一个负值函数的这种项相加，得到函数曲线同$x$轴之间的面积的负值. 然后，如果取绝对值，那么得到正确的正值面积.

如果函数$f$同时取正值和负值，为了计算以函数$y=f(x)$的图形和$x$轴为界的区域的面积，必须细心划分$[a,b]$的子区间，使函数在每个子区间上不改变符号. 否则，带正负号的面积之间可能抵消，得到不正确的总面积. 把$f(x)$在每个子区间上不改变符号的定积分的绝对值相加，才能得到正确的总面积. "面积"一词以后用于指总面积.

**例 4** 图5.20显示函数$f(x)=\sin x$在$x=0$和$x=2\pi$之间的图形.

**(a)** 计算$f(x)$在区间$[0,2\pi]$上的定积分.

**(b)** 求在$[0,2\pi]$上$f(x)$的图形和$x$轴之间的面积.

**解** $f(x)=\sin x$ 的定积分由

$$\int_0^{2\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big]_0^{2\pi}=-[\cos 2\pi-\cos 0]=-[1-1]=0$$

给出. 这个定积分为零，因为函数图形在 $x$ 轴上方和下方这两部分的面积相互抵消.

在 $[0,2\pi]$ 上计算 $f(x)$ 的图形和 $x$ 轴之间的面积时，把 $\sin x$ 的定义域分成两段：在区间 $[0,\pi]$ 上的面积为非负值，在区间 $[\pi,2\pi]$ 上的面积为非正值.

$$\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big]_0^{\pi}=-[\cos\pi-\cos 0]$$
$$=-[-1-1]=2$$
$$\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi}=-[\cos 2\pi-\cos\pi]$$
$$=-[1-(-1)]=-2$$

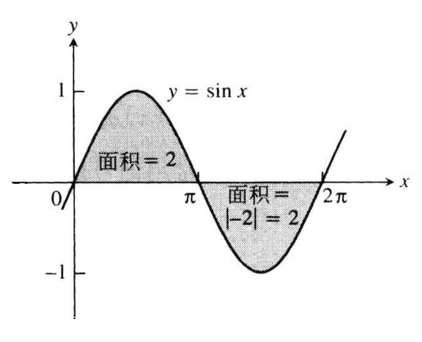


图 5.20 在 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 上 $y=\sin x$ 和 $x$ 轴之间的总面积等于两个积分的绝对值之和(例 4)

第二个积分给出负值. 函数图形和 $x$ 轴之间的面积通过对绝对值相加得到：

$$\text{面积}=|2|+|-2|=4$$ ■

> **小结**
>
> 求区间 $[a,b]$ 上函数 $y=f(x)$ 的图形和 $x$ 轴之间的面积的步骤如下：
>
> **(1)** 在 $f$ 的零点把 $[a,b]$ 分成子区间.
>
> **(2)** 在每个子区间上求 $f$ 的积分.
>
> **(3)** 求各个积分的绝对值之和.

**例 5** 求 $x$ 轴和 $f(x)=x^3-x^2-2x\ (-1\leqslant x\leqslant 2)$ 的图形之间区域的面积.

**解** 首先求 $f$ 的零点. 由于

$$f(x)=x^3-x^2-2x=x(x^2-x-2)=x(x+1)(x-2)$$

$f$ 的零点为 $x=0,\ -1,\ 2$(见图 5.21). 这 3 个零点把区间 $[-1,2]$ 分成两个子区间：在第一个子区间 $[-1,0]$ 上 $f\geqslant 0$，在第二个子区间 $[0,2]$ 上 $f\leqslant 0$. 在每个子区间上计算 $f$ 的积分：

$$\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^{0}$$
$$=0-\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right]=\frac{5}{12}$$
$$\int_{0}^{2}(x^3-x^2-2x)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{0}^{2}$$
$$=\left[4-\frac{8}{3}-4\right]-0=-\frac{8}{3}$$

图 5.21 曲线 $y=x^3-x^2-2x$ 和 $x$ 轴之间的区域(例 5)

对计算的积分的绝对值求和，得到包围区域总面积，

$$\text{包围区域总面积}=\frac{5}{12}+\left|-\frac{8}{3}\right|=\frac{37}{12}$$ ■

## 习题 5.4

在习题 1 ~ 32 中，求积分.

1. $\int_{-2}^{0}(2x+5)\mathrm{d}x$.
2. $\int_{-3}^{4}\left(5-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$.
3. $\int_{0}^{4}\left(3x-\frac{x^3}{4}\right)\mathrm{d}x$.
4. $\int_{-2}^{2}(x^3-2x+3)\mathrm{d}x$.
5. $\int_{0}^{1}(x^2+\sqrt{x})\mathrm{d}x$.
6. $\int_{0}^{5}x^{3/2}\mathrm{d}x$.
7. $\int_{1}^{32}x^{-6/5}\mathrm{d}x$.
8. $\int_{-2}^{-1}\frac{2}{x^2}\mathrm{d}x$.
9. $\int_{0}^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$.
10. $\int_{0}^{\pi}(1+\cos x)\mathrm{d}x$.
11. $\int_{0}^{\pi/3}2\sec^2 x\,\mathrm{d}x$.
12. $\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\csc^2 x\,\mathrm{d}x$.
13. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\csc\theta\cot\theta\,\mathrm{d}\theta$.
14. $\int_{0}^{\pi/3}4\sec u\tan u\,\mathrm{d}u$.
15. $\int_{\pi/2}^{0}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$.
16. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$.
17. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(8y^2+\sin y)\mathrm{d}y$.
18. $\int_{-\pi/3}^{-\pi/4}\left(4\sec^2 t+\frac{\pi}{t^2}\right)\mathrm{d}t$.
19. $\int_{1}^{-1}(r+1)^2\mathrm{d}r$.
20. $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(t+1)(t^2+4)\mathrm{d}t$.
21. $\int_{\sqrt{2}}^{1}\left(\frac{u^7}{2}-\frac{1}{u^5}\right)\mathrm{d}u$.
22. $\int_{1/2}^{1}\left(\frac{1}{v^3}-\frac{1}{v^4}\right)\mathrm{d}v$.
23. $\int_{1}^{\sqrt{2}}\frac{s^2+\sqrt{s}}{s^2}\mathrm{d}s$.
24. $\int_{9}^{4}\frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$.
25. $\int_{-4}^{4}|x|\mathrm{d}x$.
26. $\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}(\cos x+|\cos x|)\mathrm{d}x$.
27. $\int_{0}^{\ln 2}e^{3x}\mathrm{d}x$.
28. $\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{x}-e^{-x}\right)\mathrm{d}x$.
29. $\int_{0}^{1}\frac{4}{1+x^2}\mathrm{d}x$.
30. $\int_{2}^{5}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$.
31. $\int_{2}^{4}x^{\pi-1}\mathrm{d}x$.
32. $\int_{-1}^{0}\pi^{x-1}\mathrm{d}x$.

在习题 33 和 34 中，猜测被积函数的反导数. 通过微分法证实你的猜测，然后求给出的定积分.（提示：在猜测反导数时要记住链式法则. 在下一节将要学习如何求这样的反导数.）

33. $\int_{0}^{1}xe^{x^2}\mathrm{d}x$.
34. $\int_{1}^{2}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

在习题 35 ~ 40 中，用下面两种方法求导数：

(a) 先求积分，然后对结果求微分.

(b) 直接对积分求微分.

35. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{0}^{\sqrt{x}}\cos t\,\mathrm{d}t$.
36. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{1}^{\sin x}3t^2\mathrm{d}t$.
37. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{0}^{t^4}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u$.
38. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\int_{0}^{\tan\theta}\sec^2 y\,\mathrm{d}y$.
39. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{0}^{x^3}e^{-t}\mathrm{d}t$.
40. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{0}^{\sqrt{t}}\left(x^4+\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$.

在习题 41 ~ 50 中，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

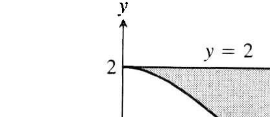
41. $y=\int_{0}^{x}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
42. $y=\int_{1}^{x}\frac{1}{t}\mathrm{d}t,\ x>0$.
43. $y=\int_{\sqrt{x}}^{0}\sin(t^2)\mathrm{d}t$.
44. $y=\int_{0}^{x^2}\cos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$.
45. $y=\int_{0}^{\sin x}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}},\ |x|<\frac{\pi}{2}$.
46. $y=\int_{\tan x}^{0}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.
47. $y=\int_{0}^{e^{x^2}}\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.
48. $y=\int_{2^x}^{1}\sqrt[3]{t}\,\mathrm{d}t$.
49. $y=\int_{0}^{\sin^{-1}x}\cos t\,\mathrm{d}t$.
50. $y=\int_{-1}^{x^{1/\pi}}\sin^{-1}t\,\mathrm{d}t$.

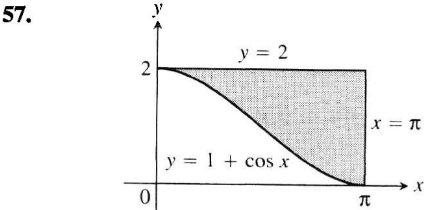
在习题 51 ~ 56 中，求函数图形和 $x$ 轴之间的区域的总面积.

51. $y=-x^2-2x,\ -3\leqslant x\leqslant 2$.
52. $y=3x^2-3,\ -2\leqslant x\leqslant 2$.
53. $y=x^3-3x^2+2x,0\leqslant x\leqslant 2$.
54. $y=x^3-4x,\ -2\leqslant x\leqslant 2$.
55. $y=x^{1/3},\ -1\leqslant x\leqslant 8$.
56. $y=x^{1/3}-x,\ -1\leqslant x\leqslant 8$.

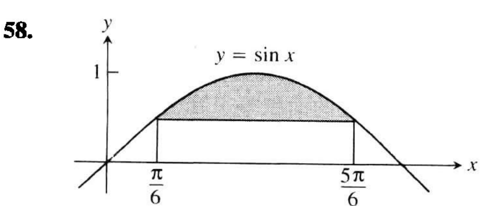
在习题 57~60 中，求阴影区域的面积.

57.

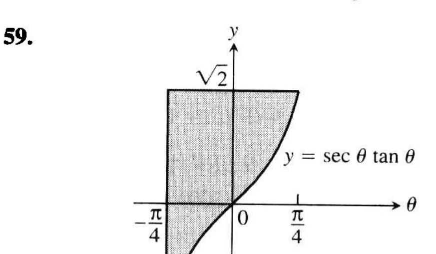




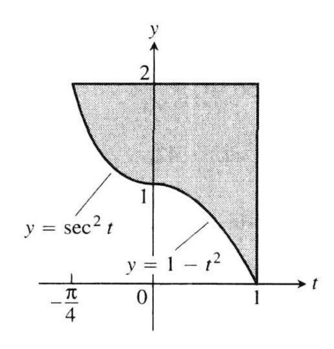

58.




59.



**60.**




在习题61~64中,每个初值问题以下列函数之一为解:

(a) $y = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt - 3.$ (b) $y = \int_0^x \sec t\,dt + 4.$

(c) $y = \int_{-1}^x \sec t\,dt + 4.$ (d) $y = \int_\pi^x \frac{1}{t}\,dt - 3.$

哪个函数是哪个问题的解?提出答案的简单理由.

**61.** $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \quad y(\pi) = -3.$

**62.** $y' = \sec x, \quad y(-1) = 4.$

**63.** $y' = \sec x, \quad y(0) = 4.$

**64.** $y' = \frac{1}{x}, \quad y(1) = -3.$

在习题65~68中,用积分表示初值问题的解.

**65.** $\frac{dy}{dx} = \sec x, \quad y(2) = 3.$

**66.** $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + x^2}, \quad y(1) = -2.$

**67.** $\frac{ds}{dt} = f(t), \quad s(t_0) = s_0.$

**68.** $\frac{dv}{dt} = g(t), \quad v(t_0) = v_0.$

**69. 阿基米德的抛物线面积公式** 阿基米德(公元前287—212)这位西方世界古典时期的发明家、军事工程师、物理学家和最伟大的数学家,发现了抛物线拱形下方的面积等于其底乘高的2/3倍. 画出抛物线拱形 $y = h - (4h/b^2)x^2$, $-b/2 \leqslant x \leqslant b/2$ 的草图,假定 $h$ 和 $b$ 为正数. 然后,利用微积分求包围在抛物线拱形和 $x$ 轴之间的区域的面积.

**70. 从边际收入求总收入** 假定一家公司从制造和销售打蛋器获得的边际收入为

$$\frac{dr}{dx} = 2 - 2/(x+1)^2$$

其中 $r$ 以千美元为单位, $x$ 以千件产品为单位. 这家公司可望从批量生产 $x = 3000$ 千件打蛋器中获得多少总收入? 为了求解, 从 $x = 0$ 至 $x = 3$ 求边际收入的积分.

**71. 从边际成本计算总成本** 当印制出 $x$ 张招贴画时, 印制一张招贴画的边际成本为

$$\frac{dc}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

美元. 求 $c(100) - c(1)$, 即印制2至100张招贴画的总成本.

**72.** (续习题71)求 $c(400) - c(100)$, 即印制101至400张招贴画的总成本.

**73.** 证明: 若 $k$ 为正值常数, 则 $x$ 轴和曲线 $y = \sin kx$ 的一个拱形之间的面积为 $\frac{2}{k}$.

**74.** 求极限 $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^2}{t^4 + 1}\,dt$

**75.** 假设 $\int_1^x f(t)\,dt = x^2 - 2x + 1$,求 $f(x)$.

**76.** 若 $\int_0^x f(t)\,dt = x\cos \pi x$,求 $f(4)$.

**77.** 求函数 $f(x) = 2 - \int_2^{x+1} \frac{9}{1+t}\,dt$ 在 $x = 1$ 的线性化.

**78.** 求函数 $g(x) = 3 + \int_1^{x^2} \sec(t-1)\,dt$ 在 $x = -1$ 的线性化.

**79.** 假定函数 $f$ 对于所有 $x$ 值存在正值导数, 并且 $f(r) = 0$. 关于函数

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

下面哪些命题必定是正确的? 提出答案的理由.

(a) $g$ 是 $x$ 的可微函数.

(b) $g$ 是 $x$ 的连续函数.

(c) $g$ 的图形在 $x = 1$ 有水平切线.

(d) $g$ 在 $x = 1$ 有一个局部极大值.

(e) $g$ 在 $x = 1$ 有一个局部极小值.

(f) $g$ 的图形在 $x = 1$ 有一个拐点.

(g) $\frac{dg}{dx}$ 的图形在 $x = 1$ 穿过 $x$ 轴.

**80.** 假定函数 $f$ 对于所有 $x$ 值存在负值导数, 并且 $f(1) = 0$. 关于函数

$$h(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

下面哪些命题必定是正确的? 提出答案的理由.

(a) $h$ 是 $x$ 的二次可微函数.

(b) $h$ 和 $\frac{dh}{dx}$ 都是连续的.

(c) $h$ 的图形在 $x = 1$ 有水平切线.

(d) $h$ 在 $x = 1$ 有一个局部极大值.

(e) $h$ 在 $x = 1$ 有一个局部极小值.

(f) $h$ 的图形在 $x = 1$ 有一个拐点.

(g) $\frac{dh}{dx}$ 的图形在 $x = 1$ 穿过 $x$ 轴.

**计算机探究**

在习题 81~84 中，对于指定的函数 $f$ 和区间 $[a,b]$，令 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$. 用一种 CAS(计算机代数系统) 执行下列处理步骤,并且回答提出的问题：

(a) 一起绘制 $f$ 和 $F$ 在 $[a,b]$ 上的图形.

(b) 求解方程 $F'(x)=0$. 在 $F'(x)=0$ 的点，关于 $f$ 和 $F$ 的图形能够看出什么是正确的？你的观察可以由基本定理第 1 部分结合一阶导数提供的材料证实吗？对答案作出解释.

(c) 函数 $F$ 在什么区间上(近似)为增函数？在那些区间上关于 $f$ 有什么结论成立？

(d) 计算导数 $f'$，并且一起画出它和 $F$ 的图形. 在 $f'(x)=0$ 的点，关于 $F$ 的图形能够看出什么是正确的？你的观察可以由基本定理第 1 部分证实吗？对答案作出解释.

**81.** $f(x)=x^3-4x^2+3x$, $[0,4]$.

**82.** $f(x)=2x^4-17x^3+46x^2-43x+12$, $\left[0,\frac{9}{2}\right]$.

**83.** $f(x)=\sin 2x\cos\frac{x}{3}$, $[0,2\pi]$.

**84.** $f(x)=x\cos\pi x$, $[0,2\pi]$.

在习题 85~88 中，对于指定的 $a$, $u$, $f$, 令 $F(x)=\int_a^{u(x)} f(t)\,dt$. 用一种 CAS 执行下列处理步骤，并且回答提出的问题：

(a) 求 $F$ 的定义域.

(b) 计算 $F'(x)$，并且求它的零点. $F$ 在其定义域的什么点增加，在什么点减少？

(c) 计算 $F''(x)$，并且求它的零点. 确定 $F$ 的局部极值和拐点.

(d) 利用从(a)~(e)获得的结果画出 $y=F(x)$ 在其定义域上的粗略草图. 然后在 CAS 上绘制 $F(x)$ 的图形支持你的草图.

**85.** $a=1$, $u(x)=x^2$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

**86.** $a=0$, $u(x)=x^2$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

**87.** $a=0$, $u(x)=1-x$, $f(x)=x^2-2x-3$.

**88.** $a=0$, $u(x)=1-x^2$, $f(x)=x^2-2x-3$.

在习题 89 和 90 中，假定 $f$ 是连续的和 $u(x)$ 是二次可微的.

**89.** 计算 $\frac{d}{dx}\int_a^{u(x)} f(t)\,dt$, 并且用一种 CAS 检验你的答案.

**90.** 计算 $\frac{d^2}{dx^2}\int_a^{u(x)} f(t)\,dt$, 并且用一种 CAS 检验你的答案.

## 5.5 不定积分与代换法则

微积分基本定理说明，连续函数的定积分是可以直接计算的，只要我们能够求出函数的一个反导数. 在 4.8 节，把函数 $f$ 对于 $x$ 的**不定积分**定义为 $f$ 的全部反导数的集合，用符号

$$\int f(x)\,dx$$

表示. 基本定理表述的反导数同定积分之间的联系如今说明这个表示法. 在求函数 $f$ 的不定积分时，需要记住它总是带有一个任意常数 $C$.

我们必须注意区分定积分与不定积分. 定积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 是一个数. 不定积分 $\int f(x)\,dx$ 则是一个函数加上一个任意常数 $C$.

至今我们只能对那些明显可识别为导数的函数求反导数. 在这一节开始推导求反导数的更一般方法.

### 5.5.1 代换：反向运用链式法则

如果 $u$ 是 $x$ 的可微函数，而 $n$ 是任何不等于 $-1$ 的数，链式法则表明

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right)=u^n\frac{du}{dx}$$

从另外一个角度看，这无异于说 $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ 是函数 $u^n\frac{du}{dx}$ 的一个反导数. 因此，

$$\int\left(u^n\frac{du}{dx}\right)dx=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$$

通常把这个等式左端的积分写成更简单的“微分”形式，给出

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \text{ 为任意数}, n \neq -1)$$

在推导这个公式中，假定 $u$ 是变量 $x$ 的可微函数，不过变量采用什么名字并不重要，而且不出现在最后的公式中. 我们可以用 $\theta$，$t$，$y$ 或者其他任何字母表示变量.

**例 1** 求不定积分

$$\int \sqrt{2x+1}\, dx$$

**解** 这个积分同用 $u=2x+1$ 和 $n=1/2$ 的积分式

$$\int u^n du$$

不一致，因为

$$du = \frac{du}{dx} \cdot dx = 2dx$$

不恰好是 $dx$. 常数因子 2 不出现在积分中. 但是，如果在积分符号前面增补一个因子 1/2，那么可以在积分符号后面引入这个因子. 所以我们写成

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{2x+1}\, dx &= \frac{1}{2}\int \sqrt{2x+1} \cdot 2\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int u^{1/2} du \quad (\text{令 } u = 2x+1,\quad du = 2\, dx) \\
&= \frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{3/2} + C \\
&= \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C \quad (\text{用 } 2x+1 \text{ 代换 } u)
\end{aligned}$$

■

例 1 中的代换是下述更一般法则的一个实例.

**定理 5（代换法则）** 如果 $u=g(x)$ 是可微函数，它的值域是一个区间 $I$，并且 $f$ 是 $I$ 上的连续函数，那么

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

**证明** 按照链式法则，$F(g(x))$ 是 $f(g(x)) \cdot g'(x)$ 的反导数，只要 $F$ 是 $f$ 的一个反导数：

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}F(g(x)) &= F'(g(x)) \cdot g'(x) \quad (\text{链式法则}) \\
&= f(g(x)) \cdot g'(x) \quad (\text{因为 } F' = f)
\end{aligned}$$

如果用代换 $u=g(x)$，那么

$$\begin{aligned}
\int f(g(x))g'(x)dx &= \int \frac{d}{dx}F(g(x))dx \\
&= F(g(x)) + C \quad (\text{基本定理}) \\
&= F(u) + C \quad (u = g(x)) \\
&= \int F'(u)du \quad (\text{基本定理}) \\
&= \int f(u)du \quad (F' = f)
\end{aligned}$$

■

当$f$和$g'$是连续函数时，代换法则提供求积分

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx$$

的下述方法：

(1)代入$u=g(x)$和$du=g'(x)dx$获得积分

$$\int f(u)\,du$$

(2)对于$u$求积分.

(3)在结果中用$g(x)$代换$u$.

**例 2** $\int \cos(7\theta+5)d\theta = \int \cos u \cdot \frac{1}{7}du$ （令$u=7\theta+5, du=7\,d\theta, (1/7)du=d\theta$）

$= \frac{1}{7}\int \cos u\,du$ （把(1/7)提到积分号前面,积分变成标准形式）

$= \frac{1}{7}\sin u + C$ （对$u$积分,表4.2）

$= \frac{1}{7}\sin(7\theta+5) + C$ （用$7\theta+5$代换$u$）

我们可以通过微分以及检验获得原函数$\cos(7\theta+5)$证实这个解答. ■

**例 3** $\int x^2 e^{x^3}dx = \int e^{x^3}\cdot x^2 dx$

$= \int e^u \cdot \frac{1}{3}du$ （令$u=x^3$, $du=3x^2dx, (1/3)du=x^2dx$）

$= \frac{1}{3}\int e^u du$

$= \frac{1}{3}e^u + C$ （对$u$积分）

$= \frac{1}{3}e^{x^3} + C$ （用$x^3$代换$u$） ■

在可能把代换方法应用到被积函数之前，也许需要对它进行某些代数运算. 下面的例子给出一个重要的积分，它是用一个等于1的代数式乘被积函数引进相应的代换后得到的.

**人物传记**

乔治·戴维·伯克霍夫
(George David Birkhoff,
1884—1944)

**例 4** $\int \sec x\,dx = \int(\sec x)(1)dx$

$= \int \sec x \cdot \frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}dx$ $\left(\text{代数式}\frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}\text{等于}1\right)$

$= \int \frac{\sec^2 x+\sec x\tan x}{\sec x+\tan x}dx$

$= \int \frac{du}{u}$ $(u=\tan x+\sec x, du=(\sec^2 x+\sec x\tan x)dx)$

$= \ln|u| + C = \ln|\sec x+\tan x| + C$ ■

**例 5** $\int \frac{\ln x^2}{x}dx = \int \frac{2\ln x}{x}dx$ （对数函数幂法则）

$= \int 2\ln x \cdot \frac{1}{x}dx$

$= \int 2u\,du$ （令$u=\ln x$, $du=(1/x)dx$）

$$= u^2 + C \quad (\text{对于 } u \text{ 积分})$$
$$= (\ln x)^2 + C \quad (\text{用 } \ln x \text{ 代换 } u)$$ ■

**例 6** $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 2x}\,dx = \int \sec^2 2x\,dx \quad \left(\frac{1}{\cos 2x} = \sec 2x\right)$

$$= \int \sec^2 u \cdot \frac{1}{2}\,du \quad (u = 2x,\ du = 2\,dx,\ dx = (1/2)du)$$
$$= \frac{1}{2}\int \sec^2 u\,du$$
$$= \frac{1}{2}\tan u + C \quad \left(\frac{d}{du}\tan u = \sec^2 u\right)$$
$$= \frac{1}{2}\tan 2x + C \quad (u = 2x)$$ ■

代换方法的成功取决于寻找一个代换，把一个不能直接计算的积分变成可以计算的积分. 如果第一次代换失败，那么，进一步试用其他代换简化被积函数(参见习题 55 和 56).

**例 7** 求积分

$$\int \frac{2z\,dz}{\sqrt[3]{z^2 + 1}}$$

**解** 可以利用代换方法作为求解的试探工具：代换被积函数中最困难的部分，并且考察如何解决. 对于本例的积分可以试用 $u = z^2 + 1$，或者甚至取 $u$ 为整个立方根碰碰运气. 下面给出两种做法的结果.

*解法(1)* 用代换 $u = z^2 + 1$：

$$\int \frac{2z\,dz}{\sqrt[3]{z^2 + 1}} = \int \frac{du}{u^{1/3}} \quad (\text{令 } u = z^2 + 1,\quad du = 2z\,dz)$$
$$= \int u^{-1/3}du \quad (\text{成为} \int u^n\,du \text{ 的形式})$$
$$= \frac{u^{2/3}}{2/3} + C \quad (\text{对于 } u \text{ 积分})$$
$$= \frac{3}{2}u^{2/3} + C$$
$$= \frac{3}{2}(z^2 + 1)^{2/3} + C \quad (\text{用 } z^2 + 1 \text{ 代换 } u)$$

*解法(2)* 改用代换 $u = \sqrt[3]{z^2 + 1}$：

$$\int \frac{2z\,dz}{\sqrt[3]{z^2 + 1}} = \int \frac{3u^2\,du}{u} \quad (\text{令 } u = \sqrt[3]{z^2 + 1},\quad u^3 = z^2 + 1, 3u^2\,du = 2z\,dz)$$
$$= 3\int u\,du$$
$$= 3 \cdot \frac{u^2}{2} + C \quad (\text{对于 } u \text{ 积分})$$
$$= \frac{3}{2}(z^2 + 1)^{2/3} + C \quad (\text{用}(z^2 + 1)^{1/3} \text{ 代换 } u)$$ ■

### 5.5.2 $\sin^2 x$ 和 $\cos^2 x$ 的积分

对于那些不知道如何转变成可能利用代换法则计算的积分，有时我们可以用三角恒等式变换积分.

**例 8**

(a)
$$\int \sin^2 dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx \quad \left(\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + C = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

(b)
$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx \quad \left(\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\right)$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

■

## 习题 5.5

在习题 1 ~ 12 中，利用给定的代换把不定积分化为标准形式，再求积分.

1. $\int \sin 3x\,dx,\quad u = 3x.$
2. $\int x\sin(2x^2)dx,\quad u = 2x^2.$
3. $\int \sec 2t\tan 2t\,dt, u = 2t.$
4. $\int\left(1-\cos\frac{t}{2}\right)^2\sin\frac{t}{2}dt,\quad u = 1-\cos\frac{t}{2}.$
5. $\int 28(7x-2)^{-5}dx,\quad u = 7x-2.$
6. $\int x^3(x^4-1)^2dx,\quad u = x^4-1.$
7. $\int \frac{9r^2dr}{\sqrt{1-r^3}},\quad u = 1-r^3.$
8. $\int 12(y^4+4y^2+1)^2(y^3+2y)dy,\quad u = y^4+4y^2+1.$
9. $\int \sqrt{x}\sin^2(x^{3/2}-1)dx,\quad u = x^{3/2}-1.$
10. $\int \frac{1}{x^2}\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)dx,\quad u = -\frac{1}{x}.$
11. $\int \csc^2 2\theta\cot 2\theta\,d\theta.$

    (a) 利用 $u = \cot 2\theta$. (b) 利用 $u = \csc 2\theta$.
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x+8}}.$

    (a) 利用 $u = 5x+8$. (b) 利用 $u = \sqrt{5x+8}$.

在习题 13~54 中,求积分.

13. $\int \sqrt{3-2s}\,ds.$
14. $\int(2x+1)^3dx.$
15. $\int \frac{1}{\sqrt{5s+4}}ds.$
16. $\int \frac{3\,dx}{(2-x)^2}.$
17. $\int \theta\sqrt[4]{1-\theta^2}d\theta.$
18. $\int \frac{4y\,dy}{\sqrt{2y^2+1}}.$
19. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}dx.$
20. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}dx.$
21. $\int \cos(3z+4)dz.$
22. $\int \tan^2 x\sec^2 x\,dx.$
23. $\int \tan x\,dx.$
24. $\int \tan^7\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx.$
25. $\int r^2\left(\frac{r^3}{18}-1\right)^5dr.$
26. $\int r^4\left(7-\frac{r^5}{10}\right)^3dr.$
27. $\int x^{1/2}\sin(x^{3/2}+1)dx.$
28. $\int x^{1/3}\sin(x^{4/3}-8)dx.$
29. $\int \frac{\sin(2t+1)}{\cos^2(2t+1)}dt.$
30. $\int \frac{6\cos t}{(2+\sin t)^3}dt.$
31. $\int \frac{1}{\theta^2}\sin\frac{1}{\theta}\cos\frac{1}{\theta}d\theta.$
32. $\int \frac{\sec z\tan z}{\sqrt{\sec z}}dz.$
33. $\int \frac{1}{t^2}\cos\left(\frac{1}{t}-1\right)dt.$
34. $\int \frac{\cos\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}\sin^2\sqrt{\theta}}d\theta.$
35. $\int (s^3+2s^2-5s+5)(3s^2+4s-5)ds.$
36. $\int t^3(1+t^4)^3dt.$
37. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}dx.$
38. $\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx.$
39. $\int(\cos x)e^{\sin x}dx.$
40. $\int (\sin 2\theta)e^{\sin^2\theta}d\theta.$
41. $\int \frac{1}{\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}}\sec^2(e^{\sqrt{x}}+1)dx.$
42. $\int \frac{1}{x^2}e^{1/x}\sec(1+e^{1/x})\tan(1+e^{1/x})dx.$
43. $\int \frac{dx}{x\ln x}.$
44. $\int \frac{\ln\sqrt{t}}{t}dt.$
45. $\int \frac{dz}{1+e^z}.$
46. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}.$
47. $\int \frac{5}{9+4r^2}dr.$
48. $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2\theta}-1}}d\theta.$
49. $\int \frac{e^{\sin^{-1}x}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$
50. $\int \frac{e^{\cos^{-1}x}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

**51.** $\int \frac{(\sin^{-1}x)^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

**52.** $\int \frac{\sqrt{\tan^{-1}x}\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

**53.** $\int \frac{\mathrm{d}y}{(\tan^{-1}y)(1+y^2)}$.

**54.** $\int \frac{\mathrm{d}y}{(\sin^{-1}y)\sqrt{1-y^2}}$.

如果你不知道作什么代换，那么试用分步化简积分的方法，利用一次代换试验使积分化简一些，然后利用另一次代换试验再化简一些. 如果试用习题55和56中的代换序列，就会了解我们所指的是什么方法.

**55.** $\int \frac{18\tan^2 x\sec^2 x}{(2+\tan^3 x)^2}\,\mathrm{d}x$.

(a) 先用 $u=\tan x$，再用 $v=u^3$，然后用 $w=2+v$.

(b) 先用 $u=\tan^3 x$，再用 $v=2+u$.

(c) 用 $u=2+\tan^3 x$.

**56.** $\int \sqrt{1+\sin^2(x-1)}\,\sin(x-1)\cos(x-1)\,\mathrm{d}x$.

(a) 先用 $u=x-1$，再用 $v=\sin u$，然后用 $w=1+v^2$.

(b) 先用 $u=\sin(x-1)$，再用 $v=1+u^2$.

(c) 用 $u=1+\sin^2(x-1)$.

在习题57和58中，求积分.

**57.** $\int \frac{(2r-1)\cos\sqrt{3(2r-1)^2+6}}{\sqrt{3(2r-1)^2+6}}\,\mathrm{d}r$.

**58.** $\int \frac{\sin\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}\cos^3\sqrt{\theta}}\,\mathrm{d}\theta$.

在习题59~64中，求解初值问题.

**59.** $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=12t(3t^2-1)^3,\quad s(1)=3$.

**60.** $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=4x(x^2+8)^{-1/3},\quad y(0)=0$.

**61.** $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=8\sin^2\left(t+\frac{\pi}{12}\right),\quad s(0)=8$.

**62.** $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=3\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right),\quad r(0)=\frac{\pi}{8}$.

**63.** $\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-4\sin\left(2t-\frac{\pi}{2}\right),\quad s'(0)=100, s(0)=0$.

**64.** $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=4\sec^2 2x\tan 2x,\quad y'(0)=4,\quad y(0)=-1$.

**65.** 假定在直线上来回运动的质点在所有时间 $t$ 的速度为 $v=\mathrm{d}s/\mathrm{d}t=6\sin 2t$ m/s. 如果当 $t=0$ 时 $s=0$，求当 $t=\pi/2$ s 时的 $s$ 值.

**66.** 假定在直线上来回运动的质点在所有时间 $t$ 的加速度为 $a=\mathrm{d}^2s/\mathrm{d}t^2=\pi^2\cos\pi t$ m/s$^2$. 如果当 $t=0$ 时 $s=0$ 和 $v=8$ m/s，求当 $t=1$ s 时的 $s$ 值.

**67.** 对于 $2\sin x\cos x$ 看来似乎可能用下面三种方式求积分：

(a) $\int 2\sin x\cos x\,\mathrm{d}x=\int 2u\,\mathrm{d}u\quad(u=\sin x)$
$=u^2+C_1=\sin^2 x+C_1$.

(b) $\int 2\sin x\cos x\,\mathrm{d}x=\int -2u\,\mathrm{d}u\quad(u=\cos x)$
$=-u^2+C_2=-\cos^2 x+C_2$.

(c) $\int 2\sin x\cos x\,\mathrm{d}x=\int\sin 2x\,\mathrm{d}x$
$(2\sin x\cos x=\sin 2x)$
$=-\frac{\cos 2x}{2}+C_3$.

这三种积分方法都是正确的吗?提出答案的理由.

**68.** 代换 $u=\tan x$ 给出

$$\int\sec^2 x\tan x\,\mathrm{d}x=\int u\,\mathrm{d}u=\frac{u^2}{2}+C=\frac{\tan^2 x}{2}+C$$

代换 $u=\sec x$ 给出

$$\int\sec^2 x\tan x\,\mathrm{d}x=\int u\,\mathrm{d}u=\frac{u^2}{2}+C=\frac{\sec^2 x}{2}+C$$

两种积分方法都是正确的吗?提出答案的理由.

## 5.6 代换与曲线之间的面积

用代换求定积分有两种方法. 第一种方法利用代换求反导数，然后应用基本定理求定积分. 第二种方法通过改变积分限把代换过程直接延伸到定积分. 我们应用下面导出的新公式解决计算两条曲线之间的面积问题.

### 5.6.1 代换公式

下述定理的公式说明，当用代换改变积分变量时如何改变积分限.

**定理 6（定积分中的代换）** 如果 $g'$ 在区间 $[a,b]$ 上是连续的，并且 $f$ 在 $g$ 的值域上是连续的，那么

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x=\int_{g(a)}^{g(b)}f(u)\,\mathrm{d}u$$

**证明** 令 $F$ 表示 $f$ 的任意反导数. 那么

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x &= F(g(x))\Big]_{x=a}^{x=b} \qquad \left(\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(g(x))\\&=F'(g(x))g'(x)\\&=f(g(x))g'(x)\end{aligned}\right)\\ &= F(g(b))-F(g(a))\\ &= F(u)\Big]_{u=g(a)}^{u=g(b)}\\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u \quad （基本定理第 2 部分）\end{aligned}$$

■

为了利用这个公式，对于将要用于求积分的相应的不定积分作同样的 $u$-代换 $u=g(x)$ 和 $\mathrm{d}u=g'(x)\mathrm{d}x$. 然后对于 $u$ 从值 $g(a)$（$u$ 在 $x=a$ 的值）到值 $g(b)$（$u$ 在 $x=b$ 的值）求变换后的积分.

**例 1** 求积分

$$\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x$$

**解** 我们有两种选择.

*方法*(1)：变换积分，并用定理 6 给出的变换后的积分限求变换后的积分：

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x \quad &\begin{aligned}(&令\ u=x^3+1,\mathrm{d}u=3x^2\mathrm{d}x;\\ &当\ x=-1\ 时,u=(-1)^3+1=0;\\ &当\ x=1\ 时,u=(1)^3+1=2)\end{aligned}\\ &= \int_0^2 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{2}{3}u^{3/2}\Big]_0^2 \quad （求新的定积分）\\ &= \frac{2}{3}[2^{3/2}-0^{3/2}] = \frac{2}{3}[2\sqrt{2}] = \frac{4\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

*方法*(2)：把积分按照不定积分变换后求积分，再变换回 $x$，并且用原来的 $x$ 积分限：

$$\begin{aligned}\int 3x^2\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int\sqrt{u}\,\mathrm{d}u \quad (令\ u=x^3+1,\ \ \mathrm{d}u=3x^2\mathrm{d}x)\\ &= \frac{2}{3}u^{3/2}+C \quad （对于\ u\ 求积分）\\ &= \frac{2}{3}(x^3+1)^{3/2}+C \quad （用\ x^3+1\ 代换\ u）\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{3}(x^3+1)^{3/2}\Big]_{-1}^{1} \quad （利用刚求出的积分,用\ x\ 的积分限）\\ &= \frac{2}{3}[((1)^3+1)^{3/2}-((-1)^3+1)^{3/2}]\\ &= \frac{2}{3}[2^{3/2}-0^{3/2}] = \frac{2}{3}[2\sqrt{2}] = \frac{4\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

■

第一种方法，用定理 6 给出的积分限求变换后的定积分；第二种方法，把积分按照不定积分变换后求积分，再变换回用原来的积分限：这两种方法哪一种更好？在例 1 中，第一种方法看起来更简单，但是并非总是这样. 一般说来，最好掌握这两种方法，在求具体积分时视情况选用较

好的一种方法.

**例 2**

**(a)** $\int_0^{\ln 2} e^{3x}dx = \int_0^{\ln 8} e^u \cdot \frac{1}{3}du \quad \left(u = 3x, \frac{1}{3}du = dx, u(0) = 0, u(\ln 2) = 3\ln 2 = \ln 2^3 = \ln 8\right)$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\ln 8} e^u du = \frac{1}{3}e^u\Big]_0^{\ln 8} = \frac{1}{3}[8-1] = \frac{7}{3}.$$

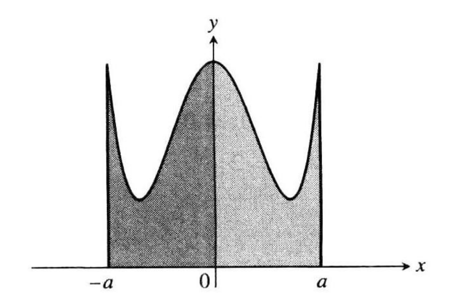
**(b)** $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan x\, dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x}dx$

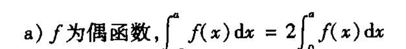
$$= -\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{u}$$ （$u = \cos x, du = -\sin x\, dx$；当 $x = -\pi/4$ 时，$u = \sqrt{2}/2$；当 $x = \pi/4$ 时，$u = \sqrt{2}/2$）

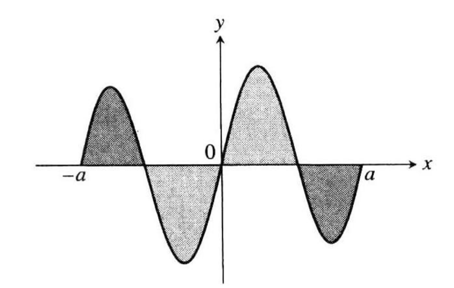
$$= -\ln|u|\Big]_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} = 0.$$ （求积分，积分区间宽度为零） ■

### 5.6.2 对称函数的定积分

对于对称区间$[-a, a]$（见图 5.22）上的偶函数和奇函数（1.1 节），定理 6 中的代换公式使定积分的计算得到简化. 下述定理说明例 2(b) 中的积分为零.





a) $f$ 为偶函数，$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$




b) $f$ 为奇函数，$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

图 5.22

> **定理 7** 令 $f$ 是对称区间$[a,b]$上的连续函数.
>
> **(a)** 若 $f$ 是偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.
>
> **(b)** 若 $f$ 是奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

**(a) 部分的证明**

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$ （定积分的可加性法则）

$= -\int_0^{-a} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$ （积分次序法则）

$= -\int_0^a f(-u)(-du) + \int_0^a f(x)dx$ （令 $u = -x, du = -dx$；当 $x = 0$ 时，$u = 0$；当 $x = -a$ 时，$u = a$）

$= \int_0^a f(-u)du + \int_0^a f(x)dx$

$$= \int_0^a f(u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx \quad (f\text{是偶函数,所以}f(-u) = f(u))$$

$$= 2\int_0^a f(x)\,dx$$ ■

(**b**)部分的证明是完全相似的，在习题 114 中留给读者完成.

定理 7 中的论断，当 $f$ 是可积函数(而不是具备更强性质的连续函数)时仍然成立. 但是证明更加困难，适宜在高等微积分教程中给出证明.

**例 3** 求积分

$$\int_{-2}^{2}(x^4 - 4x^2 + 6)\,dx$$

**解** 由于 $f(x) = x^4 - 4x^2 + 6$ 满足 $f(-x) = f(x)$，它是对称区间 $[-2,2]$ 上的偶函数，所以

$$\int_{-2}^{2}(x^4 - 4x^2 + 6)\,dx = 2\int_0^2 (x^4 - 4x^2 + 6)\,dx = 2\left[\frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 + 6x\right]_0^2$$

$$= 2\left(\frac{32}{5} - \frac{32}{3} + 12\right) = \frac{232}{15}$$ ■

### 5.6.3 曲线之间的面积

假定需要求一个区域的面积，这个区域上方以曲线 $y = f(x)$ 为界，下方以曲线 $y = g(x)$ 为界，并且介于直线 $x = a$ 的右边和直线 $x = b$ 的左边(见图 5.23). 这种区域偶尔可能具有能够用几何方法求面积的形状，但是，如果 $f$ 和 $g$ 是任意连续函数，那么通常必须用积分求面积.

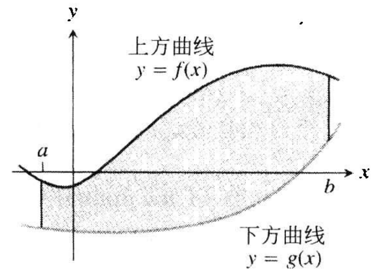



图 5.23 介于曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 以及直线 $x = a$ 和 $x = b$ 之间的区域

为了看出积分应该取什么值，首先用以区间 $[a,b]$ 的划分 $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ 为基础的 $n$ 个竖直矩形逼近区域(见图 5.24). 第 $k$ 个矩形的面积(见图 5.25)为

$$\Delta A_k = \text{高} \times \text{宽} = [f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k$$

于是用 $n$ 个矩形面积的和逼近区域的面积:

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k \quad (\text{黎曼和})$$

由于 $f$ 和 $g$ 是连续函数，右端的和当 $\|P\| \to 0$ 时趋近极限 $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$. 我们把这个积分的值作为区域的面积. 就是说，

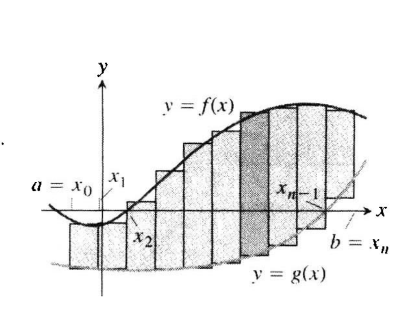



图 5.24 用垂直于 $x$ 轴的 $n$ 个矩形逼近区域

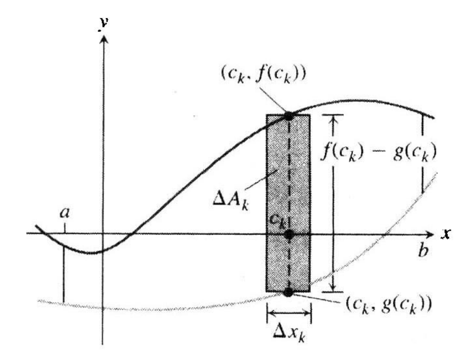



图 5.25 第 $k$ 个矩形的面积 $\Delta A_k$ 等于它的高 $f(c_k) - g(c_k)$ 和宽 $\Delta x_k$ 的乘积

$$A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)] \Delta x_k = \int_a^b [f(x) - g(x)] \mathrm{d}x$$

> **定义** 如果$f$和$g$是连续函数，并且在整个区间$[a,b]$上$f(x) \geqslant g(x)$，那么**在曲线$y = f(x)$和$y = g(x)$之间从$a$到$b$的区域的面积$A$**是$(f-g)$从$a$到$b$的积分：
>
> $$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] \mathrm{d}x$$

在应用这个定义时，画出曲线的图形是有益的. 图形揭示哪条曲线是上方曲线$f$，哪条曲线是下方曲线$g$. 图形也有助于在没有给出积分限时求积分限. 也许需要求两条曲线的交点，以便确定积分限，而这可能涉及从方程$f(x) = g(x)$求解$x$的值. 然后可以求函数$(f-g)$的积分计算交点之间的面积.

**例 4** 求由抛物线$y = 2 - x^2$和直线$y = -x$包围的区域的面积.

**解** 首先画出曲线和直线的草图(见图 5.26). 通过从方程$y = 2 - x^2$和$y = -x$联立求解$x$找出积分限:

$2 - x^2 = -x$ （建立$f(x)$和$g(x)$的等式）

$x^2 - x - 2 = 0$ （移项）

$(x+1)(x-2) = 0$ （分解因式）

$x = -1,\quad x = 2$ （求解）

区域从$x = -1$延伸到$x = 2$. 积分限为$a = -1$和$b = 2$.

图 5.26 例 4 中的区域和一个典型的逼近矩形

在曲线和直线之间的区域的面积为

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} [(2 - x^2) - (-x)] \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{2} (2 + x - x^2) \mathrm{d}x = \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \left(4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3}\right) - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2}$$ ■

如果边界曲线的方程在一个点或者多个点改变，我们把区域分成同方程改变对应的子区域，并且对每个子区域应用曲线之间的面积分式.

**人物传记**

理查德·戴德金 (Richard Dedekind, 1831—1916)

**例 5** 求第一象限内上方以$y = \sqrt{x}$为界以及下方以$x$轴和直线$y = x - 2$为界的区域的面积.

**解** 草图(见图 5.27)显示，区域上方的边界是$f(x) = \sqrt{x}$的图形. 下方的边界从区间$0 \leqslant x \leqslant 2$上的$g(x) = 0$改变为$2 \leqslant x \leqslant 4$上的$g(x) = x - 2$(两个方程在$x = 2$时相等). 我们在$x = 2$把区域分成两个子区域$A$和$B$，如图 5.27 所示.

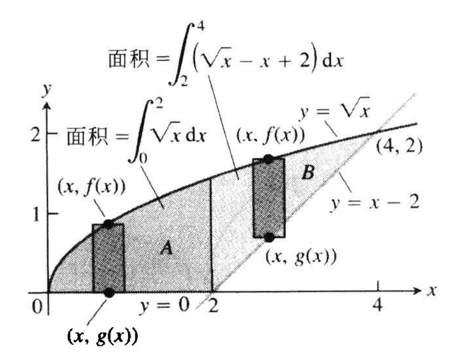



图 5.27 当边界曲线方程改变时，例 5 的面积改变为图中所示两个阴影区域面积对应的积分之和

区域$A$的积分限是$a = 0$和$b = 2$. 区域$B$的左侧积分限是$a = 2$. 为了求右侧积分限，从方程$y = \sqrt{x}$和$y = x - 2$联立求解$x$:

$\sqrt{x} = x - 2$ （使$f(x)$和$g(x)$相等）

$x = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$ （两端取平方）

$$x^2-5x+4=0 \quad (\text{移项})$$
$$(x-1)(x-4)=0 \quad (\text{分解因式})$$
$$x=1,\quad x=4 \quad (\text{求解})$$

仅有值 $x=4$ 满足方程 $\sqrt{x}=x-2$. 值 $x=1$ 是由取平方引进的额外根. 所以，右侧积分限是 $b=4$.

$$\text{对于 } 0\leqslant x\leqslant 2:\ f(x)-g(x)=\sqrt{x}-0=\sqrt{x}$$

$$\text{对于 } 2\leqslant x\leqslant 4:\ f(x)-g(x)=\sqrt{x}-(x-2)=\sqrt{x}-x+2$$

对子区域 $A$ 和 $B$ 的面积求和得到总面积：

$$\text{总面积}=\underbrace{\int_0^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}_{A\text{的面积}}+\underbrace{\int_2^4(\sqrt{x}-x+2)\,\mathrm{d}x}_{B\text{的面积}}$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^2+\left[\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_2^4$$

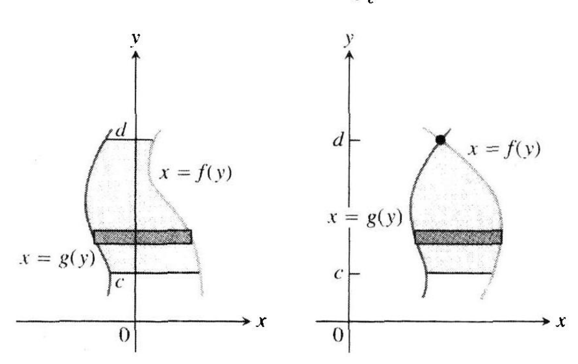
$$=\frac{2}{3}(2)^{3/2}-0+\left(\frac{2}{3}(4)^{3/2}-8+8\right)-\left(\frac{2}{3}(2)^{3/2}-2+4\right)$$

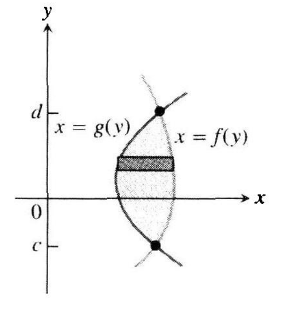
$$=\frac{2}{3}(8)-2=\frac{10}{3}$$ ■

### 5.6.4 对于 $y$ 积分

如果区域的边界曲线是用 $y$ 的函数描述的，那么逼近区域的矩形是横向的而不是纵向的，而在基本公式中用 $y$ 代替 $x$. 对于像下面图形显示的区域，使用面积公式：

$$A=\int_c^d[f(y)-g(y)]\,\mathrm{d}y$$




在这个公式中 $f$ 总是表示右侧的曲线，$g$ 表示左侧的曲线，所以 $f(y)-g(y)$ 是非负的.

**例 6** 对于例 5 中的区域，通过对于 $y$ 积分求面积.

**解** 首先画出区域的草图，并且根据对 $y$ 值的区间划分画一个典型的横向矩形(见图 5.28). 区域的右侧边界是直线 $x=y+2$，所以 $f(y)=y+2$. 左侧边界是曲线 $x=y^2$，所以 $g(y)=y^2$. 积分的下限为 $y=0$. 通过从方程 $x=y+2$ 和 $x=y^2$ 联立解 $y$ 求积分上限：

$$y+2=y^2 \quad (\text{使 } f(y)=y+2 \text{ 和 } g(y)=y^2 \text{ 相等})$$
$$y^2-y-2=0 \quad (\text{移项})$$
$$(y+1)(y-2)=0 \quad (\text{分解因式})$$

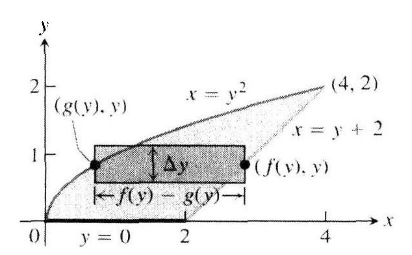



图 5.28 求图中区域的面积：如果对于 $x$ 积分，要用两个积分；如果对于 $y$ 积分，只用一个积分(例 6)

$$y=-1, \quad y=2 \quad (\text{求解})$$

积分上限是 $b=2$.（值 $y=-1$ 给出在 $x$ 轴下面的一个交点.）

区域的面积为

$$A=\int_a^b[f(y)-g(y)]\mathrm{d}y=\int_0^2[y+2-y^2]\mathrm{d}y=\int_0^2[2+y-y^2]\mathrm{d}y$$

$$=\left[2y+\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_0^2=4+\frac{4}{2}-\frac{8}{3}=\frac{10}{3}$$ ■

这是例 5 的结果，但是求解的工作量更少.

## 习题 5.6

在习题 1 ~ 46 中，利用定理 6 中的代换公式求积分.

**1.** (a) $\int_0^3\sqrt{y+1}\,\mathrm{d}y$. (b) $\int_{-1}^0\sqrt{y+1}\,\mathrm{d}y$.

**2.** (a) $\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r$. (b) $\int_{-1}^1 r\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r$.

**3.** (a) $\int_0^{\pi/4}\tan x\sec^2x\,\mathrm{d}x$. (b) $\int_{-\pi/4}^0\tan x\sec^2x\,\mathrm{d}x$.

**4.** (a) $\int_0^{\pi}3\cos^2x\sin x\,\mathrm{d}x$. (b) $\int_{2\pi}^{3\pi}3\cos^2x\sin x\,\mathrm{d}x$.

**5.** (a) $\int_0^1 t^3(1+t^4)^3\mathrm{d}t$. (b) $\int_{-1}^1 t^3(1+t^4)^3\mathrm{d}t$.

**6.** (a) $\int_0^{\sqrt{7}}t(t^2+1)^{1/3}\mathrm{d}t$. (b) $\int_{-\sqrt{7}}^0 t(t^2+1)^{1/3}\mathrm{d}t$.

**7.** (a) $\int_{-1}^1\frac{5r}{(4+r^2)^2}\mathrm{d}r$. (b) $\int_0^1\frac{5r}{(4+r^2)^2}\mathrm{d}r$.

**8.** (a) $\int_0^1\frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2}\mathrm{d}v$. (b) $\int_1^4\frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2}\mathrm{d}v$.

**9.** (a) $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$. (b) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$.

**10.** (a) $\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}\mathrm{d}x$. (b) $\int_{-1}^0\frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}\mathrm{d}x$.

**11.** (a) $\int_0^{\pi/6}(1-\cos 3t)\sin 3t\,\mathrm{d}t$.

(b) $\int_{\pi/6}^{\pi/3}(1-\cos 3t)\sin 3t\,\mathrm{d}t$.

**12.** (a) $\int_{-\pi/2}^0\left(2+\tan\frac{t}{2}\right)\sec^2\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$.

(b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(2+\tan\frac{t}{2}\right)\sec^2\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$.

**13.** (a) $\int_0^{2\pi}\frac{\cos z}{\sqrt{4+3\sin z}}\mathrm{d}z$. (b) $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos z}{\sqrt{4+3\sin z}}\mathrm{d}z$.

**14.** (a) $\int_{-\pi/2}^0\frac{\sin w}{(3+2\cos w)^2}\mathrm{d}w$.

(b) $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin w}{(3+2\cos w)^2}\mathrm{d}w$.

**15.** $\int_0^1\sqrt{t^5+2t}\,(5t^4+2)\mathrm{d}t$.

**16.** $\int_1^4\frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{y}(1+\sqrt{y})^2}$.

**17.** $\int_0^{\pi/6}\cos^{-3}2\theta\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta$.

**18.** $\int_{\pi}^{3\pi/2}\cot^5\left(\frac{\theta}{6}\right)\sec^2\left(\frac{\theta}{6}\right)\mathrm{d}\theta$.

**19.** $\int_0^{\pi}5(5-4\cos t)^{1/4}\sin t\,\mathrm{d}t$.

**20.** $\int_0^{\pi/4}(1-\sin 2t)^{3/2}\cos 2t\,\mathrm{d}t$.

**21.** $\int_0^1(4y-y^2+4y^3+1)^{-2/3}(12y^2-2y+4)\mathrm{d}y$.

**22.** $\int_0^1(y^3+6y^2-12y+9)^{-1/2}(y^2+4y-4)\mathrm{d}y$.

**23.** $\int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}}\sqrt{\theta}\cos^2(\theta^{3/2})\mathrm{d}\theta$.

**24.** $\int_{-1}^{-1/2}t^{-2}\sin^2\left(1+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$.

**25.** $\int_0^{\pi/4}(1+\mathrm{e}^{\tan\theta})\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$.

**26.** $\int_{\pi/4}^{\pi/2}(1+\mathrm{e}^{\cot\theta})\csc^2\theta\,\mathrm{d}\theta$.

**27.** $\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{2-\cos t}\mathrm{d}t$.

**28.** $\int_0^{\pi/3}\frac{4\sin\theta}{1-4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$.

**29.** $\int_1^2\frac{2\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

**30.** $\int_2^4\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$.

**31.** $\int_2^4\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}$.

**32.** $\int_2^{16}\frac{\mathrm{d}x}{2x\sqrt{\ln x}}$.

**33.** $\int_0^{\pi/2}\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x$.

**34.** $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cot t\,\mathrm{d}t$.

**35.** $\int_{\pi/2}^{\pi}2\cot\frac{\theta}{3}\mathrm{d}\theta$.

**36.** $\int_0^{\pi/12}6\tan 3x\,\mathrm{d}x$.

**37.** $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{1+(\sin\theta)^2}$.

**38.** $\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{\csc^2x\,\mathrm{d}x}{1+(\cot x)^2}$.

**39.** $\int_0^{\ln\sqrt{3}}\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$.

**40.** $\int_1^{\mathrm{e}^{\pi/4}}\frac{4\,\mathrm{d}t}{t(1+\ln^2t)}$.

**41.** $\int_0^1\frac{4\,\mathrm{d}s}{\sqrt{4-s^2}}$.

**42.** $\int_0^{3\sqrt{2}/4}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{9-4s^2}}$.

**43.** $\int_{\sqrt{2}}^2\frac{\sec^2(\sec^{-1}x)\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

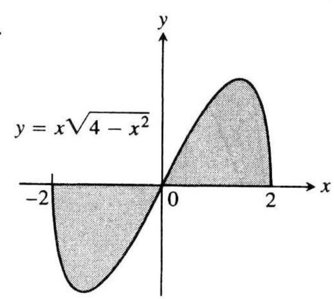
**44.** $\int_{2/\sqrt{3}}^2\frac{\cos(\sec^{-1}x)\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

**45.** $\int_{-1}^{-\sqrt{2}/2}\frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{4y^2-1}}$.

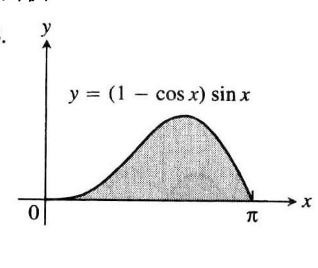
**46.** $\int_{-2/3}^{-\sqrt{2}/3}\frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{9y^2-1}}$.

在习题 47~62 中,求阴影区域的总面积.

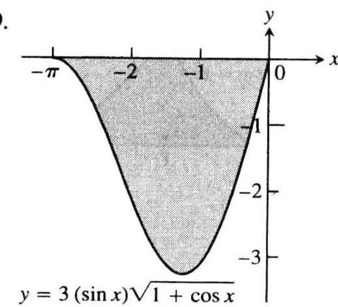
**47.**



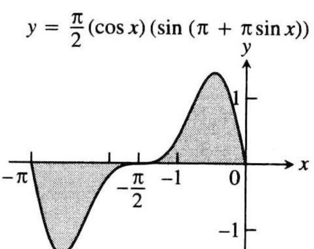

**48.**



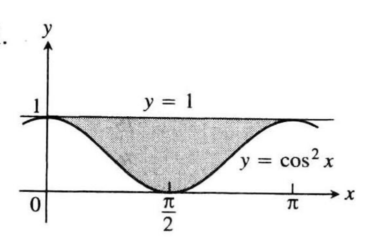

**49.**



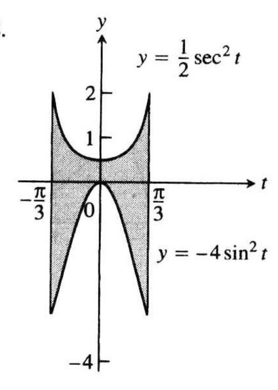

**50.**



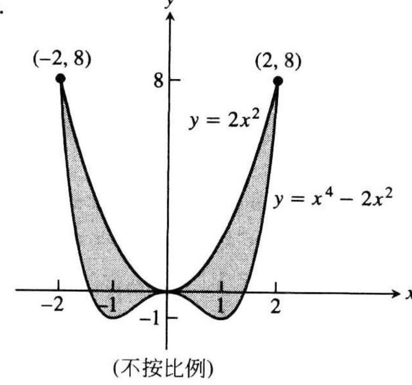

**51.**



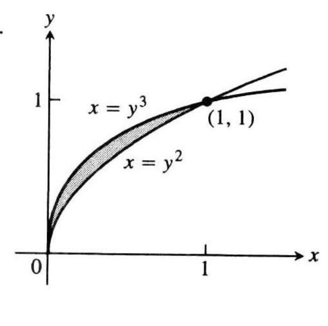

**52.**



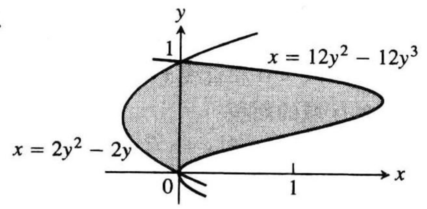

**53.**



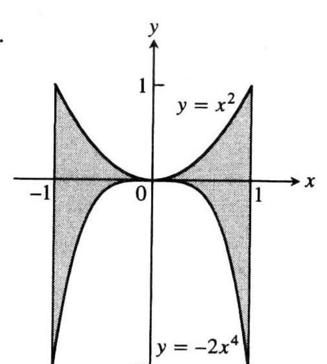

**54.**



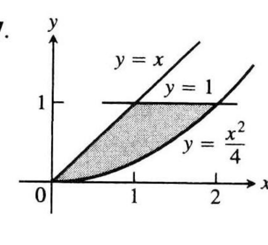

**55.**



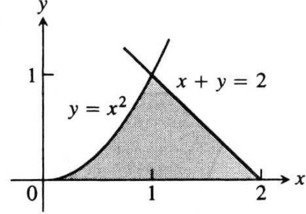

**56.**



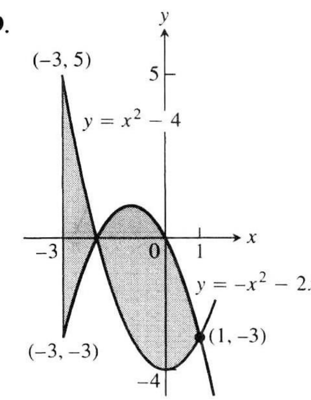

**57.**



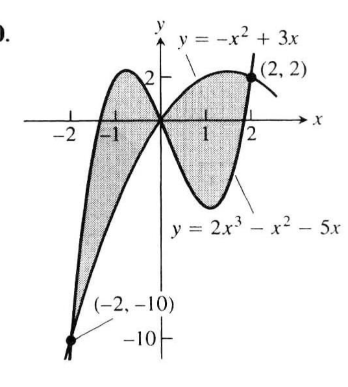
58.



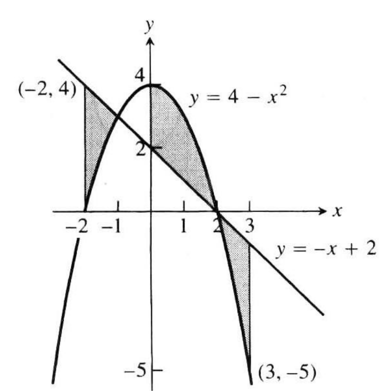

59.



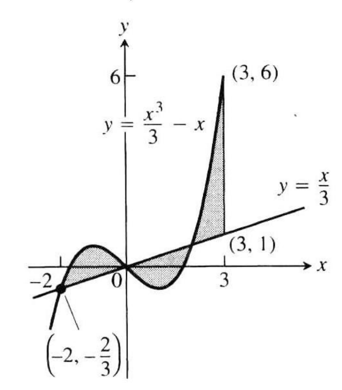

60.




61.




62.




在习题63 ~ 72 中,求由直线和曲线包围的区域的面积.

**63.** $y = x^2 - 2$ 和 $y = 2$.

**64.** $y = 2x - x^2$ 和 $y = -3$.

**65.** $y = x^4$ 和 $y = 8x$.

**66.** $y = x^2 - 2x$ 和 $y = x$.

**67.** $y = x^2$ 和 $y = -x^2 + 4x$.

**68.** $y = 7 - 2x^2$ 和 $y = x^2 + 4$.

**69.** $y = x^4 - 4x^2 + 4$ 和 $y = x^2$.

**70.** $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$ 和 $y = 0$.

**71.** $y = \sqrt{|x|}$ 和 $5y = x + 6$.(有多少个交点?)

**72.** $y = |x^2 - 4|$ 和 $y = (x^2/2) + 4$.

在习题73~80 中,求由直线和曲线包围的区域的面积.

**73.** $x = 2y^2$, $x = 0$ 和 $y = 3$.

**74.** $x = y^2$ 和 $x = y + 2$.

**75.** $y^2 - 4x = 4$ 和 $4x - y = 16$.

**76.** $x - y^2 = 0$ 和 $x + 2y^2 = 3$.

**77.** $x + y^2 = 0$ 和 $x + 3y^2 = 2$.

**78.** $x - y^{2/3} = 0$ 和 $x + y^4 = 2$.

**79.** $x = y^2 - 1$ 和 $x = |y|\sqrt{1 - y^2}$.

**80.** $x = y^3 - y^2$ 和 $x = 2y$.

在习题 81 ~ 84 中,求由曲线包围的区域的面积.

**81.** $4x^2 + y = 4$ 和 $x^4 - y = 1$.

**82.** $x^3 - y = 0$ 和 $3x^2 - y = 4$.

**83.** $x + 4y^2 = 4$ 和 $x + y^4 = 1$, $x \geqslant 0$.

**84.** $x + y^2 = 3$ 和 $4x + y^2 = 0$.

在习题 85~ 92 中,求由直线和曲线包围的区域的面积.

**85.** $y = 2\sin x$ 和 $y = \sin 2x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

**86.** $y = 8\cos x$ 和 $y = \sec^2 x$, $-\pi/3 \leqslant x \leqslant \pi/3$.

**87.** $y = \cos(\pi x/2)$ 和 $y = 1 - x^2$.

**88.** $y = \sin(\pi x/2)$ 和 $y = x$.

**89.** $y = \sec^2 x$, $y = \tan^2 x$, $x = -\pi/4$ 和 $x = \pi/4$.

**90.** $x = \tan^2 y$ 和 $x = -\tan^2 y$, $-\pi/4 \leqslant y \leqslant \pi/4$.

**91.** $x = 3\sin y\sqrt{\cos y}$ 和 $x = 0$, $0 \leqslant y \leqslant \pi/2$.

**92.** $y = \sec^2(\pi x/3)$ 和 $y = x^{1/3}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

**93.** 求由曲线 $x - y^3 = 0$ 和直线 $x - y = 0$ 包围的推进器形状的区域的面积.

**94.** 求由曲线 $x - y^{1/3} = 0$ 和 $x - y^{1/5} = 0$ 包围的推进器形状的区域的面积.

**95.** 求第一象限内以直线 $y = x$ 和 $x = 2$ 以及曲线 $y = 1/x^2$ 和 $x$ 轴为界的区域的面积.

**96.** 求第一象限内左边以 $y$ 轴为界和右边以曲线 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 为界的“三角形” 区域的面积.

**97.** 求曲线 $y = \ln x$ 和 $y = \ln 2x$ 之间从 $x = 1$ 到 $x =$

5 的区域的面积.

**98.** 求曲线 $y = \tan x$ 和 $x$ 轴之间从 $x = -\pi/4$ 到 $x = \pi/3$ 的区域的面积.

**99.** 求第一象限内上方以曲线 $y = e^{2x}$ 为界和下方以曲线 $y = e^{x}$ 为界以及右边以直线 $x = \ln 3$ 为界的"三角形"区域的面积.

**100.** 求第一象限内上方以曲线 $y = e^{x/2}$ 为界和下方以曲线 $y = e^{-x/2}$ 为界以及右边以直线 $x = 2\ln 2$ 为界的"三解形"区域的面积.

**101.** 求曲线 $y = 2x/(1+x^2)$ 和 $x$ 轴的区间 $-2 \leqslant x \leqslant 2$ 之间的区域的面积.

**102.** 求曲线 $y = 2^{1-x}$ 和 $x$ 轴的区间 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 之间的区域的面积.

**103.** 设下方以抛物线 $y = x^2$ 为界和上方以直线 $y = 4$ 为界的区域,由横穿过它的水平直线 $y = c$ 剖分成面积相等的两个部分.

(**a**) 画出区域的草图,并且引一条穿过它的看起来大体恰当的直线 $y = c$. 直线同抛物线的交点用 $c$ 表示的坐标是什么?把它们添加到图形中.

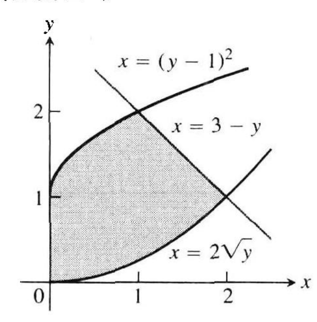
(**b**) 通过对于 $y$ 积分求 $c$.(这时把 $c$ 置于积分限中.)

(**c**) 通过对于 $x$ 积分求 $c$.(这时同样把 $c$ 置于积分限中.)

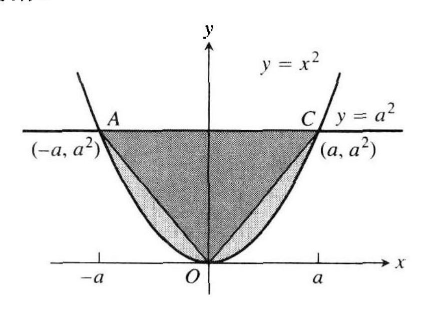
**104.** 通过(**a**)对于 $x$ 积分和(**b**)对于 $y$ 积分,求曲线 $y = 3 - x^2$ 和直线 $y = -1$ 之间的区域的面积.

**105.** 求第一象限内左边以 $y$ 轴为界和下方以直线 $y = x/4$ 为界以及左上方以曲线 $y = 1 + \sqrt{x}$ 为界和右上方以曲线 $y = 2/\sqrt{x}$ 为界的区域的面积.

**106.** 求第一象限内左边以 $y$ 轴为界和下方以曲线 $x = 2\sqrt{y}$ 为界以及左上方以曲线 $x = (y-1)^2$ 为界和右上方以直线 $x = 3 - y$ 为界的区域的面积(见附图.)




**107.** 附图显示三角形 $AOC$ 内接于由直线 $y = a^2$ 从抛物线 $y = x^2$ 切割的区域. 求三角形的面积同抛物线区域的面积之比当 $a$ 趋近零时的极限.

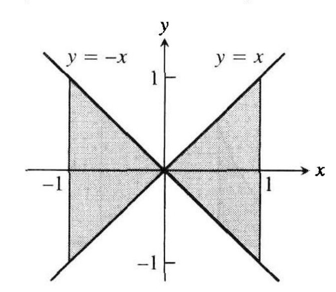



**108.** 假定正连续函数 $f$ 的图形和 $x$ 轴之间从 $a$ 到 $b$ 的区域的面积为 4 平方单位. 求曲线 $y = f(x)$ 和 $y = 2f(x)$ 之间从 $a$ 到 $b$ 的区域的面积.

**109.** 下面哪个积分(如果有)计算附图阴影区域的面积?提出答案的理由.

(**a**) $\int_{-1}^{1}(x-(-x))\,dx = \int_{-1}^{1} 2x\,dx.$

(**b**) $\int_{-1}^{1}(-x-(x))\,dx = \int_{-1}^{1} -2x\,dx.$




**110.** 连续函数 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的图形同垂直线 $x = a$ 和 $x = b$ 之间的区域的面积是

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

这个结果是正确的还是在某些条件下是正确的,或者不可能是正确的?提出答案的理由.

**111.** 假定 $F(x)$ 是函数 $f(x) = (\sin x)/x, x > 0$ 的反导数. 试用 $F$ 表示积分

$$\int_1^3 \frac{\sin 2x}{x}\,dx$$

**112.** 证明:若 $f$ 是连续函数,则

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(1-x)\,dx$$

**113.** 假定 $\int_0^1 f(x)\,dx = 3$. 如果(**a**) $f$ 是奇函数,(**b**) $f$ 是偶函数,分别求积分 $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

**114.** (**a**) 证明:若 $f$ 是区间 $[-a, a]$ 上的奇函数,则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

(**b**) 用 $f(x) = \sin x$ 和 $a = \pi/2$ 验证(a)中的结果.

**115.** 如果$f$是连续函数,求积分

$$I=\int_0^a \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{f(x)+f(a-x)}$$

的值,通过作代换$u=a-x$,并且把得到的积分加进$I$中.

**116.** 利用代换,证明

$$\int_x^{xy}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\int_1^y\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

对于所有正数$x$和$y$成立.

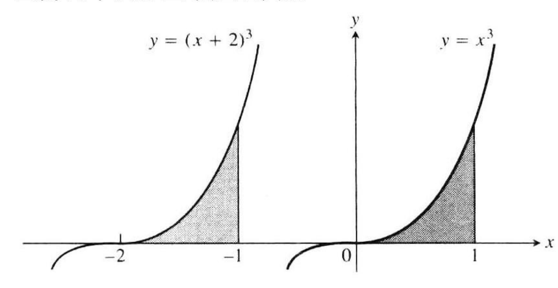
**定积分的平移性质** 定积分的一个基本性质是它们由公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{a-c}^{b-c}f(x+c)\,\mathrm{d}x \qquad (1)$$

表示的在平移下的不变性. 只要$f$是可积函数,并且对于必需的$x$值有定义,这个公式就成立. 例如,在附图中显示

$$\int_{-2}^{-1}(x+2)^3\mathrm{d}x=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$$

因为两个阴影区域是全同的.




**117.** 利用代换证明等式(1).

**118.** 对于下列每个函数,画出$f(x)$在区间$[a,b]$上的图形和$f(x+c)$在$[a-c,b-c]$上的图形,以便使你自己确信等式(1)是正确的.

(a) $f(x)=x^2, a=0, b=1, c=1$.

(b) $f(x)=\sin x, a=0, b=\pi, c=\pi/2$.

(c) $f(x)=\sqrt{x-4}, a=4, b=8, c=5$.

**计算机探究**

在习题119 ~ 122中,在不能用简单代数运算求平面内两条曲线交点的条件下,求曲线之间的区域的面积. 用一种CAS(计算机代数系统)执行下列处理步骤.

(a) 一起画出曲线的图形,以便观察它们的形状以及有多少个交点.

(b) 利用CAS中的数值方程求解器求出全部交点.

(c) 求$|f(x)-g(x)|$在每一对相邻交点值上的积分.

(d) 计算在(c)中求出的积分的总和.

**119.** $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-2x+\dfrac{1}{3}, \quad g(x)=x-1$.

**120.** $f(x)=\dfrac{x^4}{2}-3x^3+10, \quad g(x)=8-12x$.

**121.** $f(x)=x+\sin(2x), \quad g(x)=x^3$.

**122.** $f(x)=x^2\cos x, \quad g(x)=x^3-x$.

## 5.7 把对数函数定义为积分

在第1章介绍过自然对数函数$\ln x$,把它作为指数函数$\mathrm{e}^x$的反函数. 函数$\mathrm{e}^x$是在一般的指数函数族$a^x(a>0)$中选定的函数,它的图形在穿过$y$轴时的斜率为1. 然而,函数$a^x$是基于它在$x$取有理数值时的图形以直观方式描述的.

在这一节,我们把自然对数函数定义为利用微积分基本定理的一个积分. 然后,把指数函数$\mathrm{e}^x$定义为$\ln x$的反函数. 在明白同这两种函数有关的代数性质和解析性质之前,我们快速地推导所有这些性质. 初看起来,尽管这种间接的方法也许显得奇怪,但是它对于定义对数函数和指数函数以及获得它们的重要特性提供一种雅致的和严格的方法.

### 5.7.1 自然对数函数的定义

一个正数$x$的自然对数函数是用$\ln x$表示的一个积分值.

**定义**

$$\ln x=\int_1^x\frac{1}{t}\mathrm{d}t, \quad x>0 \qquad (1)$$

如果$x>1$,那么$\ln x$是曲线$y=1/t$下方从$t=1$到$t=x$的面积(见图5.29). 对于$0<x<1$,$\ln x$给出曲线$y=1/t$下方从$x$到1的面积的负值. 这个函数对于$x\leqslant 0$没有定义. 由定积分的零宽度区间法则,也有

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 0$$



图 5.29 函数 $y=\ln x$ 的图形以及它同函数 $y=1/x$，$x>0$ 的关系；对数函数的图形当 $x$ 从 1 向右移动时在 $x$ 轴上方上升，当 $x$ 从 1 向左移动时在 $x$ 轴下方下降

请注意，我们在图 5.29 中显示 $y=1/x$ 的图形，但是在积分中用 $y=1/t$. 如果在两种情形都用 $x$ 表示函数，就会出现

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

积分中带有两种不同含义的 $x$. 因此，我们把积分变量改成 $t$.

像在 5.1 节中那样，利用划分的矩形获得区间上 $y=1/t$ 的图形下方在 $t=1$ 和 $t=x$ 之间的面积的有限逼近，我们可以逼近函数 $\ln x$ 的值. 在表 5.4 中列出函数的若干值. 在 $x=2$ 和 $x=3$ 之间存在一个重要的数，它的自然对数等于 1.

**表 5.4 函数 ln x 一些典型的两位小数值**

| $x$ | $\ln x$ |
|---|---|
| 0 | 无定义 |
| 0.05 | −3.00 |
| 0.5 | −0.69 |
| 1 | 0 |
| 2 | 0.69 |
| 3 | 1.10 |
| 4 | 1.39 |
| 10 | 2.30 |

**定义** 数 e 是自然对数函数的定义域中满足

$$\ln(\mathrm{e}) = 1$$

的数.

所以数 e 满足

$$\int_1^{e} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 1$$

从几何上解释，数 e 对应于 $x$ 轴上这样一点，函数 $y=1/t$ 的图形下方在从 1 到这个点的区间上的面积，等于单位平方的面积. 在图 5.29 中的右边阴影区域的面积在 $x=\mathrm{e}$ 时为 1 平方单位. 我们将会进一步看到，这是曾经见到过的同一个数 e≈2.718 281 828.

### 5.7.2 $y=\ln x$ 的导数

按照微积分基本定理第 1 部分(5.4 节)，

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x}$$

对于每个正 $x$ 值有

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

并且如果 $u$ 是 $x$ 的可微函数，$x$ 的值为正数，那么链式法则给出

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}, \quad u > 0 \tag{2}$$

由公式(1)的积分定义的自然对数的导数，同对于3.7节定义的对数函数获得的导数一样，并且两个函数在 $x=1$ 的值都是1. 因此，从中值定理系2(4.2节)可知，两个函数完全相同——它们是用两种不同方式定义的同一个函数. 所以，正如在3.7节那样，我们有

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 \tag{3}$$

此外，函数 $\ln x$ 具有在4.2节已经证明的人们熟悉的下列代数性质：

| | |
|---|---|
| **(1)** $\ln bx = \ln b + \ln x$. | **(2)** $\ln \frac{b}{x} = \ln b - \ln x$. |
| **(3)** $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$. | **(4)** $\ln x^r = r\ln x$, $r$ 是任意有理数. |

性质(4)对于任意实数 $r$ 仍然成立，不过我们略去证明. 它的证明依赖实数系的完备性性质(附录A.7).

### 5.7.3 ln *x* 的图形和值域

函数 $\ln x$ 的导数 $d(\ln x)/dx = 1/x$ 对于 $x>0$ 为正值，所以 $\ln x$ 是 $x$ 的增函数. 二阶导数 $-1/x^2$ 为负值，所以 $\ln x$ 的图形是向下凹的.

通过考察在区间[1,2]上 $y=1/x$ 图形下方的面积，可以估计 $\ln 2$ 的值. 在图5.30中，在区间[1,2]上高为1/2的矩形镶嵌在图形之下. 因此，图形下面的面积 $\ln 2$ 大于矩形的面积1/2. 所以 $\ln 2 > 1/2$. 由此有

$$\ln 2^n = n\ln 2 > n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2}$$

这个结果证明，当 $n\to\infty$ 时 $\ln(2^n)\to\infty$. 由于 $\ln x$ 是增函数，我们得到

$$\lim_{x\to\infty}\ln x = \infty$$

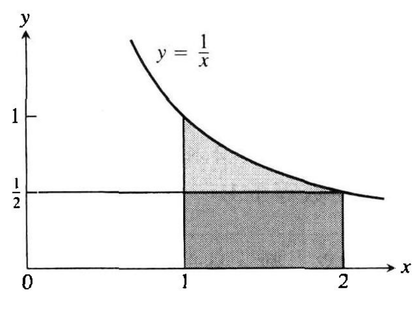
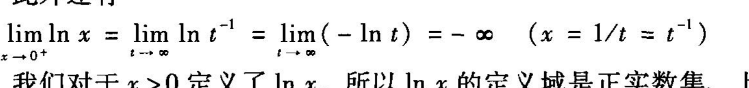


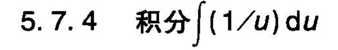

图5.30　在区间 $1\leqslant x\leqslant 2$ 上高为 $y=1/2$ 的矩形镶嵌在 $y=1/x$ 的图形之下

此外还有



$$\lim_{x\to 0^+}\ln x = \lim_{t\to\infty}\ln t^{-1} = \lim_{t\to\infty}(-\ln t) = -\infty \quad (x = 1/t = t^{-1})$$

我们对于 $x>0$ 定义了 $\ln x$，所以 $\ln x$ 的定义域是正实数集. 上述讨论和介质定理说明，它的值域是给出图5.29所示的 $y=\ln x$ 图形的整条实线.



### 5.7.4 积分 $\int(1/u)\,du$

公式(3)导出下述积分公式：

如果 $u$ 是不会为零的可微函数，那么

$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C \tag{4}$$

公式(4)说明，对数函数由一种确定形式的积分导出．如果 $u=f(x)$，那么 $du=f'(x)dx$ 且有

$$\int \frac{1}{u}\,du = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

所以公式(4)给出

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

只要 $f(x)$ 在考虑的给定区间上是保持恒定符号的可微函数.

**例 1**

(a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x}{x^2-5}\,dx = \int_{-5}^{-1}\frac{du}{u} = \ln|u|\Big]_{-5}^{-1}$ 　$(u = x^2-5,\ du = 2x\,dx,\ u(0) = -5,\ u(2) = -1)$

$$= \ln|-1| - \ln|-5| = \ln 1 - \ln 5 = -\ln 5.$$

(b) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{4\cos\theta}{3+2\sin\theta}\,d\theta = \int_1^5 \frac{2}{u}\,du$ 　$(u = 3+2\sin\theta,\ du = 2\cos\theta\,d\theta,$

$u(-\pi/2) = 1,\ u(\pi/2) = 5)$

$$= 2\ln|u|\Big]_1^5 = 2\ln|5| - 2\ln|1| = 2\ln 5.$$

请注意，$u=3+2\sin\theta$ 在区间 $[-\pi/2,\pi/2]$ 上恒为正值，所以适合用公式(4). ■

### 5.7.5　ln $x$ 的反函数与数 e

函数 $\ln x$ 是 $x$ 的增函数，以 $(0,\infty)$ 为定义域和以 $(-\infty,\infty)$ 为值域，它具有以 $(-\infty,\infty)$ 为定义域和以 $(0,\infty)$ 为值域的反函数 $\ln^{-1}x$．$\ln^{-1}x$ 的图形是 $\ln x$ 的图形通过直线 $y=x$ 反射后的图形．正如在图 5.31 中可以看出的那样，

$$\lim_{x\to\infty}\ln^{-1}x = \infty,\quad \lim_{x\to-\infty}\ln^{-1}x = 0$$

函数 $\ln^{-1}x$ 也用 $\exp x$ 表示．我们现在来证明，$\ln^{-1}x = \exp x$ 是以 e 为底的指数函数.

数 e 满足公式 $\ln(e) = 1$，所以 $e = \ln^{-1}(1) = \exp(1)$．我们可以按通常的方式取数 e 的有理数乘方 $r$:

$$e^2 = e\cdot e,\quad e^{-2} = \frac{1}{e^2},\quad e^{1/2} = \sqrt{e}$$

等等．由于 e 是正数，$e^r$ 也是正数．因此，$e^r$ 有一个对数．当取对数时，求出

$$\ln e^r = r\ln e = r\cdot 1 = r$$

由于 $\ln x$ 是一对一的函数以及 $\ln(\ln^{-1}r) = r$，这个公式表明

$$e^r = \ln^{-1}r = \exp r \quad (r\text{ 为有理数}) \tag{5}$$

我们尚未找到一种在 $x$ 为无理数时给出 $e^x$ 的明确含义的方法．但是 $\ln^{-1}x$ 对于任何 $x$ 值是有意义的，无论 $x$

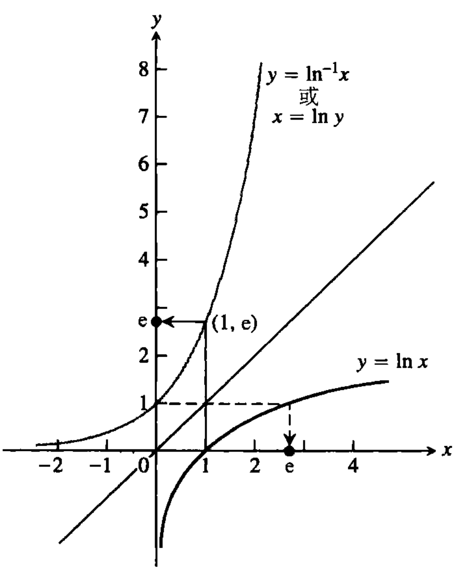



图 5.31　函数 $y=\ln x$ 和 $y=\ln^{-1}x=\exp x$ 的图形；数 e 是 $\ln^{-1}(1)=\exp(1)$

是有理数或者无理数. 所以公式(5)提供一种把 $e^x$ 的定义扩充到无理数 $x$ 值的方法. 函数 $\ln^{-1}x$ 是对所有 $x$ 定义的，所以我们利用它对 $e^x$ 从前定义中没有值的每个点赋予一个值.

**定义** 对于每个实数 $x$，$e^x = \ln^{-1}x = \exp x$.

$e^x$ 的一些典型值如下：

| $x$ | $e^x$(舍入后) | $x$ | $e^x$(舍入后) | $x$ | $e^x$(舍入后) |
|---|---|---|---|---|---|
| $-1$ | 0.37 | 1 | 2.72 | 10 | 22 026 |
| 0 | 1 | 2 | 7.39 | 100 | $2.6881\times10^{43}$ |

对于指数函数，我们首次有了关于无理数指数的确切含义. 通常指数函数用 $e^x$ 而不用 $\exp x$ 表示. 由于 $\ln x$ 和 $e^x$ 互为反函数，我们有下述关系式：

**对于 $e^x$ 和 $\ln x$ 的反方程**

$$e^{\ln x} = x \quad (\text{所有 } x > 0)$$
$$\ln(e^x) = x \quad (\text{所有 } x)$$

### 5.7.6 $e^x$ 的导数和积分

指数函数 $e^x$ 是可微的，因为它是导数不会为零的一个可微函数的反函数. 我们利用 3.7 节定理 4 以及关于 $\ln x$ 的导数知识计算它的导数. 令

$$f(x) = \ln x \quad \text{和} \quad y = e^x = \ln^{-1}x = f^{-1}(x)$$

那么，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(e^x) = \frac{d}{dx}\ln^{-1}x = \frac{d}{dx}f^{-1}(x)\\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \qquad (3.7\text{ 节定理 }4)\\ &= \frac{1}{f'(e^x)} \qquad (f^{-1}(x) = e^x)\\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{e^x}\right)} \qquad \left(f'(z) = \frac{1}{z}\text{ 取 } z = e^x\right)\\ &= e^x\end{aligned}$$

就是说，对于 $y = e^x$，我们求出 $dy/dx = e^x$，所以自然指数函数 $e^x$ 是其自身的导数. 因此，若 $f(x) = e^x$，则 $f'(0) = e^0 = 1$. 这表明指数函数 $e^x = \exp x = \ln^{-1}x$ 当其在 $x = 0$ 穿过 $y$ 轴时具有斜率 1. 这一点同 3.1 节中的对于自然指数函数的论断相符，并且证实在本节定义的数 e 与我们在第 1 章定义的 e 恰好是同一个数.（在 3.7 节定理 5 中，用一种方法把 e 表示成一个极限.）

链式法则以常见的方法把自然指数函数的导数结果扩展为更一般的形式：

若 $u$ 是 $x$ 的任何可微函数，则

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx} \qquad (6)$$

由于 $e^x>0$，它的导数也是处处为正的，所以 $e^x$ 是对于所有 $x$ 的增函数和连续函数，具有极限

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad 和 \quad \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

由此推出，$x$ 轴($y=0$)是 $y=e^x$ 图形的水平渐近线.

同公式(6)等价的积分是

$$\int e^u du = e^u + C$$

### 5.7.7 指数函数的法则

尽管表面上 $e^x$ 是用一种迂回方式定义为 $\ln^{-1}x$ 的，但是它服从代数上熟知的指数函数的法则. 定理 8 证明，这些法则是 $\ln x$ 和 $e^x$ 的定义的推论.

**定理 8** 对于任意的数 $x$，$x_1$ 和 $x_2$，自然指数函数 $e^x$ 服从下列法则：

(1) $e^{x_1}\cdot e^{x_2}=e^{x_1+x_2}$.　　(2) $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$.

(3) $\dfrac{e^{x_1}}{e^{x_2}}=e^{x_1-x_2}$.　　(4) $(e^{x_1})^r=e^{rx_1}$，如果 $r$ 是有理数.

**法则(4)的证明** 令 $y=(e^{x_1})^r$. 那么，

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln (e^{x_1})^r\\ &= r\ln (e^{x_1}) \quad (对数函数的幂法则)\\ &= rx_1 \quad (\ln e^u = u, \quad 取\ u = x_1)\end{aligned}$$

这样，在两端取幂，

$$y = e^{rx_1} \quad (e^{\ln y} = y)$$ ■

法则(2)和法则(3)由法则(1)推出，而法则(1)已在 4.2 节证明.

法则(4)实际上对于任意实数 $r$ 成立. 同在对数函数的情形一样，把法则从有理数推广到实数依赖于实数系的完备性性质(非形式地陈述在附录 A.7 中). 证明见于高等微积分教科书中.

### 5.7.8 一般指数函数 $a^x$

由于对于任何正数 $a$ 有 $a=e^{\ln a}$，可以把 $a^x$ 看作 $(e^{\ln a})^x=e^{x\ln a}$. 因此我们给出下面的定义.

**定义** 对于任意数 $a>0$ 和 $x$，以 $a$ 为底的指数函数是

$$a^x = e^{x\ln a}$$

当 $a=e$ 时，此定义给出 $a^x=e^{x\ln a}=e^{x\ln e}=e^{x\cdot 1}=e^x$.

定理 8 对于以 $a$ 为底的指数函数 $a^x$ 也成立. 例如，

$$\begin{aligned}a^{x_1}\cdot a^{x_2} &= e^{x_1\ln a}\cdot e^{x_2\ln a} \quad (a^x\ 的定义)\\ &= e^{x_1\ln a+x_2\ln a} \quad (法则(1))\\ &= e^{(x_1+x_2)\ln a} \quad (提出因式\ \ln a)\\ &= a^{x_1+x_2} \quad (a^x\ 的定义)\end{aligned}$$

至此，我们对于任何 $x>0$ 和任意实数 $n$ 可以把 $x^n$ 定义为 $x^n=e^{n\ln x}$. 所以，在公式 $\ln x^n=$

$n \ln x$ 中 $n$ 的值不再必须为有理数——它可以取任何 $x>0$ 的数：

$$\ln x^n = \ln(e^{n \ln x}) = n \ln x \quad (\ln e^u = u, u \text{ 是任意数})$$

把法则 $a^x/a^y = a^{x-y}$ 同定义 $x^n = e^{n \ln x}$ 结合起来，可以证实，指数函数求导数幂法则的最终形式对于全部实数指数 $r$ 成立：

$$\frac{d}{dx} x^r = \frac{d}{dx} e^{r \ln x} = (e^{r \ln x}) \frac{d}{dx}(r \ln x) = x^r \cdot \frac{r}{x} = rx^{r-1}$$

从定义 $a^x = e^{x \ln a}(a>0)$ 出发，我们得到导数

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{x \ln a} = (\ln a) e^{x \ln a} = (\ln a) a^x$$

所以

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$$

另一方面，通过应用对数函数求导数得到同样的导数法则：

$$y = a^x$$

$$\ln y = x \ln a \quad (\text{两端取对数})$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln a \quad (\text{对 } x \text{ 求导数})$$

$$\frac{dy}{dx} = y \ln a = a^x \ln a$$

应用链式法则，得到更一般形式的求导数公式.

如果 $a>0$，并且 $u$ 是 $x$ 的可微函数，那么 $a^u$ 是 $x$ 的可微函数，并且有

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

同最后这个结果等价的积分形式为

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

### 5.7.9 以 $a$ 为底的对数函数

如果 $a$ 是不为 1 的任意正数，函数 $a^x$ 是一对一函数，并且在每个点有非零的导数. 因此，它有可微的反函数. 这个反函数称为 **$x$ 以 $a$ 为底的对数函数**，并且记为 $\log_a x$.

**定义** 对于任意正数 $a \neq 1$，

$$\log_a x$$

是 $a^x$ 的反函数.

函数 $y=\log_a x$ 的图形可以由 $y=a^x$ 的图形通过对 45°直线 $y=x$ 反射得到(见图 5.32). 当 $a=e$ 时，我们有 $\log_e x = e^x$ 的反函数 $=\ln x$. 由于 $\log_a x$ 和 $a^x$ 互为反函数，它们按任何一种顺序构成的复合函数都是恒等函数.

**对于 $a^x$ 和 $\log_a x$ 的反方程**

$$a^{\log_a x} = x \quad (\text{所有 } x > 0)$$
$$\log_a(a^x) = x \quad (\text{所有 } x)$$

函数 $\log_a x$ 实际上不过是 $\ln x$ 的一个数值的倍数. 为看出这一点，令 $y = \log_a x$，然后在其等价方程 $a^y = x$ 两端取自然对数，得到 $y \ln a = \ln x$. 求解 $y$ 给出

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

由此容易推出，$\log_a x$ 满足的算术运算法则和 $\ln x$ 是相同的. 这些法则在表 5.5 中列出，它们可以通过对自然指数函数的相应法则除以 $\ln a$ 给出证明. 例如，

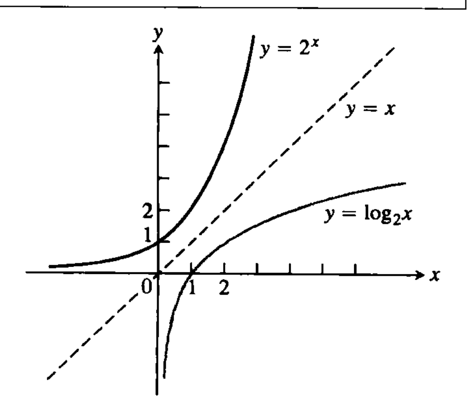


图 5.32 函数 $2^x$ 及其反函数 $\log_2 x$ 的图形

$$\ln xy = \ln x + \ln y \quad (\text{自然对数函数法则(1)})$$
$$\frac{\ln xy}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln a} + \frac{\ln y}{\ln a} \quad (\text{用 } \ln a \text{ 除两端})$$
$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \quad (\text{给出以 } a \text{ 为底的对数函数的法则(1)})$$

**表 5.5 以 $a$ 为底的对数函数的法则(对于任何数 $x>0$ 和 $y>0$)**

| 法 则 | 公 式 | 法 则 | 公 式 |
|---|---|---|---|
| (1)积法则 | $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ | (3)倒数法则 | $\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y$ |
| (2)商法则 | $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ | (4)幂法则 | $\log_a x^y = y \log_a x$ |

## 5.7.10 涉及 $\log_a x$ 的导数和积分

为了求涉及以 $a$ 为底的对数函数的导数和积分，我们把它们转换成自然对数函数. 若 $u$ 是 $x$ 的正值可微函数，则

$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln u}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

所以，一般对数函数的导数公式为

$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

**例 2**

(a) $\frac{d}{dx}\log_{10}(3x+1) = \frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{1}{3x+1}\frac{d}{dx}(3x+1) = \frac{3}{(\ln 10)(3x+1)}$.

(b) $\int\frac{\log_2 x}{x}dx = \frac{1}{\ln 2}\int\frac{\ln x}{x}dy \quad \left(\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}\right)$

$$= \frac{1}{\ln 2}\int u\,du \quad \left(u = \ln x, du = \frac{1}{x}dx\right)$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{\ln 2}\frac{(\ln x)^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2\ln 2} + C.$$

■

### 5.7.11 小结

这一节我们利用微积分给出对数函数和指数函数的特别定义. 这种方法和过去处理多项式函数、有理函数和三角函数的方法有所不同. 以前，我们首先定义函数，然后研究它的导数和积分. 本节由一个积分开始，从它获得我们所关注的函数. 采用这种方法的动机在于，当我们试图定义像 $a^x$ 这样对于任意实数(有理数和无理数)$x$ 的函数时避免出现数学上的困难. 通过把 $\ln x$ 定义为函数 $1/t$ 从 $t=1$ 到 $t=x$ 的积分，就能够继续定义全部指数函数和对数函数，然后推导它们的主要代数性质和解析性质.

### 习题 5.7

在习题 1~46 中，求积分.

1. $\int_{-3}^{-2}\frac{dx}{x}$.
2. $\int_{-1}^{0}\frac{3\,dx}{3x-2}$.
3. $\int\frac{2y\,dy}{y^2-25}$.
4. $\int\frac{8r\,dr}{4r^2-5}$.
5. $\int\frac{3\sec^2 t}{6+3\tan t}\,dt$.
6. $\int\frac{\sec y\tan y}{2+\sec y}\,dy$.
7. $\int\frac{dx}{2\sqrt{x}+2x}$.
8. $\int\frac{\sec x\,dx}{\sqrt{\ln(\sec x+\tan x)}}$.
9. $\int_{\ln 2}^{\ln 3}e^x dx$.
10. $\int_{-\ln 2}^{0}e^{-x}dx$.
11. $\int 8e^{(x+1)}dx$.
12. $\int 2e^{(2x-1)}dx$.
13. $\int_{\ln 4}^{\ln 9}e^{x/2}dx$.
14. $\int_{0}^{\ln 16}e^{x/4}dx$.
15. $\int\frac{e^{\sqrt{r}}}{\sqrt{r}}\,dr$.
16. $\int\frac{e^{-\sqrt{r}}}{\sqrt{r}}\,dr$.
17. $\int 2te^{-t^2}dt$.
18. $\int t^3e^{(t^4)}dt$.
19. $\int\frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$.
20. $\int\frac{-e^{1/x^2}}{x^3}\,dx$.
21. $\int e^{\sec\pi t}\sec\pi t\tan\pi t\,dt$.
22. $\int e^{\csc(\pi+t)}\csc(\pi+t)\cot(\pi+t)\,dt$.
23. $\int_{\ln(\pi/6)}^{\ln(\pi/2)}2e^v\cos e^v dv$.
24. $\int_{0}^{\sqrt{\ln\pi}}2xe^{x^2}\cos(e^{x^2})dx$.
25. $\int\frac{e^r}{1+e^r}\,dr$.
26. $\int\frac{dx}{1+e^x}$.
27. $\int_0^1 2^{-\theta}d\theta$.
28. $\int_{-2}^{0}5^{-\theta}d\theta$.
29. $\int_1^{\sqrt{2}}x\,2^{(x^2)}\,dx$.
30. $\int_1^4\frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.
31. $\int_0^{\pi/2}7^{\cos t}\sin t\,dt$.
32. $\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{3}\right)^{\tan t}\sec^2 t\,dt$.
33. $\int_2^4 x^{2x}(1+\ln x)dx$.
34. $\int_1^2\frac{2^{\ln x}}{x}\,dx$.
35. $\int_0^3(\sqrt{2}+1)x^{\sqrt{2}}dx$.
36. $\int_1^e x^{(\ln 2)-1}dx$.
37. $\int\frac{\log_{10}x}{x}\,dx$.
38. $\int_1^4\frac{\log_2 x}{x}\,dx$.
39. $\int_1^4\frac{\ln 2\log_2 x}{x}\,dx$.
40. $\int_1^e\frac{2\ln 10\log_{10}x}{x}\,dx$.
41. $\int_0^2\frac{\log_2(x+2)}{x+2}\,dx$.
42. $\int_{1/10}^{10}\frac{\log_{10}(10x)}{x}\,dx$.
43. $\int_0^9\frac{2\log_{10}(x+1)}{x+1}\,dx$.
44. $\int_2^3\frac{2\log_2(x-1)}{x-1}\,dx$.
45. $\int\frac{dx}{x\log_{10}x}$.
46. $\int\frac{dx}{x(\log_8 x)^2}$.

在习题 47~52 中,求解初值问题.

47. $\frac{dy}{dt}=e^t\sin(e^t-2),\ y(\ln 2)=0$.
48. $\frac{dy}{dt}=e^{-t}\sec^2(\pi e^{-t}),\ y(\ln 4)=2/\pi$.
49. $\frac{d^2y}{dx^2}=2e^{-x},\ y(0)=1$ 和 $y'(0)=0$.
50. $\frac{d^2y}{dt^2}=1-e^{2t},\ y(1)=-1$ 和 $y'(1)=0$.
51. $\frac{dy}{dx}=1+\frac{1}{x},\ y(1)=3$.
52. $\frac{d^2y}{dx^2}=\sec^2 x,\ y(0)=0$ 和 $y'(0)=1$.

T 53. **$\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 的线性化** 我们在 $x=0$ 邻近逼近 $\ln(1+x)$ 而不是在 $x=1$ 邻近逼近 $\ln x$. 用这种方法得到更简单的公式.
   (a) 推导在 $x=0$ 的线性化 $\ln(1+x)\approx x$.
   (b) 估计在区间 $[0, 0.1]$ 上用 $x$ 代替 $\ln(1+x)$ 包含 5 位小数的误差.
   (c) 一起画出 $\ln(1+x)$ 和 $x$ 在区间 $0\leqslant x\leqslant 0.5$ 上的图形. 如有可能,用不同的颜色绘图. $\ln(1+x)$ 的逼近看起在什么点最好,在什么点最差?通过从图形读出坐标值,求绘图器所允许误差的一个实际上界.

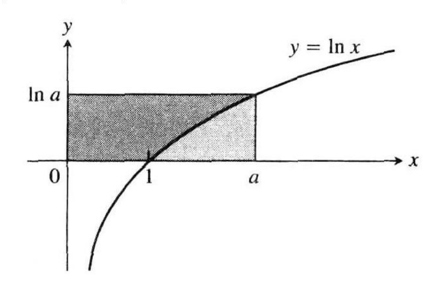
54. **$e^x$ 在 $x=0$ 的线性化**
   (a) 推导在 $x=0$ 的线性逼近 $e^x\approx 1+x$.
   T (b) 估计在区间 $[0, 0.2]$ 上用 $1+x$ 代替 $e^x$ 包含 5 位小数的误差值.
   T (c) 一起画出 $e^x$ 和 $1+x$ 在区间 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 上的图形. 如有可能,用不同的颜色绘图. 逼近

显现在什么区间上高估计 $e^x$,在什么区间上低估计 $e^x$?

**55.** 证明:对于任意数 $a>1$,

$$\int_1^a \ln x\,dx + \int_0^{\ln a} e^y dy = a\ln a$$

(参见附图.)



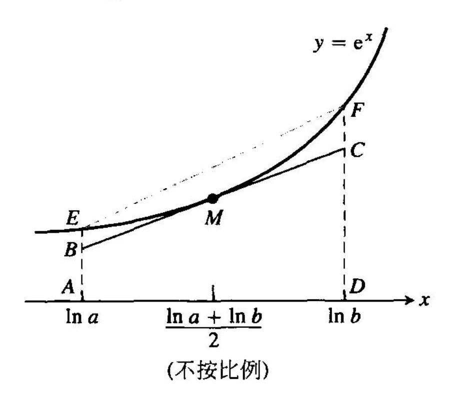

**56. 几何平均、对数平均和算术平均的不等式**

**(a)** 证明 $e^x$ 的图形在 $x$ 值的每个区间上是向上凹的.

**(b)** 参考附图证明,若 $0<a<b$,则

$$e^{(\ln a+\ln b)/2}\cdot(\ln b-\ln a) < \int_{\ln a}^{\ln b} e^x dx$$

$$< \frac{e^{\ln a}+e^{\ln b}}{2}\cdot(\ln b-\ln a)$$



(不按比例)

**(c)** 利用(b)中的不等式推断

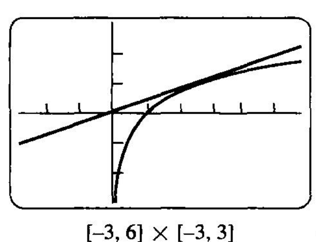
$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b-\ln a} < \frac{a+b}{2}$$

这个不等式说明,两个正数的几何平均小于它们的对数平均,而对数平均又小于它们的算术平均.

(关于这个不等式的更深入讨论,参见 Frank Burk,"The Geometric,Logarithmic,and Arithmetic Mean Inequality"(几何平均、对数平均和算术平均的不等式),*American Mathematical Monthly*(《美国数学月刊》),第94卷,第6期,1987年6-7月,527-528页.)

**T 57. $\pi^e$ 和 $e^\pi$ 哪一个更大?** 计算器已经揭开了这个一度具有挑战性的问题的某种神秘性.(用计算器进行检验,你会发现,这竟然是很难得到答案的.)不过,你可以不用计算器回答这个问题.

**(a)** 求通过原点同 $y=\ln x$ 的图形相切的方程.


[-3, 6] × [-3, 3]

**(b)** 根据 $y=\ln x$ 的图形和切线给出一个论据,说明为什么 $\ln x < x/e$ 对于所有正数 $x\neq e$ 成立.

**(c)** 证明对于所有正数 $x\neq e$ 有 $\ln(x^e)<x$.

**(d)** 推断对于所有正数 $x\neq e$ 有 $x^e<e^x$.

**(e)** 所以,$\pi^e$ 和 $e^\pi$ 哪一个更大?

**58. e的小数表示** 通过用4.7节的牛顿法求解方程 $\ln x=1$,用计算器求 e 的值,达到你的计算器所允许的小数位数.

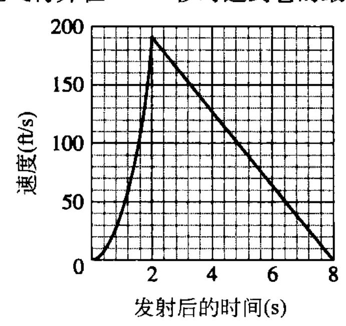
## 第5章复习指导问题

1. 在某些情况下怎样用有限和估计像运动距离、面积和平均值这样一些量?为什么可能需要这样做?
2. 求和记号是什么?它提供什么便利?举出一些例子.
3. 什么是黎曼和?为什么可能需要考虑这样的和?
4. 什么是一个闭区间的划分的范数?
5. 什么是函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的定积分?什么情况下可以断定它的存在?
6. 定积分同面积之间有什么关系?试描述对定积分的某些其他解释.
7. 什么是可积函数在闭区间上的平均值?函数必定取它的平均值吗?予以说明.
8. 描述适用于定积分的法则(表5.3).举出一些例子.
9. 什么是微积分的基本定理?这个定理为什么这么重要?用例子解释基本定理第1部分和第2部分.
10. 当 $f$ 是连续函数时,基本定理怎样提供初值问题 $dy/dx=f(x)$, $y(x_0)=y_0$ 的解?
11. 积分是怎样通过代换同链式法则建立联系的?
12. 在某些情况下怎样通过代换求不定积分?举出一些例子.
13. 怎样把代换方法用于定积分?举出一些例子.
14. 如何定义和计算两个连续函数图形之间区域的面积?举一个例子.

15. 怎样把把自然对数函数定义为一个积分?它的定义域、值域和导数是什么?它具有什么运算性质?对于它的图形作出说明.
16. 什么积分导出对数函数?举出一些例子.
17. 怎样定义指数函数 $e^x$?它的定义域、值域和导数是什么?它服从什么指数法则?对于它的图形作出说明.
18. 怎样定义函数 $e^x$ 和 $\log_a x$?关于 $a$ 有任何限制吗? $\log_a x$ 同 $\ln x$ 的图形有什么关系? 实际上仅存在一种指数函数和一种对数函数这一命题是真还是假?

## 第5章实习习题

1. 附图显示一枚模型火箭在发射后前 8 秒的飞行速度(ft/s) 的图形. 火箭在前 2 秒一直向上加速,然后惯性飞行并在 $t=8$ 秒时达到它的最大高度.

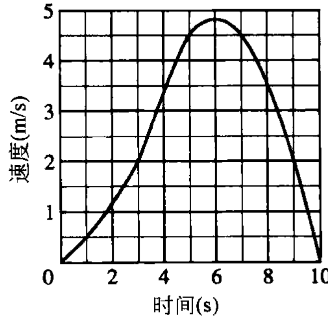



(a) 假定火箭是从地平面发射的,它大约达到什么高度?(这是 3.3 节习题 17 考察的火箭,但是在作本题时不需用作那个习题的方法.)

(b) 在区间 $0 \leqslant t \leqslant 8$ 上画出火箭离地面高度作为时间函数的草图.

2. (a) 附图显示物体从 $t=0$ 到 $t=10$ 秒时间区间内沿 $s$ 轴运动的速度(m/s). 物体在这 10 秒期间大约移动多远?

(b) 画出区间 $0 \leqslant t \leqslant 10$ 上 $s$ 作为 $t$ 的函数的草图,假定 $s(0)=0$.




3. 假设 $\sum_{k=1}^{10} a_k=-2$ 和 $\sum_{k=1}^{10} b_k=25$. 求下列和的值:

(a) $\sum_{k=1}^{10} \frac{a_k}{4}$.　　(b) $\sum_{k=1}^{10}(b_k-3a_k)$.

(c) $\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k-1)$.　　(d) $\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{5}{2}-b_k\right)$.

4. 假设 $\sum_{k=1}^{20} a_k=0$ 和 $\sum_{k=1}^{20} b_k=7$. 求下列和的值:

(a) $\sum_{k=1}^{20} 3a_k$.　　(b) $\sum_{k=1}^{20}(a_k+b_k)$.

(c) $\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{2}-\frac{2b_k}{7}\right)$.　　(d) $\sum_{k=1}^{20}(a_k-2)$.

在习题 5 ~ 8 中,把每个极限表示成定积分. 然后计算积分求极限值. 在每题中,$P$ 是给定区间的划分,$c_k$ 是从 $P$ 的子区间中选择的数.

5. $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}(2c_k-1)^{-1/2}\Delta x_k$,其中 $P$ 是 $[1,5]$ 的一个划分.

6. $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}c_k(c_k^2-1)^{-1/3}\Delta x_k$,其中 $P$ 是 $[1,3]$ 的一个划分.

7. $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(\frac{c_k}{2}\right)\right)\Delta x_k$,其中 $P$ 是 $[-\pi,0]$ 的一个划分.

8. $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}(\sin c_k)(\cos c_k)\Delta x_k$,其中 $P$ 是 $[0,\pi/2]$ 的一个划分.

9. 假设 $\int_{-2}^{2}3f(x)\,dx=12$, $\int_{-2}^{5}f(x)\,dx=6$, $\int_{-2}^{5}g(x)\,dx=2$,求下列积分的值:

(a) $\int_{-2}^{2}f(x)\,dx$.　　(b) $\int_{2}^{5}f(x)\,dx$.

(c) $\int_{5}^{-2}g(x)\,dx$.　　(d) $\int_{-2}^{5}(-\pi g(x))\,dx$.

(e) $\int_{-2}^{5}\left(\frac{f(x)+g(x)}{5}\right)dx$.

10. 假设 $\int_{0}^{2}f(x)\,dx=\pi$, $\int_{0}^{2}7g(x)\,dx=7$, $\int_{0}^{1}g(x)\,dx=2$,求下列积分的值:

(a) $\int_{0}^{2}g(x)\,dx$.　　(b) $\int_{1}^{2}g(x)\,dx$.

(c) $\int_{2}^{0}f(x)\,dx$.　　(d) $\int_{0}^{2}\sqrt{2}f(x)\,dx$.

(e) $\int_{0}^{2}(g(x)-3f(x))\,dx$.

在习题 11~14 中,求函数 $f$ 的图形同 $x$ 轴之间的

区域的总面积.

11. $f(x) = x^2 - 4x + 3,\quad 0 \leqslant x \leqslant 3.$

12. $f(x) = 1 - (x^2/4),\quad -2 \leqslant x \leqslant 3.$

13. $f(x) = 5 - 5x^{2/3},\quad -1 \leqslant x \leqslant 8.$

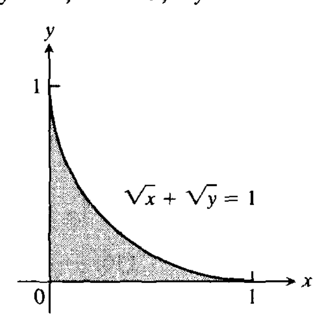
14. $f(x) = 1 - \sqrt{x},\quad 0 \leqslant x \leqslant 4.$

在习题15 ~ 26 中,求由曲线和直线包围的区域的面积.

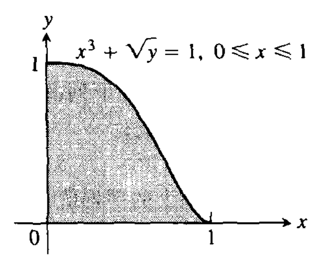
15. $y = x,\quad y = 1/x^2,\quad x = 2.$

16. $y = x,\quad y = 1/\sqrt{x},\quad x = 2.$

17. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1,\quad x = 0,\quad y = 0.$




18. $x^3 + \sqrt{y} = 1,\quad x = 0,\quad y = 0, 0 \leqslant x \leqslant 1.$




19. $x = 2y^2,\quad x = 0,\quad y = 3.$

20. $x = 4 - y^2,\quad x = 0.$

21. $y^2 = 4x,\quad y = 4x - 2.$

22. $y^2 = 4x + 4,\quad y = 4x - 16.$

23. $y = \sin x,\quad y = x,\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/4.$

24. $y = |\sin x|,\quad y = 1, -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2.$

25. $y = 2\sin x, y = \sin 2x,\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$

26. $y = 8\cos x,\quad y = \sec^2 x, -\pi/3 \leqslant x \leqslant \pi/3.$

27. 求左边以 $x + y = 2$ 为界、右边以 $y = x^2$ 为界和上方以 $y = 2$ 为界的"三角形"区域的面积.

28. 求左边以 $= \sqrt{x}$ 为界、右边以 $y = 6 - x$ 为界和下方以 $y = 1$ 为界的"三角形"区域的面积.

29. 求函数 $f(x) = x^3 - 3x^2$ 的极值,并且求由 $f$ 的图形和 $x$ 轴包围的区域的面积.

30. 求由曲线 $x^{1/2} + y^{1/2} + z^{1/2} = a^{1/2}$ 从第一象限切割的区域的面积.

31. 求由曲线 $x = y^{3/2}$ 以及直线 $x = y$ 和 $y = -1$ 包围的区域的总面积.

32. 求区间 $0 \leqslant x \leqslant 3\pi/2$ 上介于曲线 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 之间的区域的总面积.

33. **面积** 求曲线 $y = 2(\ln x)/x$ 和 $x$ 轴之间从 $x = 1$ 到 $x = \mathrm{e}$ 的面积.

34. (a) 证明:曲线 $y = 1/x$ 和 $x$ 轴之间从 $x = 10$ 到 $x = 20$ 的面积与同一曲线和 $x$ 轴之间从 $x = 1$ 到 $x = 2$ 的面积相等.

(b) 证明:曲线 $y = 1/x$ 和 $x$ 轴之间从 $ka$ 到 $kb$ 的面积与同一曲线和 $x$ 轴之间从 $x = a$ 到 $x = b\ (0 < a < b,\ k > 0)$ 的面积相等.

35. 证明: $y = x^2 + \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ 是初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 2 - \frac{1}{x^2};\ y'(1) = 3, y(1) = 1$$

的解.

36. 证明: $y = \int_0^x (1 + 2\sqrt{\sec t})\,\mathrm{d}t$ 是初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \sqrt{\sec x}\tan x;\ y'(0) = 3, y(0) = 0$$

的解.

在习题 37 和 38 中,用积分表示初值问题的解.

37. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\sin x}{x};\ y(5) = -3.$

38. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{2 - \sin^2 x};\ y(-1) = 2.$

在习题 39 ~ 42 中,求解初值问题.

39. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};\ y(0) = 0.$

40. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x^2 + 1} - 1;\ y(0) = 1.$

41. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}},\quad x > 1;\ y(2) = \pi.$

42. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}};\ y(0) = 2.$

在习题 43 ~ 72 中,求积分的值.

43. $\int 2(\cos x)^{-1/2}\sin x\,\mathrm{d}x.$

44. $\int (\tan x)^{-3/2}\sec^2 x\,\mathrm{d}x.$

45. $\int (2\theta + 1 + 2\cos(2\theta + 1))\,\mathrm{d}\theta.$

46. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{2\theta - \pi}} + 2\sec^2(2\theta - \pi)\right)\mathrm{d}\theta.$

47. $\int \left(t - \frac{2}{t}\right)\left(t + \frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t.$

48. $\int \frac{(t + 1)^2 - 1}{t^4}\,\mathrm{d}t.$

49. $\int \sqrt{t}\sin(2t^{3/2})\,\mathrm{d}t.$

**50.** $\int \sec\theta\tan\theta\sqrt{1+\sec\theta}\,\mathrm{d}\theta.$

**51.** $\int e^x\sec^2(e^x-7)\,\mathrm{d}x.$

**52.** $\int e^y\csc(e^y+1)\cot(e^y+1)\,\mathrm{d}y.$

**53.** $\int \sec^2(x)e^{\tan x}\mathrm{d}x.$ **54.** $\int \csc^2 x\, e^{\cot x}\mathrm{d}x.$

**55.** $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{3x-4}.$ **56.** $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\mathrm{d}x.$

**57.** $\int_0^4 \frac{2t}{t^2-25}\,\mathrm{d}t.$ **58.** $\int \frac{\tan(\ln v)}{v}\,\mathrm{d}v.$

**59.** $\int \frac{(\ln x)^{-3}}{x}\,\mathrm{d}x.$ **60.** $\int \frac{1}{r}\csc^2(1+\ln r)\,\mathrm{d}r.$

**61.** $\int x3^{x^2}\mathrm{d}x.$ **62.** $\int 2^{\tan x}\sec^2 x\,\mathrm{d}x.$

**63.** $\int \frac{3\,\mathrm{d}r}{\sqrt{1-4(r-1)^2}}.$ **64.** $\int \frac{6\,\mathrm{d}r}{\sqrt{4-(r+1)^2}}.$

**65.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+(x-1)^2}.$ **66.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+(3x+1)^2}.$

**67.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x-1)\sqrt{(2x-1)^2-4}}.$

**68.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)\sqrt{(x+3)^2-25}}.$

**69.** $\int \frac{e^{\sin^{-1}x}\mathrm{d}x}{2\sqrt{x-x^2}}.$ **70.** $\int \frac{\sqrt{\sin^{-1}x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$

**71.** $\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\tan^{-1}y}\,(1+y^2)}.$ **72.** $\int \frac{(\tan^{-1}x)^2\mathrm{d}x}{1+x^2}.$

在习题 73 ~ 112 中,求积分的值.

**73.** $\int_{-1}^{1}(3x^2-4x+7)\,\mathrm{d}x.$ **74.** $\int_0^1(8s^3-12s^2+5)\,\mathrm{d}s.$

**75.** $\int_1^2 \frac{4}{v^2}\,\mathrm{d}v.$ **76.** $\int_1^{27} x^{-4/3}\mathrm{d}x.$

**77.** $\int_1^4 \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}}.$ **78.** $\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{u})^{1/2}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u.$

**79.** $\int_0^1 \frac{36\,\mathrm{d}x}{(2x+1)^3}.$ **80.** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt[3]{(7-5r)^2}}.$

**81.** $\int_{1/8}^{1} x^{-1/3}(1-x^{2/3})^{3/2}\mathrm{d}x.$ **82.** $\int_0^{1/2} x^3(1+9x^4)^{-3/2}\mathrm{d}x.$

**83.** $\int_0^{\pi}\sin^2 5r\,\mathrm{d}r.$ **84.** $\int_0^{\pi/4}\cos^2\left(4t-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}t.$

**85.** $\int_0^{\pi/3}\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta.$ **86.** $\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\csc^2 x\,\mathrm{d}x.$

**87.** $\int_{\pi}^{3\pi}\cot^2\frac{x}{6}\,\mathrm{d}x.$ **88.** $\int_0^{\pi}\tan^2\frac{\theta}{3}\,\mathrm{d}\theta.$

**89.** $\int_{-\pi/3}^{0}\sec x\tan x\,\mathrm{d}x.$ **90.** $\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\csc z\cot z\,\mathrm{d}z.$

**91.** $\int_0^{\pi/2} 5(\sin x)^{3/2}\cos x\,\mathrm{d}x.$

**92.** $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 15\sin^4 3x\cos 3x\,\mathrm{d}x.$

**93.** $\int_0^{\pi/2}\frac{3\sin x\cos x}{\sqrt{1+3\sin^2 x}}\mathrm{d}x.$ **94.** $\int_0^{\pi/4}\frac{\sec^2 x}{(1+7\tan x)^{2/3}}\,\mathrm{d}x.$

**95.** $\int_1^4\left(\frac{x}{8}+\frac{1}{2x}\right)\mathrm{d}x.$ **96.** $\int_1^8\left(\frac{2}{3x}-\frac{8}{x^2}\right)\mathrm{d}x.$

**97.** $\int_{-2}^{-1} e^{-(x+1)}\mathrm{d}x.$ **98.** $\int_{-\ln 2}^{0} e^{2w}\mathrm{d}w.$

**99.** $\int_0^{\ln 5} e^r(3e^r+1)^{-3/2}\mathrm{d}r.$ **100.** $\int_0^{\ln 9} e^{\theta}(e^{\theta}-1)^{1/2}\mathrm{d}\theta.$

**101.** $\int_1^e \frac{1}{x}(1+7\ln x)^{-1/3}\mathrm{d}x.$ **102.** $\int_1^3 \frac{(\ln(v+1))^2}{v+1}\,\mathrm{d}v.$

**103.** $\int_1^8 \frac{\log_4\theta}{\theta}\,\mathrm{d}\theta.$ **104.** $\int_1^e \frac{8\ln 3\log_3\theta}{\theta}\,\mathrm{d}\theta.$

**105.** $\int_{-3/4}^{3/4}\frac{6\,\mathrm{d}x}{\sqrt{9-4x^2}}.$ **106.** $\int_{-1/5}^{1/5}\frac{6\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4-25x^2}}.$

**107.** $\int_{-2}^{2}\frac{3\,\mathrm{d}t}{4+3t^2}.$ **108.** $\int_{\sqrt{3}}^{3}\frac{\mathrm{d}t}{3+t^2}.$

**109.** $\int \frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{4y^2-1}}.$ **110.** $\int \frac{24\,\mathrm{d}y}{y\sqrt{y^2-16}}.$

**111.** $\int_{\sqrt{2}/3}^{2/3}\frac{\mathrm{d}y}{|y|\sqrt{9y^2-1}}.$

**112.** $\int_{-2/\sqrt{5}}^{-\sqrt{6}/\sqrt{5}}\frac{\mathrm{d}y}{|y|\sqrt{5y^2-3}}.$

**113.** 求函数 $f(x)=mx+b$ 在下列区间上的平均值:

(a) 在区间 $[-1,1]$ 上;

(b) 在区间 $[-k,k]$ 上.

**114.** 求下列函数在区间上的平均值:

(a) $y=\sqrt{3x}$ 在区间 $[0,3]$ 上;

(b) $y=\sqrt{ax}$ 在区间 $[0,a]$ 上.

**115.** 令 $f$ 是区间 $[a,b]$ 上的可微函数. 在第 2 章把 $f$ 在 $[a,b]$ 上的平均变化率定义的

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

并且把 $f$ 在 $x$ 的瞬时变化率定义为 $f'(x)$. 在本章定义了函数的平均值. 为使平均的新定义同过去的定义保持一致,应有

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f' \text{ 在}[a,b]\text{ 上的平均值}$$

情况果然如此吗?提出答案的理由.

**116.** 可积函数在长度为 2 的区间上的平均值等于函数在这个区间上的积分的一半,这个结论成立吗? 提出答案的理由.

**117.** (a) 证明

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$$

(b) 求函数 $\ln x$ 在区间 $[1,e]$ 上的平均值.

118. 求函数$f(x) = 1/x$在区间[1,2]上的平均值.

T 119. 计算一年365天的温度函数

$$f(x) = 37\sin\left(\frac{2\pi}{365}(x-101)\right)+25$$

的平均值. 这是在阿拉斯加州费尔班克斯镇用来估计年平均气温的一种方法. 美国国家气象局的官方数字显示,那里常年日平均气温的数值是25.7°F,略高于$f(x)$的平均值. 图3.28显示出现这种差异的原因.

T 120. **气体的比热**　比热$C_v$是给定质量的气体在恒定体积下温度升高1℃所需的热量,热量以cal/deg-mole(卡/度克分子)为单位. 氧气的比热依赖于它的温度$T$,并且满足公式

$$C_v = 8.27 + 10^{-5}(26T - 1.87T^2)$$

求氧气在20℃ $\leqslant T \leqslant$ 675℃范围内$C_v$的平均值,以及在达到这个值时的温度.

在习题121~128中,求$dy/dx$.

121. $y = \int_2^x \sqrt{2+\cos^3 t}\,dt.$

122. $y = \int_2^{7x^2} \sqrt{2+\cos^3 t}\,dt.$

123. $y = \int_x^1 \frac{6}{3+t^4}\,dt.$　　124. $y = \int_{\sec x}^2 \frac{1}{t^2+1}\,dt.$

125. $y = \int_{\ln x^2}^0 e^{\cos t}\,dt.$　　126. $y = \int_1^{e^{\sqrt{x}}} \ln(t^2+1)\,dt.$

127. $y = \int_0^{\sin^{-1}x} \frac{dt}{\sqrt{1-2t^2}}.$　　128. $y = \int_{\tan^{-1}x}^{\pi/4} e^{\sqrt{t}}\,dt.$

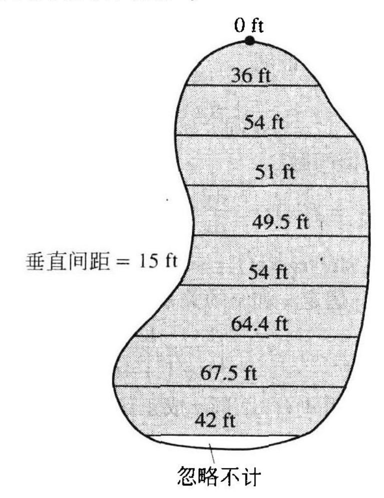
129. 在区间$[a,b]$上每个可微函数$y = f(x)$本身是$[a,b]$上某个函数的导数,这个结论正确吗?提出答案的理由.

130. 假定$F(x)$是$f(x) = \sqrt{1+x^4}$的反导数. 用$F$表示积分$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$,并且提出答案的理由.

131. 设$y = \int_x^1 \sqrt{1+t^2}\,dt$,求$dy/dx$. 说明计算的主要步骤.

132. 设$y = \int_{\cos x}^0 (1/(1-t^2))\,dt$,求$dy/dx$. 说明计算的主要步骤.

133. **建新停车场**　为满足停车需求,你所在的城市划定如附图所示的场地. 作为市政工程师,市政委员会要求你计算能否用10 000美元在那块场地上建设停车场. 假设场地清除费用为每平方英尺0.1美元,地面铺设费用为每平方英尺2美元. 工程项目能否用10 000美元建成? 试用下和估计考察.(不同答案之间可能略有差异,取决于采用何种估计.)




134. 跳伞运动员A和B坐在在6400英尺高空盘旋的直升机上. 运动员A跳下并且在降落4秒后打开她的降落伞. 直升机然后爬升到7000英尺的高空盘旋. 运动员B在A离开直机机45秒后跳下,并且在降落13秒后打开他的降落伞. 两名运动员用张开的降落伞以16 ft/s的速度降落. 假定跳伞运动员在他们的降落伞打开前自由下落(不受空气阻力的影响).

(a) A的降落伞在什么高度打开?

(b) B的降落伞在什么高度打开?

(c) 哪位跳伞运动员先着陆?

135. 质点沿曲线$y = \ln x$向右上方运动. 它的$x$坐标以速率$dx/dt = \sqrt{x}$ m/s增加. 质点的$y$坐标在点$(e^2,2)$以什么速率变化?

136. 一位姑娘在一条形如曲线$y = ge^{-x/3}$的滑道上向下滑行. 她的$y$坐标以$dy/dt = (-1/4)\sqrt{g-y}$ ft/s的速率改变. 当她达到$x = 9$ ft的滑道底部时,她的$x$坐标大约以什么速率改变?(取$e^3 = 20$,并且把答案舍入到同ft/s最接近的数.)

## 第5章补充和提高习题

1. (a) 设$\int_0^1 7f(x)\,dx = 7$,是否有$\int_0^1 f(x)\,dx = 1$?

(b) 设$\int_0^1 f(x)\,dx = 4$及$f(x) \geqslant 0$,是否有

$$\int_0^1 \sqrt{f(x)}\,dx = \sqrt{4} = 2?$$

2. 假设

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 4, \int_{2}^{5} f(x)\,dx = 3, \int_{-2}^{5} g(x)\,dx = 2$$

下面哪些结果是正确的(如果有)?

(a) $\int_{5}^{2} f(x)\,dx = -3$.

(b) $\int_{-2}^{5} (f(x) + g(x)) = 9$.

(c) 在区间 $-2 \leqslant x \leqslant 5$ 上,$f(x) \leqslant g(x)$.

3. **初值问题** 证明

$$y = \frac{1}{a}\int_{0}^{x} f(t) \sin a(x-t)\,dt$$

求解初值问题

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2 y = f(x), \quad \frac{dy}{dx} = 0 \text{ 和 } y = 0 \text{ (当 } x = 0 \text{ 时)}$$

(提示:$\sin(ax - at) = \sin ax \cos at - \cos ax \sin at$.)

4. **比例** 假定 $x$ 和 $y$ 的关系由等式

$$x = \int_{0}^{y} \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\,dt$$

表示. 证明 $d^2y/dx^2$ 同 $y$ 成正比,并且求比例常数.

5. 设

(a) $\int_{0}^{x^2} f(t)\,dt = x \cos \pi x$.

(b) $\int_{0}^{f(x)} t^2\,dt = x \cos \pi x$.

求 $f(4)$.

6. 根据下列条件求 $f(\pi/2)$:

(i) $f$ 是正值连续函数;

(ii) 在曲线 $y = f(x)$ 下方从 $x = 0$ 到 $x = a$ 的面积为

$$\frac{a^2}{2} + \frac{a}{2} \sin a + \frac{\pi}{2} \cos a$$

7. 假设在 $xy$ 平面内由 $x$ 轴和曲线 $y = f(x)$ ($f(x) \geqslant 0$) 以及直线 $x = 1$ 和 $x = b$ 包围的区域的面积等于 $\sqrt{b^2+1} - \sqrt{2}$,其中 $b$ 是大于 1 的所有数. 求 $f(x)$.

8. 证明

$$\int_{0}^{x} \left( \int_{0}^{u} f(t)\,dt \right) du = \int_{0}^{x} f(u)(x-u)\,du$$

(提示:把右端的积分表示成两个积分之差. 然后证明公式两端具有对于 $x$ 的相同导数.)

9. **求曲线方程** 在 $xy$ 平面内求通过点 $(1, -1)$ 的曲线的方程,假定曲线在 $x$ 的斜率恒为 $3x^2 + 2$.

10. **铲泥土** 从土坑底部以 32 ft/s 的初速度向上抛掷一铲泥土. 泥土必须上升到抛出点之上 17 ft 才能越过土坑的边缘. 这个速度已足以抛出泥土或者需要用更快的抛掷速率?

**分段连续函数** 尽管我们主要关注连续函数,但是应用问题中的许多函数是分段连续的. 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $I$ 内仅有有限个不连续点,在 $I$ 的每个内点 $c$ 存在极限

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \text{ 和} \lim_{x \to c^+} f(x)$$

并且是有限的,同时在 $I$ 的端点存在相应的单侧极限,并且是有限的,那么函数 $f(x)$ 是**闭区间 $I$ 上的分段连续函数**. 所有的分段连续函数都是可积的. 不连续的点把 $I$ 分成开子区间和半开子区间,$f$ 在这些子区间上是连续的,而上面的极限条件保证 $f$ 在每个子区间的闭包上存在连续延拓. 为了求分段连续函数的积分,我们求每个延拓的积分,并且对结果求和. 函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & -1 \leqslant x < 0 \\ x^2, & 0 \leqslant x < 2 \\ -1, & 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$

(见图 5.33)在 $[-1, 3]$ 上的积分为

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (1-x)\,dx + \int_{0}^{2} x^2\,dx + \int_{2}^{3} (-1)\,dx$$

$$= \left[ x - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{0} + \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{0}^{2} + \left[ -x \right]_{2}^{3}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{8}{3} - 1 = \frac{19}{6}$$

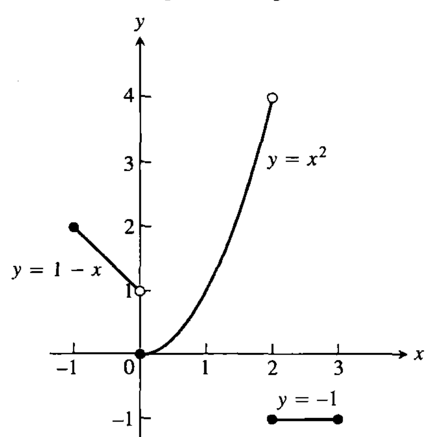



图 5.33 对像这样的分段连续函数逐段积分

如果加上要求 $(d/dx)\int_{a}^{x} f(t)\,dt$ 仅在 $f$ 为连续的点等于 $f(x)$ 的约束条件,基本定理适用于分段连续函数. 对于莱布尼茨法则(参见习题 46)有同样的约束条件.

在习题 11 ~ 16 中,画出函数的图形,并且求它们在其定义域上的积分.

11. $f(x) = \begin{cases} x^{2/3}, & -8 \leqslant x < 0, \\ -4, & 0 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & -4 \leqslant x < 0, \\ x^2 - 4, & 0 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$

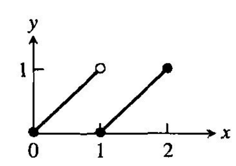
**13.** $g(t)=\begin{cases}t, & 0\leqslant t<1,\\ \sin \pi t, & 1\leqslant t\leqslant 2.\end{cases}$

**14.** $h(z)=\begin{cases}\sqrt{1-z}, & 0\leqslant z<1,\\ (7z-6)^{-1/3}, & 1\leqslant z\leqslant 2.\end{cases}$

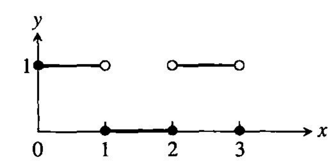
**15.** $f(x)=\begin{cases}1, & -2\leqslant x<-1,\\ 1-x^2, & -1\leqslant x<1,\\ 2, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

**16.** $h(r)=\begin{cases}r, & -1\leqslant r<0,\\ 1-r^2, & 0\leqslant r<1,\\ 1, & 1\leqslant r\leqslant 2.\end{cases}$

**17.** 求在附图中画出图形的函数的平均值.




**18.** 求在附图中画出图形的函数的平均值.




**19.** 验证表 5.6 中的积分公式.

**表 5.6 双曲函数的积分公式**

| |
|---|
| $\int \sinh u\,du=\cosh u+C$ |
| $\int \cosh u\,du=\sinh u+C$ |
| $\int \operatorname{sech}^2 u\,du=\tanh u+C$ |
| $\int \operatorname{csch}^2 u\,du=-\coth u+C$ |
| $\int \operatorname{sech} u\tanh u\,du=-\operatorname{sech} u+C$ |
| $\int \operatorname{csch} u\coth u\,du=-\operatorname{csch} u+C$ |

**20.** 验证表 5.7 中的积分公式.

**表 5.7 反双曲函数的积分公式**

| |
|---|
| $\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}}=\sinh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C,\quad a>0$ |
| $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}=\cosh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C,\quad u>a>0$ |
| $\int \frac{du}{a^2-u^2}=\begin{cases}\frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C, & u^2<a^2\\ \frac{1}{a}\coth^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C, & u^2>a^2\end{cases}$ |

（续）

| |
|---|
| $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}}=-\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C,\quad 0<u<a$ |
| $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}}=-\frac{1}{a}\operatorname{csch}^{-1}\left\|\frac{u}{a}\right\|+C,\quad u\neq 0$ 和 $a>0$ |

在习题 21 ~ 28 中,通过下列函数求积分:

(a) 反双曲函数; (b) 自然对数函数.

**21.** $\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$.

**22.** $\int_0^{1/3}\frac{6\,dx}{\sqrt{1+9x^2}}$.

**23.** $\int_{5/4}^{2}\frac{dx}{1-x^2}$.

**24.** $\int_0^{1/2}\frac{dx}{1-x^2}$.

**25.** $\int_{1/5}^{3/13}\frac{dx}{x\sqrt{1-16x^2}}$.

**26.** $\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$.

**27.** $\int_0^{\pi}\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

**28.** $\int_1^{e}\frac{dx}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}$.

在习题 29 ~ 32 中,求极限.

**29.** $\lim_{b\to 1^-}\int_0^b\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

**30.** $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\tan^{-1}t\,dt$.

**31.** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$.

**32.** $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{1/n}+e^{2/n}+\cdots+e^{(n-1)/n}+e^{n/n}\right)$.

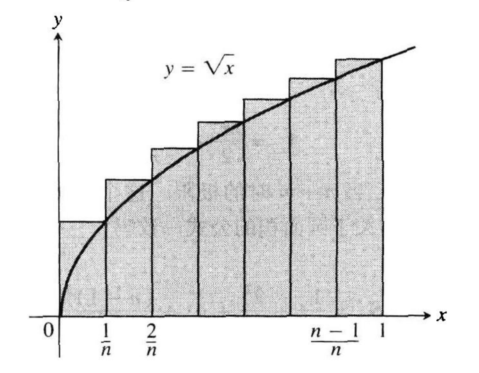
**用积分逼近有限和** 在微积分的很多应用问题中,把积分用于逼近有限和 —— 这是用有限和逼近积分这种常见过程的逆过程.

例如,让我们估计前 $n$ 个正整数的平方根的和 $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}$. 积分

$$\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_0^1=\frac{2}{3}$$

是上和

$$S_n=\sqrt{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{2}{n}}\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^{3/2}}$$



的极限. 因此，当 $n$ 是很大的正整数时，$S_n$ 将接近于2/3，并且有

$$\text{平方根和} = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} = S_n \cdot n^{3/2} \approx \frac{2}{3} n^{3/2}$$

下表显示逼近能够达到何等精度.

| $n$ | 平方根和 | $(2/3)n^{3/2}$ | 相对误差 |
|---|---|---|---|
| 10 | 22.468 | 21.082 | 1.386/22.468 ≈ 6% |
| 50 | 239.04 | 235.70 | 1.4% |
| 100 | 671.46 | 666.67 | 0.7% |
| 1000 | 21 097 | 21 082 | 0.07% |

**33.** 通过证明极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5}{n^6}$$

等于积分

$$\int_0^1 x^5 \mathrm{d}x$$

和计算积分，求极限的值.

**34.** 参见习题33，求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3)$$

的值.

**35.** 假设 $f(x)$ 是连续函数. 把极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$

表示成定积分.

**36.** 利用习题35的结果求下列极限值：

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(2+4+6+\cdots+2n)$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{16}}(1^{15}+2^{15}+3^{15}+\cdots+n^{15})$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$.

关于下列极限可以得出什么结论?

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{17}}(1^{15}+2^{15}+3^{15}+\cdots+n^{15})$.

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{15}}(1^{15}+2^{15}+3^{15}+\cdots+n^{15})$.

**37.** (a) 证明：在半径为 $r$ 的圆内，正 $n$ 边形的面积 $A_n$ 为

$$A_n = \frac{nr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$$

(b) 求 $A_n$ 当 $n\to\infty$ 时的极限. 这个答案同你所知的关于圆面积的公式一致吗?

**38.** 令

$$S_n = \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3}$$

为了计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$，证明

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$$

并且把 $S_n$ 解释成积分

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$$

的逼近和.（提示：把区间[0,1]划分成 $n$ 个长度相等的子区间，并且写出内接矩形的逼近和.）

**39.** 求曲线 $y = 2(\log_2 x)/x$ 和 $2(\log_4 x)/x$ 同 $x$ 轴之间从 $x=1$ 到 $x=\mathrm{e}$ 的面积. 较大面积和较小面积的比是多少?

**40.** 什么 $x>0$ 满足方程 $x^{(x^x)} = (x^x)^x$? 提出答案的理由.

**41.** 令 $f(x) = \mathrm{e}^{g(x)}$ 和 $g(x) = \int_2^x \frac{t}{1+t^4}\mathrm{d}t$，求 $f'(2)$.

**42.** 令

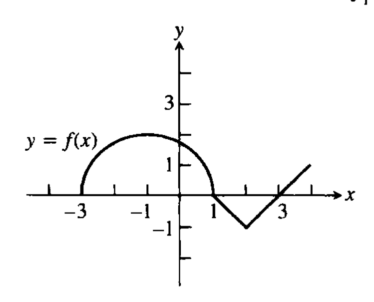
$$f(x) = \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{2\ln t}{t}\mathrm{d}t$$

(a) 求 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$.

(b) 求 $f(0)$.

(c) 关于 $f$ 的图形可以得出什么结论? 提出答案的理由.

**43. 用积分定义的函数** 函数 $f$ 的图形包含如附图所示的一个半圆和两条线段. 令 $g(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t$.




(a) 求 $g(1)$.

(b) 求 $g(3)$.

(c) 求 $g(-1)$.

(d) 求开区间 $(-3,4)$ 上 $g(x)$ 取相对极大值的全部 $x$ 值.

(e) 写出同 $g$ 的图形在 $x=-1$ 相切的切线方程.

(f) 求 $g$ 的图形在开区间 $(-3,4)$ 上的每个拐点的 $x$ 坐标.

(g) 求 $g$ 的值域.

**44. 微分方程** 证明：微分方程

$$y = \sin x + \int_x^{\pi} \cos 2t\,\mathrm{d}t + 1$$

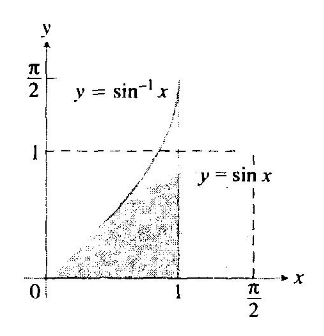
满足下列条件：

(i) $y'' = -\sin x + 2\sin 2x$.

(ii) 当 $x = \pi$ 时 $y = 1$, $y' = -2$.

**45.** 利用附图证明：

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \sin^{-1} x\, dx$$

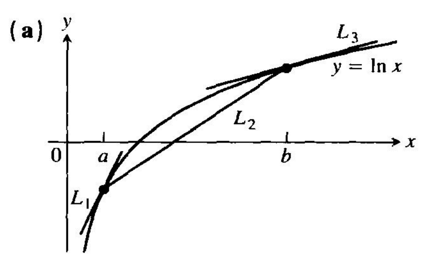



**46. 纳皮尔不等式** 下面是对

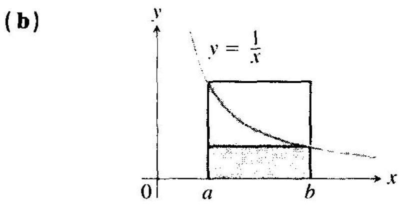
$$b > a > 0 \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a}$$

的两种图式证明. 解释每种证明是如何进行的：

(a)




(b)




(来源：Roger B. Nelson, *College Mathematics Journal*(《大学数学杂志》), 第 24 卷, 第 2 期, 1993 年 3 月, 165 页.)

**莱布尼茨法则** 在应用问题中，有时会遇到像

$$f(x) = \int_{\sin x}^{x^2} (1 + t)\,dt \quad 和 \quad g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \sin t^2\,dt$$

这样的函数，它们是由同时具有可变积分上限和可变积分下限的积分定义的. 第一个积分可以直接计算，但是第二个积分不能直接计算. 然而，我们可以通过称为**莱布尼茨法则**的公式求每个积分的导数.

> **莱布尼茨法则**
>
> 如果 $f$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，而 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是在 $[a,b]$ 内取 $x$ 值的可微函数，那么
>
> $$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}$$

图 5.34 给出莱布尼茨法则的几何解释. 它显示一条具有可变宽度 $f(t)$ 的地毯，当在右端铺开地毯的同一时刻 $x$ 在左端卷起地毯.（在这个解释中用 $x$ 而不用 $t$ 表示时间.）在时间 $x$，地板由地毯从 $u(x)$ 覆盖到 $v(x)$. 不必要求卷起地毯的速率 $du/dx$ 和铺开地毯的速率 $dv/dx$ 相同. 在任何给定时刻 $x$，由地毯覆盖的面积为

$$A(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$$

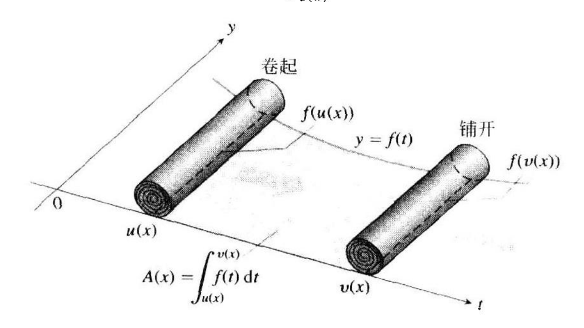



图 5.34 卷起和铺开一条地毯：莱布尼茨法则

$$\frac{dA}{dx} = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}$$

的几何解释

地毯覆盖面积变化的速率是什么？在时刻 $x$，$A(x)$ 是按铺开地毯的宽度 $f(v(x))$ 乘铺开地毯的速率 $dv/dx$ 增加的. 就是说，$A(x)$ 以速率

$$f(v(x))\frac{dv}{dx}$$

增加. 与此同时，$A(x)$ 以速率

$$f(u(x))\frac{du}{dx}$$

减少，这个速率是在左端卷起地毯的宽度 $f(u(x))$ 同卷起地毯速率 $du/dx$ 的乘积. $A(x)$ 改变的净速率为

$$\frac{dA}{dx} = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}$$

这正是莱布尼茨法则.

为了证明这个法则，令 $F$ 是 $f$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个反导数. 于是

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = F(v(x)) - F(u(x))$$

在这个公式两端对 $x$ 微分，给出我们需要的公式：

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$$

$$= \frac{d}{dx}[F(v(x)) - F(u(x))]$$

$$= F'(v(x))\frac{dv}{dx} - F'(u(x))\frac{du}{dx} \quad (\text{链式法则})$$

$$= f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}$$

在习题 47~54 中，利用莱布尼茨法则求函数的导数.

**47.** $f(x) = \int_{1/x}^{x} \frac{1}{t}\,dt.$ **48.** $f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \frac{1}{1-t^2}\,dt.$

**49.** $g(y) = \int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} \sin t^2\,dt.$ **50.** $g(y) = \int_{\sqrt{y}}^{y^2} \frac{e^t}{t}\,dt.$

**51.** $y = \int_{x^2/2}^{x^2} \ln\sqrt{t}\,dt.$ **52.** $y = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} \ln t\,dt.$

**53.** $y = \int_{0}^{\ln x} \sin e^t\,dt.$ **54.** $y = \int_{e^{4\sqrt{x}}}^{e^{2x}} \ln t\,dt.$

**55.** 利用莱布尼茨法则,求使积分值

$$\int_{x}^{x+3} t(5-t)\,dt$$

达到最大的 $x$ 值. 像这样的问题出现在政治选举的数学原理中. 请参见 Steven J. Brams 和 Philip D. Straffin, Jr.,"The Entry Problem in a Political Race"（政治竞争中的参选问题），载于 Peter Ordeshook 和 Kenneth Shepfle 主编 *Political Eguilibrium*（《政治均势》），Kluwer-Nijhoff 出版，波士顿，1982 年，181-195 页.

# 第6章　定积分的应用

**概述**　第5章已经见到，在闭区间上的连续函数具有定积分，它是这种函数任何黎曼和的极限. 我们证明了可以利用微积分基本定理求定积分. 同时发现，一条曲线下方区域的面积或者两条曲线之间区域的面积可以作为定积分计算.

在这一章，把定积分的应用扩展到求立体的体积、平面曲线的长度以及旋转曲面的表面积. 此外，还要利用定积分求解其他问题，其中包括求指数增长与指数衰减，由力作的功，物体的质心位置，以及解简单的微分方程.

## 6.1　通过绕轴切片和旋转定义体积

在这一节，我们对横截面为平面区域的立体定义体积. 立体 $S$ 的**横截面**是由平面与一个 $S$ 相交形成的平面区域(见图6.1).

假定需要对像图6.1中那样的立体 $S$ 求体积. 我们从推广圆柱体的定义开始，把经典几何学中圆柱体体积的定义推广到底部为任意形状的柱体(见图6.2). 如果柱体具有已知的底面积 $A$ 和高 $h$，那么柱体的体积为

$$体积 = 底面积 \times 高 = A \times h$$

这个公式构成许多立体通过*切片方法*定义体积的基础，这些立体并不是柱体.

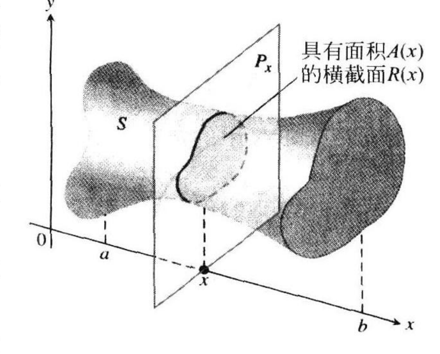


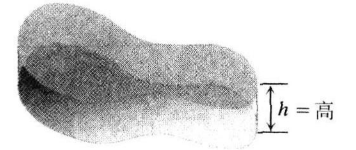

图6.1　立体 $S$ 的横截面由经过区间 $[a,b]$ 内的点 $x$ 垂直于 $x$ 轴的平面 $P_x$ 同立体 $S$ 相交构成

如果立体 $S$ 在区间 $[a, b]$ 内每个点 $x$ 的横截面是面积为 $A(x)$ 的区域 $R(x)$，并且 $A$ 是 $x$ 的连续函数，那么可以按下面提出的方法把立体 $S$ 的体积作为定积分来定义和计算.

我们把区间 $[a,b]$ 划分成宽度(长度)为 $\Delta x_k$ 的子区间，并且像对一条面包切片那样，以在划分点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 同 $x$ 轴垂直的平面对立体切片. 在划分点垂直于 $x$ 轴的平面 $P_{x_k}$ 把 $S$ 切成"薄片"(像一条面包的切片). 一块典型的薄片如图6.3所示. 我们用底面积为 $A(x_k)$ 和高为 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ 的柱体逼近在 $x_{k-1}$ 的平面和 $x_k$ 的平面之间的薄片(见图6.4). 这个柱体的体积 $V_k$ 为 $A(x_k) \cdot \Delta x_k$，它近似等于薄片的体积：




面积为已知的平面区域




以区域为底的柱体
体积=底面积×高=$Ah$

图6.2　柱体的体积始终定义为它的底面积乘高

$$第\ k\ 个薄片的体积 \approx V_k = A(x_k)\Delta x_k$$

因此，整个立体 $S$ 的体积 $V$ 由这些柱体的体积之和逼近，即

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\Delta x_k$$

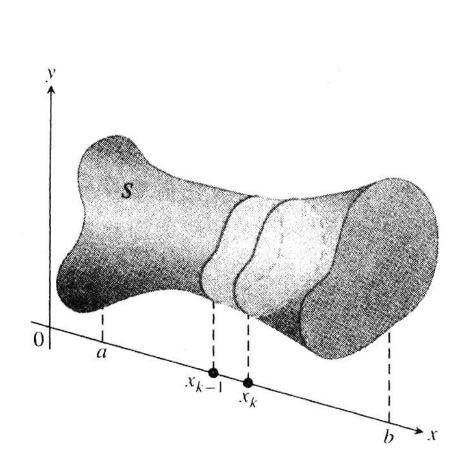



图6.3 立体 $S$ 内的曲型薄片

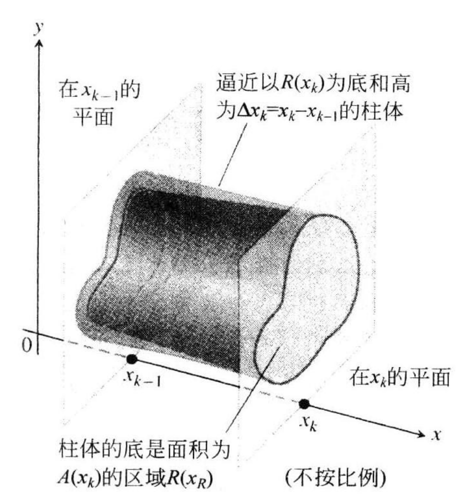



图6.4 图6.3中的立体薄片由面积为 $A(x_k)$ 的底和高为 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ 的柱体逼近

这是函数 $A(x)$ 在 $[a,b]$ 上的黎曼和. 我们要求当 $[a,b]$ 的划分的范数趋近零时这些和的逼近得到改进. 取一个把 $[a,b]$ 分成 $n$ 个子区间的划分 $P$，当 $\|P\|\to 0$ 时给出

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}A(x_k)\Delta x_k = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$

所以，把它们取极限的定积分定义为立体 $S$ 的体积.

> **定义** 已知可积横截面积 $A(x)$ 的立体的**体积**是 $A(x)$ 从 $x=a$ 到 $x=b$ 的积分，即
>
> $$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$

只要 $A(x)$ 是连续函数或者更一般的可积函数，这个定义就是适用的. 为了应用定义中的公式计算立体的体积，采取以下步骤：

> **计算立体的体积**
>
> (1) 画出立体和典型的横截面的草图.
> (2) 求典型横截面面积 $A(x)$ 的公式.
> (3) 求积分限.
> (4) 利用微积分基本定理求 $A(x)$ 的积分.

**例1** 一个3米高的棱柱体的底部正方形的边长为3米. 棱柱体在距离顶点 $x$ 米处同顶垂线垂直的横截面是边长为 $x$ 米的正方形. 求棱柱体的体积.

**解**

(1) 画草图：画出顶垂线沿 $x$ 轴和以原点为顶点的棱柱体，在图中包含典型的横截面(见图6.5).

(2) 求 $A(x)$ 的公式：$x$ 的横截面是边长为 $x$ 米的正方形，所以它的面积为

$$A(x) = x^2$$

(3) 求积分限：横截面的正方形位于从 $x=0$ 到 $x=3$ 的平面上.

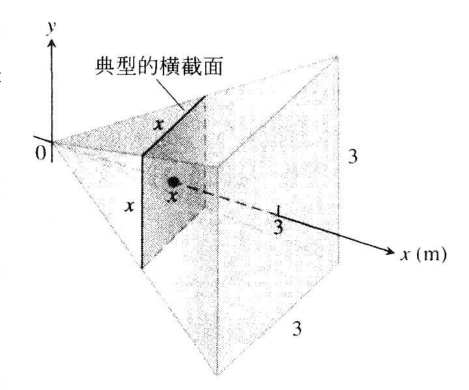



图6.5 例1的棱柱体的横截面为正方形

(4)计算积分求体积：

$$V=\int_0^3 A(x)\,dx=\int_0^3 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big]_0^3=9\ \mathrm{m}^3$$ ■

**人物传记**

邦纳凡丘尔·卡瓦列里

(Bonaventura Cavalieri，1598—1647)

**例2** 卡瓦列里原理指出，高度相等和在每个高度上横截面积相等的立体具有相同体积(见图6.6)．这个结论直接从体积的定义推出，因为两个立体的横截面积函数$A(x)$和区间$[a,b]$是相同的. ■

**例3** 用两个平面从半径为3的圆柱体切割下一个曲面楔形体. 第一个平面垂直于圆柱体的轴，第二个平面在圆柱体的中心以45°角和第一个平面相交. 求楔形体的体积.

**解** 画出楔形体并且画出垂直于$x$轴的典型横截面的草图(见图6.7)．$x$的横截面是面积为

$$A(x)=(\text{高})(\text{宽})=(x)(2\sqrt{9-x^2})=2x\sqrt{9-x^2}$$

的矩形. 这些矩形从$x=0$延伸到$x=3$，所以有

$$V=\int_a^b A(x)\,dx=\int_0^3 2x\sqrt{9-x^2}\,dx=-\frac{2}{3}(9-x^2)^{3/2}\Big]_0^3$$

(令$u=9-x^2$，$du=-2x\,dx$，积分，并且代入积分限)

$$=0+\frac{2}{3}(9)^{3/2}=18$$ ■

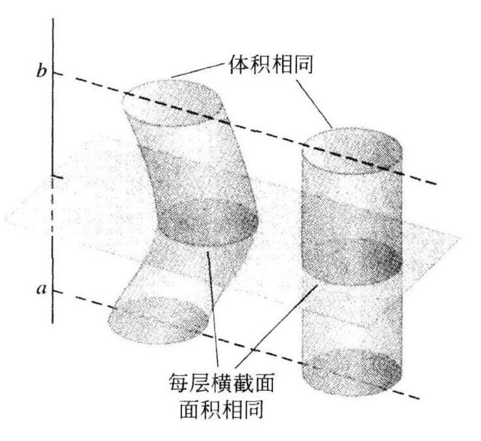



图6.6 卡瓦列里原理：这两个立体具有相同的体积，可以把它们解释成叠在一起的一叠硬币

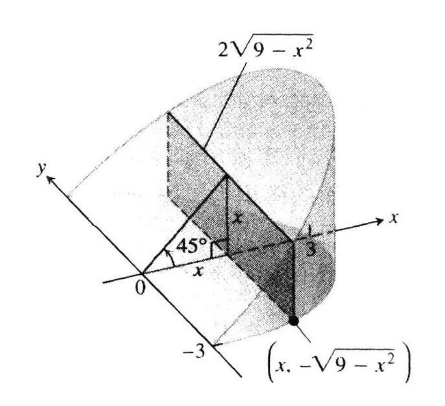



图6.7 例3的楔形体，垂直于$x$轴切片，横截面是矩形

### 6.1.1 旋转体：圆盘方法

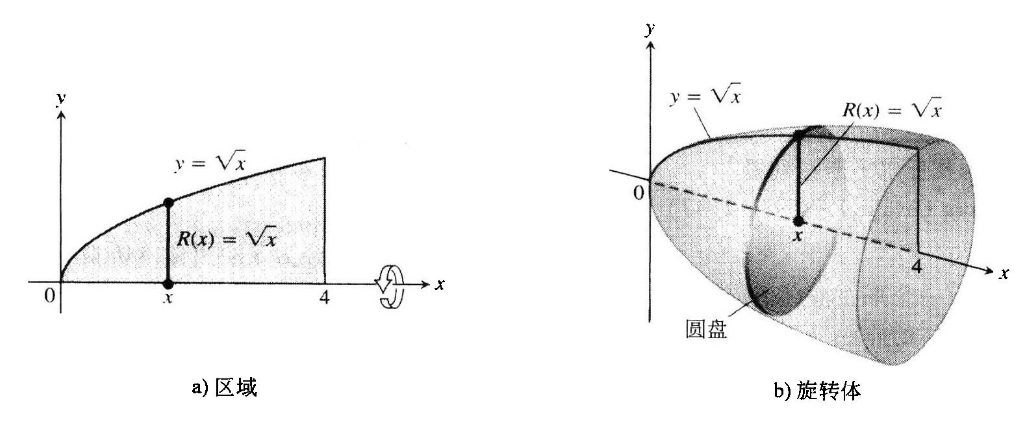
在平面内绕一条轴旋转平面区域产生的立体称为**旋转体**. 为了求如图6.8所示旋转体的体积，我们只需注意横切面的面积$A(x)$是半径为$R(x)$的圆盘的面积，$R(x)$是从旋转轴到平面区域边界的距离. 于是，横截面的面积为

$$A(x)=\pi(\text{半径})^2=\pi[R(x)]^2$$

所以体积的定义给出体积公式：

$$V=\int_a^b A(x)\,dx=\int_a^b \pi[R(x)]^2\,dx$$

这种计算旋转体体积的方法通常称为**圆盘方法**，因为横截面是半径为 $R(x)$ 的圆盘.




a) 区域　　　　b) 旋转体

图 6.8　例 4 中的区域和旋转体

**例 4**　绕 $x$ 轴旋转曲线 $y=\sqrt{x}\,(0\leqslant x\leqslant 4)$ 和 $x$ 轴之间的区域产生一个旋转体. 求它的体积.

**解**　画出显示区域、典型半径和所产生旋转体的图形(见图 6.8). 旋转体体积为

$$V=\int_a^b \pi[R(x)]^2\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^4 \pi[\sqrt{x}]^2\mathrm{d}x \quad (R(x)=\sqrt{x})$$

$$=\pi\int_0^4 x\,\mathrm{d}x=\pi\left.\frac{x^2}{2}\right]_0^4=\pi\frac{(4)^2}{2}=8\pi$$

■

**例 5**　绕 $x$ 轴旋转圆 $x^2+y^2=a^2$ 产生一个球体. 求它的体积.

**解**　我们想象用垂直于 $x$ 轴的平面把球体切成薄片(见图 6.9). 在 $-a$ 和 $a$ 之间一个典型点 $x$ 的横截面的面积为

$$A(x)=\pi y^2=\pi(a^2-x^2)$$

因此，球体的体积等于

$$V=\int_{-a}^{a}A(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}\pi(a^2-x^2)\mathrm{d}x=\pi\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi a^3$$

图 6.9　绕 $x$ 轴旋转圆 $x^2+y^2=r^2$ 产生的球体，半径为 $R(x)=y=\sqrt{a^2-x^2}$ (例 5)

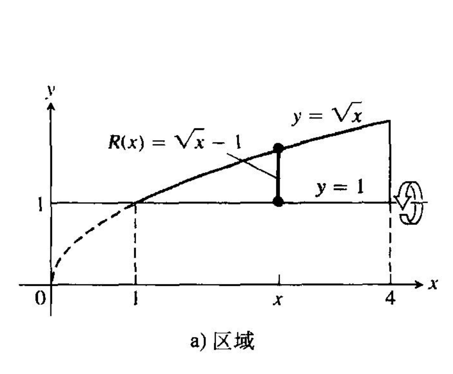
■

在下面的例子中，旋转轴不是 $x$ 轴，但是计算体积的准则相同：求 $\pi(\text{半径})^2$ 在相应积分限之间的积分.

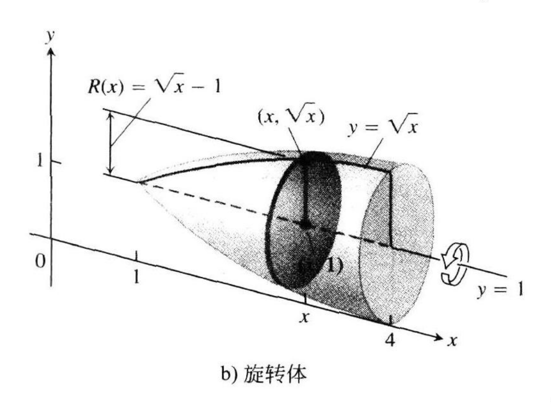
**例 6** 绕直线 $y=1$ 旋转以 $y=\sqrt{x}$ 与直线 $y=1$ 和 $x=4$ 为界的区域，求产生的旋转体体积.

**解** 画出显示区域、典型半径和所产生旋转体的图形(见图 6.10). 旋转体的体积等于

$$V=\int_1^4\pi[R(x)]^2\mathrm{d}x=\int_1^4\pi[\sqrt{x}-1]^2\mathrm{d}x=\pi\int_1^4[x-2\sqrt{x}+1]\mathrm{d}x=\pi\left[\frac{x^2}{2}-2\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}+x\right]_1^4=\frac{7\pi}{6}$$




a) 区域




b) 旋转体

图 6.10 例 6 中的区域和旋转体 ■

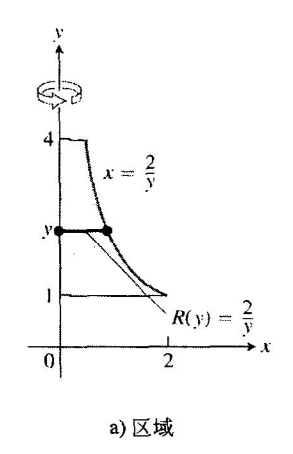
对于绕 $y$ 轴旋转在 $y$ 轴和曲线 $x=R(y)\,(c\leqslant y\leqslant d)$ 之间的区域产生的旋转体，为了求其体积，我们采用同样的方法，其中用 $y$ 代替 $x$. 在这种情况，圆形横截面的面积为

$$A(y)=\pi[\text{半径}]^2=\pi[R(y)]^2$$

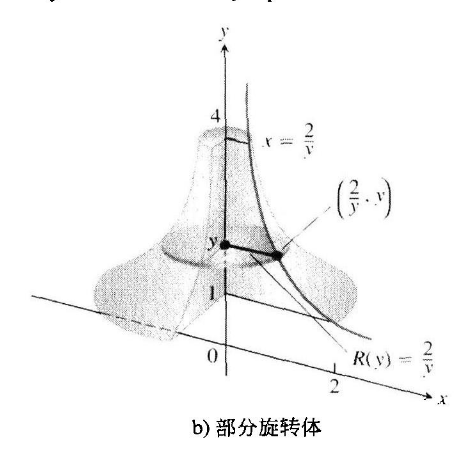
**例 7** 绕 $y$ 轴旋转在 $y$ 轴和曲线 $x=2/y\,(1\leqslant y\leqslant 4)$ 之间的区域，求产生的旋转体体积.

**解** 画出显示区域、典型半径和所产生旋转体的图形(见图 6.11). 旋转体的体积等于

$$V=\int_1^4\pi[R(y)]^2\mathrm{d}y=\int_1^4\pi\left(\frac{2}{y}\right)^2\mathrm{d}y=\pi\int_1^4\frac{4}{y^2}\,\mathrm{d}y=4\pi\left[-\frac{1}{y}\right]_1^4=4\pi\left[\frac{3}{4}\right]=3\pi$$




a) 区域




b) 部分旋转体

图 6.11 例 7 中的区域和部分旋转体 ■

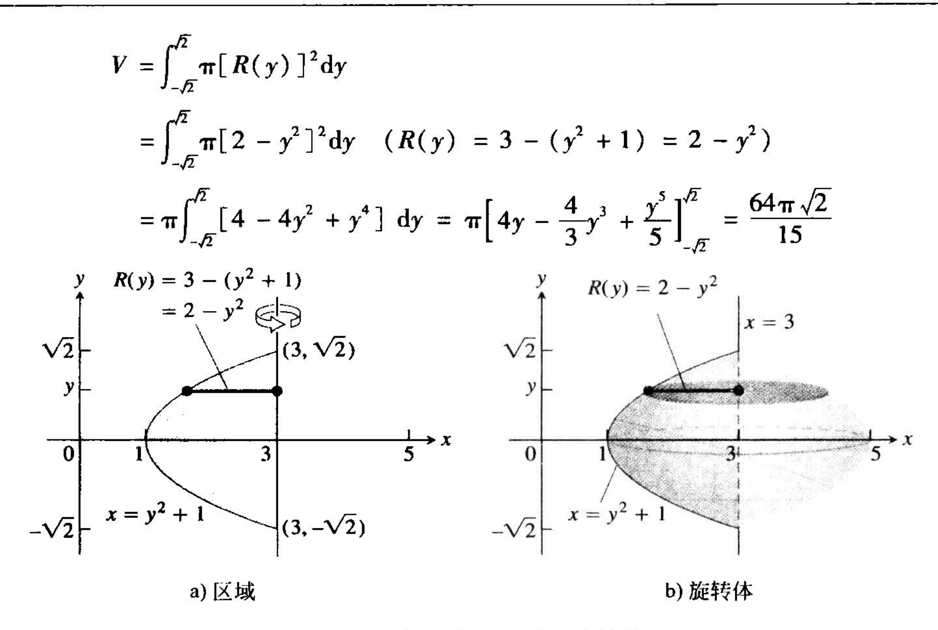
**例 8** 绕直线 $x=3$ 旋转在抛物线 $x=y^2+1$ 和直线 $x=3$ 之间的区域，求产生的旋转体体积.

**解** 画出显示区域、典型半径和所产生旋转体的图形(见图 6.12). 注意横截面垂直于直线 $x=3$. 旋转体的体积等于

$$V = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi [R(y)]^2 dy$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi [2 - y^2]^2 dy \quad (R(y) = 3 - (y^2 + 1) = 2 - y^2)$$

$$= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [4 - 4y^2 + y^4] \, dy = \pi \left[ 4y - \frac{4}{3}y^3 + \frac{y^5}{5} \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{64\pi\sqrt{2}}{15}$$




a) 区域　　b) 旋转体

图 6.12　例 8 中的区域和旋转体 ■

### 6.1.2 旋转体：垫圈方法

如果用来旋转产生旋转体的区域同旋转轴不邻接或者不相交，那么旋转体中有一个空洞（见图 6.1）．垂直于旋转轴的横截面的形状是垫圈（见图 6.13 中的环状曲面）而不是圆盘．典型垫圈的尺寸为

外径：$R(x)$

内径：$r(x)$

垫圈的面积为

$$A(x) = \pi[R(x)]^2 - \pi[r(x)]^2 = \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)$$

图 6.13　产生图中旋转体的横截面是垫圈而不是圆盘，所以积分 $\int_a^b A(x)\,dx$ 导出略微不同的公式

所以，体积的定义给出体积公式：

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,dx$$

计算旋转体体积的这种方法称为**垫圈方法**，因为横截面薄片是外径为 $R(x)$ 和内径为 $r(x)$ 的

圆形垫圈.

**例9** 绕 $x$ 轴旋转以曲线 $y=x^2+1$ 和直线 $y=-x+3$ 为界的区域产生旋转体. 求这个旋转体的体积.

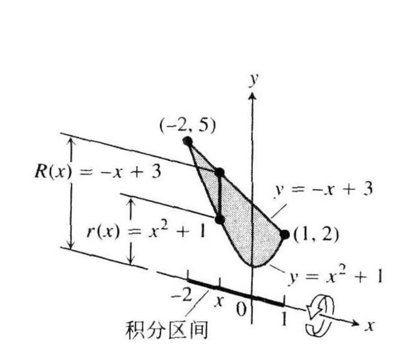
**解**

**(1)** 画出区域的图形，并且画一条穿过区域同旋转轴垂直的线段(见图6.14).

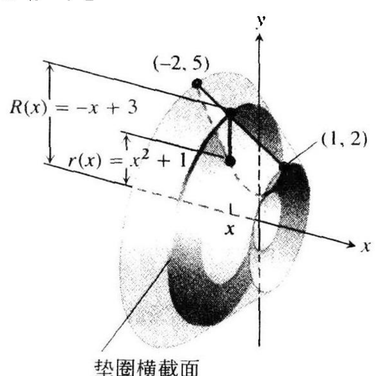
**(2)** 求垫圈的外径和内径，垫圈是由线段同区域一道绕 $x$ 轴旋转扫出的.

外径和内径是从旋转轴到线段两个端点的距离(见图6.14).

$$外径: R(x) = -x+3$$
$$内径: r(x) = x^2+1$$




a) 由垂直于旋转轴的线段生成的区域




b) 当绕x轴旋转区域时线段产生一个垫圈

**图6.14 例9中的区域和垫圈**

**(3)** 通过求图6.14a中曲线和直线交点的 $x$ 坐标，求积分限：

$$x^2+1=-x+3$$
$$x^2+x-2=0$$
$$(x+2)(x-1)=0$$
$$x=-2,\ x=1$$

**(4)** 求体积积分：

$$V=\int_a^b \pi([R(x)]^2-[r(x)]^2)\,dx$$
$$=\int_{-2}^{1}\pi((-x+3)^2-(x^2+1)^2)\,dx \quad (由第(2)步和第(3)步获得的值)$$
$$=\int_{-2}^{1}\pi(8-6x-x^2-x^4)\,dx=\pi\left[8x-3x^2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{1}=\frac{117\pi}{5}$$ ■

为了求绕 $y$ 轴旋转一个区域构成的立体体积，我们采用例9中的同样步骤，但是计算体积是对 $y$ 积分而不是对 $x$ 积分. 在这种情况，线段扫出的典型垫圈垂直于 $y$ 轴(旋转轴)，垫圈的外径和内径是 $y$ 的函数.

**例10** 绕 $y$ 轴旋转第一象限内以抛物线 $y=x^2$ 和直线 $y=2x$ 为界的区域产生一个旋转体. 求它的体积.

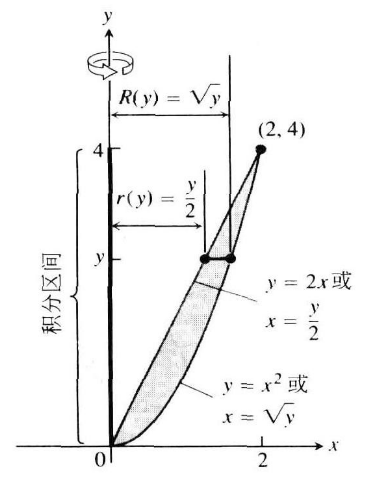
**解** 首先画出区域的草图，并且作一条穿过区域同旋转轴($y$ 轴)垂直的线段(参见图6.15a).

由线段扫出的垫圈的外径是 $R(x)=\sqrt{y}$，内径是 $r(y)=y/2$(见图6.15).

线段同抛物线在 $y=0$ 和 $y=4$ 相交，所以积分限是 $c=0$ 和 $d=4$. 计算积分求体积：

$$V = \int_c^d \pi([R(y)]^2 - [r(y)]^2)\mathrm{d}y = \int_0^4 \pi\left([\sqrt{y}]^2 - \left[\frac{y}{2}\right]^2\right)\mathrm{d}y$$

$$= \pi\int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4}\right)\mathrm{d}y = \pi\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right]_0^4 = \frac{8}{3}\pi$$




a) 绕y轴旋转的区域、垫圈的内径和外径以及积分限

b) 由a中的线段扫出的垫圈

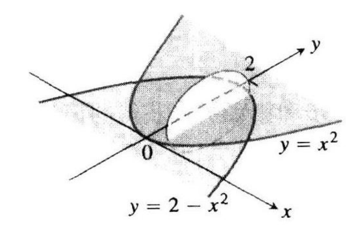
图 6.15 例 10 中的区域和垫圈 ■

## 习题 6.1

在习题 1 ~ 10 中，求立体的体积.

**1.** 立体位于在 $x=0$ 和 $x=4$ 同 $x$ 轴垂直的两个平面之间. 在区间 $0 \leqslant x \leqslant 4$ 上垂直于 $x$ 轴的横截面是正方形，它们的对角线从抛物线 $y=-\sqrt{x}$ 伸展到抛物线 $y=\sqrt{x}$.

**2.** 立体位于在 $x=-1$ 和 $x=1$ 同 $x$ 轴垂直的两个平面之间. 垂直于 $x$ 轴的横截面是圆盘，它们的直径从抛物线 $y=x^2$ 伸展到抛物线 $y=2-x^2$.

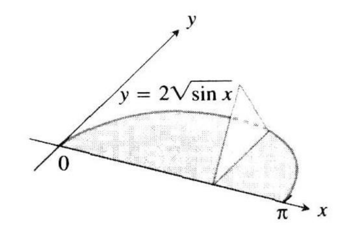



**3.** 立体位于在 $x=-1$ 和 $x=1$ 同 $x$ 轴垂直的两个平面之间. 在这两个平面间垂直于 $x$ 轴的横截面是正方形，它们的底边从半圆 $y=-\sqrt{1-x^2}$ 伸展到半圆 $y=\sqrt{1-x^2}$.

**4.** 立体位于在 $x=-1$ 和 $x=1$ 同 $x$ 轴垂直的两个平面之间. 在这两个平面间垂直于 $x$ 轴的横截面是正方形，它们的对角线从半圆 $y=-\sqrt{1-x^2}$ 伸展到半圆 $y=\sqrt{1-x^2}$.

**5.** 立体的底部是 $x$ 轴上介于曲线 $y=2\sqrt{\sin x}$ 和区间 $[0,\pi]$ 之间的区域. 垂直于 $x$ 轴的横截面是：

(**a**) 底边从 $x$ 轴伸展到如附图所示曲线的等边三角形；




(**b**) 底边从 $x$ 轴伸展到所示曲线的正方形.

**6.** 立体位于在 $x=-\pi/3$ 和 $x=\pi/3$ 垂直于 $x$ 轴的两个平面之间. 垂直于 $x$ 轴的横截面是：

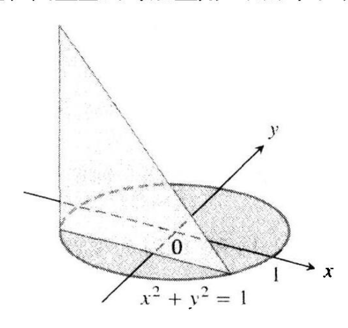
(**a**) 直径从曲线 $y=\tan x$ 伸展到曲线 $y=\sec x$ 的圆盘；

(**b**) 底边从曲线 $y=\tan x$ 伸展到曲线 $y=\sec x$ 的正方形.

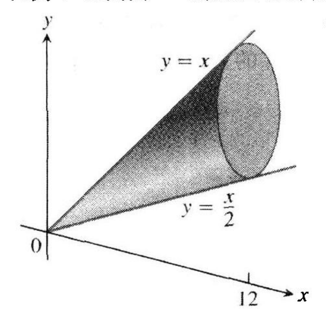
**7.** 立体位于在 $y=0$ 和 $y=2$ 垂直于 $y$ 轴的两个平面之间. 垂直于 $y$ 轴的横截面是直径从 $y$ 轴伸展到抛物线 $x=\sqrt{5}y^2$ 的圆盘.

**8.** 立体的底部是圆盘 $x^2+y^2 \leqslant 1$. 通过在 $y=-1$ 和

$y=1$ 之间垂直于 $y$ 轴的平面切出的横截面是那些一条边在圆盘上的等腰直角三角形，如附图所示.

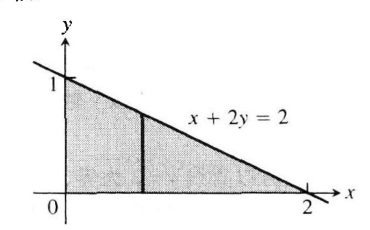



9. 立体位于在 $x=-1$ 和 $x=1$ 垂直于 $x$ 轴的两个平面之间. 垂直于 $x$ 轴的横截面是：
   (a) 直径从曲线 $y=-1/\sqrt{1+x^2}$ 伸展到曲线 $y=1/\sqrt{1+x^2}$ 的圆面；
   (b) 底边从曲线 $y=-1/\sqrt{1+x^2}$ 伸展到曲线 $y=1/\sqrt{1+x^2}$ 的垂直正方形.
10. 立体位于在 $x=-\sqrt{2}/2$ 和 $x=\sqrt{2}/2$ 垂直于 $x$ 轴的两个平面之间. 垂直于 $x$ 轴的横截面是：
   (a) 直径从 $x$ 轴伸展到曲线 $y=2/\sqrt[4]{1-x^2}$ 的圆面；
   (b) 对角线从 $x$ 轴伸展到曲线 $y=2/\sqrt[4]{1-x^2}$ 的正方形.
11. **挠曲体** 一个边长为 $s$ 的正方形位于同直线 $L$ 垂直的平面上. 正方形的一个顶点在 $L$ 上. 当正方形沿直线 $L$ 移动一段距离 $h$ 时绕 $L$ 转动一周，产生一个具有正方形横截面的类似螺旋形的柱体.
   (a) 求柱体体积.
   (b) 如果正方形绕直线 $L$ 转动两周而不是一周，其体积是多少？提出答案的理由.
12. **卡瓦列里原理** 立体位于在 $x=0$ 和 $x=12$ 同 $x$ 轴垂直的两个平面之间. 通过垂直于 $x$ 轴的平面切出的横截面为圆盘，它们的直径从直线 $y=x/2$ 伸展到直线 $y=x$，如附图所示. 解释立体同底半径为 3 和高为 12 的直圆锥体为什么有相同的体积.

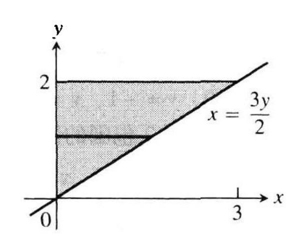



在习题 13 ~ 16 中，求绕给定轴旋转阴影区域产生的旋转体体积.

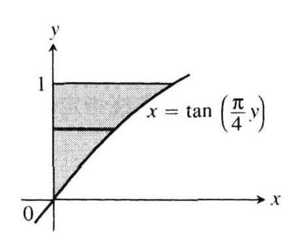
13. 绕 $x$ 轴.



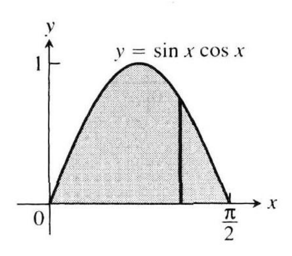

14. 绕 $y$ 轴.




15. 绕 $y$ 轴.




16. 绕 $x$ 轴.




在习题 17 ~ 26 中，求绕 $x$ 轴旋转以给定直线和曲线为界的区域产生的旋转体体积.

17. $y=x^2$，$y=0$，$x=2$.
18. $y=x^3$，$y=0$，$x=2$.
19. $y=\sqrt{9-x^2}$，$y=0$.
20. $y=x-x^2$，$y=0$.
21. $y=\sqrt{\cos x}$，$0\leqslant x\leqslant\pi/2$，$y=0$，$x=0$.
22. $y=\sec x$，$y=0$，$x=-\pi/4$，$x=\pi/4$.
23. $y=e^{-x}$，$y=0$，$x=0$，$x=1$.
24. 在曲线 $y=\sqrt{\cot x}$ 和 $x$ 轴之间从 $x=\pi/6$ 到 $x=\pi/2$ 的区域.
25. 在曲线 $y=1/(2\sqrt{x})$ 和 $x$ 轴之间从 $x=1/4$ 到 $x=4$ 的区域.

**26.** 以 $x$ 轴和摆线 $x=\theta-\sin\theta$，$y=1-\cos\theta$ 的一个拱形为界的区域.
（提示：$dV=\pi y^2 dx=\pi y^2(dx/d\theta)d\theta$.）

在习题 27 和 28 中，求绕给定直线旋转区域产生的旋转体体积.

**27.** 第一象限内上方以直线 $y=\sqrt{2}$ 为界、下方以曲线 $y=\sec x\tan x$ 为界和左边以 $y$ 轴为界的区域；绕直线 $y=\sqrt{2}$ 旋转.

**28.** 第一象限内上方以直线 $y=2$ 为界、下方以曲线 $y=2\sin x$，$0\leqslant x\leqslant\pi/2$ 为界和左边以 $y$ 轴为界的区域；绕直线 $y=2$ 旋转.

在习题 29～34 中，求绕 $y$ 轴旋转以直线和曲线为界的区域产生的旋转体体积.

**29.** 由 $x=\sqrt{5}y^2$，$x=0$，$y=-1$，$y=1$ 包围的区域.

**30.** 由 $x=y^{3/2}$，$x=0$，$y=2$ 包围的区域.

**31.** 由 $x=\sqrt{2\sin 2y}$，$0\leqslant y\leqslant\pi/2$，$x=0$ 包围的区域.

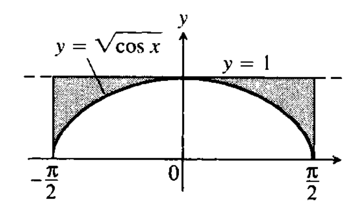
**32.** 由 $x=\sqrt{\cos(\pi y/4)}$，$-2\leqslant y\leqslant 0$，$x=0$ 包围的区域.

**33.** 第一象限内以坐标轴以及直线 $y=3$ 和曲线 $x=2/\sqrt{y+1}$ 为界的区域.

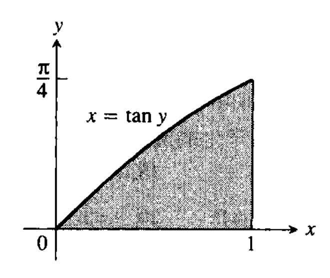
**34.** 由 $x=\sqrt{2}y/(y^2+1)$，$x=0$，$y=1$ 包围的区域.

在习题 35 和 36 中，求绕指定轴旋转阴影区域产生的旋转体体积.

**35.** 绕 $x$ 轴.




**36.** 绕 $y$ 轴.




在习题 37～42 中，求绕 $x$ 轴旋转以直线和曲线为界的区域产生的旋转体体积.

**37.** $y=x$，$y=1$，$x=0$.

**38.** $y=2\sqrt{x}$，$y=2$，$x=0$.

**39.** $y=x^2+1$，$y=x+3$.

**40.** $y=4-x^2$，$y=2-x$.

**41.** $y=\sec x$，$y=\sqrt{2}$，$-\pi/4\leqslant x\leqslant\pi/4$.

**42.** $y=\sec x$，$y=\tan x$，$x=0$，$x=1$.

在习题 43～46 中，求绕 $y$ 轴旋转每个区域产生的旋转体体积.

**43.** 以(1,0)，(2,1)和(1,1)为顶点的三角形包围的区域.

**44.** 以(0,1)，(1,0)和(1,1)为顶点的三角形包围的区域.

**45.** 第一象限内上方以抛物线 $y=x^2$ 界、下方以 $x$ 轴为界和右边以直线 $x=2$ 为界的区域.

**46.** 第一象限内左边以圆 $x^2+y^2=3$ 为界、右边以直线 $x=\sqrt{3}$ 为界和上方以直线 $y=\sqrt{3}$ 为界的区域.

在习题 47 和 48 中，求绕给定轴旋转每个区域产生的旋转体体积.

**47.** 第一象限内上方以抛物线 $y=x^2$ 为界、下方以 $x$ 轴为界和右边以直线 $x=1$ 为界的区域；绕直线 $x=-1$ 旋转.

**48.** 第二象限内上方以曲线 $y=-x^3$ 为界，下方以 $x$ 轴为界和左边以直线 $x=-1$ 为界的区域；绕直线 $x=-2$ 旋转.

**49.** 求绕下列轴旋转以抛物线 $y=\sqrt{x}$ 以及直线 $y=2$ 和 $x=0$ 为界的区域产生的旋转体体积：
(a) 绕 $x$ 轴；　(b) 绕 $y$ 轴；
(c) 绕直线 $y=2$；　(d) 绕直线 $x=4$.

**50.** 求绕下列轴旋转以直线 $y=2x$，$y=0$ 和 $x=1$ 为界的三角形区域产生的旋转体体积：
(a) 绕直线 $x=1$；　(b) 绕直线 $x=2$.

**51.** 求绕下列轴旋转以抛物线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 为界的区域产生的旋转体体积：
(a) 绕直线 $y=1$；　(b) 绕直线 $y=2$；
(c) 绕直线 $y=-1$.

**52.** 通过积分，求绕下列轴旋转以(0,0)($b$,0)和(0,$h$)为顶点的三角形区域产生的旋转体体积：
(a) $x$ 轴；　(b) $y$ 轴.

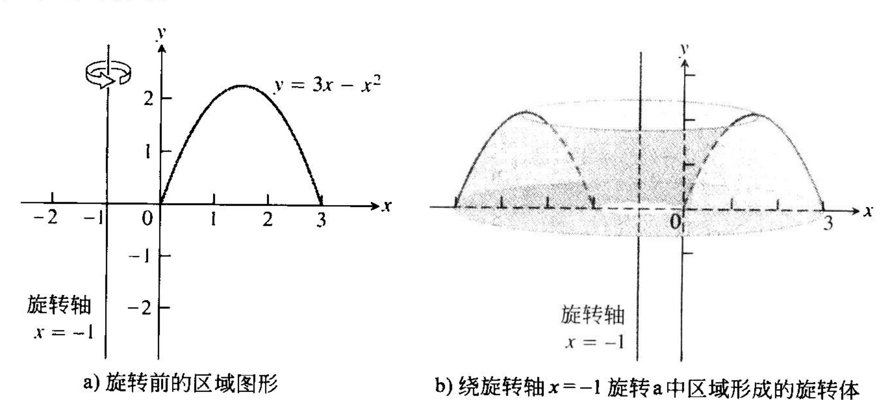
## 6.2 用圆柱壳定义体积

在 6.1 节把立体的体积定义为定积分 $V=\int_a^b A(x)\,dx$，其中 $A(x)$ 是立体从 $x=a$ 到 $x=b$ 的横截面面积的可积函数. 面积 $A(x)$ 是通过用垂直于 $x$ 轴的平面对立体切片得到的. 然而，这种切片方

法有时难以应用，正如在下面第一个例子中说明的那样．为了克服这种困难，我们对于立体的体积采用同样的积分定义，但是利用一种不同的切片方法获得面积．

在这一节，我们用像面包模子那样半径逐步增加的圆柱面对立体切片．我们向立体正下方切片，所以每个圆柱面的轴同 $y$ 轴平行．所有圆柱面的垂直轴是同一条直线，但是每个切片的圆柱面半径依次增加．采用这种方法，把立体切成厚度固定的薄圆柱壳，它们的半径由共同的轴从内向外增加，像树干上的环形年轮那样．把一个圆柱壳展开，显示它的体积同面积为 $A(x)$ 和厚度为 $\Delta x$ 的薄矩形片的体积近乎相等．这使我们能够像从前那样对体积应用相同的积分定义．在导出一般方法之前，下面的例子为我们提供某些见解．

**例 1** 绕垂直线 $x=-1$ 旋转由 $x$ 轴和抛物线 $y=f(x)=3x-x^2$ 包围的区域产生如图 6.16 所示的旋转体．求它的体积．




a) 旋转前的区域图形　　b) 绕旋转轴 $x=-1$ 旋转 a 中区域形成的旋转体

图 6.16　例 1 中的区域和旋转体

**解** 在这里难于使用 6.1 节采用的垫圈方法，因为需要通过 $y$ 表示抛物线的左支和右支的 $x$ 值．（这两种 $x$ 值是典型垫圈的内径和外径，将导致复杂的公式．）我们旋转一个厚度为 $\Delta x$ 的垂直长条而不是旋转厚度为 $\Delta y$ 的水平长条．这种旋转产生一个圆柱壳，它的高度是垂直长条底边内一点 $x_k$ 上的高度 $y_k$，而厚度是 $\Delta x$．图 6.17 中的中间阴影区是圆柱壳的一个例子．我们可以把图中所示的圆柱壳想象为逼近旋转体的一个切片，它是通过围绕接近内部空洞平行于旋转轴垂直向下切割旋转体得到的．然后围绕加大的空洞切割下一个圆柱切片，接着再切割另外一个切片，如此下去，获得 $n$ 个圆柱切片．圆柱切片的半径逐渐增加，而它们的高度随着抛物线的周线改变：从内向外由短变长，然后再由长变短（见图 6.16a）．

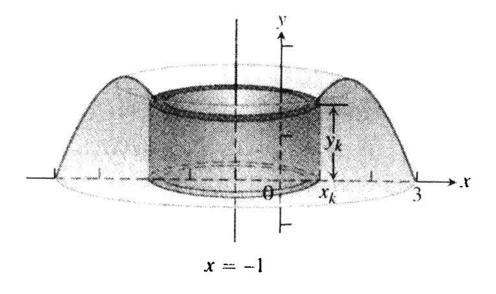



图 6.17　绕直线 $x=-1$ 旋转厚度为 $\Delta x$ 的垂直长条获得高度为 $y_k$ 的圆柱壳．圆壳柱的外径出现在 $x_k$，抛物线在那里的高度为 $y_k=3x_k-x_k^2$（例 7）

每个圆柱切片位于 $x$ 轴上一个长度（宽度）为 $\Delta x$ 的子区间上，它的半径近似等于 $(1+x_k)$，而其高度近似等于 $3x_k-x_k^2$．如果铺开在 $x_k$ 的圆柱切片，并且把它展平，就（近似）变成厚度为 $\Delta x$ 的矩形薄片（见图 6.18）．第 $k$ 个圆柱切片的外部周长为 $2\pi\times$（半径）$=2\pi(1+x_k)$，而这是展开后的矩形薄片的长度．它的体积近似等于一个长方体的体积：

$$\Delta V_k=(\text{周长})\times(\text{高度})\times(\text{厚度})=2\pi(1+x_k)\cdot(3x_k-x_k^2)\cdot\Delta x$$

把区间 $[0,3]$ 上各个圆柱壳的体积 $\Delta V_k$ 加在一起，给出黎曼和

$$\sum_{k=1}^{n}\Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi(x_k + 1)(3x_k - x_k^2)\Delta x$$

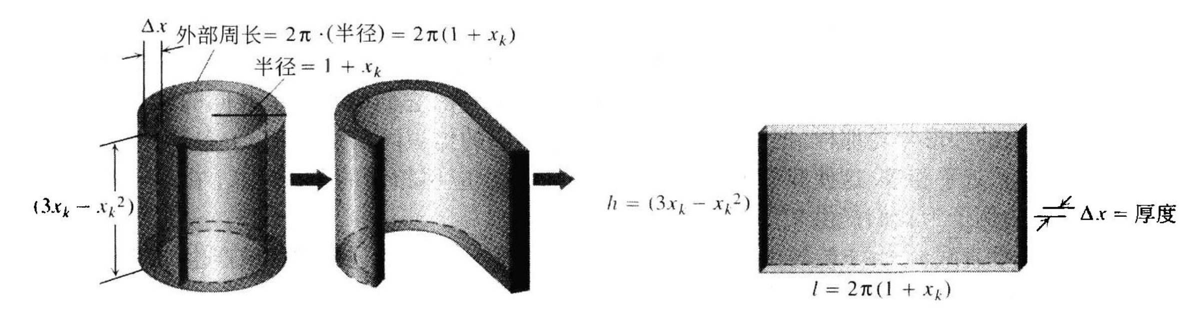



图 6.18 设想切割并且展开圆柱壳获得(接近)扁平的长方体(例 1)

取当厚度 $\Delta x \to 0$ 时的极限给出体积积分

$$V = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 2\pi(x_k + 1)(3x_k - x_k^2)\Delta x = \int_0^3 2\pi(x+1)(3x - x^2)\,dx$$

$$= \int_0^3 2\pi(3x^2 + 3x - x^3 - x^2)\,dx = 2\pi\int_0^3 (2x^2 + 3x - x^3)\,dx$$

$$= 2\pi\left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^3 = \frac{45}{2}\pi$$

■

下面我们来推广例 1 中采用的方法.

## 圆柱壳方法

假定在有限闭区间$[a,b]$上以非负连续函数 $y=f(x)$ 的图形和 $x$ 轴为界的区域位于垂直线 $x=L$ 的右边(见图 6.19a). 假设 $a \geqslant L$, 所以垂直线可能接触区域, 但是不穿过它. 我们绕垂直线 $L$ 旋转这个区域产生旋转体 $S$.

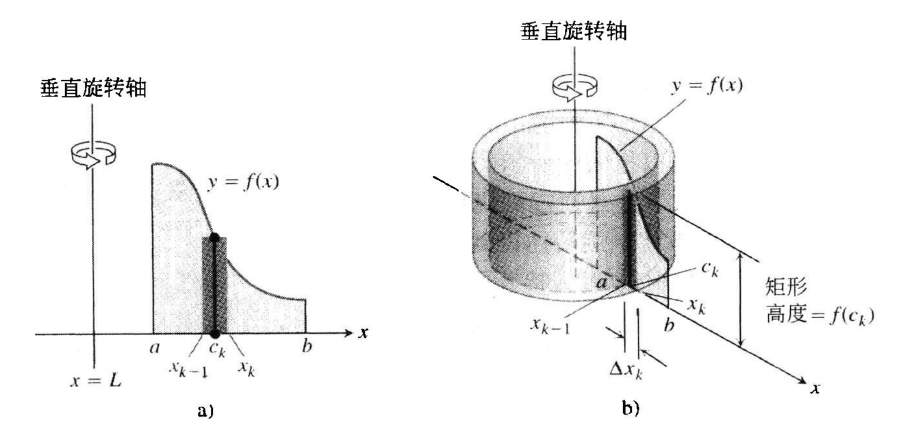



图 6.19 当绕垂直线 $x=L$ 旋转 a 中所示的区域时, 产生可以切片成圆柱壳的旋转体; 一个典型的圆柱壳显示在 b 中

令 $P$ 是区间$[a,b]$上由点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 构成的划分, 并且令 $c_k$ 是第 $k$ 个子区间$[x_{k-1}, x_k]$的中点. 我们用基于$[a,b]$这个划分的矩形集合逼近图 6.19a 中的区域. 一个典型的逼近矩形具有高度 $f(c_k)$ 和宽度 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. 如果绕垂直线 $x=L$ 旋转这个矩形, 那么扫出如图 6.19b 所示的圆柱壳. 由几何公式可知, 由矩形扫过的圆柱壳的的体积为

$$\Delta V_k = 2\pi \times (\text{平均壳半径}) \times (\text{壳高度}) \times (\text{壳厚度}) = 2\pi \cdot (c_k - L) \cdot f(c_k) \cdot \Delta x_k$$

我们通过对基于划分 $P$ 的 $n$ 个矩形扫过的圆柱壳的体积求和逼近旋转体 $S$ 的体积：

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k$$

这个黎曼和当 $\|P\| \to 0$ 时的极限给出作为定积分的旋转体的体积：

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \int_a^b 2\pi(\text{壳半径})(\text{壳高度})\,dx = \int_a^b 2\pi(x - L)f(x)\,dx$$

上式的积分变量 $x$ 称为**厚度度量**. 我们用第一个积分而不用第二个包含被积函数公式的积分，在于强调圆柱壳方法的过程. 这样也容许绕水平线 $L$ 旋转.

**绕垂直线旋转的圆柱壳体积公式**

通过绕垂直线 $x = L$ 旋转在 $x$ 轴和连续函数 $y = f(x) \geqslant 0 (L \leqslant a \leqslant x \leqslant b)$ 之间的区域产生的旋转体体积为

$$V = \int_a^b 2\pi(\text{壳半径})(\text{壳高度})\,dx$$

**例 2** 绕 $y$ 轴旋转以曲线 $y = \sqrt{x}$ 以及 $x$ 轴和直线 $x = 4$ 为界的区域产生旋转体. 求它的体积.

**解** 画出区域的草图，并且作一条平行于旋转轴并穿过区域的线段(见图 6.20a). 标明线段的高度(壳高度)和到旋转轴的距离(壳半径). (我们在图 6.20b 中画出圆柱壳，但是读者不必这样做.)

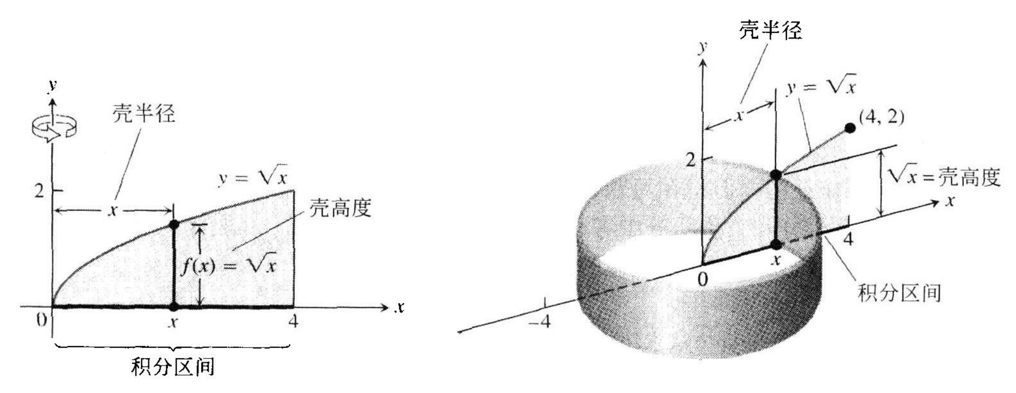



图 6.20 例 2 中的区域和圆柱壳

圆柱壳的厚度变量为 $x$，所以壳体积公式的积分限是 $a = 0$ 和 $b = 4$(见图 6.20). 于是体积为

$$V = \int_a^b 2\pi(\text{壳半径})(\text{壳高度})\,dx = \int_0^4 2\pi(x)(\sqrt{x})\,dx = 2\pi\int_0^4 x^{3/2}\,dx = 2\pi\left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^4 = \frac{128\pi}{5} \quad ■$$

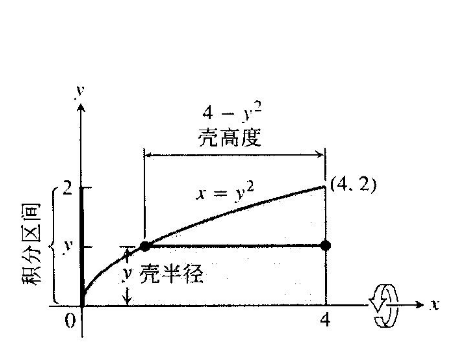
迄今为止，我们所用的是垂直旋转轴. 对于水平旋转轴，在公式中用 $y$ 代替 $x$.

**例 3** 绕 $x$ 轴旋转以曲线 $y = \sqrt{x}$ 以及 $x$ 轴和直线 $x = 4$ 为界的区域产生旋转体. 求它的体积.

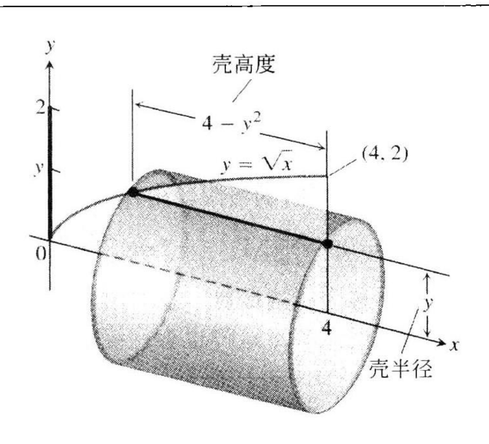
**解** 画出区域的草图，同时作一条平行于旋转轴并且穿过区域的线段(见图 6.21a). 标明线段的长度(壳高度)和到旋转轴的距离(壳半径). (我们在图 6.21b 中画出圆柱壳，但是读者不必这样做.)

在这种情形，壳厚度变量为 $y$，所以壳体积公式的积分限是 $a = 0$ 和 $b = 2$(在图 6.21 中沿 $y$ 轴). 旋转体的体积为

$$V = \int_a^b 2\pi(\text{壳半径})(\text{壳高度})\,dy = \int_0^2 2\pi(y)(4 - y^2)\,dt = \int_0^2 2\pi(4y - y^3)\,dy = 2\pi\left[2y^2 - \frac{y^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi$$




a) 旋转区域、圆柱壳尺寸和积分区间




b) 由a中宽度为$\Delta y$的水平线段扫出的圆柱壳

图 6.21 例 3 中的区域和圆柱壳 ■

**圆柱壳方法小结** 无论旋转轴处在什么位置(水平位置或垂直位置)，实现圆柱壳方法的步骤如下：

(1) 画出区域的草图，同时作一条平行于旋转轴并且穿过区域的线段. 标明线段的高度或长度(壳高度)和到旋转轴的距离(壳半径).

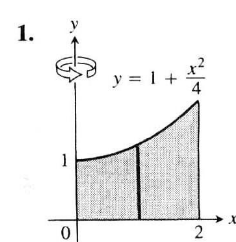
(2) 求厚度变量的积分限.

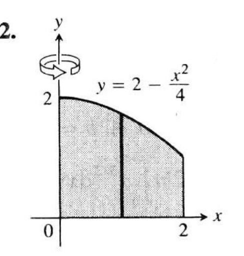
(3) 求乘积 $2\pi\times$(壳半径)$\times$(壳高度)对厚度变量($x$ 或 $y$)的积分计算体积.

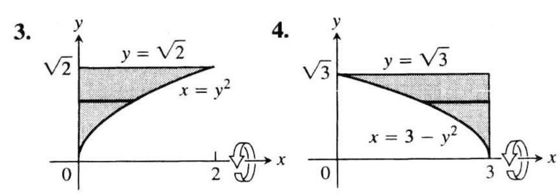
当用两种方法计算区域旋转体的体积时，圆柱壳方法给出与垫圈方法相同的答案. 我们在这里对这个结果不作证明，但是在习题 37 中给出证明的概要. 实际上，两种体积公式都是我们在第 13 章讨论二重积分和三重积分中考察的一般体积公式的特例. 一般体积公式也可以用于计算那些不是由旋转区域扫出的其他立体的体积.

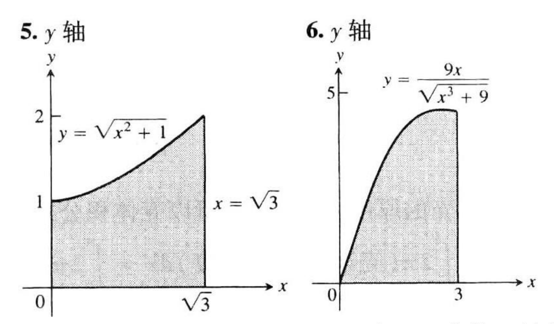
## 习题 6.2

在习题 1~6 中，利用圆柱壳方法求绕指定轴旋转阴影区域产生的旋转体体积.

1.



2.



3. 4.



5. $y$ 轴 6. $y$ 轴



在习题 7 ~ 12 中，利用圆柱壳方法求绕 $y$ 轴旋转以曲线和直线为界的区域产生的旋转体体积.

7. $y = x$，$y = -x/2$，$x = 2$.

8. $y = 2x$，$y = x/2$，$x = 1$.

9. $y = x^2$，$y = 2 - x$，$x = 0$ 对于 $x \geqslant 0$ 的部分.

10. $y = 2 - x^2$，$y = x^2$，$x = 0$.

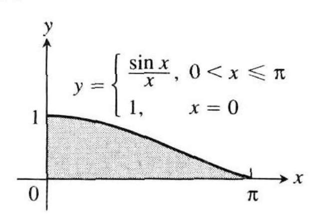
11. $y = 2x - 1$，$y = \sqrt{x}$，$x = 0$.

12. $y = 3/(2\sqrt{x})$，$y = 0$，$x = 1$，$x = 4$.

13. 令 $f(x)=\begin{cases}(\sin x)/x, & 0<x\leqslant\pi\\ 1, & x=0\end{cases}$

(a) 证明：$xf(x)=\sin x$，$0\leqslant x\leqslant\pi$.

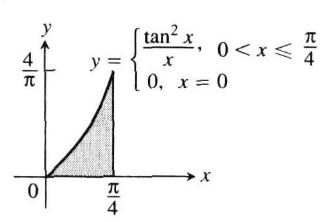
(b) 求绕 $y$ 轴旋转附图阴影区域产生的旋转体体积.




14. 令 $g(x)=\begin{cases}(\tan x)^2/x, & 0<x\leqslant\pi/4\\ 0, & x=0\end{cases}$

(a) 证明：$xg(x)=(\tan x)^2$，$0\leqslant x\leqslant\pi/4$.

(b) 求绕 $y$ 轴旋转附图阴影区域产生的旋转体体积.




在习题 15 ~ 22 中，用圆柱壳方法求绕 $x$ 轴旋转以曲线和直线为界的区域产生的旋转体体积.

15. $x=\sqrt{y}$，$x=-y$，$y=2$.

16. $x=y^2$，$x=-y$，$y=2$，$y\geqslant 0$.

17. $x=2y-y^2$，$x=0$.

18. $x=2y-y^2$，$x=y$.

19. $y=|x|$，$y=1$.

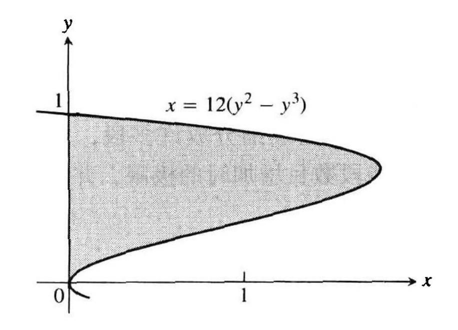
20. $y=x$，$y=2x$，$y=2$.

21. $y=\sqrt{x}$，$y=0$，$y=x-2$.

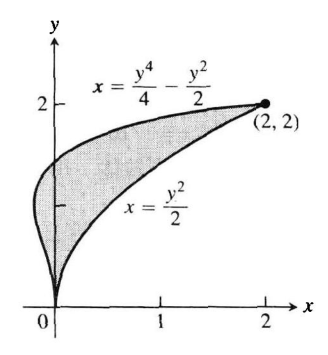
22. $y=\sqrt{x}$，$y=0$，$y=2-x$.

在习题 23 和 24 中，利用圆柱壳方法求绕指定轴旋转阴影区域产生的旋转体体积.

23. (a) $x$ 轴. (b) 直线 $y=1$.
(c) 直线 $y=8/5$. (d) 直线 $y=-2/5$.




24. (a) $x$ 轴. (b) 直线 $y=2$.
(c) 直线 $y=5$. (d) 直线 $y=-5/8$.




对于某些区域而言，用垫圈方法和圆柱壳方法同样能够计算绕坐标轴旋转区域产生的旋转体体积. 然而，并非对于所有区域都是如此. 例如，当绕 $y$ 轴旋转区域并且用垫圈方法时，我们必须对 $y$ 积分. 但是，可能出现无法用 $y$ 来表示被积函数的情况. 这时可以改用圆柱壳方法对 $x$ 积分. 习题 25 和 26 提供某些见解.

25. 计算绕每条坐标轴旋转以直线 $y=x$ 和抛物线 $y=x^2$ 为界产生的旋转体体积，利用
(a) 圆柱壳方法； (b) 垫圈方法.

26. 计算旋转以直线 $2y=x+4$，$y=x$ 和 $x=0$ 为界的三角形区域产生的旋转体体积：
(a) 绕 $x$ 轴，用垫圈方法；
(b) 绕 $y$ 轴，周圆柱壳方法；
(c) 绕直线 $x=4$，用圆柱壳方法；
(d) 绕直线 $y=8$，用垫圈方法.

在习题 27 ~ 32 中，求绕给定轴旋转区域产生的旋转体体积. 在任何给定的实例中，如果你认为最好采用垫圈方法，请随意使用.

27. 以 $(1,1)$，$(1,2)$ 和 $(2,2)$ 为顶点的三角形，绕
(a) $x$ 轴； (b) $y$ 轴；
(c) 直线 $x=10/3$； (d) 直线 $y=1$.

28. 以抛物线 $y=\sqrt{x}$ 以及直线 $y=2$ 和 $x=0$ 为界的区域，绕
(a) $x$ 轴； (b) $y$ 轴；
(c) 直线 $x=4$； (d) 直线 $y=2$.

29. 第一象限内以曲线 $x=y-y^3$ 和 $y$ 轴为界的区域，绕
(a) $x$ 轴； (b) 直线 $y=1$.

30. 第一象限内以曲线 $x=y-y^3$ 以及直线 $x=1$ 和 $y=1$ 为界的区域，绕
(a) $x$ 轴； (b) $y$ 轴；
(c) 直线 $x=1$； (d) 直线 $y=1$.

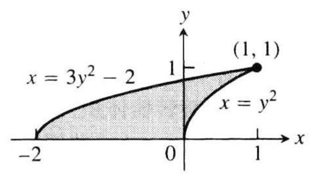
31. 以曲线 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=x^2/8$ 为界的区域，绕
(a) $x$ 轴； (b) $y$ 轴.

32. 以曲线 $y=2x-x^2$ 和直线 $y=x$ 为界的区域，绕
(a) $y$ 轴； (b) 直线 $x=1$.

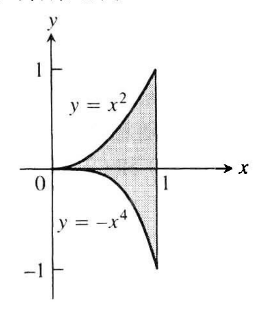
33. 绕 $x$ 轴旋转第一象限内上方以曲线 $y=1/x^{1/4}$ 为界以及左边以直线 $x=1/16$ 为界和下方以直线 $y=1$ 为界的区域产生旋转体. 用下列方法求旋转体体积：
(a) 垫圈方法； (b) 圆柱壳方法.

34. 绕 $y$ 轴旋转第一象限内上方以曲线 $y=1/\sqrt{x}$ 为界以及左边以直线 $x=1/4$ 为界和下方以直线 $y=1$ 为界的区域产生旋转体. 用下列方法求旋转体体积：
(a) 垫圈方法； (b) 圆柱壳方法.

35. 绕 $x$ 轴旋转附图所示区域产生旋转体. 你能够用圆盘方法、垫圈方法和圆柱壳方法中的哪种方法求旋转体体积? 在每种情况需要求多少个积分? 予以说明.




36. 绕 $y$ 轴旋转附图所示区域产生旋转体. 你能够用圆盘方法、垫圈方法和圆柱壳方法中的哪种方法求旋转体体积? 在每种情况需要求多少个积分? 提出答案理由.




37. **用垫圈方法和圆柱壳方法求体积的等价性** 设 $f$ 是区间 $a\leqslant x\leqslant b(a>0)$ 上的可微函数和增函数，并且假定 $f$ 存在可微的反函数 $f^{-1}$. 绕 $y$ 轴旋转以 $f$ 的图形以及直线 $x=a$ 和 $y=f(b)$ 为界的区域产生旋转体. 那么，由垫圈方法和圆柱壳方法给出的旋转体体积具有相等的值：

$$\int_{f(a)}^{f(b)}\pi((f^{-1}(y))^2-a^2)\mathrm{d}y=\int_a^b 2\pi x(f(b)-f(x))\mathrm{d}x$$

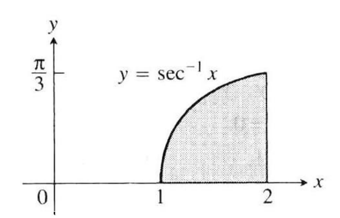
为了证明这个等式，定义

$$W(t)=\int_{f(a)}^{f(t)}\pi((f^{-1}(y))^2-a^2)\mathrm{d}y$$

$$S(t)=\int_a^t 2\pi x(f(t)-f(x))\mathrm{d}x$$

然后证明函数 $W$ 和 $S$ 在区间 $[a,b]$ 的一点一致，并且在 $[a,b]$ 上具有相同的导数. 正如在 4.8 节习题 126 见到的那样. 这将保证对于 $[a,b]$ 中的所有 $t$ 值有 $W(t)=S(t)$. 特别是，$W(b)=S(b)$. (来源：Walter Carlip, “Disks and Shells Revisited”(再讨论圆盘方法和圆柱壳方法), *American Mathematical Monthly* (《美国数学月刊》), 第 98 卷, 第 2 期, 1991 年 2 月, 154—156 页.)

38. 绕 $y$ 轴旋转曲线 $y=\sec^{-1}x$ 和 $x$ 轴之间从 $x=1$ 到 $x=2$ 的区域(如附图所示)产生旋转体. 求它的体积.




39. 求绕 $y$ 轴旋转由曲线 $y=\mathrm{e}^{-x^2}$ 以及直线 $y=0$，$x=0$ 和 $x=1$ 的图形所包围区域产生的旋转体体积.

40. 求绕 $x$ 轴旋转由曲线 $y=\mathrm{e}^{x/2}$ 以及直线 $y=1$ 和 $x=\ln 3$ 的图形所包围区域产生的旋转体体积.

## 6.3 平面曲线的长度

我们对于直线段长度的含义是了解的，但是如果不用微积分，对于一般的弯曲曲线的长度就无法确立准确的概念. 在这一节，首先把从点 $A$ 延伸到点 $B$ 的曲线细分成许多段，并且用直线段联结相继的分点. 然后对所有这样线段的长度求和，取线段数目增加时的极限，并且用这个极限值作为曲线的长度.

### 6.3.1 以参数方式定义的曲线的长度

令 $C$ 是用参数方式由方程

$$x=f(t)\text{ 和 }y=g(t),\quad a\leqslant t\leqslant b$$

给出的曲线. 假定函数$f$和$g$在区间$[a,b]$上是连续可微的(表示它们具有连续的导数). 此外,假定导数$f'$和$g'$不同时为零,由此排除曲线$C$包含任何角点或者尖点. 这样一种曲线称为**光滑曲线**. 也许把这种曲线想象成如图6.22中的质点运动的路径是有益的,质点从$t=a$时的点$A=(f(a),g(a))$运动到$t=b$时的点$B=(f(b),g(b))$. 我们在点$A=P_0$,$P_1$,$P_2$,…,$P_n=B$把路径(或者弧)$AB$细分成$n$段. 这些点对应于区间$[a,b]$上由$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$确定的一个划分,其中$P_k=(f(t_k),g(t_k))$. 用直线段联结这个划分中的相继各点(见图6.22). 一个代表性线段具有长度

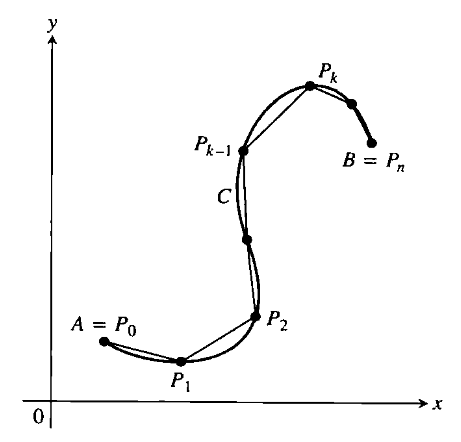



图6.22 用参数方式由方程$x=f(t)$和$y=g(t)$($a\leqslant t\leqslant b$)定义的曲线$C$;曲线从$A$到$B$的长度由从$A=P_0$开始经过$P_1$,$P_2$,… 到达$B=P_n$终结的折线路径(直线段集合)的长度之和逼近

$$L_k=\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2}$$
$$=\sqrt{[f(t_k)-f(t_{k-1})]^2+[g(t_k)-g(t_{k-1})]^2}$$

(参见图6.23). 如果$\Delta t_k$是很小的量. 长度$L_k$近似等于弧$P_{k-1}P_k$的长度. 根据中值定理,在$[t_{k-1},t_k]$中存在数$t_k^*$和$t_k^{**}$,使得

$$\Delta x_k=f(t_k)-f(t_{k-1})=f'(t_k^*)\Delta t_k$$
$$\Delta y_k=g(t_k)-g(t_{k-1})=g'(t_k^{**})\Delta t_k$$

假定当$t$从$t=a$增加到$t=b$时,质点恰好遍历从$A$到$B$的路径一次,其间没有折返或者倒退,曲线"长度"的一个逼近值是所有长度$L_k$之和:

$$\sum_{k=1}^{n}L_k=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{[f'(t_k^*)]^2+[g'(t_k^{**})^2]}\ \Delta t_k$$

虽然上式右端这个和不完全是黎曼和(因为$f'$和$g'$是在不同点计算的),但是可以证明,当划分的范数趋近零时它的极限是定积分

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{[f'(t_k^*)]^2+[g'(t_k^{**})]^2}\ \Delta t_k$$
$$=\int_a^b\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\ \mathrm{d}t$$

因此,把曲线从$A$到$B$的长度定义为这个定积分是合理的.

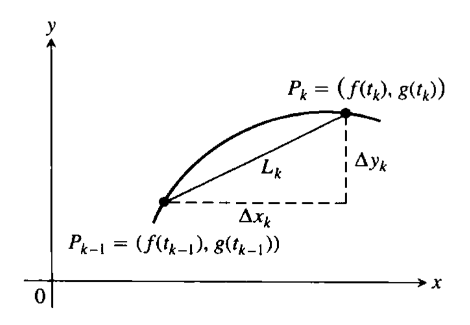



图6.23 弧$P_{k-1}P_k$用图中所示的直线段逼近,其长度为$L_k=\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2}$

**定义** 如果曲线$C$是用参数方式由方程$x=f(t)$和$y=g(t)$($a\leqslant t\leqslant b$)定义的,其中$f'$和$g'$是区间$[a,b]$上的连续函数并且不同时为零,并且当$t$从$t=a$增加到$t=b$时恰好遍历$C$一次,那么**曲线$C$的长度**是定积分

$$L=\int_a^b\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\ \mathrm{d}t$$

一条光滑曲线$C$在时间区间$[a,b]$上的质点运动方向不会折返或者逆转,因为在整个区间上$(f')^2+(g')^2>0$.

如果 $x=f(t)$ 和 $y=g(t)$，那么使用莱布尼茨记号，我们得到关于弧长度的下述结果：

$$L=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \tag{1}$$

如果曲线有两种不同的参数表示形式，在求长度时采用哪一种表示形式是要紧的事吗？答案是否定的，只要我们选择的参数表示形式满足曲线长度定义中提出的条件(一个例子参见习题36).

**例 1** 利用曲线的长度定义，求用参数方式由方程

$$x=r\cos t \text{ 和 } y=r\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

定义的半径为 $r$ 的圆的长度.

**解** 当 $t$ 从 0 变化到 $2\pi$ 时，恰好遍历圆一周，所以周长为

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

求出导数 $\dfrac{dx}{dt}=-r\sin t,\quad \dfrac{dy}{dt}=r\cos t$

和 $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=r^2(\sin^2t+\cos^2t)=r^2$

所以 $L=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2}\,dt=r\,[t]_0^{2\pi}=2\pi r$ ■

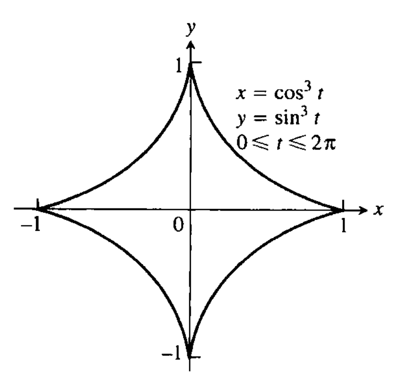



图 6.24 例 2 中的星形线

**例 2** 求星形线(见图 6.24) $x=\cos^3t, y=\sin^3t(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的长度.

**解** 由于这条曲线对坐标轴的对称性，它的长度是曲线在第一象限部分长度的 4 倍. 我们有

$$x=\cos^3t,\quad y=\sin^3t$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=[3\cos^2t\,(-\sin t)]^2=9\cos^4t\sin^2t$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=[3\sin^2t\,(\cos t)]^2=9\sin^4t\cos^2t$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{9\cos^2t\sin^2t\underbrace{(\cos^2t+\sin^2t)}_{1}}=\sqrt{9\cos^2t\sin^2t}$$

$$=3\,|\cos t\sin t|\quad (\text{当 } 0\leqslant t\leqslant \pi/2 \text{ 时 } \cos t\sin t\geqslant 0)$$

$$=3\cos t\sin t$$

因此，

$$\text{第一象限部分的长度}=\int_0^{\pi/2}3\cos t\sin t\,dt$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt\quad (\cos t\sin t=(1/2)\sin 2t)$$

$$=-\frac{3}{4}\cos 2t\Big]_0^{\pi/2}=\frac{3}{2}$$

星形线的长度是这个长度的 4 倍，即 $4(3/2)=6$. ■

人物传记

格雷戈里 · 圣文森特

(Gregory St. Vincent, 1584—1677)

### 6.3.2 曲线 $y=f(x)$ 的长度

给定一个连续可微函数 $y=f(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$，我们可以指定 $x=t$ 作为一个参数. 这样一来，函数 $f$ 的图形就是以参数方式用方程

$$x=t \text{ 和 } y=f(t),\quad a\leqslant t\leqslant b$$

定义的曲线 $C$，而这个方程是前面考虑的参数方程的特例. 于是

$$\frac{dx}{dt}=1,\quad \frac{dy}{dt}=f'(t)$$

从 3.5 节的计算，我们有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=f'(t)$$

由此给出
$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=1+[f'(t)]^2=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+[f'(x)]^2$$

代入公式(1)给出 $y=f(x)$ 图形的弧长公式.

**曲线 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 的长度公式**

如果 $f$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续可微函数，那么曲线(图形) $y=f(x)$ 从 $x=a$ 到 $x=b$ 的长度为

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \tag{2}$$

**例 3** 求曲线
$$y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),\ 0\leqslant x\leqslant 2$$
的长度.

**解** 利用公式(2)和 $a=0$，$b=2$，以及

$$y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{1}{4}(e^{2x}-2+e^{-2x})$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x})=\left[\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right]^2$$

曲线从 $x=0$ 到 $x=2$ 的长度为

$$L=\int_0^2\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^2\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})dx\quad(\text{用公式(2) 及 }a=0,b=2)$$

$$=\frac{1}{2}[e^x-e^{-x}]_0^2=\frac{1}{2}(e^2-e^{-2})\approx 3.63$$ ■

### 6.3.3 处理 dy/dx 的不连续点

在曲线上 $dy/dx$ 不存在的点，$dx/dy$ 有可能存在. 在这种情形下，通过把 $x$ 表示成 $y$ 的函数，我们可以应用同公式(2)类似的下述公式求曲线的长度：

**曲线 $x=g(y)$ $(c\leqslant y\leqslant d)$ 的长度公式**

如果 $g$ 是区间 $[c,\ d]$ 上的连续可微函数，曲线 $x=g(y)$ 从 $y=c$ 到 $y=d$ 的长度为

$$L=\int_c^d\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy=\int_c^d\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy \tag{3}$$

**例 4** 求曲线 $y=(x/2)^{2/3}$ 从 $x=0$ 到 $x=2$ 的长度.

**解** 导数 $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^{-1/3}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^{1/3}$ 在 $x=0$ 无定义，所以不能用公式(2)求曲线的

长度.

因此，我们把方程改写成用 $y$ 表示 $x$ 的形式:

$$y=\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}$$

$$y^{3/2}=\frac{x}{2}\quad（两端自乘 3/2）$$

$$x=2y^{3/2}\quad（求解 x）$$

从这里看出，需要求长度的曲线也是 $x=2y^{3/2}$ 从 $y=0$ 到 $y=1$ 的图形(见图 6.25).

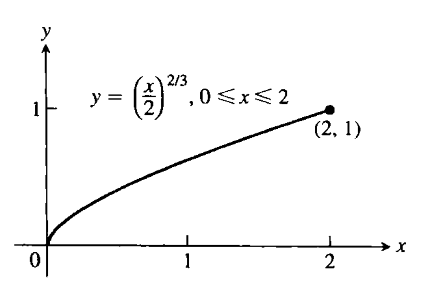



图 6.25 $y=(x/2)^{2/3}$ 从 $x=0$ 到 $x=2$ 的图形也是 $x=2y^{3/2}$ 从 $y=0$ 到 $y=1$ 的图形(例 4)

导数

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=2\left(\frac{3}{2}\right)y^{1/2}=3y^{1/2}$$

在$[0,1]$上是连续的. 所以，可以用公式(3)求曲线的长度:

$$\begin{aligned}L&=\int_c^d\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^1\sqrt{1+9y}\,\mathrm{d}y\quad（公式(3) 取 c=0,d=1）\\&=\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}(1+9y)^{3/2}\Big]_0^1\quad（令 u=1+9y,\mathrm{d}u/9=\mathrm{d}y,积分,并且代入积分限）\\&=\frac{2}{27}(10\sqrt{10}-1)\approx 2.27\end{aligned}$$

■

### 6.3.4 短微分公式

时常把公式(1)写成微分形式而不是导数形式. 这在形式上是这样实现的：在公式中用根号下的$(\mathrm{d}t)^2$代替根号外的 $\mathrm{d}t$，然后把根式中的两项表示成

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2(\mathrm{d}t)^2=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right)^2=(\mathrm{d}x)^2$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2(\mathrm{d}t)^2=\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right)^2=(\mathrm{d}y)^2$$

按照惯例也要取消$(\mathrm{d}x)^2$ 中的括号而改写为 $\mathrm{d}x^2$，所以公式(1)变成

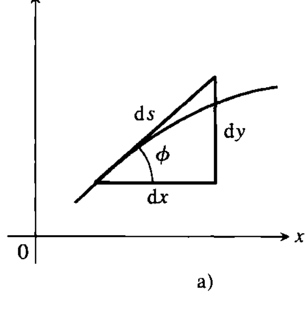
$$L=\int\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}\qquad(4)$$

为了计算积分，$\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 都必须用同一个变量表示，而且必须提供公式(4)中相应的积分限.

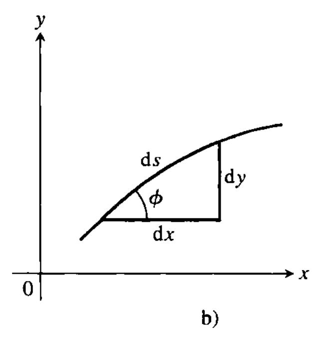
有助于记忆公式(4)的一个方法是把它写成

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}\qquad(5)$$

并且把 $\mathrm{d}s$ 当成弧长的微分,它可以在相应的积分限之间积分给出曲线的总长度. 按照这个观点,所有的弧长公式就是公式 $L=\int\mathrm{d}s$ 的不同表达式. 图 6.26a 给出对应于公式(5) 的 $\mathrm{d}s$ 的确切解释. 图 6.26b 不是完全精确的,但是它被视为图 6.26a 简化的近似表示.




a)




b)

图 6.26 记忆公式 $\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$ 的图示

### 习题 6.3

在习题 1 ~8 中，求曲线的长度.

1. $x=1-t$, $y=2+3t$, $-2/3\leqslant t\leqslant 1$.
2. $x=\cos t$, $y=t+\sin t$, $0\leqslant t\leqslant \pi$.
3. $x=t^3$, $y=3t^2/2$, $0\leqslant t\leqslant \sqrt{3}$.
4. $x=t^2/2$, $y=(2t+1)^{3/2}/3$, $0\leqslant t\leqslant 4$.
5. $x=(2t+3)^{3/2}/3$, $y=t+t^2/2$, $0\leqslant t\leqslant 3$.
6. $x=8\cos t+8t\sin t$, $y=8\sin t-8t\cos t$, $0\leqslant t\leqslant \pi/2$.
7. $x=e^t-t$, $y=4e^{t/2}$, $0\leqslant t\leqslant 3$.
8. $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $0\leqslant t\leqslant \pi$.

在习题 9 ~ 18 中，求曲线的长度. 如果你有绘图器，可以绘制这些曲线的图形，观察它们的形状.

9. $y=(1/3)(x^2+2)^{3/2}$ 从 $x=0$ 到 $x=3$.
10. $y=x^{3/2}$ 从 $x=0$ 到 $x=4$.
11. $x=(y^3/3)+1/(4y)$ 从 $y=1$ 到 $y=3$.
    (提示：$1+(dx/dy)^2$ 为完全平方.)
12. $x=(y^{3/2}/3)-y^{1/2}$ 从 $y=1$ 到 $y=9$.
    (提示：$1+(dx/dy)^2$ 为完全平方.)
13. $x=(y^4/4)+1/(8y^2)$ 从 $y=1$ 到 $y=2$.
    (提示：$1+(dx/dy)^2$ 为完全平方.)
14. $x=(y^3/6)+1/(2y)$ 从 $y=2$ 到 $y=3$.
    (提示：$1+(dx/dy)^2$ 为完全平方.)
15. $y=(3/4)x^{4/3}-(3/8)x^{2/3}+5$, $1\leqslant x\leqslant 8$.
16. $y=(x^3/3)+x^2+x+1/(4x+4)$, $0\leqslant x\leqslant 2$.
17. $y=\sqrt{1-x^2}$, $-1/2\leqslant x\leqslant 1/2$.
18. $x=\int_0^y\sqrt{\sec^4 t-1}\,dt$, $-\pi/4\leqslant y\leqslant \pi/4$.

**T** 在习题 19 ~ 26 中，执行下列处理步骤：

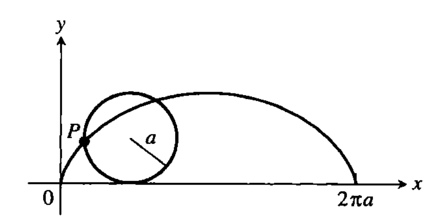
(a) 建立曲线长度的积分.
(b) 画出曲线的图形，观察它们的形状.
(c) 利用绘图器的或计算机的积分计算器求曲线长度的值.

19. $y=x^2$, $-1\leqslant x\leqslant 2$.
20. $y=\tan x$, $-\pi/3\leqslant x\leqslant 0$.
21. $x=\sin y$, $0\leqslant y\leqslant \pi$.
22. $x=\sqrt{1-y^2}$, $-1/2\leqslant y\leqslant 1/2$.
23. $y^2+2y=2x+1$ 从点 $(-1,-1)$ 到 $(7,3)$.
24. $y=\sin x-x\cos x$, $0\leqslant x\leqslant \pi$.
25. $y=\int_0^x\tan t\,dt$, $0\leqslant x\leqslant \pi/6$.
26. $x=\int_0^y\sqrt{\sec^2 t-1}\,dt$, $-\pi/3\leqslant y\leqslant \pi/4$.
27. 是否存在这样一条光滑(连续可微)曲线，它在区间 $0\leqslant x\leqslant a$ 上的长度始终等于 $\sqrt{2}a$? 提出答案的理由.
28. **利用切线翅片推导曲线的长度公式** 假定 $f$ 在区间 $[a,b]$ 上是光滑的，并且用通常方法划分 $[a,b]$. 在每个子区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上的点 $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ 构造切线翅片，如附图所示.
    (a) 证明：在区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上第 $k$ 个切线翅片的长度等于
    $$\sqrt{(\Delta x_k)^2+(f'(x_{k-1})\Delta x_k)^2}$$
    (b) 证明：
    $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\text{第 } k \text{ 个切线翅片长度})=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$
    这是曲线 $y=f(x)$ 从 $a$ 到 $b$ 的长度 $L$.



29. (a) 求一条经过点 $(1,1)$ 的曲线，它的长度积分为
    $$L=\int_1^4\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx$$
    (b) 这样的曲线有多少条? 提出答案的理由.
30. (a) 求一条经过点 $(0,1)$ 的曲线，它的长度积分为
    $$L=\int_1^2\sqrt{1+\frac{1}{y^4}}\,dy$$
    (b) 这样的曲线有多少条? 提出答案的理由.
31. 求一条经过 $xy$ 平面内原点的曲线，它从 $x=0$ 到 $x=1$ 的长度为
    $$L=\int_0^1\sqrt{1+\frac{1}{4}e^x}\,dx$$
32. 求一条经过点 $(1,0)$ 的曲线，它从 $x=1$ 到 $x=2$ 的长度为
    $$L=\int_1^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx$$
33. 求曲线
    $$x=\ln(\sec t+\tan t)-\sin t$$
    $$y=\cos t,\quad 0\leqslant t\leqslant \pi/3$$
    的长度.
34. 求附图所示摆线
    $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$
    一个拱形的长度. **摆线**是由沿直线(例如 $x$ 轴)

滚动的圆的圆周上一点 $P$ 描出的轨迹.




**35.** 求曲线

$$x = e^t + e^{-t}, \quad y = 3 - 2t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$$

的长度.

**36. 长度独立于参数表示** 为了说明我们得到的曲线长度的数值不依赖于参数表示(前面提到防止曲线折回的适度限制除外)这个事实,用下面两种不同的参数表示计算半圆 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的长度.

(**a**) $x = \cos 2t$, $y = \sin 2t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

(**b**) $x = \sin \pi t$, $y = \cos \pi t$, $-1/2 \leqslant t \leqslant 1/2$.

**计算机探究**

在习题 37 ~46 中,用一种 CAS(计算机代数系统)对于在闭区间上给定的曲线执行下列处理步骤:

(**a**) 绘制曲线以及在闭区间上取 $n=2, 4, 8$ 个划分点的折线逼近路径的图形(参见图 6.22).

(**b**) 通过计算线段长度之和求相应的曲线长度逼近.

(**c**) 利用积分求曲线的长度. 把 $n=2, 4, 8$ 的折线逼近同由积分给出的实际长度做比较. 当 $n$ 增加时实际长度同逼近的比较结果如何? 对你的答案作出解释.

**37.** $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

**38.** $f(x) = x^{1/3} + x^{2/3}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

**39.** $f(x) = \sin(\pi x^2)$, $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$.

**40.** $f(x) = x^2 \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

**41.** $f(x) = \dfrac{x-1}{4x^2+1}$, $-\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$.

**42.** $f(x) = x^3 - x^2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

**43.** $x = \dfrac{1}{3}t^3$, $y = \dfrac{1}{2}t^2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

**44.** $x = 2t^3 - 16t^2 + 25t + 5$, $y = t^2 + t - 3$, $0 \leqslant t \leqslant 6$.

**45.** $x = t - \cos t$, $y = 1 + \sin t$, $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$.

**46.** $x = \ln t$, $y = \sqrt{t+2}$, $1 \leqslant t \leqslant 4$.

## 6.4 旋转曲面的面积

当人在跳绳时,绳子在空中环绕人体扫过的曲面同所谓的*旋转曲面*相似. 这种曲面的"面积"取决于绳子的长度和它的每一段同旋转轴的距离. 在这一节,我们定义旋转曲面的面积. 更复杂的曲面将在第 14 章讨论.

### 6.4.1 定义曲面面积

我们要求对旋转曲面定义的面积同经典几何学中对于球面、圆柱面和圆锥面这样一些曲面面积的已知结果一致. 所以,如果此处讨论的跳绳所取的形状是绕 $x$ 轴旋转的半径为 $a$ 的半圆(见图 6.27),它产生的是曲面面积为 $4\pi a^2$ 的一个球面.

在考察一般曲线之前,我们先从绕 $x$ 轴旋转水平线段和倾斜线段开始. 如果绕 $x$ 轴旋转长度为 $\Delta x$ 的水平线段 $AB$(见图 6.28a),产生一个面积为 $2\pi y\Delta x$ 的圆柱面. 这个面积同边长为 $\Delta x$ 和 $2\pi y$ 的矩形的面积相等(见图 6.28b). 长度 $2\pi y$ 是由绕 $x$ 轴旋转线段 $AB$ 上的点 $(x,y)$ 产生的半径为 $y$ 的圆的周长.

假定长度为 $\Delta s$ 的线段 $AB$ 是倾斜的而不是水平的. 这时绕 $x$ 轴旋转 $AB$ 产生一个圆锥平截头(见图 6.29a). 按照经典几何学,这个平截头曲面的面积等于 $2\pi y^* \Delta s$,其中 $y^* = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ 是倾斜线段 $AB$ 在 $x$ 轴之上的平均高度. 这个曲面的面积同边长为 $\Delta x$ 和 $2\pi y^*$ 的矩形的面积相等(见图 6.29b).

让我们在这些几何原则的基础上定义绕 $x$ 轴旋转更一般的几何图形扫过的曲面面积. 假定需要求绕 $x$ 轴旋转非负连续函数 $y=f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ 的图形扫过的曲面面积. 用通常的方法划分闭开间 $[a,b]$,并且用划分中的点把图形细分成一些短弧段. 图 6.30 显示一个典型弧段 $PQ$ 以及它作为函数 $f$ 图形的一部分扫出的环带.

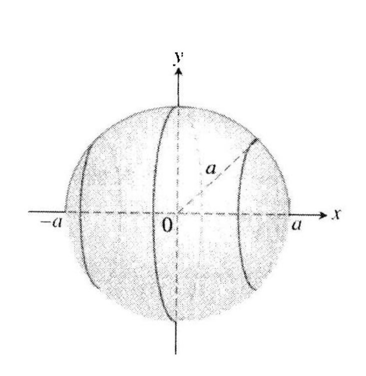
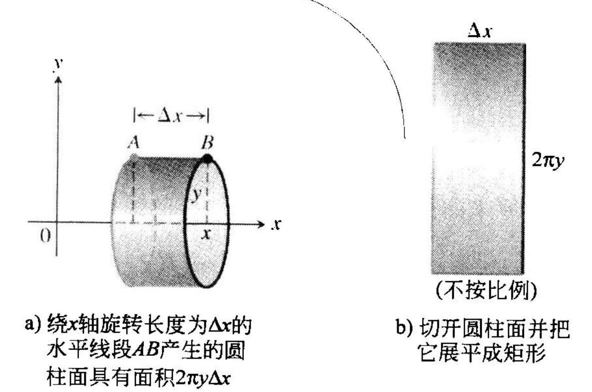


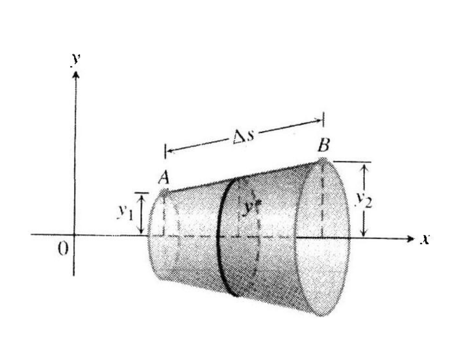

图6.27 旋转半径为 $a$ 中心在原点的半圆 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 产生面积为 $4\pi a^2$ 的球面

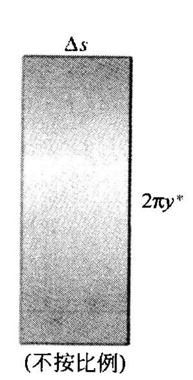



a) 绕$x$轴旋转长度为$\Delta x$的水平线段$AB$产生的圆柱面具有面积$2\pi y\Delta x$

b) 切开圆柱面并把它展平成矩形

图 6.28




a) 绕$x$轴旋转长度为$\Delta s$的倾斜线段$AB$产生的圆锥平截头，其面积为$2\pi y^*\Delta s$

b) 以$AB$在$x$轴之上的平均高度 $y^*=\dfrac{y_1+y_2}{2}$ 为边长的矩形的面积

图 6.29

当弧段 $PQ$ 绕 $x$ 轴旋转时，联结 $P$ 和 $Q$ 的线段扫出一个圆锥平截头，它的轴在 $x$ 轴上(见图6.31)．这个圆锥平截头曲面的面积逼近由弧段 $PQ$ 扫出的环状带的面积．图6.31中显示的圆锥平截头曲面的面积为 $2\pi y^*L$，其中 $y^*$ 是联结 $PQ$ 的线段的平均高度，$L$ 是它的长度(同前面完全一样)．由于$f\geqslant 0$，从图6.32看出，线段的平均高度为 $y^*=(f(x_{k-1})+f(x_k))/2$，而倾斜线段

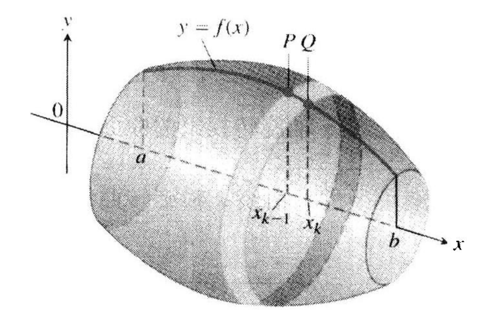



图6.30 绕 $x$ 轴旋转非负函数 $y=f(x)\,(a\leqslant x\leqslant b)$ 的图形产生的曲面；这个曲面由像 $PQ$ 那样的弧段扫过的环状带合并而成

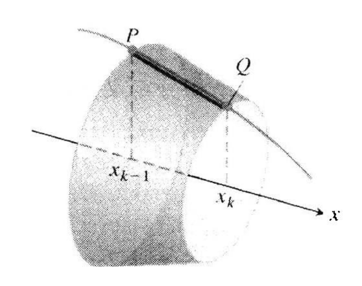



图6.31 联结 $P$ 和 $Q$ 的线段扫出一个圆锥平截头

的长度为 $L=\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2}$. 因此,

$$\text{平截头曲面面积}=2\pi\cdot\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\cdot\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2}$$

$$=\pi(f(x_{k-1})+f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2}$$

原来曲面的面积是像 $PQ$ 这样的弧段扫出的环状带面积的和, 由平截头曲面面积的和

$$\sum_{k=1}^{n}\pi(f(x_{k-1})+f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2} \tag{1}$$

逼近. 我们要求这个逼近当$[a,b]$的划分变得更细时得到改进. 此外, 如果函数$f$是可微的, 那么由中值定理, 在曲线上的 $P$ 和 $Q$ 之间存在一点$(c_k, f(c_k))$, 此处的切线同线段 $PQ$ 平行(见图6.33). 在这个点,

$$f'(c_k)=\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}$$

$$\Delta y_k=f'(c_k)\Delta x_k$$

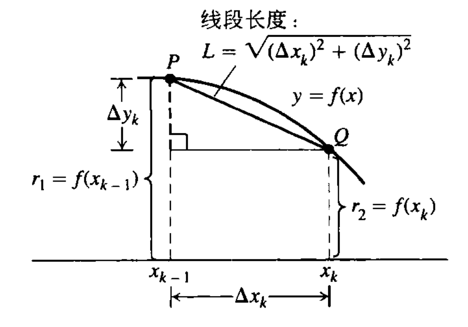



图 6.32　同弧段 $PQ$ 和线段 $PQ$ 相关的尺寸

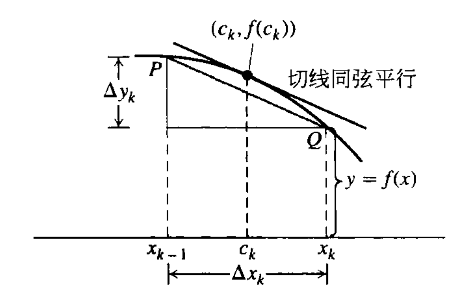



图 6.33　如果$f$是光滑的, 中值定理保证存在一点 $c_k$, 此处的切线同线段 $PQ$ 平行

用这个结果代换 $\Delta y_k$, 公式(1)中的平截头曲面面积取下述形式:

$$\sum_{k=1}^{n}\pi(f(x_{k-1})+f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2+(f'(c_k)\Delta x_k)^2}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\pi(f(x_{k-1})+f(x_k))\sqrt{1+(f'(c_k))^2}\,\Delta x_k \tag{2}$$

这种和不是任何函数的黎曼和, 因为 $x_{k-1}$, $x_k$ 和 $c_k$ 是不同的点. 然而可以证明, 当$[a,b]$划分的范数趋近零时, 公式(2)中的和收敛于积分

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

因此, 我们把这个积分定义为由 $y=f(x)$从 $a$ 到 $b$ 的图形绕 $x$ 轴旋转扫出的曲面面积.

**定义**　如果函数$f(x)\geqslant 0$ 在区间$[a,b]$上是连续可微的, 由绕 $x$ 轴旋转曲线 $y=f(x)$产生的曲面面积为

$$S=\int_a^b 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

公式(3)中平方根同6.3节公式(2)中出现在计算曲线长度公式的平方根是一样的.

**例1** 求绕$x$轴旋转曲线$y=2\sqrt{x}(1\leqslant x\leqslant 2)$产生的曲面面积(见图6.34).

**解** 在计算面积公式

$$S=\int_a^b 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}\,\mathrm{d}x\quad(\text{公式}(3))$$

时取

$$a=1,\ b=2,\ y=2\sqrt{x},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\sqrt{\frac{x+1}{x}}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$$

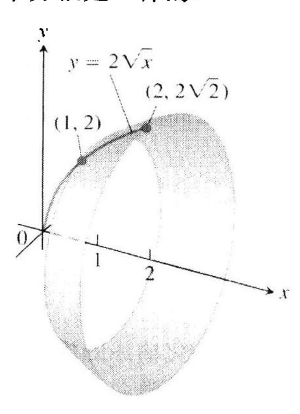



图6.34 在例1中计算这个曲面的面积

利用这些代换,

$$S=\int_1^2 2\pi\cdot 2\sqrt{x}\,\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=4\pi\int_1^2\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x=4\pi\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\Big]_1^2=\frac{8\pi}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})$$ ■

### 6.4.2 绕y轴旋转

为了求绕$y$轴旋转的曲面面积，在公式(3)中交换$x$和$y$.

> **对于绕y轴旋转的曲面面积**
>
> 如果函数$x=g(y)\geqslant 0$在区间$[c,d]$上是连续可微的，由绕$y$轴旋转曲线$x=g(y)$产生的曲面面积为
>
> $$S=\int_c^d 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y=\int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1+(g'(y))^2}\,\mathrm{d}y\qquad(4)$$

**例2** 绕$y$轴旋转线段$x=1-y(0\leqslant y\leqslant 1)$产生图6.35中的圆锥面. 求它的侧面积(其中不包括底面积).

**解** 在此，我们有一个可以用几何中的公式作检验的计算:

$$\text{侧面积}=\left(\frac{\text{底面周长}}{2}\right)\times(\text{斜高})=\pi\sqrt{2}$$

为了看出公式(4)怎样给出同样的结果，取

$$c=0,\quad d=1,\quad x=1-y,\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-1$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}=\sqrt{1+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

并且计算

$$S=\int_c^d 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^1 2\pi(1-y)\sqrt{2}\,\mathrm{d}y$$

$$=2\pi\sqrt{2}\left[y-\frac{y^2}{y}\right]_0^1=2\pi\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\pi\sqrt{2}$$

正如应有的那样，两个结果一致. ■

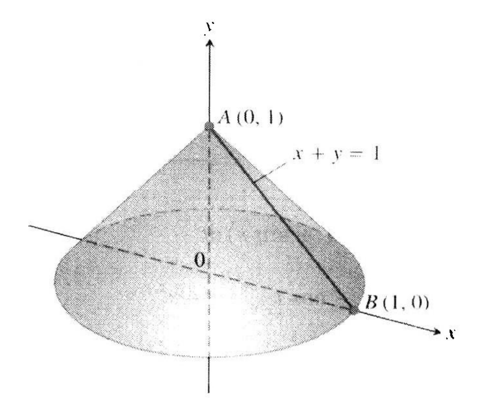



图6.35 绕$y$轴旋转线段$AB$产生一个圆锥面，它的侧面积如今可以用两种不同的方法计算(例2)

### 6.4.3 参数化曲线

不管用哪个坐标轴作为旋转轴，在公式(3)和公式(4)中出现的平方根，同6.3节弧长公式中出现的平方根一样. 如果曲线是由方程 $x=f(t)$ 和 $y=g(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ 表示的参数化曲线，其中 $f$ 和 $g$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续可微函数，并且 $(f')^2+(g')^2>0$，那么出现在弧长公式中的对应平方根是

$$\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

这个观察结果，对于光滑参数化曲线的旋转曲面导致下述面积公式.

**参数化曲线的旋转曲面的面积**

如果光滑曲线 $x=f(t)$，$y=g(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$ 当 $t$ 从 $a$ 增加到 $b$ 时恰好遍历一次，那么绕两条坐标轴旋转产生的曲面的面积如下.

**(1)** 绕 $x$ 轴 $(y\geqslant 0)$ 旋转：

$$S=\int_a^b 2\pi y\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \qquad (5)$$

**(2)** 绕 $y$ 轴 $(x\geqslant 0)$ 旋转：

$$S=\int_a^b 2\pi x\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \qquad (6)$$

同计算曲线长度一样，我们可以用满足所述条件的任何方便的参数表示计算曲面面积.

**例 3** $xy$ 平面内圆心在点 $(0,1)$ 半径为 1 的圆的标准参数表示为

$$x=\cos t,\quad y=1+\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

利用这个参数表示求绕 $x$ 轴旋转这个圆扫出的曲面的面积(见图6.36).

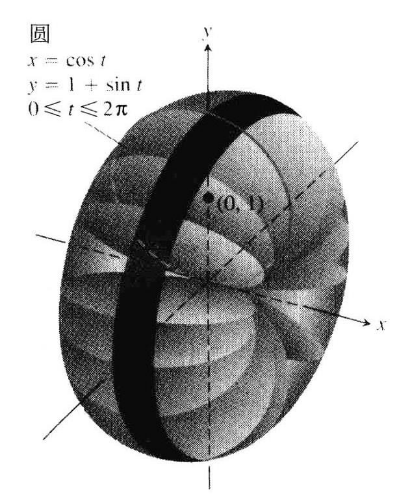



图 6.36 在例 3 中计算由这条参数化曲线扫出的旋转曲面面积

**解** 计算面积公式：

$$\begin{aligned}S&=\int_a^b 2\pi y\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \qquad (\text{绕 } x \text{ 轴旋转的面积公式(5)};\ y=1+\sin t>0)\\&=\int_0^{2\pi}2\pi(1+\sin t)\underbrace{\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}}_{1}\,\mathrm{d}t\\&=2\pi\int_0^{2\pi}(1+\sin t)\,\mathrm{d}t\\&=2\pi[t-\cos t]_0^{2\pi}=4\pi^2\end{aligned}$$

■

### 习题 6.4

在习题 1 ~ 8 中：

(a) 建立绕指定轴旋转给定曲线产生的曲面面积的积分.

T (b) 画出曲线的图形，观察它的形状. 如果可能，同时也画出曲面的图形.

T (c) 利用绘图器的或计算机的积分计算器求曲面面积的数值.

**1.** $y=\tan x$，$0\leqslant x\leqslant \pi/4$；$x$ 轴.

**2.** $y=x^2$，$0\leqslant x\leqslant 2$；$x$ 轴.

**3.** $xy=1$，$1\leqslant y\leqslant 2$；$y$ 轴.

**4.** $x=\sin y$, $0\leqslant y\leqslant\pi$; $y$ 轴.

**5.** $x^{1/2}+y^{1/2}=3$ 从点$(4,1)$到$(1,4)$; $x$ 轴.

**6.** $y+2\sqrt{y}=x$, $1\leqslant y\leqslant 2$; $y$ 轴.

**7.** $x=\int_0^y \tan t\,\mathrm{d}t, 0\leqslant y\leqslant \pi/3$; $y$ 轴.

**8.** $y=\int_1^x \sqrt{t^2-1}\,\mathrm{d}t, 1\leqslant x\leqslant\sqrt{5}$; $x$ 轴

**9.** 求绕 $x$ 轴旋转线段 $y=x/2$, $0\leqslant x\leqslant 4$ 产生的圆锥面的侧面积. 利用几何公式

$$侧面积 = \frac{1}{2}\times(底面周长)\times(斜高)$$

检验答案.

**10.** 求绕 $y$ 轴旋转线段 $y=x/2$, $0\leqslant x\leqslant 4$ 产生的圆锥面的侧面积. 利用几何公式

$$侧面积 = \frac{1}{2}\times(底面周长)\times(斜高)$$

检验答案.

**11.** 求绕 $x$ 轴旋转线段 $y=(x/2)+(1/2)$, $1\leqslant x\leqslant 3$ 产生的圆锥平截头曲面面积. 利用几何公式

$$平截头曲面面积 = \pi(r_1+r_2)\times(斜高)$$

检验结果.

**12.** 求绕 $y$ 轴旋转线段 $y=(x/2)+(1/2)$, $1\leqslant x\leqslant 3$ 产生的圆锥平截头的曲面面积. 用几何公式

$$平截头曲面面积 = \pi(r_1+r_2)\times(斜高)$$

检验结果.

在习题 13 ~ 23 中, 求绕指定轴旋转曲线产生的曲面面积. 如果你有绘图器, 可以绘制这些曲线的图形, 观察它们的形状.

**13.** $y=x^3/9$, $0\leqslant x\leqslant 2$; $x$ 轴.

**14.** $y=\sqrt{x}$, $3/4\leqslant x\leqslant 15/4$; $x$ 轴.

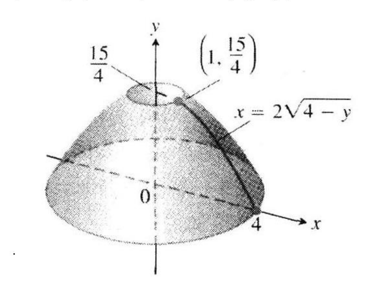
**15.** $y=\sqrt{2x-x^2}$, $0.5\leqslant x\leqslant 1.5$; $x$ 轴.

**16.** $y=\sqrt{x+1}$, $1\leqslant x\leqslant 5$; $x$ 轴.

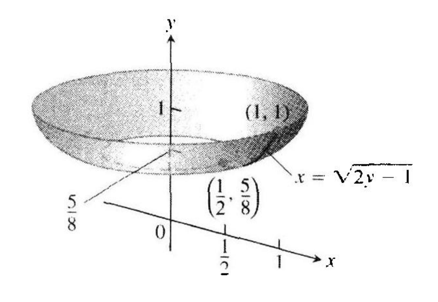
**17.** $x=y^3/3$, $0\leqslant y\leqslant 1$; $y$ 轴.

**18.** $x=(1/3)y^{3/2}-y^{1/2}$, $1\leqslant y\leqslant 3$; $y$ 轴.

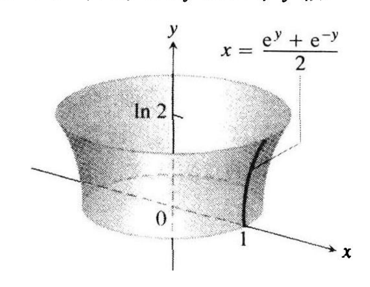
**19.** $x=2\sqrt{4-y}$, $0\leqslant y\leqslant 15/4$; $y$ 轴.




**20.** $x=\sqrt{2y-1}$, $5/8\leqslant y\leqslant 1$; $y$ 轴.




**21.** $x=(\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-y})/2$, $0\leqslant y\leqslant \ln 2$; $y$ 轴.




**22.** $y=(1/3)(x^2+2)^{3/2}, 0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$; $y$ 轴. (提示: 用 $\mathrm{d}x$ 表示 $\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$, 并且计算带相应积分限的积分 $S=\int 2\pi x\,\mathrm{d}s$.)

**23.** $x=(y^4/4)+1/(8y^2)$, $1\leqslant y\leqslant 2$; $x$ 轴. (提示: 用 $\mathrm{d}y$ 表示 $\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$, 并且计算带相应积分限的积分 $S=\int 2\pi y\,\mathrm{d}s$.)

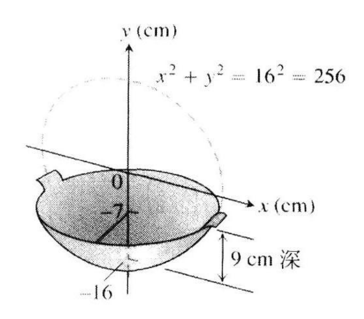
**24.** 写出绕 $x$ 轴旋转曲线 $y=\cos x$, $-\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2$ 产生的曲面面积的积分. 在 7.3 节将会看到如何求这样的积分.

**25. 检验新定义** 证明, 利用公式(3) 求绕 $x$ 轴旋转曲线 $y=\sqrt{a^2-x^2}$, $-a\leqslant x\leqslant a$ 产生的曲面面积, 结果依然是半径为 $a$ 的球面的面积 $4\pi a^2$.

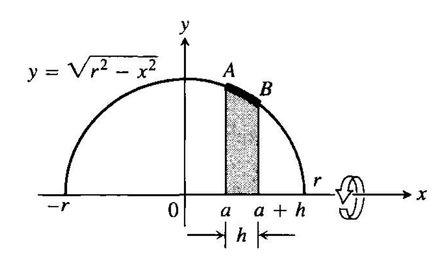
**26. 检验新定义** 高为 $h$ 和底半径为 $r$ 的圆锥面的侧面积等于 $\pi r\sqrt{r^2+h^2}$, 即底面的半周长乘斜高. 证明, 求绕 $x$ 轴旋转线段 $y=(r/h)x$, $0\leqslant x\leqslant h$ 产生的曲面面积也是这个结果.

**T 27. 上瓷釉** 设想你的公司决定在你设计的炒锅上涂一层瓷釉. 计划在锅的内壁涂白瓷, 外壁涂蓝瓷. 在烧制前把每层瓷釉的厚度喷到 5 mm(见附图). 制作车间要求了解批量生产 5000 只炒锅需要准备多少瓷釉. 你如何回答他们? (忽略浪费和未用的材料, 在答案中用公升作为单位. 记住 $1\ \mathrm{cm}^3=1\ \mathrm{mL}$, 所以 $1\ \mathrm{L}=1000\ \mathrm{cm}^3$.)

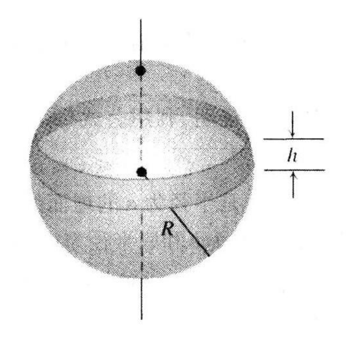
**28. 切面包片** 你是否知道, 当把球顶形状的面包




切成宽度相等的薄片时，每片含有等量的面包皮？为弄清原因，假定绕 $x$ 轴旋转附图所示半圆 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ 产生一个球面. 令 $AB$ 是半圆在 $x$ 轴上长度为 $h$ 的区间上的一段弧. 证明：由 $AB$ 扫出的面积同区间的位置无关.（这个面积只依赖于区间的长度.）




**29.** 附图所示阴影环形带是用两个相距 $h$ 单位的平行平面从半径为 $R$ 的球面切割出来的. 证明这条带曲面面积为 $2\pi Rh$.

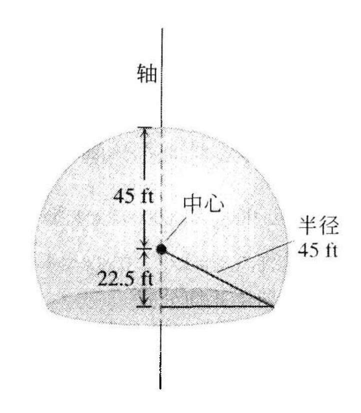



**30.** 附图是美国国家气象局在蒙大拿州波兹曼建立和投入使用的气象雷达的 90 ft 穹顶示意图.

(a) 穹顶外部表面的油柒面积（不计底部）是多少？

**T** (b) 用最接近的平方英尺数表示答案.

**31. 曲面面积公式的另外一种推导方法** 假定 $f$ 在区间 $[a,b]$ 上是光滑的，并且以常用方式划分 $[a,b]$. 如附图所示，在第 $k$ 个子区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 的中点 $m_k = (x_{k-1} + x_k)/2$ 画出曲线的切线.

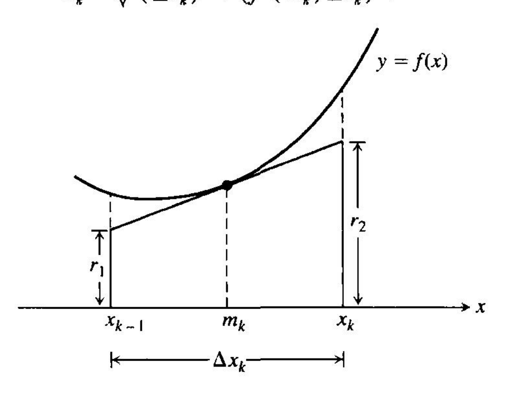



(a) 证明：

$$r_1 = f(m_k) - f'(m_k)\frac{\Delta x_k}{2}$$

$$r_2 = f(m_k) + f'(m_k)\frac{\Delta x_k}{2}$$

(b) 证明：第 $k$ 个子区间的切线线段的长度为 $L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(m_k)\Delta x_k)^2}$.




(c) 证明：绕 $x$ 轴旋转切线线段扫出的圆锥平截头的侧面积为

$$2\pi f(m_k)\sqrt{1 + (f'(m_k))^2}\Delta x_k$$

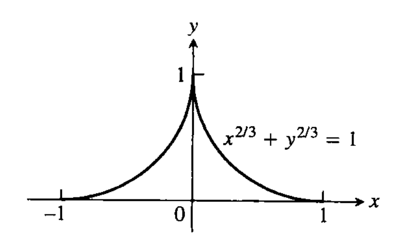
(d) 证明：绕 $[a,b]$ 上的 $x$ 轴旋转 $y = f(x)$ 产生的曲面面积为

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\text{第 } k \text{ 个平截头侧面积})$$

$$= \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

**32. 星状线的曲面** 求绕 $x$ 轴旋转附图所示的星状线 $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ 一部分所产生的曲面面积.（提示：绕 $x$ 轴旋转星状线第一象限部分 $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$，$0 \leqslant x \leqslant 1$，然后对结果加倍）.

在习题 33~38 中，求绕指定轴旋转曲线产生的曲面面积.




**33.** $x=\cos t$, $y=2+\sin t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$; $x$ 轴.

**34.** $x=(2/3)t^{3/2}$, $y=2\sqrt{t}$, $0\leqslant t\leqslant\sqrt{3}$; $y$ 轴.

**35.** $x=t+\sqrt{2}$, $y=(t^2/2)+\sqrt{2}t$, $-\sqrt{2}\leqslant 1\leqslant\sqrt{2}$; $y$ 轴.

**36.** $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$; $x$ 轴.

**37.** $x=e^t-t$, $y=4e^{t/2}$, $0\leqslant t\leqslant 1$; $x$ 轴.

**38.** $x=\ln(\sec t+\tan t)-\sin t$, $y=\cos t$, $0\leqslant t\leqslant\pi/3$; $x$ 轴.

**39. 圆锥平截头** 绕 $x$ 轴旋转联结点(0,1)和(2,2)的线段产生一个圆锥平截头. 利用线段的参数表示 $x=2t$, $y=t+1$, $0\leqslant t\leqslant 1$ 求这个平截头的表面积. 用几何公式面积 $=\pi(r_1+r_2)\times$(斜高)检验结果.

**40. 圆锥面** 绕 $x$ 轴旋转联结原点和点$(h, r)$的线段产生一个高度为 $h$ 和底半径为 $r$ 的圆锥面. 利用线段的参数方程 $x=ht$, $y=rt$, $0\leqslant t\leqslant 1$ 求圆锥面的表面积. 用几何公式面积 $=\pi r\times$(斜高)检验结果.

## 6.5 指数变化与可分离微分方程

在 1.4 节用图形方式介绍了指数增加和指数衰减的概念，我们用函数 $y=y_0e^{kt}$作为这种变化的模型：如果 $k>0$，表示按指数*增加*；如果 $k<0$，表示按指数*衰减*. 现在，通过对定义变化 $dy/dt$ 的一个方程的积分来考察这个概念，这使我们能够重新获得对于 $y$ 的指数表达式.

### 6.5.1 指数变化

在对现实世界环境建立的许多模型中，存在这样一种量 $y$，它的增加或者减少的速率同它在给定时间 $t$ 的数量成比例. 这种量的例子包括放射性物质的衰变量，生物种群的数量，以及热物体同它周围介质之间的温差. 把这样的量称为经受*指数变化*的量.

如果把在时间 $t=0$ 存在的量称作 $y_0$. 那么通过求解下面的初值问题可以求出 $y$ 作为时间 $t$ 的函数：

$$\text{微分方程：}\frac{dy}{dt}=ky$$
$$\text{初值条件：当 } t=0 \text{ 时 } y=y_0 \tag{1}$$

如果 $y$ 取正值并且是增函数，那么 $k$ 为正数，我们用方程(1)说明 $y$ 的增加速率同已有的累积量成正比. 如果 $y$ 取正值并且是减函数，那么 $k$ 为负数，我们用方程(1)说明 $y$ 的衰减速率同还存留的量成正比.

立刻看出，如果 $y_0=0$，方程的一个解是常值函数 $y=0$. 为了求非零解，用 $y$ 除方程(1)：

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dt}=k\quad(y\neq 0)$$

$$\int\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}\,dt=\int k\,dt\quad(\text{对 } t \text{ 积分})$$

$$\ln|y|=kt+C\quad\left(\int(1/u)\,du=\ln|u|+C\right)$$

$$|y|=e^{kt+C}\quad(\text{取指数})$$

$$|y|=e^C\cdot e^{kt}\quad(e^{a+b}=e^a\cdot e^b)$$

$$y=\pm e^Ce^{kt}\quad(\text{若 } |y|=r,\text{则 } y=\pm r)$$

$$y=Ae^{kt}\quad(A \text{ 代表 } \pm e^C)$$

如果 $A$ 除开取全部可能的值 $\pm e^C$ 以外，还允许取 0，那么可以把 $y=0$ 这个解包括在方程中.

通过在 $y=y_0$ 和 $t=0$ 时求解 $A$，对于初值问题求出 $A$ 的值：

$$y_0 = Ae^{k\cdot 0} = A$$

因此，初值问题的解为

$$y = y_0 e^{kt} \tag{2}$$

如果 $k>0$，把按这种方式变化的量称为经受**指数增加**的量；如果 $k<0$，把这种量称为经受**指数衰减**的量. 数 $k$ 称为变化的**速率常数**.

方程(2)的导数还说明，这种常数倍指数函数是等于它们自身导数的仅有函数.

在举出指数变化的若干例子之前，让我们考察用于推导它的过程.

### 6.5.2 可分离微分方程

指数变化用形式为 $dy/dx=ky$ 的微分方程建立模型，其中 $k$ 为某个非零常数. 更一般地假定有一个形式为

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{3}$$

的微分方程，其中 $f$ 同时是自变量和因变量这两者的函数. 方程的一个解是，定义在 $x$ 值的某个(可能无限的)区间上的一个可微函数 $y=y(x)$，在区间上满足方程

$$\frac{d}{dx}y(x) = f(x,y(x))$$

就是说，当把 $y(x)$ 和它的导数 $y'(x)$ 代入微分方程时，得到的方程对于求解区间内所有 $x$ 成立. 方程的**通解**是包含全部可能解的一个解 $y(x)$，并且始终带有一个任意常数.

方程(3)是可分离的，是指 $f$ 可以表示成一个 $x$ 的函数和一个 $y$ 的函数的乘积. 这时，微分方程具有下述形式：

$$\frac{dy}{dx} = g(x)H(y) \quad (g \text{ 是 } x \text{ 的函数}, H \text{ 是 } y \text{ 的函数})$$

当我们把这个方程改写成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \quad \left(H(y) = \frac{1}{h(y)}\right)$$

的形式时，在它的微分形式中可以把所有 $y$ 项和 $dy$ 合并在一起，而所有 $x$ 项和 $dx$ 合并在一起：

$$h(y)dy = g(x)dx$$

现在直接对这个方程的两端积分：

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx \tag{4}$$

求积分后得到解 $y$，这个 $y$ 是隐式定义的 $x$ 的函数.

我们可以直接在方程(4)两端积分的理由是基于代换法则(5.5 节)：

$$\begin{aligned}\int h(y)dy &= \int h(y(x))\frac{dy}{dx}dx \\ &= \int h(y(x))\frac{g(x)}{h(y(x))}dx \quad \left(\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}\right) \\ &= \int g(x)dx\end{aligned}$$

**例 1** 求解微分方程

$$\frac{dy}{dx} = (1+y^2)e^x$$

**解** 由于 $1+y^2$ 不可能为零，我们可以通过分离变量求解方程：

$$\frac{dy}{dx} = (1+y^2)e^x$$

$$dy = (1+y^2)e^x dx \quad (\text{把 } dy/dx \text{ 作为两个微分的商并且对两端乘 } dx)$$

$$\frac{dy}{1+y^2} = e^x dx \quad (\text{除以}(1+y^2))$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int e^x dx \quad (\text{对两端积分})$$

$$\tan^{-1} y = e^x + C \quad (C\text{ 代表合并的积分常数})$$

方程 $\tan^{-1}y = e^x + C$ 给出 $y$ 作为 $x$ 的隐函数. 当 $-\pi/2 < e^x + C < \pi/2$ 时，通过对两端取正切可以解出 $y$ 作为 $x$ 的显函数：

$$\tan(\tan^{-1}y) = \tan(e^x + C)$$

$$y = \tan(e^x + C)$$

■

**例 2** 求解方程

$$(x+1)\frac{dy}{dx} = x(y^2+1)$$

**解** 把方程改写成微分形式，分离变量，并且积分：

$$(x+1)dy = x(y^2+1)dx$$

$$\frac{dy}{y^2+1} = \frac{x\,dx}{x+1} \quad (x \neq -1)$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$\tan^{-1}y = x - \ln|x+1| + C$$

■

初值问题

$$\frac{dy}{dt} = ky, \quad y(0) = y_0$$

包含一个可分离微分方程，它的解 $y = y_0 e^{kt}$ 表示指数变化. 下面举出这种变化的几个例子.

### 6.5.3 无限制的种群增长

严格地说，在一个种群(例如人、植物、动物或者细菌的种群)中，个体的数量是时间的非连续函数，因为这种个体数量取离散值. 然而，当个体数量达到足够大时，种群可以用一个连续函数逼近. 在许多环境下，另外一个合理的假设是这种逼近函数具有可微性，这样便可以利用微积分建立种群规模的模型，并且用来预测种群的数量.

如果繁殖个体的比例保持为常数，并且表现为一种恒定的生殖能力，那么在任何时刻 $t$，出生率同现存个体数量成正比. 如果进一步忽略脱离种群和加入种群的个体，增长率 $dy/dt$ 等于出生率减去死亡率，这是在我们的假设条件下两个比值的差. 换句话说，$dy/dt = ky$，所以 $y = y_0 e^{kt}$，其中 $y_0$ 是种群在时间 $t = 0$ 时的数量. 正如所有类型的增长一样，种群增长可能受到周围环境的限制，但是我们在此不考虑这种因素. 比例式 $dy/dt = ky$ 是*无限制种群增长*的模型.

在下面的例子中，用这个种群模型考察在一个漫延疾病的已知种群内，个体传染疾病的数量在疾病得到适当治疗的条件下是如何减少的.

**例 3** 考虑一种在妥善治疗下疾病消失的模型，假定疾病传染人数的变化率 $dy/dt$ 同人数 $y$ 成正比. 受治疗的人数同传染疾病的人数 $y$ 成正比. 假定在任何已知的一年中，一种疾病的患病人数减少 20%. 如果当前有 10 000 个病例，患病人数将在多少年后减少到 1000 人?

**解** 我们利用方程 $y=y_0e^{kt}$. 需要求三个值：$y_0$ 的值，$k$ 的值，以及当 $y=1000$ 的时间 $t$.

$y_0$ 的值：开始时间是我们随意想要设定的任何时间. 如果想从今天开始，那么当 $t=0$ 时，$y=10\,000$，所以 $y_0=10\,000$. 这时的方程是

$$y = 10\,000e^{kt} \tag{5}$$

$k$ 的值：当 $t=1$ 年时，患病人数将是当前人数的 80%，或者说是 8000 人. 因此，

$$\begin{aligned} 8000 &= 10\,000e^{k(1)} \\ e^k &= 0.8 \quad (\text{在方程(5)中代入 } t=1 \text{ 和 } y=8000) \\ \ln(e^k) &= \ln 0.8 \quad (\text{两端取对数}) \\ k &= \ln 0.8 < 0 \end{aligned}$$

在任何给定时间 $t$，

$$y = 10\,000e^{(\ln 0.8)t} \tag{6}$$

使 $y=1000$ 的 $t$ 值：在方程(6)中令 $y=1000$，并且求解 $t$：

$$\begin{aligned} 1000 &= 10\,000e^{(\ln 0.8)t} \\ e^{(\ln 0.8)t} &= 0.1 \\ (\ln 0.8)t &= \ln 0.1 \quad (\text{两端取对数}) \\ t &= \frac{\ln 0.1}{\ln 0.8} \approx 10.32 \text{ 年} \end{aligned}$$

使患病人数减少到 1000 人需要 10 年多一点时间. ■

### 6.5.4 放射性衰变

自然界中某些元素的原子是不稳定的，它们能够自动辐射质量或者射线. 这个过程称为**放射性衰变**. 原子自动经历这个过程的元素称为**放射性的元素**. 有时，当一种元素的原子通过这个过程辐射它的某些质量时，原子剩余部分转化成某种新元素的原子. 例如，放射性碳 14 衰变为氮；镭经过一些中间放射步骤衰变为铅.

实验证明，放射性元素在任何给定时间的衰变速率(用单位时间内原子核变化的数目测定)，近似同放射性原子核的现存数目成正比. 因此，放射性元素的衰变用方程 $dy/dt=-ky\,(k>0)$ 描述. 按照惯例，使用 $-k$ 和 $k>0$ 表示，在于强调 $y$ 是在减少. 如果 $y_0$ 是 $t=0$ 时的放射性原子核的数目，那么在以后任何时间 $t$，依然存在的原子核数目将是

$$y = y_0e^{-kt}, \quad k > 0$$

**附注**

对于气体氡 222，$t$ 以天为度量单位，$k=0.18$. 对于镭 226，$t$ 以年为度量，$k=4.3\times10^{-4}$；这种物质被用于涂抹钟表的刻度盘，使其在夜间发光(一种危险的使用方式).

回忆 1.5 节，放射性元素的**半衰期**是一份样品中的放射性原子核衰变一半所需的时间. 人们发现一种元素的半衰期仅依赖于衰变速率常数的值，并且由公式

$$\text{半衰期} = \frac{\ln 2}{k} \tag{7}$$

给出. 例如，氡 222 的半衰期为

$$\text{半衰期} = \frac{\ln 2}{0.18} \approx 3.9 \text{ 天}$$

**例 4** 放射性元素的衰变有时可以用来测定地球上过去发生事件的年代. 在活的有机体中，碳 14 这种放性碳同普通碳之间的比在有机体的生命期中完全维持不变，近似等于当时周围环境中这两种碳的比值. 但是有机体死亡后不再摄取新的碳，而遗留在有机体中的碳 14 却由于衰变而减少.

用碳 14 测定年代的科学家们确定碳 14 的半衰期为 5700 年. 试确定一份标本存在的年代，其中 10% 的原有放射性原子核已经衰变.

**解** 我们利用衰变方程 $y=y_0e^{-kt}$. 需要求两个值：$k$ 的值以及当 $y$ 等于 $0.9y_0$(尚存 90% 放射性原子核)时的 $t$ 值. 就是说，求当 $y_0e^{-kt}=0.9y_0$ 或 $e^{-kt}=0.9$ 时的 $t$ 值.

$k$ 的值：利用半衰期方程(7)，

$$k=\frac{\ln 2}{\text{半衰期}}=\frac{\ln 2}{5700}\quad(\text{约为 }1.2\times 10^{-4})$$

使 $e^{-kt}=0.9$ 的 $t$ 值：

$$\begin{aligned} e^{-kt}&=0.9\\ e^{-(\ln 2/5700)t}&=0.9\\ -\frac{\ln 2}{5700}t&=\ln 0.9\quad(\text{两端取对数})\\ t&=-\frac{5700\ln 0.9}{\ln 2}\approx 866\text{ 年}\end{aligned}$$

标本存在的年限大约为 866 年. ■

### 6.5.5 热传递：牛顿冷却定律

一只马口铁杯中盛的热溶液会冷却到周围空气的温度，一块浸入大水槽中的热银锭会冷却到周围的水温. 像在这样一些场合，物体在任何给定时刻的温度变化，大体同自身温度与周围环境温度之间的差成正比. 这个观测结果称为*牛顿冷却定律*. 不过，它也适用于物体变热的现象.

如果 $H$ 是物体在时间 $t$ 的温度，$H_S$ 是恒定的环境温度，那么物体温度变化遵守的微分方程是

$$\frac{dH}{dt}=-k(H-H_S)\tag{8}$$

若用 $y$ 代换 $(H-H_S)$，则

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}&=\frac{d}{dt}(H-H_S)=\frac{dH}{dt}-\frac{d}{dt}(H_S)\\ &=\frac{dH}{dt}-0\quad(H_S\text{ 是常数})\\ &=\frac{dH}{dt}\\ &=-k(H-H_S)\quad(\text{方程}(8))\\ &=-ky\quad(H-H_S=y)\end{aligned}$$

现在知道方程 $dy/dt=-ky$ 的解是 $y=y_0e^{-kt}$，其中 $y(0)=y_0$. 用 $(H-H_S)$ 代换 $y$，这说明

$$H-H_S=(H_0-H_S)e^{-kt}\tag{9}$$

其中 $H_0$ 是 $t=0$ 时的温度. 这个公式是牛顿冷却定律的解.

**例 5** 把在 98℃ 煮熟的一个鸡蛋投入 18℃ 的水槽中. 在 5 分钟后，鸡蛋的温度降到 38℃. 假定水槽中的水没有可察觉的升温. 使鸡蛋降到 20℃ 需要多长时间?

**解** 求解鸡蛋需要多长时间从 98℃ 冷却到 20℃，再减去已经过去的 5 分钟. 利用方程(9)，取 $H_S=18$ 和 $H_0=98$，鸡蛋在投入水槽 $t$ 分钟后的温度为

$$H=18+(98-18)e^{-kt}=18+80e^{-kt}$$

为了求 $k$，利用 $t=5$ 时 $H=38$ 这个条件：

$$38 = 18 + 80\,e^{-5k}$$
$$e^{-5k} = \frac{1}{4}$$
$$-5k = \ln\frac{1}{4} = -\ln 4$$
$$k = \frac{1}{5}\ln 4 = 0.2\ln 4 \quad (约为 0.28)$$

鸡蛋在时间 $t$ 的温度为 $H = 18 + 80\,e^{-(0.2\ln 4)t}$. 现在求当 $H = 20$ 时的时间 $t$:

$$20 = 18 + 80e^{-(0.2\ln 4)t}$$
$$80\,e^{-(0.2\ln 4)t} = 2$$
$$e^{-(0.2\ln 4)t} = \frac{1}{40}$$
$$-(0.2\ln 4)t = \ln\frac{1}{40} = -\ln 40$$
$$t = \frac{\ln 40}{0.2\ln 4} \approx 13\ \text{min}$$

鸡蛋的温度在投入水槽冷却大约 13 分钟后将达到 20℃. 由于鸡蛋花费了 5 分钟达到 38℃, 所以它大约需要 8 分多钟达到 20℃. ■

## 习题 6.5

在习题 1 和 2 中, 证明每个函数 $y = f(x)$ 是伴随微分方程的解.

**1.** $2y' + 3y = e^{-x}$.

(a) $y = e^{-x}$. (b) $y = e^{-x} + e^{-(3/2)x}$.

(c) $y = e^{-x} + Ce^{-(3/2)x}$.

**2.** $y' = y^2$.

(a) $y = -\frac{1}{x}$. (b) $y = -\frac{1}{x+3}$. (c) $y = -\frac{1}{x+C}$.

在习题 3 和 4 中, 证明函数 $y = f(x)$ 是给定微分方程的解.

**3.** $y = \frac{1}{x}\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$, $x^2y' + xy = e^x$.

**4.** $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\int_1^x \sqrt{1+t^4}\,dt$. $y' + \frac{2x^3}{1+x^4}y = 1$.

在习题 5 ~ 8 中, 证明每个函数是给定初值问题的解.

| | 微分方程 | 初值条件 | 候选解 |
|---|---|---|---|
| **5.** | $y' + y = \frac{2}{1+4e^{2x}}$ | $y(-\ln 2) = \frac{\pi}{2}$ | $y = e^{-x}\tan^{-1}(2e^x)$ |
| **6.** | $y' = e^{-x^2} - 2xy$ | $y(2) = 0$ | $y = (x-2)e^{-x^2}$ |
| **7.** | $xy' + y = -\sin x$, $x > 0$ | $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ | $y = \frac{\cos x}{x}$ |
| **8.** | $x^2y' = xy - y^2$, $x > 1$ | $y(e) = e$ | $y = \frac{x}{\ln x}$ |

在习题 9 ~ 18 中, 求解微分方程.

**9.** $2\sqrt{xy}\,\frac{dy}{dx} = 1$, $x, y > 0$.

**10.** $\frac{dy}{dx} = x^2\sqrt{y}$, $y > 0$.

**11.** $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$.

**12.** $\frac{dy}{dx} = 3x^2e^{-y}$.

**13.** $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}\cos^2\sqrt{y}$.

**14.** $\sqrt{2xy}\,\frac{dy}{dx} = 1$.

**15.** $\sqrt{x}\,\frac{dy}{dx} = e^{y+\sqrt{x}}$, $x > 0$.

**16.** $(\sec x)\frac{dy}{dx} = e^{y+\sin x}$.

**17.** $\frac{dy}{dx} = 2x\sqrt{1-y^2}$, $-1 < y < 1$.

**18.** $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x-y}}{e^{x+y}}$.

**T** 下面大多数习题的答案是通过指数函数和对数函数表示的. 使用计算器可能有助于使你把答案表示成小数形式.

**19. 人类进化在继续** 由密歇根大学人类学博物馆 C. 罗伦・布雷斯及其同事们对人类牙齿缩小所作的分析表明, 人类的牙齿还在继续变小. 不像许多科学家所争辩的那样, 这个过程大约在 3 万年以前已经停止. 例如, 在北欧地区, 人类牙齿的大小当今正以每千年 1% 的速率减少。

(a) 如果 $t$ 表示以年为单位的时间, $y$ 表示牙齿的大小, 利用当 $t = 1000$ 时 $y = 0.99y_0$ 的条件, 求方程 $y = y_0e^{kt}$ 中的 $k$ 值. 然后用这个

$k$ 值回答下面($b$)和($c$)中的问题.

(**b**)人类牙齿的大小大约在多少年后将是现今牙齿的90%?

(**c**)距今2万年后，我们后代的牙齿的大小将是多少(按我们现在牙齿大小的百分数计算)?

(*来源*: *LSA Magazine*(《LSA杂志》), 1989年春季, 第12卷, 第2期, 19页, Ann Arbor, MI.)

**20. 大气压力** 地球的大气压力 $p$ 通常采用的模型是：假定 $p$ 随海平面之上的高度 $h$ 的变化率 $dp/dh$ 同 $p$ 成正比. 假定在海平面的压力是1013毫巴(约14.7磅每平方英寸)，在海拔20公里处的高度是90毫巴.

(**a**)求解初值问题

微分方程: $dp/dh = kp$ ($k$ 是常数)

初值条件: 当 $h = 0$ 时 $p = p_0$

通过 $h$ 表示 $p$. 从给定的海拔高度的压力数据确定 $p_0$ 和 $k$ 的值.

(**b**)在 $h=50$ 公里的大气压力是多少?

(**c**)大气在什么海拔高度的压力等于900毫巴?

**21. 一级化学反应** 在某些化学反应中，反应物质随时间变化的速率同物质当时的数量成正比. 例如，$\delta$ 葡萄糖酸内脂变成葡萄糖酸的速率为

$$\frac{dy}{dt} = -0.6y$$

其中 $t$ 以小时度量. 如果 $t=0$ 时存在100克 $\delta$ 葡萄糖酸内脂，在第一小时后还剩下多少克?

**22. 糖的转化** 粗糖加工中有一道工序称为"转化"，就是改变糖的分子结构. 加工一旦开始，粗糖数量改变的速率同粗糖剩余量成正比. 如果在前10小时内粗糖由1000公斤减少到800公斤，再过14小时后将会剩余多少粗糖?

**23. 水下作业** 在海洋表面下 $x$ 英尺的光线强度 $L(x)$ 满足微分方程

$$\frac{dL}{dx} = -kL$$

潜水员凭经验知道，在加勒比海下潜18英尺，光线强度减少一半. 当光线强度降到低于海洋表面强度的十分之一时，如果没有人工照明将无法进行水下作业. 在海洋多深的地方能够在不用人工照明的条件下工作?

**24. 放电电容器的电压** 假定电容器放电的速率同跨越它两端的电压 $V$ 成正比，并且如果时间 $t$ 以秒度量，那么有

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{40}V$$

求解这个方程中的 $V$，用 $V_0$ 表示当 $t=0$ 时的 $V$ 值. 电容器的电压将需要花费多长时间下降到它原有值的10%?

**25. 霍乱菌** 假定在一个菌落中，霍乱菌在不受控制的条件下按指数变化繁殖. 菌落从一个菌珠开始，并且每半小时翻一番. 24小时后菌落中将包含多少细菌?(在有利于细菌繁殖的实验室条件下，霍乱菌的数量能够在每30分钟翻一番. 在受传染的病人身上，许多细菌被消灭，但是这个例子有助于解释病人为什么在上午感觉良好，而在傍晚可能症状加重.)

**26. 细菌的增长** 一种菌落在实验室的理想环境下繁殖，所以菌群随时间按指数增加. 细菌在3小时后达到10 000个，在5小时后达到40 000个. 实验之初的细菌数目是多少?

**27. 发病率**(*续例3*) 假定在任何已知年份，患病人数能够降低25%而不是20%.

(**a**)患病人数将在多长时间内减少到1000人?

(**b**)疾病需要经过多长时间才能根除，就是说，患病人数降低到1人以下?

**28. 美国人口** 波士顿自然科学博物馆展览美国总人口的演变. 到1993年5月11日，人口总数按每14秒一人的速率增加. 在这一天下午3点45分显示的人口数字为257 313 431人.

(**a**)假计人口按恒定速率的指数增加，求人口增长(每365天年的人数)的这个速率常数.

(**b**)按照这个速率，美国在波士顿时间2008年5月11日下午3:45将达到多少人口?

**29. 石油产量的萎缩** 假定从加利福尼亚州惠蒂尔地区一口峡谷油井中抽出的石油以每年10%的速率持续下降. 油井的石油产量将在什么时候降至当前产量的五分之一?

**30. 连续价格折扣** 为了鼓励顾客采用100件方式定购商品，你的公司销售部采用连续折扣的销售办法，使商品单价是订购件数 $x$ 的一个函数 $p(x)$. 这个折扣以每件订购商品1美分的速率降低价格. 100件订单的每件商品价格是 $p(100)=20.09$ 美元.

(**a**)通过求解下的面初值问题求 $p(x)$:

微分方程: $\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{100}p$

初值条件: $p(100) = 20.09$

(**b**)求10件订单的单价 $p(10)$ 和90件订单的单价 $p(90)$.

(c) 销售部要求你查明，对 100 件定单这样大的折扣是否会使公司的收入 $r(x)=x\cdot p(x)$ 将实际低于例如采用 90 件订单的收入. 通过证明 $r$ 在 $x=100$ 时存在最大值使他们放心.

(d) 画出收入函数 $r(x)=xp(x)$ 对于 $0\leqslant x\leqslant 200$ 的图形.

**31. 钚 239** 这种钚同位素的半衰期为 24 360 年. 如果在一次核事故中有 10 g 钚释放到大气中，需要多少年才能使这种同位素衰变 80%？

**32. 钋 210** 钋的半衰期为 139 天，但是送达的样品在放射性核衰变 80% 后才是有用的. 在样品到达多小天后你才能用这种钋？

**33. 放射性原子核的平均寿命** 利用放射性方程 $y=y_0e^{-kt}$ 的物理学家们把 $1/k$ 这个数字称为放射性原子核的平均寿命. 氡原子核的平均寿命约为 $1/0.18=5.6$ 天. 碳 14 原子核的平均寿命超过 8000 年. 证明：在一份放射性元素的样品中最初放射性原子核的 95% 将在平均寿命 3 倍长的时间内衰变，即所需的时间为 $t=3/k$. 因此，原子核的平均寿命给出估计一份元素样品的放射性能够维持多长时间的一种快速方法.

**34. 锎 252** 什么物质的价格能够高达每克 2700 万美元，并且可以用于医治脑癌，分析煤碳的含硫量，以及检测行李中的爆炸物？这种物质就是锎 252. 它是一种极其稀有的放射性同位素，自从格伦 · 西博格于 1950 年发现它以来，西方世界已经制备的这种元素仅有 8 克. 这种同位素的半衰期为 2.645 年——这个时段长到足以用来维持人的生命，短到使每单位物质具有足够高的放射性. 1 微克锎同位素每秒释放出 1 亿 7 千万个中子.

(a) 在这种同位素的衰变方程中，$k$ 的值是什么？

(b) 这种同位素的平均寿命是多少？（参见习题 33）.

(c) 在一份样品中衰变 95% 的放射性原子核需要多长时间？

**35. 冷却溶液** 假定放在室温 20℃ 的屋子内的一杯溶液，在 10 分钟后从原来 90℃ 冷却到 60℃. 用牛顿冷却定律回答下列问题：

(a) 溶液将在多长时间冷却到 35℃？

(b) 如果把溶液放在温度为 −15℃ 的冰箱中而不室内，由 90℃ 冷却到 35℃ 需要多长时间？

**36. 铝条的未知温度** 把一根铝条从寒冷的室外搬进温度保持在 65℉ 的车间，在 10 分钟后，铝条的温度上升到 35℉，再过 10 分钟温度上升到 50℉. 利用牛顿冷却定律估计原来铝条的温度.

**37. 环境介质的未知温度** 把一盆温水（46℃）放进冰箱. 在 10 分钟后，水温降到 39℃；再过 10 分钟，水温为 33℃. 用牛顿冷却定律估计冰箱低到什么温度.

**38. 在空气中冷却的银锭** 假定一块银锭的温度当前比室温高 60℃. 在 20 分钟前，它的温度比室温高 70℃.

(a) 距现在 15 分钟后，银锭的温度将比室温高出多少？

(b) 距现在 2 小时后，它的温度将比室温高出多少？

(c) 银锭的温度将在什么时候比室温高出 10℃？

**39. 火山口湖泊的年龄** 在俄勒冈州由火山爆发形成的火山口湖泊中，发现一棵被摧毁树木的生物碳含有活生物体 44.5% 的碳 14. 这个火山口湖泊的年龄大约是多少？

**40. 用碳 14 测定年代的灵敏度** 在用于测定年代的标本中，为了看出估计碳 14 含量比较小的误差的影响，考虑下面的假想情景：

(a) 在伊利诺依州中部发现一块公元前 2000 年的动物化石，它保存原有碳 14 含量的 17%. 估计这个动物死亡的年代.

(b) 重做 (a) 中的估计，假定动物化石的碳 14 含量比例为 18% 而不是 17%.

(c) 重做 (a) 中的估计，假定动物化石的碳含量比例为 16% 而不是 17%.

**41. 艺术赝品** 一幅被当作荷兰画家弗美尔（1632—1675）创作的油画，含有的碳 14 为原有含量的 99.5%，而不是真品应该有的不超过原有含量的 96.2%. 这件艺术赝品大约存在了多少年？

## 6.6 功

在日常生活中，*功*意味着某种需要消耗体力或者脑力的活动. 在科学技术中，功这个术语特别用于指作用在物体（或者对象上）的力以及随之引起的位移. 这一节讨论如何计算功. 功的应用范围很广，从压缩铁路车厢上的弹簧和清除地下室油库，到迫使电子聚集和把人造卫星送入轨道.

### 6.6.1 由恒力作的功

如果物体沿直线移动一段距离 $d$ 是由大小恒定的力 $F$ 作用于物体移动方向上引起的，那么我们用公式

$$W = Fd \quad (\text{功的恒力公式}) \tag{1}$$

定义作用于物体上的力所作的**功**.

从公式(1)看出，在任何单位制中，功的单位是力的单位乘距离的单位. 在国际单位制 SI(SI 代表 Systéme International 或 International System)中，力的单位是牛顿，距离的单位是米，因此功的单位是牛顿-米(N · m). 这个组合单位经常出现，所以它有一个特殊的名称**焦耳**. 在英单位制中，功的单位是英尺-磅，这是工程师们常用的一种单位.

**附注**

焦耳(joule)缩写成 J，读作"jewel"，是用英国物理学家詹姆斯 · 普雷斯科特 · 焦耳(James Prescott Joule，1818—1889)命名的物理学单位. 定义焦耳的公式是

1 焦尔 =(1 牛顿) ×(1 米)

用符号表示成

1 J=1 N · m

**例 1** 在更换汽车的轮胎时，如果用千斤顶抬起一辆重 2000 磅的汽车半边车身 1.25 ft(必须对汽车垂直施加约 1000 lb 的恒力)，将对汽车作功 1000 × 1.25 = 1250 ft-lb. 在 SI 单位制中，所用的力为 4448 N，移动的距离为 0.381 m，所作的功为 4448 × 0.381 ≈ 1695J. ■

### 6.6.2 由可变力沿直线作的功

如果对物体施加的作用力是可变的，像用力压缩弹簧那样，公式 $W = Fd$ 必须用一个积分公式代替，其中把 $F$ 的变化考虑进去.

假定作功的力作用在沿直线运动的物体上，我们把直线取为 $x$ 轴. 假定作用力的大小是物体位置 $x$ 的连续函数 $F$. 我们需要求 $F$ 在从 $x = a$ 到 $x = b$ 的区间上所作的功. 用通常的方法划分 $[a,b]$，并且在每个子区间 $[x_{k-1},x_k]$ 选择任意一点 $c_k$，如果子区间足够地短，连续函数 $F$ 从 $x_{k-1}$ 到 $x_k$ 的变化是很小的. 越过这个区间所作功的大小接近于 $F(c_k)$ 乘距离 $\Delta x_k$，就像 $F$ 是恒力一样，于是可以应用公式(1). 因此，$F$ 从 $a$ 到 $b$ 所作的总工用黎曼和

$$\text{功} \approx \sum_{k=1}^{n} F(c_k)\Delta x_k$$

逼近. 我们要求这个逼近当划分的范数接近零时得到改进，所以把力 $F$ 从 $a$ 到 $b$ 所作的功定义为 $F$ 从 $a$ 到 $b$ 的积分：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} F(c_k)\Delta x_k = \int_a^b F(x)\,dx$$

> **定义** 可变力 $F(x)$ 在沿 $x$ 轴的运动方向从 $x = a$ 到 $x = b$ 所作的**功**为
>
> $$W = \int_a^b F(x)\,dx \tag{2}$$

如果 $F$ 的单位用牛顿和 $x$ 的单位用米，功积分的单位是焦耳；如果 $F$ 的单位用磅和 $x$ 的单位用英尺，功积分的单位是英尺-磅. 所以，由力 $F(x) = 1/x^2$ 牛顿沿 $x$ 轴从 $x = 1$ m 到 $x = 10$ m 移动物体所作的功为

$$W = \int_1^{10} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big]_1^{10} = -\frac{1}{10} + 1 = 0.9 \text{ J}$$

### 6.6.3 弹簧的虎克定律：$F = kx$

**虎克定律**指出，使弹簧从它的自然(不受外力作用的)长度伸长或者压缩 $x$ 个长度单位的力 $F$

同 $x$ 成正比. 用符号表示,

$$F = kx \tag{3}$$

常数 $k$ 是弹簧的一个特性, 称为弹簧的**力常数**(或者**弹簧常数**), 以每单位长度的力单位数度量. 虎克定律(公式(3))能够给出很精确的结果, 只要外力不使弹簧的金属变形. 在本节我们假定作用力是很小的, 不至于引起金属畸变.

**例 2**　求把弹簧从自然长度 1 ft 压缩到 0.75 ft 需要作的功, 假定力常数为 $k = 16$ lb/ft.

**解**　画出未压缩的弹簧沿 $x$ 轴置放的图形, 把它的可移动端置于原点, 固定端置于 $x = 1$ ft 处(见图 6.37). 这样使我们能够用公式 $F = 16x$ 描述把弹簧从 0 压缩到 $x$ 所需的力. 为了把弹簧从 0 压缩到 0.25 ft, 力必须从

$$F(0) = 16 \times 0 = 0 \text{ lb}$$

增加到　$$F(0.25) = 16 \times 0.25 = 4 \text{ lb}$$

由 $F$ 在这个区间上作的功为

$$W = \int_0^{0.25} 16\,x\,\mathrm{d}x = 8x^2\Big]_0^{0.25} = 0.5 \text{ ft-lb}$$

(在公式(2)中取 $a = 0, b = 0.25, F(x) = 16x$) ■

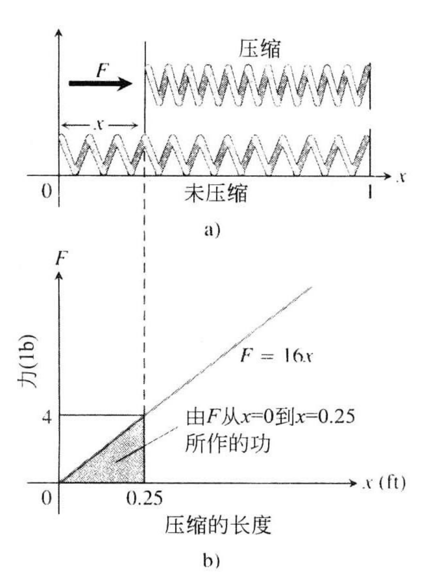



图 6.37　为了保持弹簧处于压缩下, 所需的力随弹簧的压缩而线性地增加(例 2)

**例 3**　一条弹簧的自然长度为 1 m, 用 24 N 力拉长到 1.8 m.

(**a**) 求力常数 $k$.

(**b**) 把弹簧拉到超出自然长度 2 m 需要作多少功?

(**c**) 用 45 N 力能够把弹簧拉长多少?

**解**　(**a**) *力常数*: 从公式(3)求力常数. 24 N 力使弹簧拉长 0.8 m, 所以

$$24 = k(0.8) \quad (\text{在公式(3)中取 } F = 24, x = 0.8)$$

$$k = 24/0.8 = 30 \text{ N/m}$$

(**b**) *拉长弹簧 2 m 所作的功*: 设想沿 $x$ 轴悬挂不受力的弹簧, 其自由端位于 $x = 0$(见图 6.38). 把弹簧拉长到超出自然长度 $x$ m 的力等于把弹簧自由端从原点拉长 $x$ 单位所需的力. 对于弹簧常数 $k = 30$ 的弹簧, 虎克定律表明这个力为

$$F(x) = 30x$$

由 $F$ 对弹簧从 $x = 0$ m 到 $x = 2$ m 所作的功为

$$W = \int_0^2 30x\,\mathrm{d}x = 15x^2\Big]_0^2 = 60 \text{ J}$$

(**c**) *45 N 力将把弹簧拉长多少?* 在公式 $F = 30x$ 中代入 $F = 45$, 得到

$$45 = 30x \quad \text{或} \quad x = 1.5 \text{ m}$$

45 N 力把弹簧拉长 1.5 m. 求出这个结果不需要用微积分. ■

计算功积分对于求提升物体所作的功是很有帮助的, 在这种提升中物体的重量随它们离地面的高度而变化.

**例 4**　一只重 5 lb 的桶由一根 20 ft 长的吊绳从地面以恒速拖动升到空中(见图 6.39). 绳子的重量为 0.08 lb/ft. 提升桶和吊绳需要作多少功?

**解**　桶的重量为常数, 所以单独提升它所作的功为

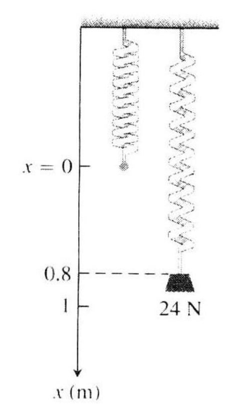


图 6.38 24 N 重量的力把弹簧拉到超出它的不受力长度 0.8 米(例 3)

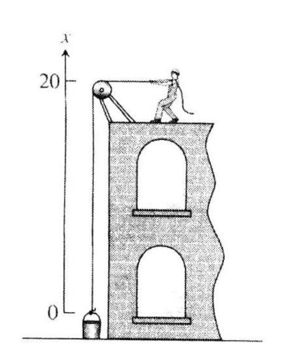


图 6.39 提升例 4 中的桶

$$(\text{重量}) \times (\text{距离}) = 5 \times 20 = 100 \text{ ft-lb}$$

吊绳的重量随桶提升的高度而变化，因为它的自由悬挂部分在减少. 当桶离地面 $x$ ft 时，吊绳继续提升的剩余部分的重量为$(0.08)\times(20-x)$ lb. 所以提升吊绳所作的功为

$$\text{对吊绳作的功} = \int_0^{20}(0.08)(20-x)\mathrm{d}x = \int_0^{20}(1.6-0.08x)\mathrm{d}x$$

$$= \Big[1.6x - 0.04x^2\Big]_0^{20} = 32 - 16 = 16 \text{ ft-lb}$$

对桶和吊绳所作的总功为

$$100 + 16 = 116 \text{ ft-lb}$$

■

### 6.6.4 从容器抽出液体

从一个容器中抽出全部或者部分液体需要作多少功? 为了寻求答案，我们设想一次从液面向外提升一个薄层液体，并且对每个薄层应用公式 $W = Fd$. 然后计算当每层越来越薄和层数越来越多时由此导致的积分. 每次获得的积分依赖于液体的重量和容器的尺寸，但是求积分的方法始终是相同的. 下面的例子说明如何进行.

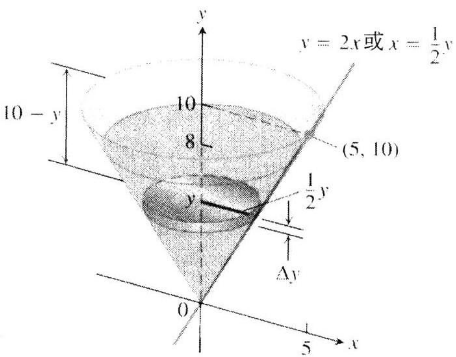


图 6.40 例 5 中的容器和橄榄油

**例 5** 在图 6.40 的圆锥体容器的顶部 2 ft 之下注入重 57 lb/ft$^3$ 的橄榄油. 把油从容器顶部抽出需要作多少功?

**解** 设想通过 $y$ 轴上区间$[0,8]$的划分点，用垂直于 $y$ 轴的平面把容器中的油分成薄层.

在 $y$ 和 $y+\Delta y$ 的平面之间，典型油层的体积约为

$$\Delta V = \pi(\text{半径})^2(\text{厚度}) = \pi\left(\frac{1}{2}y\right)^2\Delta y = \frac{\pi}{4}y^2\Delta y \text{ ft}^3$$

提升这个油层需要的力 $F(y)$ 等于油层的重量

$$F(y) = 57\,\Delta V = \frac{57\pi}{4}y^2\Delta y \text{ lb}$$

$$(\text{重量} = \text{每单位体积重量} \times \text{体积})$$

$F(y)$必须把这个油层提升到圆锥容器顶部平面的距离约为$(10-y)$ft，所以提升这个油层所作的功近似等于

$$\Delta W = \frac{57\pi}{4}(10-y)y^2\Delta y \text{ ft-lb}$$

假设有 $n$ 个薄层与[0,8]的划分相关，并且 $y=y_k$ 表示同第 $k$ 个薄层相关的平面，这个层的厚度为 $\Delta y_k$，我们可以用黎曼和

$$W \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{57\pi}{4}(10-y_k)y_k^2\,\Delta y_k \text{ ft-lb}$$

逼近提升所有这些薄油层所作的功. 从容器顶部抽出橄油所作的功是这些和当划分的范数趋近零时的极限：

$$W=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{57\pi}{4}(10-y_k)y_k^2\,\Delta y_k=\int_0^8\frac{57\pi}{4}(10-y)y^2\mathrm{d}y$$

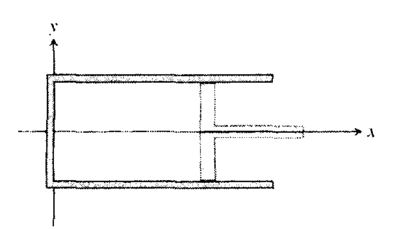
$$=\frac{57\pi}{4}\int_0^8(10y^2-y^3)\,\mathrm{d}y=\frac{57\pi}{4}\left[\frac{10y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\right]_0^8\approx 30\,561 \text{ ft-lb}$$ ■

## 习题 6.6

1. **弹簧常数** 耗费 1800 J 的功把一条弹簧从其自然长度 2 m 拉长到 5 m. 求这个弹簧的力常数.
2. **拉长弹簧** 弹簧的自然长度为 10 in. 用 800 lb 力把弹簧拉长到 14 in.
   (a) 求力常数.
   (b) 把弹簧从 10 in 拉长到 12 in 作了多少功?
   (c) 用 1600 lb 力将把弹簧拉长超出自然长度多少?
3. **拉长橡皮带** 用 2 N 力将使一条橡皮带拉长 2 cm (0.02 m). 假定适用虎克定律，4 N 力将把橡皮带拉长多少? 这个力把橡皮带拉到这个长度要作多少功?
4. **拉长弹簧** 如果用 90 N 力把一条弹簧从它的自然长度拉长 1 m，需要作多少功才能把它从自然长度拉长 5 m?
5. **地铁车厢弹簧** 对纽约市公交局地铁车厢上的盘旋弹簧部件，用 21 714 磅力将其从自由高度 8 英寸压缩到完全压缩的高度 5 英寸.
   (a) 弹簧部件的力常数是多大?
   (b) 把弹簧压缩到第一个半英寸需要作多少功? 再压缩到第二个半英寸需要作多少功? 答案精确到最接近的英寸-磅.
   (Bombardier 公司公共交通部惠允许使用从 1985 到 1987 年提交纽约市公交局的地铁车厢弹簧部件数据.)
6. **浴室磅秤** 一位体重 150 磅的人站到浴室磅秤上，将秤压缩 1/16 英寸. 假设磅秤像弹簧一样具有服从虎克定律的特性. 如果某人把磅秤压缩 1/8 英寸，他的体重是多少? 把磅秤压缩 1/8 英寸作了多少功?
7. **提升吊绳** 一位爬山运动员向上拖 50 m 长的吊绳. 如果绳子重 0.624 N/m，需要作多少功?
8. **漏沙的沙袋** 以恒定速率提升初始重量为 144 磅的沙袋. 在沙袋升高的过程中，沙子同时以恒定的速率泄漏. 当沙袋上升到 18 英尺时，沙子漏出了一半. 把沙袋提升到这个高度作了多少功?(忽略沙袋本身和提升设备的重量.)
9. **提升电梯缆索** 一架在顶端安装电动机的电梯使用重 4.5 lb/ft 的多股缆索. 当电梯梯箱在楼的底层时，外露的缆索长度实际为 0 ft. 在电动机把电梯从楼的底层提升到顶层时，仅对提升缆索作的功是多少?
10. **吸引力** 当一个质量为 $m$ 的质点位于点 $(x,0)$ 时，受到来自原点方向大小为 $k/x^2$ 的力的吸引. 如果质点在 $x=b$ 从静止状态开始移动，并且不受其他力的作用，求在它到达 $x=a(0<a<b)$ 时吸引力对它作的功.
11. **压缩气体** 假定在横截面积为 $A$ 的圆柱体中的气体被活塞压缩. 如果 $p$ 是气体受到的以 lb/in² 为单位的压力，$V$ 是以 in³ 为单位的体积，证明把气体由状态 $(p_1,V_1)$ 压缩到状态 $(p_2,V_2)$ 作的功由公式

$$功=\int_{(p_1,V_1)}^{(p_2,V_2)} p\,\mathrm{d}V$$

给出.(提示：在附图建议的坐标中，$\mathrm{d}V=A\,\mathrm{d}x$. 气体对活塞的反作用力是 $pA$.)




12. (续习题 11) 利用习题 11 中的积分求把气体从 $V_1=243$ in³ 压缩到 $V_2=32$ in³ 所作的功，假设 $p_1=50$ lb/in³，并且 $p$ 和 $V$ 服从气体定律 $pV^{1.4}=$ 常数(对于绝热过程).

**13. 漏水的桶** 假定例 4 中的桶是漏水的. 它开始盛有 2 加仑(16 磅)水，并且以恒定速率泄漏. 在桶上升到顶端时水正好漏完. 单独提升桶中的水作了多少功?(提示：不把吊绳和桶包括在内，并且求桶在 $x$ 英尺的高度时所剩水的比例.)

**14.** (续习题 13) 把例 4 和习题 13 中的桶换成更大的盛 5 加仑(40 磅)水的桶，但是新桶的泄漏更大，所以在桶上升到顶端时也漏完水. 假定水以稳定的速率泄漏，单独提升水作了多少功?(不把吊绳和桶包括在内.)

**海水的重量**

由于地球的自转和它的重力场的变化，在海平面上不同地点的海水重量也是变化的. 在赤道上每立方英尺水的重量大约为 62.26 磅，而在接近南北极的地方大约为 62.59 磅，有将近 0.5% 的改变. 在墨尔本和纽约市 1 立方英尺水重 62.4 磅，而在阿拉斯加的朱诺和斯德哥尔摩达到 62.5 磅. 虽然 62.4 是一个典型数字和教科书中通常见到的值，但是存在显著的差异.

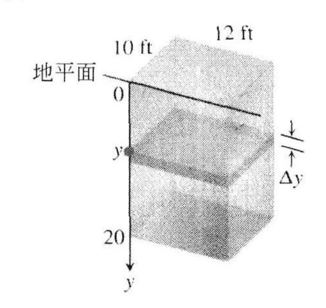
**15. 抽水** 附图所示长方体蓄水池是用于拦截雨水的，它的顶部与地面持平. 假定水的重量为 62.4 lb/ft$^3$.

(a) 当水池蓄满水时，从地面把水抽空需要作多少功?

(b) 如果用(5/11)马力(hp)电动机(功输出 250 ft-lb/s). 把水抽到地面，抽空满池水需要多长时间?

(c) 证明：在前 25 分钟(b)中的抽水将降低水面 10 ft(蓄水池的一半)

(d) **水的重量** 在水的重量为 62.26 lb/ft$^3$ 的地方，(a)和(b)中的答案是什么? 在水的重量为 62.59 lb/ft$^3$ 的地方答案是什么?



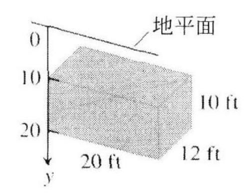

**16. 抽空贮水池** 附图所示的长方体贮水池(贮存雨水的水池)顶部低于地平面 10 ft. 池中贮满了水，为了检修，从地平面抽空池水.

(a) 抽空贮水池需要作多少功?

(b) 用 1/2 hp(马力)抽水机(额定功率为 275 ft-lb/s)抽干贮水池需要多长时间?

(c) 用(b)中的抽水机抽去一半池水需要多长时间?(这个时间将少于完全抽空池水所需时间的一半.)

(d) **水的重量** 在水的重量为 62.26 lb/ft$^3$ 的地方，(a)至(c)中的答案是什么? 在水的重量为 62.59 lb/ft$^3$ 地方答案是什么?

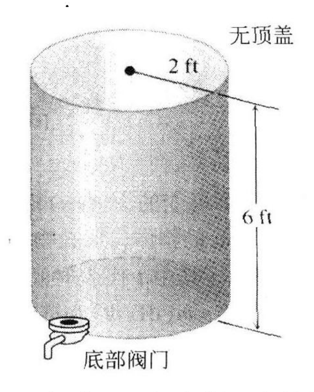



**17. 从容器抽油** 如果在例 5 的容器中灌满了橄榄油，从容器顶部平面把油抽出需要作多少功?

**18. 从半满的容器抽油** 假定例 5 容器中所盛橄榄油是半满而非全满的. 从容器顶部之上 4 英尺抽出油需要作多少功?

**19. 抽空容器** 一个直立的圆柱体容器测出高 30 ft 和直径 20 ft. 在容器中灌满重 51.2 lb/ft$^3$ 的煤油. 从容器顶部平面抽出煤油需要作多少功?

**20.** 附图所示圆柱体容器可以从低于容器底面 15 英尺的湖中抽水灌入. 有两种灌水的方法. 一种方法是通过同容器底部一个阀门连接的软管抽水，另一种方法是把软管接到容器顶部让水注入. 哪一种灌水方法更快? 提出答案的理由.

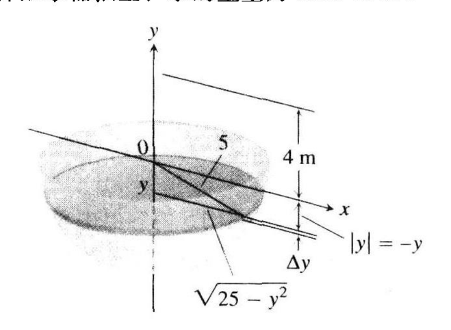



**21.** (a) **从容器抽牛奶** 假定例 5 中的圆锥形容器注入的是牛奶(重 64.5 lb/ft$^3$)而非橄榄油. 从容器顶部抽出牛奶需要作多少功?

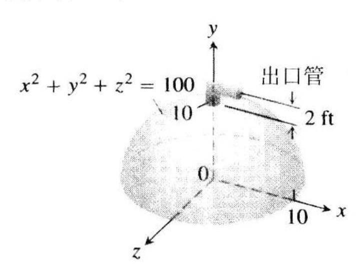
(b) **从容器抽油** 在例 5 中从圆锥形容器顶部之上 3 英尺的高度抽出橄榄油需要作多少功?

**22. 抽海水** 为了设计一个大型不锈钢容器的内壁，绕 $y$ 轴旋转曲线 $y=x^2$，$0\leqslant x\leqslant 4$. 在以米为单位的这个尺寸的容器中灌满海水（重 10 000 $\mathrm{N/m^3}$）. 从容器顶端把海水抽空需要作多少功?

**23. 抽空贮水器** 我们仿照从其他容器抽水的方法从球体贮水器抽水，以球的垂直轴作为积分轴，利用附图，求需要作多少功才能在容器顶部之上 4 米高处把半径为 5 米的灌满水的半球体贮水器抽空? 水的重量为 9800 $\mathrm{N/m^3}$.




**24.** 假定你被指定负责清除和修理附图所示的储罐，储罐是半径为 10 ft 的半球体，其中装满重 56 $\mathrm{lb/ft^3}$ 的苯. 你接洽的一家公司表示能以每 1 ft-lb 功支付 1/2 美分的价格清除储罐. 求在储罐顶端之上 2 ft 的出口抽空苯需要作的功. 如果这项任务有 5000 美元的预算，你能答应雇请这家公司吗?




**25. 动能** 如果大小可变的力 $F(x)$ 沿 $x$ 轴从 $x_1$ 到 $x_2$ 移动质量为 $m$ 的物体，那么物体的速度 $v$ 可以用 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 表示（其中 $t$ 代表时间）. 利用牛顿运动第二定律 $F=m(\mathrm{d}V/\mathrm{d}t)$ 和链式法则

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

证明，由这个力把物体从 $x_1$ 移动到 $x_2$ 所作的功为

$$W=\int_{x_1}^{x_2}F(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$$

其中 $v_1$ 和 $v_2$ 是物体在 $x_1$ 和 $x_2$ 的速度. 在物理学中，当质量为 $m$ 的物体以速度 $v$ 运动时，表达式 $(1/2)mv^2$ 称为物体的动能. 因此，由可变力作的功等于物体动能的变化.

在习题 26~32 中，利用习题 25 的结果.

**26. 网球** 用 160 ft/s（约 109 mph）的速度发出重量为 2 盎司的网球. 使网球达到这样快的速率，对网球作了多少功?（为了由网球的重量求其质量，用磅（lb）表示重量，再除以重力加速度 32 $\mathrm{ft/s^2}$.）

**27. 棒球** 以 90 mph 的速度投掷棒球需要作功多少 ft-lb? 一个棒球重 5 盎司或 0.3125 磅.

**28. 高尔夫球** 以 280 ft/s（约 191 mph）的速度从球座上击出重 1.6 盎司的高尔夫球. 使高尔夫球腾空作了功多少 ft-lb?

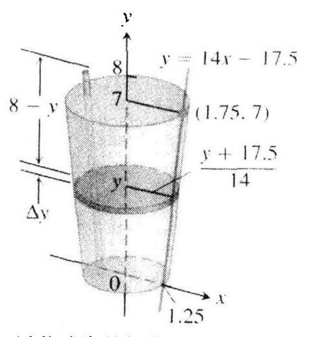
**29. 网球** 在 1990 年美国男子网球公开赛上，皮特·桑普拉斯荣获冠军，他在一次发球中击出了一个惊人的球，记录下的球速为 124 mph. 为了获得这个速度，桑普拉斯必须对重 2 盎司的球作多少功?

**30. 橄榄球** 一名四分球员以 88 ft/s（60 mph）的球速掷出重 14.5 盎司的橄榄球. 为了获得这个速度，对橄榄球需要作功多少 ft-lb?

**31. 软式棒球** 必须对重 6.5 盎司的软式棒球作多少功才能使它的投掷速度达到 132 ft/s（90 mph）?

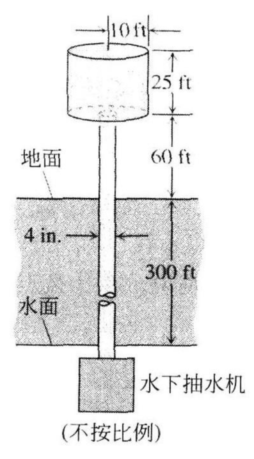
**32. 滚珠** 把一颗重 2 盎司的钢滚珠置放在直立的弹簧上，弹簧的力常数为 $k=18$ lb/ft. 把弹簧压缩 2 英寸后再松开. 滚珠大约弹到多大高度?

**33. 吸冰淇淋牛奶** 附图所示为截锥容器，盛满重 4/9 $\mathrm{oz/in^3}$ 的草莓冰淇淋牛奶. 正如所见的那样，容器深 7 in，底部横跨 2.5 in，顶部横跨 3.5 in（在波士顿布雷汉姆的标准规格）. 吸管竖插在容器上方 1 in 的位置. 通过吸管吸上冰淇淋牛奶大约需要作多少功（忽略磨擦力）? 答案以英寸-盎司为功的单位.




以英寸为单位的容器尺寸

**34. 水塔** 假定你所在城市决定挖一口井增加水的供应. 作为市镇工程师，你已确定水塔必须提供为配送水所需的压力，并且设计出如附图所示的系统. 水从 300 英尺深的井中抽出，通过直径 4 英寸的垂直水管注入直径 20 英尺和高 25 英尺的圆柱体贮水池中. 贮水池的底部在地面之上 60 英尺. 抽水采用 3 马力抽水机，额定功率为 1650 ft·lb/s. 按最接近的小时计，第一次注满贮水池需要多少时间?（包括注满水管所用的时间.）假定水的重量为 62.4 lb/ft³.



(不按比例)

**35. 把人造卫星送入轨道** 地球重力场的强度随离地心的距离 $r$ 变化，质量为 $m$ 的人造卫星在其发射期间和发射以后经受的地球重力为

$$F(r) = \frac{mMG}{r^2}$$

其中 $M = 5.975 \times 10^{24}$ kg 是地球质量，$G = 6.6720 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 kg^{-2}}$ 是万有引力常数，$r$ 以 m 度量. 因此，把一颗 1000 kg 的人造卫星从地面送入距离地心 35 780 km 的圆形轨道所需的功由下面的积分给出：

$$功 = \int_{6\,370\,000}^{35\,780\,000} \frac{1000MG}{r^2}\,dr \text{ 焦耳}$$

求这个积分. 积分下限是地球在发射场位置以 m 为单位的半径.（这个计算不考虑运载火箭上升消耗的能量或者使人造卫星获得轨道速度消耗的能量.）

**36. 强迫电子靠拢** 两个相距 $r$ 米的电子相互排斥，斥力为

$$F = \frac{23 \times 10^{-29}}{r^2} \text{ 牛顿}$$

(a) 假定一个电子被固定在 $x$ 轴上的点 $(1, 0)$（坐标轴的长度以米为单位）. 把另外一个电子沿 $x$ 轴从点 $(-1, 0)$ 移动到原点需要作多少功?

(b) 假设在点 $(-1,0)$ 和 $(1,0)$ 分别固定一个电子. 把第三个电子沿 $x$ 轴从点 $(5,0)$ 移动到 $(3,0)$ 需要作多少功?

## 6.7 矩与质心

许多结构和机械系统呈现这样一种特性，它们的质量仿佛集中在一个称为质心的点（见图 6.41）. 重要的是要知道如何确定这个点，而求质心基本上是一个数学上的问题. 我们暂且处理一维和二维对象的质心问题. 至于三维对象，最好是用第 13 章讲述的多重积分解决.

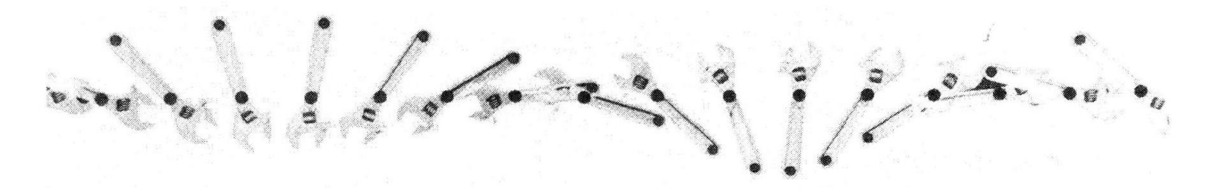


图 6.41 在冰面上滑动的扳钳绕质心的转动就像质心在一条直线上滑动

### 6.7.1 沿直线分布的质量

我们用分阶段的方法建立求质心的数学模型. 第一阶段，设想质量 $m_1$，$m_2$ 和 $m_3$ 像下图那样分布在一条刚性的 $x$ 轴上，这条轴由在原点的支架支撑.

$x_1$ 0 $x_2$ $x_3$ $x$

$m_1$ $m_2$ $m_3$

在原点的支架

这样形成的系统可能是平衡的，也可能是不平衡的，取决于这些质量的大小以及它们如何排列.

每个质量 $m_k$ 对轴产生一个向下的大小为质量 $m_k$ 乘重力加速度 $g$ 的力 $m_kg$(即 $m_k$ 的重量). 每个这样的力具有绕原点转动 $x$ 轴的趋势，是转动杠杆的一种方式. 这种转动效应称为**转矩**，用力 $m_kg$ 同力作用点到原点的带符号距离的乘积度量. 在原点左边的质量产生负的(反时针方向)转矩. 在原点右边的质量产生正的(顺时针方向)转矩.

转矩的和是对系统绕原点转动趋势的度量. 这个和称为**系统转矩**:

$$\text{系统转矩} = m_1gx_1 + m_2gx_2 + m_3gx_3 \tag{1}$$

系统将是平衡的，当且仅当它的转矩为零.

如果在公式(1)中提出因子 $g$，看出系统转矩为

$$\underbrace{g}_{\text{环境特性}} \cdot \underbrace{(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)}_{\text{系统特性}}$$

因此，转矩是重力加速度 $g$ 同数 $(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)$ 的乘积，前者是产生系统的环境特性，后者是系统自身的特性(这是一个常量，无论系统出现在什么地方都保持相同).

数 $(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)$ 称为**系统对原点的矩**. 它是各个质量的**矩** $m_1x_1$，$m_2x_2$，$m_3x_3$ 之和:

$$M_0 = \text{系统对原点的矩} = \sum m_kx_k$$

(这里改换成 $\sum$ 记号是为表示可以对更多的项求和.)

通常我们需要知道何处是置放支架使系统达到平衡的位置，就是说，在什么点 $\bar{x}$ 置放它使转矩之和等于零. 请看图形



在图中这个特定的位置，每个质量对支架的转矩为

$$m_k \text{ 对 } \bar{x} \text{ 的转矩} = (m_k \text{ 到 } \bar{x} \text{ 的带符号矩离})(\text{向下的作用力})$$

$$= (x_k - \bar{x})m_kg$$

当我们写出说明这些转矩之和为零的方程时，得到一个可以求解 $\bar{x}$ 的方程:

$$\sum(x_k - \bar{x})m_kg = 0 \quad (\text{转矩之和等于零})$$

$$\bar{x} = \frac{\sum m_kx_k}{\sum m_k} \quad (\text{求解 } \bar{x})$$

上面这个公式表明，用系统的总质量除系统对原点的矩求出 $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{\sum m_kx_k}{\sum m_k} = \frac{\text{系统对原点的矩}}{\text{系统质量}} \tag{2}$$

这个点 $\bar{x}$ 称为系统的**质心**.

### 6.7.2 在平面区域上分布的质量

假定有一组分布在平面内的数目有限的质量，质量 $m_k$ 位于点 $(x_k, y_k)$(参见图 6.42). 系统的质量为

$$\text{系统的质量}: M = \sum m_k$$

每个质量 $m_k$ 存在对每条轴的矩. 它对 $x$ 轴的矩为 $m_ky_k$，对 $y$ 轴的矩为 $m_kx_k$. 整个系统对两条轴的矩分别为

$$\text{对 } x \text{ 轴的矩}: M_x = \sum m_ky_k$$

$$\text{对 } y \text{ 轴的矩}: M_y = \sum m_kx_k$$

系统质心的 $x$ 坐标定义为

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} \tag{3}$$

采用$\bar{x}$的这个选择，像在一维的情形一样，系统对直线 $x=\bar{x}$ 是平衡的(见图 6.43). 质量对直线 $x=\bar{x}$ 产生的转矩消失.

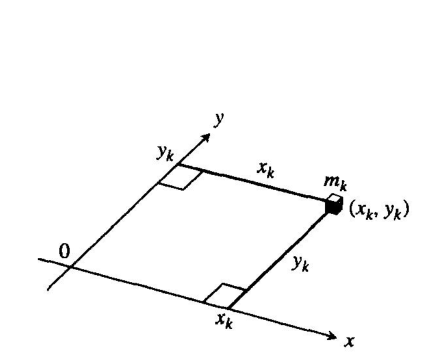



图 6.42 每个质量 $m_k$ 具有对每条轴的矩

图 6.43 质量的二维阵列对于它的质心(c. m. )是平衡的

系统质心的 $y$ 坐标定义为

$$\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k} \tag{4}$$

采用$\bar{y}$的这个选择，系统对直线 $y=\bar{y}$ 也是平衡的. 质量对直线 $y=\bar{y}$ 产生的转矩消失.

因此，就平衡而论，系统显现全部质量仿佛集中在点($\bar{x}$, $\bar{y}$)的特性. 这个点称为系统的**质心**.

## 6.7.3 薄平板

在很多应用问题中，需要求薄平板的质心，例如铝圆盘或者三角形薄钢板的质心. 在这样的情况下，我们假定质量是连续分布的，用来计算$\bar{x}$和$\bar{y}$的公式包含积分而不是有限和. 积分用下面的方式建立.

设想把占据 $xy$ 平面内一个区域的薄板切割成平行于一条坐标轴(在图 6.44 中平行于 $y$ 轴)的细条. 一个典型细条的质心是($\tilde{x}$, $\tilde{y}$). 我们把细条的质量 $\Delta m$ 视为仿佛集中在($\tilde{x}$, $\tilde{y}$). 于是细条对 $y$ 轴的矩为 $\tilde{x}\,\Delta m$，对 $x$ 轴的矩为 $\tilde{y}\,\Delta m$. 这时公式(3)和(4)变成

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\sum \tilde{x}\,\Delta m}{\sum \Delta m},\qquad \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\sum \tilde{y}\,\Delta m}{\sum \Delta m}$$

这两个和是积分的黎曼和，并且当薄板切割的细条变得越来越窄时作为极限值趋近这两个积分. 我们用符号把这两个积分表示成

$$\bar{x}=\frac{\int \tilde{x}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m},\quad \bar{y}=\frac{\int \tilde{y}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}$$

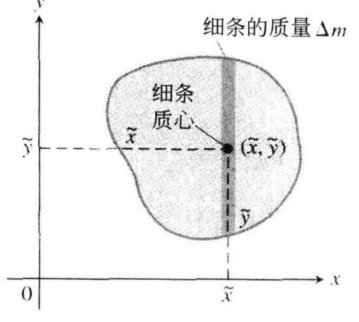



图 6.44 把薄板切割成平行于 $y$ 轴的细条，一个典型细条对每条坐标轴产生的矩如同它的质量 $\Delta m$ 集中在细条质心($\tilde{x}$, $\tilde{y}$)产生的矩

**覆盖 $xy$ 平面内一个区域的薄板的矩、质量和质心**

$$\text{对 } x \text{ 轴的矩：}\quad M_x = \int \tilde{y}\,\mathrm{d}m$$

$$\text{对 } y \text{ 轴的矩：}\quad M_y = \int \tilde{x}\,\mathrm{d}m$$

$$\text{质量：}\quad M = \int \mathrm{d}m \tag{5}$$

$$\text{质心：}\quad \bar{x} = \frac{M_y}{M},\quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

微分 $\mathrm{d}m$ 是细条的质量. 假定薄板的密度 $\delta$ 是连续函数，质量微分 $\mathrm{d}m$ 等于乘积 $\delta\,\mathrm{d}A$(每单位面积的质量乘面积). 这里 $\mathrm{d}A$ 代表细条的面积.

为了求公式(5)中的积分，画出坐标平面内薄板的图形，并描绘同一条坐标轴平行的质量细条. 然后，通过 $x$ 或者 $y$ 表示细条的质量 $\mathrm{d}m$ 和细条质心的坐标($\tilde{x}$, $\tilde{y}$). 最后，在由平面内薄板位置确定的积分限之间求 $\tilde{y}\,\mathrm{d}m$，$\tilde{x}\,\mathrm{d}m$，$\mathrm{d}m$ 的积分.

**附注：密度**

一种薄板材料的密度是它每单位面积的质量. 对于线材、杆材和窄条形材料，以每单位长度的质量作为它们的密度.

**例 1** 在图 6.45 所示的三角形板的密度为常数 $\delta = 3\ \mathrm{g/cm^2}$. 求

**(a)** 板对 $y$ 轴的矩 $M_y$； **(b)** 板的质量 $M$； **(c)** 板的质心(c. m.)的 $x$ 坐标.

**解 方法(1)：用垂直细条**(见图 6.46)

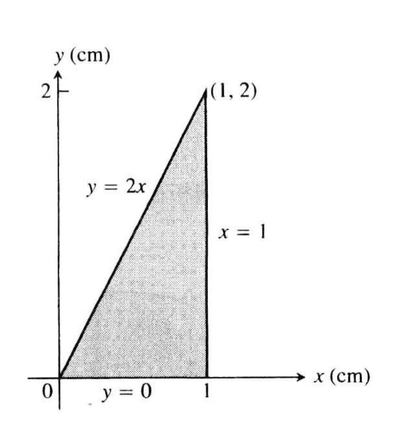



图 6.45 例 1 中的三角形板

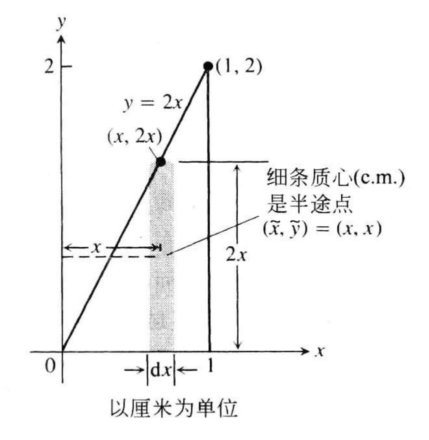



图 6.46 用一些垂直细条模拟例 1 中的三角形板

**(a)** 矩 $M_y$：

典型的垂直细条具有

$$\text{质心(c. m.)：}\quad (\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, x)$$

$$\text{长度：}\quad 2x$$

$$\text{宽度：}\quad \mathrm{d}x$$

$$\text{面积：}\quad \mathrm{d}A = 2x\,\mathrm{d}x$$

$$\text{质量：}\quad \mathrm{d}m = \delta\,\mathrm{d}A = 3 \cdot 2x\,\mathrm{d}x = 6x\,\mathrm{d}x$$

$$\text{从 } y \text{ 轴到 c. m. 的距离：}\quad \tilde{x} = x$$

细条对 $y$ 轴的矩为

$$\tilde{x}\,\mathrm{d}m = x \cdot 6x\,\mathrm{d}x = 6x^2\mathrm{d}x$$

因此，板对 $y$ 轴的矩为

$$M_y = \int \tilde{x}\,\mathrm{d}m = \int_0^1 6x^2\mathrm{d}x = 2x^3\Big]_0^1 = 2\ \mathrm{g\cdot cm}$$

**(b)** 板的质量：

$$M = \int \mathrm{d}m = \int_0^1 6x\,\mathrm{d}x = 3x^2\Big]_0^1 = 3\ \mathrm{g}$$

**(c)** 板的质心的 $x$ 坐标：

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2\ \mathrm{g\cdot cm}}{3\ \mathrm{g}} = \frac{2}{3}\ \mathrm{cm}$$

按照同样的计算，可以求 $M_x$ 和 $\bar{y} = M_x/M$.

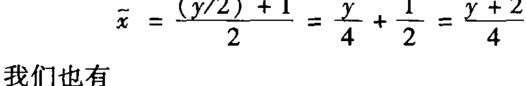
**方法(2)：用水平细条**(见图 6.47)

**(a)** 矩 $M_y$：

典型水平细条质心(c. m.)的 $y$ 坐标是 $y$(参见图形)，所以

$$\tilde{y} = y$$

质心的 $x$ 坐标是跨越三角形半途点的 $x$ 坐标. 这使它取 $y/2$(细条左侧的 $x$ 值)和 1(细条右侧的 $x$ 值)的平均值：



$$\tilde{x} = \frac{(y/2)+1}{2} = \frac{y}{4} + \frac{1}{2} = \frac{y+2}{4}$$

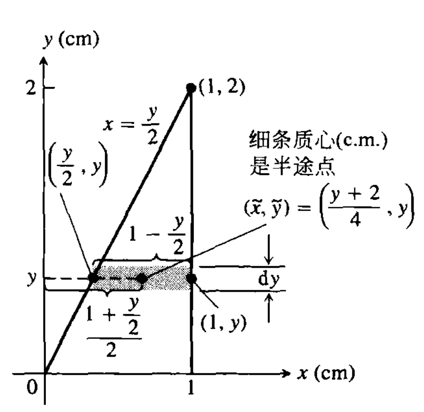
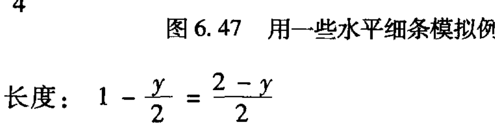



图 6.47 用一些水平细条模拟例 1 中的三角形板

我们也有



长度：$1 - \frac{y}{2} = \frac{2-y}{2}$

宽度：$\mathrm{d}y$

面积：$\mathrm{d}A = \frac{2-y}{a}\mathrm{d}y$

质量：$\mathrm{d}m = \delta\,\mathrm{d}A = 3 \cdot \frac{2-y}{2}\mathrm{d}y$

从 c. m. 到 $y$ 轴的距离：$\tilde{x} = \frac{y+2}{4}$

细条对 $y$ 轴的矩为

$$\tilde{x}\,\mathrm{d}m = \frac{y+2}{4} \cdot 3 \cdot \frac{2-y}{2}\mathrm{d}y = \frac{3}{8}(4-y^2)\mathrm{d}y$$

板对 $y$ 轴的矩为

$$M_y = \int \tilde{x}\,\mathrm{d}m = \int_0^2 \frac{3}{8}(4-y^2)\mathrm{d}y = \frac{3}{8}\left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{3}{8}\left(\frac{16}{3}\right) = 2\ \mathrm{g\cdot cm}$$

**(b)** 板的质量：

$$M = \int \mathrm{d}m = \int_0^2 \frac{3}{2}(2-y)\mathrm{d}y = \frac{3}{2}\left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_0^2 = \frac{3}{2}(4-2) = 3\ \mathrm{g}$$

**(c)** 板的质心的 $x$ 坐标：

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2\ \mathrm{g\cdot cm}}{3\ \mathrm{g}} = \frac{2}{3}\ \mathrm{cm}$$

按照同样的计算，可以求 $M_x$ 和 $\bar{y}=M_x/M$. ■

如果薄板中的质量分布有一条对称轴，质心将位于这条对称轴上. 如果存在两条对称轴，质心将位于它们的交点. 这两个事实经常有助于简化计算.

**例 2** 设薄板覆盖上方以抛物线 $y=4-x^2$ 为界和下方以 $x$ 轴为界的区域，求它的质心(见图 6.48). 假定薄板在点$(x,y)$的密度为 $\delta=2x^2$，这是从点$(x,y)$到 $y$ 轴的距离平方的两倍.

**解** 薄板的质量分布是对 $y$ 轴对称的，所以 $\bar{x}=0$. 我们用一些垂直细条模拟质量分布，因为密度是用变量 $x$ 的函数给出的. 典型的垂直细条(参见图 6.48)具有

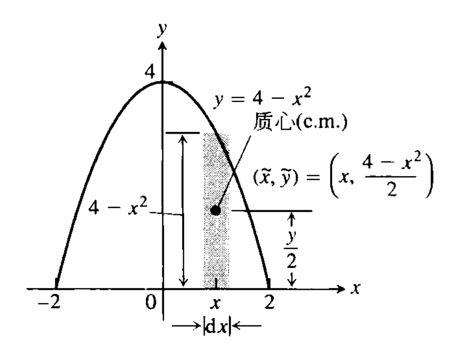



图 6.48 用一些垂直细条模拟例 2 中的薄板

$$\text{质心(c. m.)：}\quad (\tilde{x},\tilde{y})=\left(x,\frac{4-x^2}{2}\right)$$

$$\text{长度：}\quad 4-x^2$$

$$\text{宽度：}\quad \mathrm{d}x$$

$$\text{面积：}\quad \mathrm{d}A=(4-x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$\text{质量：}\quad \mathrm{d}m=\delta\,\mathrm{d}A=\delta\,(4-x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$\text{从 c. m. 到 } x \text{ 轴的距离：}\quad \tilde{y}=\frac{4-x^2}{2}$$

细条对 $x$ 轴的矩为

$$\tilde{y}\,\mathrm{d}m=\frac{4-x^2}{2}\cdot\delta\,(4-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{\delta}{2}\,(4-x^2)^2\mathrm{d}x$$

板对 $x$ 轴的矩为

$$M_x=\int\tilde{y}\,\mathrm{d}m=\int_{-2}^{2}\frac{\delta}{2}\,(4-x^2)^2\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2}x^2(4-x^2)^2\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2}(16x^2-8x^4+x^6)\,\mathrm{d}x=\frac{2048}{105}$$

$$M=\int\mathrm{d}m=\int_{-2}^{2}\delta\,(4-x^2)\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2}2x^2(4-x^2)\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2}(8x^2-2x^4)\,\mathrm{d}x=\frac{256}{15}$$

因此，

$$\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{2048}{105}\cdot\frac{15}{256}=\frac{8}{7}$$

薄板的质心在

$$(\bar{x},\bar{y})=\left(0,\frac{8}{7}\right)$$ ■

### 6.7.4 形心

如果密度函数为常数，它从$\bar{x}$和$\bar{y}$的公式的分子和分母中消去. 因此，当物体的密度为常数时，质心的位置表示物体的几何特性而非它的制作材料的特性. 在这样的情形，工程师们可能把质心称为物体形状的**形心**，如说“求三角形或者体锥的形心”. 为了求形心，只需设 $\delta=1$，并且同前面一样，通过用质量除矩求$\bar{x}$和$\bar{y}$.

**例 3** 求一条密度 $\delta$ 为常数的金属线的质心(形心)，它的形状像半径为 $a$ 的半圆.

**解** 用半圆 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 模拟金属线(见图 6.49). 它的质量分布对 $y$ 轴对称，所以 $\bar{x}=0$. 为了求$\bar{y}$，设想把金属线分成许多小段. 典型段(见图 6.49a)具有

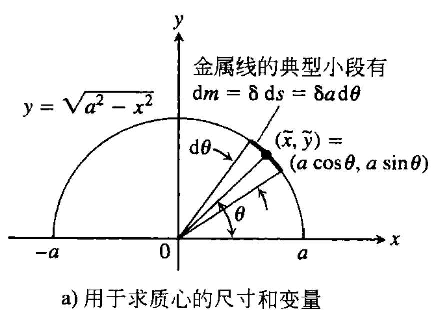
$$\text{长度：}\mathrm{d}s=a\,\mathrm{d}\theta$$

质量：$dm = \delta\, ds = \delta a\, d\theta$ （单位长度的质量乘长度）

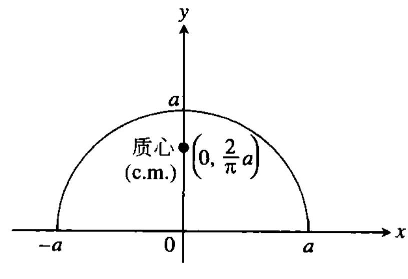
从 c. m. 到 $x$ 轴的距离：$\tilde{y} = a\sin\theta$

因此，
$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\, dm}{\int dm} = \frac{\int_0^\pi a\sin\theta \cdot \delta a\, d\theta}{\int_0^\pi \delta a\, d\theta} = \frac{\delta a^2\left[-\cos\theta\right]_0^\pi}{\delta a\pi} = \frac{2}{\pi}a$$

质心位于对称轴上的点$(0,2a/\pi)$，这是从原点向上大约到半径长度2/3 的位置(见图6.49b). 注意在$\bar{y}$的公式中如何消去$\delta$，所以可以处处设$\delta=1$，而对于$\bar{y}$得到同样的值.



a) 用于求质心的尺寸和变量



b) 质心不位于金属线上

图 6.49 例 3 中的半圆形金属线 ■

## 习题 6.7

在习题 1 ~ 14 中，求覆盖给定区域的具有常数密度$\delta$的薄板的质心.

**1.** 以抛物线 $y=x^2$ 和直线 $y=4$ 为界的区域.

**2.** 以抛物线 $y=25-x^2$ 和 $x$ 轴为界的区域.

**3.** 以抛物线 $y=x-x^2$ 和直线 $y=-x$ 为界的区域.

**4.** 由抛物线 $y=x^2-3$ 和 $y=-2x^2$ 包围的区域.

**5.** 以 $y$ 轴和曲线 $x=y-y^3(0\leqslant y\leqslant 1)$ 为界的区域.

**6.** 以抛物线 $x=y^2-y$ 和直线 $y=x$ 为界的区域.

**7.** 以 $x$ 轴和曲线 $y=\cos x(-\pi/2\leqslant x\leqslant \pi/2)$ 为界的区域.

**8.** 在 $x$ 轴和曲线 $y=\sec^2 x(-\pi/4\leqslant x\leqslant\pi/4)$ 之间的区域.

**T 9.** 在曲线 $y=1/x$ 和 $x$ 轴之间从 $x=1$ 到 $x=2$ 的区域. 给出到两位小数的质心坐标.

**10.** (a) 由圆 $x^2+y^2=9$ 从第一象限切割的区域.

(b) 以 $x$ 轴和半圆 $y=\sqrt{9-x^2}$ 为界的区域.

把(b)中的答案同(a)中的答案作比较.

**11.** 在第一象限和第四象限内由曲线 $y=1/(1+x^2)$ 和 $y=-1(1+x^2)$ 以及直线 $x=0$ 和 $x=1$ 包围的区域.

**12.** 以抛物线 $y=2x^2-4x$ 和 $y=2x-x^2$ 为界的区域.

**13.** 在曲线 $y=1/\sqrt{x}$ 和 $x$ 轴之间从 $x=1$ 到 $x=16$ 的区域.

**14.** 上方以曲线 $y=1/x^3$ 为界和下方以曲线 $y=-1/x^3$ 为界以及左边以直线 $x=1$ 为界和右边以直线 $x=a>1$ 为界的区域. 同时，求$\lim\limits_{a\to\infty}\bar{x}$.

**15.** 求一块薄板的质心，薄板覆盖 $x$ 轴和曲线 $y=2/x^2(1\leqslant x\leqslant 2)$ 之间的区域，假设它在点$(x,y)$的密度为 $\delta(x)=x^2$.

**16.** 求一块薄板的质心，薄板覆盖下方以抛物线$y=x^2$ 和上方以直线 $y=x$ 为界的区域，假设它在点$(x, y)$的密度为 $\delta(x)=12x$.

**17.** 求习题 13 中薄板的质心，假设密度函数是 $\delta(x)=4/\sqrt{x}$而不是常数.

**18.** 绕 $x$ 轴旋转曲线 $y=2/x$ 和 $x$ 轴之间从 $x=1$ 到 $x=4$ 的区域，产生一个旋转体.

(a) 求旋转体的体积.

(b) 求覆盖这个区域的薄板的质心，假设薄板在点$(x, y)$的密度为 $\delta(x)=\sqrt{x}$.

(c) 画出薄板的草图，并且在图中显示质心.

**19.** 绕 $y$ 轴旋转以曲线 $y=\pm 4/\sqrt{x}$ 以及直线 $x=1$ 和 $x=4$ 为界的区域，产生一个旋转体.

(a) 求旋转体的体积.

(b) 求覆盖这个区域的薄板的质心，假设薄板在点$(x,y)$的密度为 $\delta(x)=1/x$.

(c) 画出薄板的草图，并且在图中显示质心.

**20.** 绕 $x$ 轴旋转曲线 $y=1/(x\sqrt{x})$ 和 $x$ 轴之间从 $x=1/4$ 到 $x=4$ 的区域，产生一个旋转体.

(a) 求旋转体的体积.

(b) 求这个区域的形心.

**21. 三角形的形心位于三角形三条中线的交点**(见图 6.50a) 可以回忆一下，三角形内位于从每条边到对立顶点路线上三分之一处的点是三角形三条中心的交点. 通过证明三角形的形心也位于从每条边到对立顶点路线上三分之一处，证明形心位于三条中线的交点. 为此采取下列步骤：

(i) 把三角形的一条边置于 $x$ 轴上，如图 6.50b 所示. 用 $L$ 和 $\mathrm{d}y$ 表示 $\mathrm{d}m$.

(ii) 利用相似三角形，证明 $L=(b/h)(h-y)$. 在 $\mathrm{d}m$ 的公式中用这个表达式代换 $L$.

(iii) 证明 $\bar{y}=h/3$.

(iv) 把这个论证扩展到其余两条边.

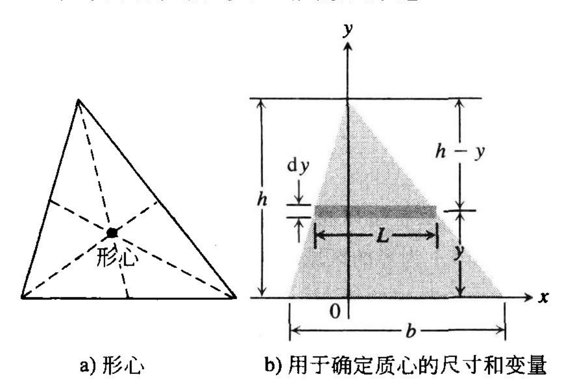



图 6.50 习题 21 中的三角形

在习题 22 ~ 26 中，利用习题 21 的结果求给定顶点的三角形的形心.

**22.** $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,3)$.

**23.** $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

**24.** $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,a)$; $a>0$.

**25.** $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,b)$; $a>0$, $b>0$.

**26.** $(0,0)$, $(a,0)$, $(a/2,b)$; $a>0$, $b>0$.

**27. 常数密度** 求一条密度为常数的金属线对 $x$ 轴的矩，金属线位于从 $x=0$ 到 $x=2$ 的曲线 $y=\sqrt{x}$ 上.

**28. 常数密度** 求一条密度为常数的金属线对 $x$ 轴的矩，金属线位于从 $x=0$ 到 $x=1$ 的曲线 $y=x^3$ 上.

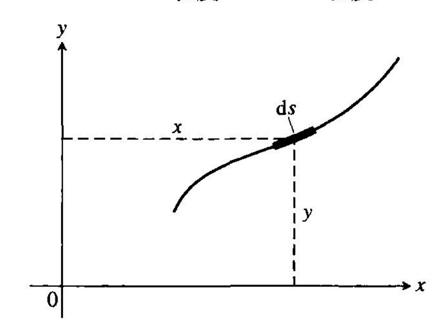
**29. 可变密度** 假设例 3 中金属线的密度为 $\delta=k\sin\theta$($k$ 是常数). 求它的质心.

**30. 可变密度** 假设例 3 中金属线的密度为 $\delta=1+k|\cos\theta|$($k$ 是常数). 求它的质心.

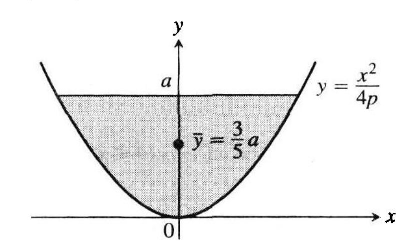
在习题 31 和 32 中，证实命题和公式.

**31.** 可微平面曲线的形心的坐标是

$$\bar{x}=\frac{\int x\,\mathrm{d}s}{\text{长度}},\quad \bar{y}=\frac{\int y\,\mathrm{d}s}{\text{长度}}$$




**32.** 在方程 $y=x^2/(4p)$ 中，无论取什么值 $p>0$，附图所示抛物线段的形心的 $y$ 坐标为 $\bar{y}=(3/5)a$.




## 第 6 章复习指导问题

**1.** 如何用切片方法定义和计算立体的体积？举一个例子.

**2.** 如何用切片方法推导计算立体体积的圆盘方法和垫圈方法？举出用这两种方法计算体积的一些例子.

**3.** 描述圆柱壳方法. 举一个例子.

**4.** 如何定义光滑的参数化的曲线 $x=f(t)$, $y=g(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$ 的长度？光滑性同长度有什么必然联系？关于用参数化法求曲线长度还需要知道什么？举出一些例子.

**5.** 如何求闭区间上光滑函数图形的长度？举一个例子. 对于不存在连续一阶导数的函数采用什么方法求长度？

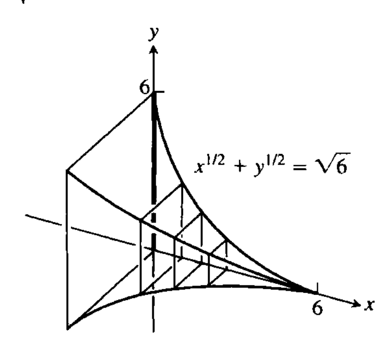
**6.** 对于绕 $x$ 轴旋转光滑函数 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 图形扫出的曲面，如何定义和计算面积？举一个例子.

7. 对于绕 $x$ 轴和 $y$ 轴旋转曲线 $x=f(t)$，$y=g(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$ 产生的曲面，在什么条件下可以计算面积？举出一些例子.
8. 如何求解可分离的一阶微分方程？
9. 什么是指数变化定律？如何从初值问题中推导它？这个定律有一些什么应用？
10. 如何定义和计算可变力沿 $x$ 轴方向作的功？如何计算从容器中抽出液体所需的功？举出一些例子.
11. 什么是质心？
12. 如何确定薄平板材料的质心？举一个例子.

## 第6章实习习题

在习题1～16中，求立体的体积。

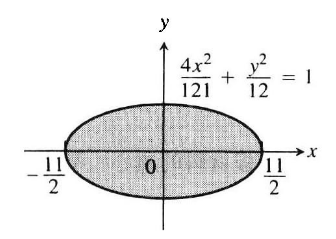
1. 立体位于在 $x=0$ 和 $x=1$ 同 $x$ 轴垂直的两个平面之间. 在这两个平面之间垂直于 $x$ 轴的截面是圆盘. 它们的直径从抛物线 $y=x^2$ 延伸到抛物线 $y=\sqrt{x}$.
2. 立体的底部是第一象限内位于直线 $y=x$ 和抛物线 $y=2\sqrt{x}$ 之间的区域. 立体垂直于 $x$ 轴的截面是等边三角形，它们的底边从直线延伸到抛物线.
3. 立体位于在 $x=\pi/4$ 和 $x=5\pi/4$ 垂直于 $x$ 轴的两个平面之间. 立体在这两个平面之间的截面是圆盘，它们的直径从曲线 $y=2\cos x$ 延伸到曲线 $y=2\sin x$.
4. 立体位于在 $x=0$ 和 $x=6$ 垂直于 $x$ 轴的两个平面之间，立体在这两个平面之间的截面是正方形，它们的底边从 $x$ 轴向上延伸到曲线 $x^{1/2}+y^{1/2}=\sqrt{6}$.




5. 立体位于在 $x=0$ 到 $x=4$ 垂直于 $x$ 轴的两个平面之间. 立体在这两个平面之间垂直于 $x$ 轴的截面是圆盘，它们的直径从曲线 $x^2=4y$ 延伸到曲线 $y^2=4x$.
6. 立体的底部是 $xy$ 平面内以抛物线 $y^2=4x$ 和直线 $x=1$ 为界的区域. 垂直于 $x$ 轴的每个截面是一条在 $xy$ 平面上的等边三角形.（所有这些三角形位于 $xy$ 平面的同一侧.）
7. 求绕下列轴旋转以 $x$ 轴和曲线 $y=3x^4$ 以及直线 $x=1$ 和 $x=-1$ 为界的区域产生的旋转体体积：
   (a) $x$ 轴；　(b) $y$ 轴；
   (c) 直线 $x=1$；　(d) 直线 $y=3$.
8. 求绕下列轴旋转以曲线 $y=4/x^3$ 以及直线 $x=1$ 和 $y=1/2$ 为界“三角形”区域产生的旋转体体积：
   (a) $x$ 轴；　(b) $y$ 轴；
   (c) 直线 $x=2$；　(d) 直线 $y=4$.
9. 求绕下列轴旋转左边以抛物线 $x^2=y+1$ 为界和右边以直线 $x=5$ 为界的区域产生的旋转体体积：
   (a) $x$ 轴；　(b) $y$ 轴；
   (c) 直线 $x=5$.
10. 求绕下列轴旋转以抛物线 $y^2=4x$ 和直线 $y=x$ 为界的区域产生的旋转体体积：
   (a) $x$ 轴；　(b) $y$ 轴；
   (c) 直线 $x=4$；　(d) 直线 $y=4$.
11. 求绕 $x$ 轴旋转第一象限内以 $x$ 轴和直线 $x=\pi/3$ 以及曲线 $y=\tan x$ 为界的“三角形”区域产生的旋转体体积.
12. 求绕直线 $y=2$ 旋转以曲线 $y=\sin x$ 以及直线 $x=0$，$x=\pi$ 和 $y=2$ 为界的区域产生的旋转体体积.
13. 求绕 $x$ 轴旋转以曲线 $x=e^{y^2}$ 以及直线 $y=0$，$x=0$ 和 $y=1$ 为界的区域产生的旋转体体积.
14. 求绕 $x$ 轴旋转以曲线 $y=2\tan x$ 以及直线 $y=0$，$x=-\pi/4$ 和 $x=\pi/4$ 为界的区域产生的旋转体体积.（区域位于第一象限和第三象限内，像一个偏斜的蝶形领结.）
15. **球体圆洞的体积**　经过半径为2英尺的球体的球心钻一个半径为 $\sqrt{3}$ 英尺的圆洞. 求从球体中去除材料的体积.
16. **橄榄球的体积**　橄榄球的剖面像下页附图所示的椭圆. 求橄榄球的体积，准确到最接近的立方英寸.

在习题17～23中，求曲线的长度.

17. $y=x^{1/2}-(1/3)x^{3/2}$，$1\leqslant x\leqslant 4$.
18. $x=y^{2/3}$，$1\leqslant y\leqslant 8$.




**19.** $y=x^2-(\ln x)/8$，$1\leqslant x\leqslant 2$.

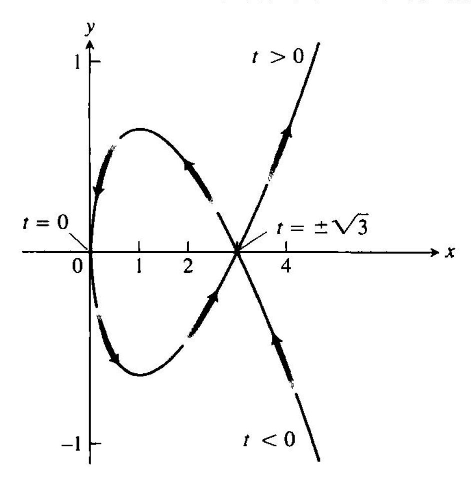
**20.** $z=(y^2/12)+(1/y)$，$1\leqslant y\leqslant 2$.

**21.** $x=5\cos t-\cos 5t$，$y=5\sin t-\sin 5t$，$0\leqslant t\leqslant \pi/2$.

**22.** $x=t^3-6t^2$，$y=t^3+6t^2$，$0\leqslant t\leqslant 1$.

**23.** $x=3\cos\theta$，$y=3\sin\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{2}$.

**24.** 求附图所示闭合环 $x=t^2$，$y=(t^3/3)-t$ 的长度. 这个环以 $t=-\sqrt{3}$ 为起点和 $t=\sqrt{3}$ 为终点.




在习题 25 ~ 30 中，求绕给定轴旋转曲线产生的曲面面积.

**25.** $y=\sqrt{2x+1}$，$0\leqslant x\leqslant 3$；$x$ 轴.

**26.** $y=x^3/3$，$0\leqslant x\leqslant 1$；$x$ 轴.

**27.** $x=\sqrt{4y-y^2}$，$1\leqslant y\leqslant 2$；$y$ 轴.

**28.** $x=\sqrt{y}$，$2\leqslant y\leqslant 6$；$y$ 轴.

**29.** $x=t^2/2$，$y=2t$，$0\leqslant t\leqslant\sqrt{5}$；$x$ 轴

**30.** $x=t^2+1/(2t)$，$y=4\sqrt{t}$，$1/\sqrt{2}\leqslant t\leqslant 1$；$y$ 轴.

在习题 31~34 中，求解微分方程.

**31.** $\frac{dy}{dx}=\sqrt{y}\cos^2\sqrt{y}$.

**32.** $y'=\frac{3y(x+1)^2}{y-1}$.

**33.** $yy'=\sec y^2\sec^2 x$.

**34.** $y\cos^2 x\,dy+\sin x\,dx=0$.

在习题 35~38 中，求解初值问题.

**35.** $\frac{dy}{dx}=e^{-x-y-2}$，$y(0)=-2$.

**36.** $\frac{dy}{dx}=\frac{y\ln y}{1+x^2}$，$y(0)=e^2$.

**37.** $x\,dy-(y+\sqrt{y})dx=0$，$y(1)=1$.

**38.** $y^{-2}\frac{dx}{dy}=\frac{e^x}{e^{2x}+1}$，$y(0)=1$.

**39.** 在一件生物炭标本中，原有碳 14 含量的 90% 已经衰变，这件标本存在了多少年？

**40. 冷却馅饼** 用深盘烤制的苹果馅饼从烤箱取出时，内部温度为 220℉，将其置于温度 40℉ 的通风走廊冷却. 馅饼内部温度在 15 分钟后下降到 180℉. 馅饼从那里冷却到 70℉ 需要多久时间？

**41. 提升设备** 一位女攀岩运动员向上拖运近 100 N(约 22.5 lb)的设备，设备吊在她下方 40 m 的绳子上，绳子重 0.8 N/m. 运送这些设备需要作多少功？(提示：分别对绳子和设备求解，然后对结果求和.)

**42. 漏水的运水车** 你驾驶一辆 800 加仑的运水车从华盛顿山脚下开到山顶，到达后发现只剩下半车水. 启程时水车灌满了水，以隐定的速度向山上行驶，并在 50 分钟内达到 4750 英尺的高度变化. 假定运水车漏水速率不变. 把水运到山顶作了多少功？不计把你本人和运水车送到山上作的功. 水的重量为 8 磅/(美制)加仑.

**43. 拉长弹簧** 如果要使一条弹簧保持比不受力的自然长度长 1 英尺需要 20 磅力，把弹簧拉长到这个长度需要作多少功？再拉长一英尺需要作多少功？

**44. 车库门的弹簧** 假设 200 N 力使车库门上的弹簧伸长到超出不受力的自然长度 0.8 m. 300 N 力将使弹簧伸长多少？使弹簧伸长到比自然长度长这样多需要作多少功？

**45. 从贮水器抽水** 一个贮水器的形状像顶朝下的正圆锥体，顶部跨越 20 英尺，深 8 英尺，在其中灌满水. 从贮水器顶部上方 6 英尺的高度抽出水需要作多少功？

**46. 从贮水器抽水(续习题 45)** 在贮水器中灌满到 5 英尺深的水，并且在顶部上方同样高度抽水. 抽出水需要作多少功？

**47. 从圆锥体容器轴液体** 一个顶朝下的正圆锥体容器的顶部半径为 5 ft，高 10 ft，在其中灌满重量-密度为 60 lb/ft³ 的液体. 从容器上方 2 ft 高度的一点抽出液体需要作多少功？如果抽液体的泵用额定功率为 275 ft-lb/s(1/2 hp)的电动机驱动，抽空容器需要多长时间？

**48. 从圆柱体贮油器抽油** 贮油器为正圆柱体，长 20 ft，在水平轴上的直径为 8 ft. 如果贮油器的一半满灌满重 57 $lb/ft^3$ 的橄榄油，求通过从贮油器底部通到顶部上方 6 ft 一个出口的管子抽空油作的功.

**49.** 一块薄平板覆盖由抛物线 $y=2x^2$ 和 $y=3-x^2$ 包围的区域，求它的形心.

**50.** 一块薄平板覆盖由 $x$ 轴和直线 $x=2$，$x=-2$ 以及抛物线 $y=x^2$ 包围的区域，求它的形心.

**51.** 一块薄平板覆盖第一象限内以 $y$ 轴和抛物线 $y=x^2/4$ 以及直线 $y=4$ 为界的"三角形"区域，求它的形心.

**52.** 一块薄平板覆盖由抛物线 $y^2=x$ 和直线 $x=2y$ 包围的区域，求它的形心.

**53.** 一块薄平板覆盖由抛物线 $y^2=x$ 和直线 $x=2y$ 包围的区域，假设板的密度函数为 $\delta(y)=1+y$，求它的质心.（利用水平细条.）

**54.** **(a)** 一块具有常数密度的薄平板覆盖曲线 $y=3/x^{3/2}$ 和 $x$ 轴之间从 $x=1$ 到 $x=9$ 的区域，求它的质心.

**(b)** 如果(a)中板的密度函数是 $\delta(x)=x$ 而不是常数，求它的质心.（利用垂直细条.）

## 第 6 章补充和提高习题

**1.** 假定旋转体是绕 $x$ 轴旋转以正连续函数 $y=f(x)$ 的图形和 $x$ 轴以及固定直线 $x=a$ 和可变直线 $x=b(b>a)$ 为界的区域产生的. 对于任何 $b$，它的体积等于 $b^2-ab$. 求 $f(x)$.

**2.** 假定旋转体是绕 $x$ 轴旋转以正连续函数 $y=f(x)$ 的图形和 $x$ 轴以及直线 $x=0$ 和 $x=a$ 为界的区域产生的. 对于任何 $a>0$，它的体积等于 $a^2+a$. 求 $f(x)$.

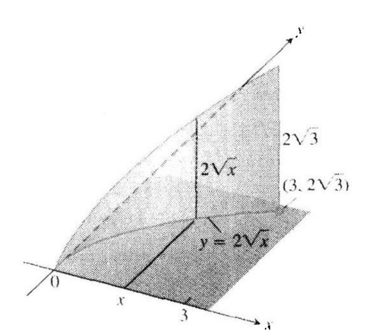
**3.** 假定增函数 $y=f(x)$ 对于 $x\geqslant0$ 是光滑的. 并且 $f(0)=a$. 令 $s(x)$ 表示 $f$ 的图形从点 $(0, a)$ 到 $(x, f(x))$ 的长度，$x>0$. 如果对于某个常数 $C$ 有 $s(x)=Cx$，求 $f(x)$. $C$ 允许取什么值?

**4.** **(a)** 证明：对于 $0<\alpha\leqslant\pi/2$，

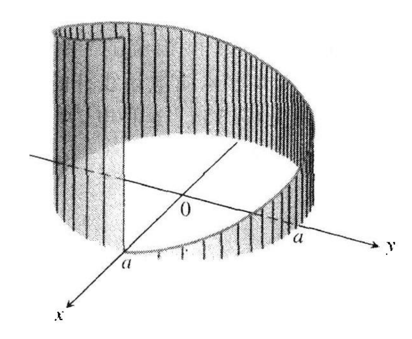
$$\int_0^{\alpha}\sqrt{1+\cos^2\theta}\,d\theta > \sqrt{\alpha^2+\sin^2\alpha}$$

**(b)** 推广(a)中的结果.

**5.** 在曲线 $y=2\sqrt{x}$ 的各点上，作长度 $h=y$ 并且同 $xy$ 平面垂直的线段(参见附图). 求曲线上由点 $(0, 0)$ 到 $(3, 2\sqrt{3})$ 的这些垂直线段构成的曲面的面积.




**6.** 在半径为 $a$ 的圆上各点，作垂直于圆的平面的线段，在每点 $P$ 的垂直线段长度为 $ks$，其中 $s$ 是依反时针方向从点 $(a, 0)$ 到 $P$ 测出的圆弧长度，$k$ 是一个正常数，如附图所示. 求从点 $(a, 0)$ 开始围绕圆延伸一周由沿圆弧的垂直线段构成的曲面面积.




**7. 通过细胞膜的物质传输** 在某些条件下，溶解物质通过细胞膜传输的结果由方程

$$\frac{dy}{dt}=k\frac{A}{V}(c-y)$$

描述. 在这个方程中，$y$ 是细胞内部物质的浓度，$dy/dt$ 是 $y$ 随时间的变化率. 字母 $k$，$A$，$V$ 和 $c$ 代表常数，其中 $k$ 是*渗透系数*(一种细胞膜特性)，$A$ 是细胞膜的表面积，$V$ 是细胞的体积，$c$ 是细胞外部物质的浓度. 这个方程表明，细胞内部物质浓度的变化率同它与细胞外部物质浓度之差成正比.

**(a)** 从方程求解 $y(t)$，用 $y_0$ 表示 $y(0)$.

**(b)** 求稳定状态下的细胞内部物质的浓度 $\lim_{t\to\infty}y(t)$.

(根据 *Some Mathematical Models in Biology*(《生物学中的某些数学模型》))，由 R. M. Thrall，J. A. Mortimer，K. R. Rebman 和 R. F. Baum 编辑，1967 年 12 月修订版，PB-202 364，101-103 页；由美国商务部 N. T. I. S. 发行.)

8. **氧气流混合** 氧气通过一条软管流入充满空气的 1 升烧瓶，混合的氧气和空气(被认为经过充分搅动后)从另外一条软管排出. 假定空气中含有 21% 氧气，当 5 升氧气通过输入软管后，烧瓶含有氧气的百分比是多少?

9. 质量为 $m$ 的质点在大小为 $F(t)=t^2$ 的可变力的作用下，在时间 $t=0$ 从静止状态开始，沿 $x$ 轴以恒定加速度 $a$ 由 $x=0$ 移动到 $x=h$. 求力做的功.

10. **功与动能** 假定把重 1.6 盎司的高尔夫球置于力常数 $k=2$ lb/in 的垂直弹簧上. 把弹簧压缩 6 in 后松开. 高尔夫球这时上弹大约多高(从弹簧的静止位置算起)?

11. 求下方以 $x$ 轴为界和上方以曲线 $y=1-x^n$($n$ 是偶正整数)为界的区域的形心. 这个形心当 $n\to\infty$ 时的极限位置是什么?

12. 如果你用挂在卡车后的二轮拖车拖运一根电话线杆，打算让车轮处在电话线杆质心之后约 3 英尺的位置，以便提供相应的“舌簧”重量. NYNEX 的 1.40 ft 型木质电话线杆的顶端周长 27 in，底端周长 43.5 in. 这种电话线杆的质心距离顶端的长度是多少?

13. 假定面积为 $A$ 和具有常数密度 $\delta$ 的薄金属板占据 $xy$ 平面内的区域 $R$，并且令 $My$ 是金属板对 $y$ 轴的矩，证明:
    (a) 如果金属板位于直线 $x=b$ 的右侧，板对直线的矩是 $M_y-b\delta A$;
    (b) 如果金属板位于直线 $x=b$ 的左侧，板对直线的矩是 $b\delta A-M_y$.

14. 一块薄板覆盖以曲线 $y^2=4ax$ 和直线 $x=a$($a$ 是正常数)为界的区域，求薄板在下列条件下的质心:
    (a) 薄板在点$(x,y)$的密度同 $x$ 成正比;
    (b) 薄板在点$(x, y)$的密度同 $|y|$ 成正比.

15. (a) 求第一象限内以两个同心圆和两条坐标轴为界的区域的形心，假设这两个圆的半径为 $a$ 和 $b$，$0<a<b$，它们的圆心在原点.
    (b) 求上述区域的形心的坐标当 $a$ 趋近 $b$ 时的极限，并且讨论结果的含义.

16. 从边长为 1 ft 的正方形切去一个三角形的角. 切去三角形角后的面积为 36 $\text{in}^2$. 如果剩余区域的形心距离原正方形的一边是 7 in，这个形心同其余边的距离是多少?

# 第7章　积分方法

**概述**　微积分基本定理告诉我们，在求出被积函数的反导数后如何计算定积分. 表4.2显示迄今我们讨论过的函数的反导数形式，而代换方法有助于利用表中的反导数对更复杂的包含基本函数的函数求反导数. 在本章我们要讨论对更多函数求反导数(或者不定积分)的一些其他重要方法.

## 7.1　分部积分法

分部积分法是用于简化形式为

$$\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

的积分的方法. 在$f$能够重复微分和$g$能够重复积分而无困难的情况下，这种方法是很有用的. 积分

$$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

就是这样一种积分，因为$f(x)=x$可以微分两次变成零，而$g(x)=\mathrm{e}^x$可以重复积分而无困难. 分部积分法也适用于像

$$\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$$

这样的积分，其中被积函数的两部分在重复求微分或者求积分后再次出现.

### 7.1.1　积分型积法则

如果$f$和$g$是$x$的可微函数，积法则表明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)g(x)]=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

用不定积分表示，这个等式变成

$$\int\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)g(x)]\mathrm{d}x=\int[f'(x)g(x)+f(x)g'(x)]\mathrm{d}x$$

或者

$$\int\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)g(x)]\mathrm{d}x=\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x+\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

重新整理上面等式中的项，得到

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)g(x)]\mathrm{d}x-\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

由此导出**分部积分法**公式

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

如果把这个公式写成微分形式，有时更容易记忆. 令$u=f(x)$和$v=g(x)$，那么$\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}v=g'(x)\mathrm{d}x$. 利用代换法则，分部积分法变成

**分部积分公式**

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{2}$$

这个公式在表示一个积分 $\int u\,dv$ 时利用另外一个积分 $\int v\,du$. 选择适当的 $u$ 和 $v$，第二个积分可能比第一个积分更容易计算. 在使用这个公式的过程中，可以对 $u$ 和 $dv$ 作不同的选择. 下面的例子说明选择的技巧.

**例 1** 求积分

$$\int x\cos x\,dx$$

**解** 使用公式 $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ 时选择

$$u = x, \qquad dv = \cos x\,dx$$
$$du = dx, \quad v = \sin x(\cos x \text{ 的最简单反导数})$$

于是得到

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C \qquad \blacksquare$$

在例 1 中，对于 $u$ 和 $dv$ 可以采用 4 种选择：

(1) 令 $u = 1$ 和 $dv = x\cos x\,dx$.

(2) 令 $u = x$ 和 $dv = \cos x\,dx$.

(3) 令 $u = x\cos x$ 和 $dv = dx$.

(4) 令 $u = \cos x$ 和 $dv = x\,dx$.

第(2)种选择是我们在例 1 中使用的. 其他三种选择导致我们不知道如何求积分的积分. 例如，第(3)种选择得到积分

$$\int (x\cos x - x^2\sin x)\,dx$$

分部积分法的目标在于从一个我们不清楚如何计算的积分 $\int u\,dv$，到达能够计算的一个积分 $\int v\,du$. 通常，首先在包括 $dx$ 在内的被积函数中选择容易求积分的尽可能多的部分作为 $dv$；把剩余部分作为 $u$. 请记住，分部积分法并非总是适用的.

**例 2** 求积分

$$\int \ln x\,dx$$

**解** 由于可以把 $\int \ln x\,dx$ 写成 $\int \ln x \cdot 1\,dx$，使用公式 $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ 时选择：

$$u = \ln x(\text{求微分时简化}), \quad du = \frac{1}{x}dx$$
$$dv = dx(\text{容易积分}), \qquad v = x(\text{最简单的反导数})$$

于是

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C \qquad \blacksquare$$

有时，我们必须不止一次地使用分部积分法.

**例 3** 求积分

$$\int x^2e^x\,dx$$

**解** 选用 $u = x^2$，$dv = e^x dx$，$du = 2x\,dx$ 和 $v = e^x$，得到

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx$$

新的积分不如原有积分复杂，因为 $x$ 项的指数减少了 1. 为了计算右边的积分，再次使用分部积分法，选用 $u=x$，$dv=e^x dx$. 于是 $du=dx$，$v=e^x$，并且得到

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C_1$$

因此

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C \quad (C = 2C_1)$$

■

例 3 的求解方法适用于任何积分 $\int x^n e^x dx$，其中 $n$ 是正整数，因为重复对 $x^n$ 微分将最终导致零，而积分 $e^x$ 是很容易的.

像下面例子中的积分出现在电工技术中. 它们的计算需要用两次分部积分法，然后再求解未知的积分.

**例 4** 求积分

$$\int e^x \cos x\, dx$$

**解** 令 $u=e^x$，$dv=\cos x\, dx$. 于是 $du=e^x dx$，$v=\sin x$，并且

$$\int e^x \cos x\, d\, x = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, d\, x$$

上式中第二个积分同第一个积分相似，不过以 $\sin x$ 取代 $\cos x$. 为了计算它，我们用分部积分法，选用

$$u = e^x, \quad dv = \sin x\, dx, \quad v = -\cos x, \quad du = e^x dx$$

于是

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x - \int (-\cos x)(e^x dx)\right)$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx$$

这时未知的积分出现在等式的两端. 对两端加这个积分并且加积分常数，得到

$$2\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x + e^x \cos x + C_1$$

用 2 相除，并且重新命名积分常数，给出

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} + C$$

■

**例 5** 对于 $\cos^n x$ 的积分

$$\int \cos^n x\, dx$$

推导一个用 $\cos x$ 更低幂的积分表示的公式.

**解** 可以把 $\cos^n x$ 看成 $\cos^{n-1} x \cdot \cos x$. 然后令

$$u = \cos^{n-1} x \quad 和 \quad dv = \cos x\, dx$$

所以有

$$du = (n-1)\cos^{n-2} x\,(-\sin x\, dx) \quad 和 \quad v = \sin x$$

因此

$$\int \cos^n x\, dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \sin^2 x \cos^{n-2} x\, dx$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int (1 - \cos^2 x)\cos^{n-2} x\, dx$$

$$= \cos^{n-1}x\sin x + (n-1)\int \cos^{n-2}x\,dx - (n-1)\int \cos^n x\,dx$$

如果在上面的等式两端加

$$(n-1)\int \cos^n x\,dx$$

得到

$$n\int \cos^n x\,dx = \cos^{n-1}x\sin x + (n-1)\int \cos^{n-2}x\,dx$$

再遍除以 $n$，便得到最后结果：

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1}x\sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx$$

这个公式使我们把 $\cos x$ 的指数减小 2，因而是一个非常有用的公式. 当 $n$ 为正整数时，可以重复应用公式，直到剩余的积分成为

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C \quad 或 \quad \int \cos^0 x\,dx = \int dx = x + C$$ ■

例如，例 5 中的结果告诉我们，

$$\int \cos^3 x\,dx = \frac{\cos^2 x\sin x}{3} + \frac{2}{3}\int \cos x\,dx = \frac{1}{3}\cos^2 x\sin x + \frac{2}{3}\sin x + C$$

### 7.1.2 分部求定积分

为了分部求定积分，可以把公式(1)中的分部积分法公式同微积分基本定理第 2 部分结合起来. 假定 $f'$ 和 $g'$ 在闭区间 $[a, b]$ 上是连续的，基本定理第 2 部分给出

**定积分的分部积分法公式**

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx \tag{3}$$

在应用公式(3)时，通常采用公式(2)中的记号 $u$ 和 $v$，因为这样更易于记忆. 下面举一个例子.

**例 6** 求以曲线 $y = xe^{-x}$ 和 $x$ 轴为界的区域从 $x=0$ 到 $x=4$ 的面积.

**解** 这个区域是图 7.1 中的阴影部分. 它的面积为

$$\int_0^4 xe^{-x}dx$$

令 $u=x$，$dv=e^{-x}dx$ 而有 $du=dx$，$v=-e^{-x}$. 于是，

$$\begin{aligned}\int_0^4 x\,e^{-x}\,dx &= -xe^{-x}\Big]_0^4 - \int_0^4(-e^{-x})\,dx \\ &= [-4e^{-4}-(0)] + \int_0^4 e^{-x}dx \\ &= -4e^{-4} - e^{-x}\Big]_0^4 \\ &= -4e^{-4} - e^{-4} - (-e^0) = 1 - 5e^{-4} \\ &\approx 0.91\end{aligned}$$ ■

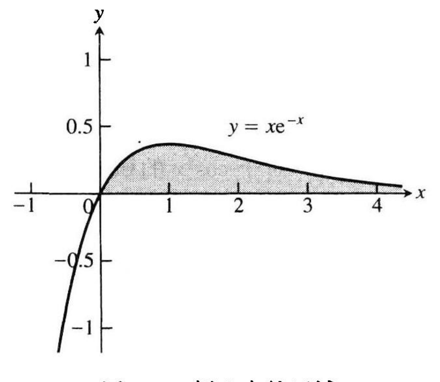



图 7.1 例 6 中的区域

### 习题 7.1

在习题 1 ~ 24 中，求积分.

**1.** $\int x\sin\frac{x}{2}\,dx$.

**2.** $\int \theta\cos\pi\theta\,d\theta$.

**3.** $\int t^2\cos t\,dt$.

**4.** $\int x^2\sin x\,dx$.

**5.** $\int_1^2 x\ln x\,dx$.

**6.** $\int_1^e x^3\ln x\,dx$.

**7.** $\int \tan^{-1}y\,dy$.

**8.** $\int \sin^{-1}y\,dy$.

9. $\int x\sec^2 x\,dx$.

10. $\int 4x\sec^2 2x\,dx$.

11. $\int x^3 e^x dx$.

12. $\int p^4 e^{-p} dp$.

13. $\int (x^2-5x)e^x dx$.

14. $\int (r^2+r+1)e^r dr$.

15. $\int x^5 e^x dx$.

16. $\int t^2 e^{4t} dt$.

17. $\int_0^{\pi/2}\theta^2\sin 2\theta\,d\theta$.

18. $\int_0^{\pi/2}x^3\cos 2x\,dx$.

19. $\int_{2/\sqrt{3}}^{2} t\sec^{-1}t\,dt$.

20. $\int_0^{1/\sqrt{2}}2x\sin^{-1}(x^2)\,dx$.

21. $\int e^\theta\sin\theta\,d\theta$.

22. $\int e^{-y}\cos y\,dy$.

23. $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$.

24. $\int e^{-2x}\sin 2x\,dx$.

在习题 25 ~ 30 中，在分部积分之前先利用代换求积分.

25. $\int e^{\sqrt{3s+9}}\,ds$.

26. $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$.

27. $\int_0^{\pi/3}x\tan^2 x\,dx$.

28. $\int \ln(x+x^2)\,dx$.

29. $\int \sin(\ln x)\,dx$.

30. $\int z(\ln z)^2 dz$.

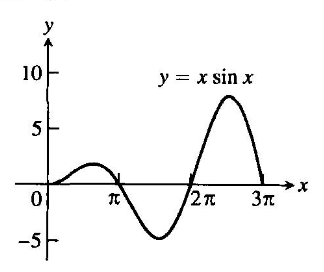
31. **求面积** 对于区间

(a) $0\leqslant x\leqslant\pi$， (b) $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$，

(c) $2\pi\leqslant x\leqslant 3\pi$，

求由曲线 $y=x\sin x$ 和 $x$ 轴包围区域(参见附图)的面积.

(d) 你从区域面积中看出什么模式？当 $n$ 为任意非负整数时，对于区间 $n\pi\leqslant x\leqslant(n+1)\pi$，在曲线和 $x$ 轴之间的面积是什么？提出答案的理由.




32. **求面积** 对于区间

(a) $\pi/2\leqslant x\leqslant 3\pi/2$， (b) $3\pi/2\leqslant x\leqslant 5\pi/2$，

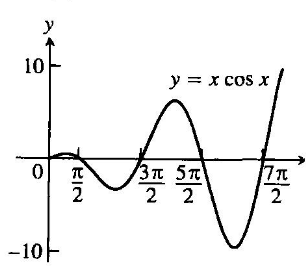
(c) $5\pi/2\leqslant x\leqslant 7\pi/2$，

求由曲线 $y=x\cos x$ 和 $x$ 轴包围区域(参见附图)的面积.

(d) 你从区域面积中看出什么模式？当 $n$ 为任意正整数时，对于区间

$$\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi\leqslant x\leqslant\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi$$

在曲线和 $x$ 轴之间的面积是什么？提出答案的理由.




33. **求体积** 绕直线 $x=\ln 2$ 旋转第一象限内以坐标轴以及曲线 $y=e^x$ 和直线 $x=\ln 2$ 为界的区域，求产生的旋转体体积.

34. **求体积** 绕下述直线旋转第一象限内以坐标轴以及曲线 $y=e^{-x}$ 和直线 $x=1$ 为界的区域，求产生的旋转体体积：

(a) $x$ 轴； (b) 直线 $x=1$.

35. **求体积** 绕下述直线旋转第一象限内以坐标轴和曲线 $y=\cos x$，$0\leqslant x\leqslant\pi/2$ 为界的区域，求产生的旋转体体积：

(a) $y$ 轴； (b) 直线 $x=\pi/2$.

36. **求体积** 绕下述直线旋转以 $x$ 轴和曲线 $y=x\sin x$，$0\leqslant x\leqslant\pi$ 为界的区域，求产生的旋转体体积：

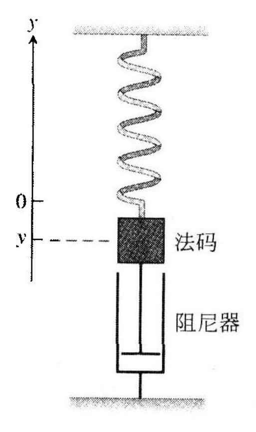
(a) $y$ 轴； (b) 直线 $x=\pi$.

(参见习题 31 的图形。)

37. **求平均值** 在附图中由阻尼器代表的延缓力使加法码弹簧的运动速度放慢，所以法码在时间 $t$ 的位置为

$$y=2e^{-t}\cos t,t\geqslant 0$$

求 $y$ 在区间 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 上的平均值.




38. **求平均值** 在同习题 37 相似的法码-弹簧-阻尼器系统中，法码在时间 $t$ 的位置为

$$y=4e^{-t}(\sin t-\cos t),\quad t\geqslant 0$$

求 $y$ 在区间 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 上的平均值.

**简化公式** 在习题 39 ~ 42 中，利用分部积分法证实简化公式.

**39.** $\int x^n\cos x\,dx = x^n\sin x - n\int x^{n-1}\sin x\,dx.$

**40.** $\int x^n\sin x\,dx = -x^n\cos x + n\int x^{n-1}\cos x\,dx.$

**41.** $\int x^n e^{ax}dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx, a\neq 0.$

**42.** $\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}dx.$

**求反函数的积分** 分部积分法导出求反函数积分的法则，通常给出令人满意的结果：

$$\int f^{-1}(x)dx = \int y f'(y)dy \quad (y=f^{-1}(x), x=f(x),\quad dx = f'(y)dy)$$
$$= yf(y) - \int f(y)dy \quad (\text{分部积分法,用 } u=y,\quad dv=f'(y)dy)$$
$$= xf^{-1}(x) - \int f(y)dy$$

思想是取出积分的最复杂部分，在这里是 $f^{-1}(x)$，并且首先简化它. 例如，对于 $\ln x$ 的积分，我们得到

$$\int \ln x\,dx = \int ye^y dy \quad (y=\ln x, x=e^y, dx=e^y dy)$$
$$= ye^y - e^y + C = x\ln x - x + C$$

对于 $\cos^{-1}x$ 的积分，得到

$$\int \cos^{-1}x\,dx = x\cos^{-1}x - \int \cos y\,dy \quad (y=\cos^{-1}x)$$
$$= x\cos^{-1}x - \sin y + C$$
$$= x\cos^{-1}x - \sin(\cos^{-1}x) + C$$

在习题 43 ~ 46 中，利用公式

$$\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - \int f(y)dy \quad (y=f^{-1}(x)) \tag{4}$$

求积分. 用 $x$ 表示答案.

**43.** $\int \sin^{-1}x\,dx.$ **44.** $\int \tan^{-1}x\,dx.$

**45.** $\int \sec^{-1}x\,dx.$ **46.** $\int \log_2 x\,dx.$

求 $f^{-1}(x)$ 的积分(自然是在 $f^{-1}$ 为可积时)的另外一种方法是利用分部积分法，取 $u=f^{-1}(x)$ 和 $dv=dx$，把 $f^{-1}$ 的积分改写成

$$\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - \int x\left(\frac{d}{dx}f^{-1}(x)\right)dx$$

习题 47 和 48 对比利用公式(4)和(5)得到的结果.

**47.** 公式(4)和(5)对于 $\cos^{-1}x$ 的积分给出不同的公式：

(a) $\int \cos^{-1}x\,dx = x\cos^{-1}x - \sin(\cos^{-1}x) + C$ (公式(4))

(b) $\int \cos^{-1}x\,dx = x\cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + C$ (公式(5))

两种积分法都可能是正确的吗? 给出解释.

**48.** 公式(4)和(5)对于 $\tan^{-1}x$ 的积分给出不同的公式：

(a) $\int \tan^{-1}x\,dx = x\tan^{-1}x - \ln\sec(\tan^{-1}x) + C$ (公式(4))

(b) $\int \tan^{-1}x\,dx = x\tan^{-1}x - \ln\sqrt{1+x^2} + C$ (公式(5))

两种积分法都可能是正确的吗? 给出解释.

在习题 49 和 50 中用两种方法求积分：

(a)用公式(4)； (b)用公式(5).

在每一种情况，通过求答案对 $x$ 的导数检验你的结果.

**49.** $\int \sinh^{-1}x\,dx.$ **50.** $\int \tanh^{-1}x\,dx.$

## 7.2 三角积分

三角积分涉及 6 个基本三角函数的代数组合. 在原则上，我们总是可以用正弦函数和余弦函数表示这样的积分，但是通常用其他函数更为简单，如在积分

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$

中. 总的思想是利用三角恒等式把所求的积分变换成更容易计算的积分.

### 7.2.1 正弦函数和余弦函数乘方之积的积分

我们从积分形式

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx$$

开始，其中 $m$ 和 $n$ 是非负整数(正数或者零). 可以把相应的变换分成三种情况.

**第 1 种情况**　在$\int \sin^m x\cos^n x\,dx$中如果$m$是奇数,我们把$m$写成$2k+1$,并且利用恒等式$\sin^2 x=1-\cos^2 x$,得到

$$\sin^m x=\sin^{2k+1}x=(\sin^2 x)^k\sin x=(1-\cos^2 x)^k\sin x \tag{1}$$

然后在积分中结合单独的$\sin x$与$dx$,并且置$\sin x\,dx=-d(\cos x)$.

**第 2 种情况**　在$\int \sin^m x\cos^n x\,dx$中如果$m$是偶数而$n$为奇数,那么把$n$写成$2k+1$,并且利用恒等式$\cos^2 x=1-\sin^2 x$,得到

$$\cos^n x=\cos^{2k+1}x=(\cos^2 x)^k\cos x=(1-\sin^2 x)^k\cos x$$

然后结合单独的$\cos x$与$dx$,并且置$\cos x\,dx=d(\sin x)$.

**第 3 种情况**　在$\int \sin^m x\cos^n x\,dx$中如果$m$和$n$都是偶数,用代换

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2} \tag{2}$$

把被积函数转化为$\cos 2x$的较低次乘方.

下面分别用例子说明每一种情况.

**例 1**　求积分

$$\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$$

**解**

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx&=\int \sin^2 x\cos^2 x\sin x\,dx\quad(m\text{ 是奇数})\\&=\int(1-\cos^2 x)\cos^2 x(-d(\cos x))\\&=\int(1-u^2)(u^2)(-du)\quad(u=\cos x)\\&=\int(u^4-u^2)du=\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}+C\\&=\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}+C\end{aligned}$$

■

**例 2**　求积分

$$\int \cos^5 x\,dx$$

**解**

$$\begin{aligned}\int \cos^5 x\,dx&=\int \cos^4 x\cos x\,dx=\int(1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)\quad(m=0,n=5)\\&=\int(1-u^2)^2du\quad(u=\sin x)\\&=\int(1-2u^2+u^4)du\\&=u-\frac{2}{3}u^3+\frac{1}{5}u^5+C=\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C\end{aligned}$$

■

**例 3**　求积分

$$\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$$

**解**

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx&=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2dx\quad(m\text{ 和 }n\text{ 都是偶数})\\&=\frac{1}{8}\int(1-\cos 2x)(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x - \int (\cos^2 2x + \cos^3 2x)\,dx\right]$$

对于包含 $\cos^2 2x$ 的项使用

$$\int \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 4x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) \quad \text{（在求出最后结果之前省略积分常数）}$$

对于 $\cos^3 2x$ 的项有

$$\int \cos^3 2x\,dx = \int (1 - \sin^2 2x)\cos 2x\,dx \quad (u = \sin 2x,\ du = 2\cos 2x\,dx)$$

$$= \frac{1}{2}\int (1 - u^2)\,du = \frac{1}{2}\left(\sin 2x - \frac{1}{3}\sin^3 2x\right) \quad \text{（再次省略积分常数）}$$

合并各项并且化简，得到

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx = \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{3}\sin^3 2x\right) + C$$

■

### 7.2.2 消去平方根

在下面的例子中，利用恒等式 $\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)/2$ 消去平方根.

**例 4** 求积分

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \cos 4x}\,dx$$

**解** 为了消去平方根，利用恒等式

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad \text{或} \quad 1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$$

取 $\theta = 2x$，这个恒等式变成

$$1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x$$

因此，

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \cos 4x}\,dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{2\cos^2 2x}\,dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{2}\sqrt{\cos^2 2x}\,dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} |\cos 2x|\,dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2x\,dx \quad \text{（在}[0,\pi/4]\text{上 } \cos 2x \geqslant 0\text{）}$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}[1 - 0] = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

■

### 7.2.3 tan *x* 和 sec *x* 乘方的积分

我们知道如何求正切函数和正割函数以及它们的平方的积分. 为了求更高次方的积分，利用恒等式 $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ 和 $\sec^2 x = \tan x + 1$，并且在需要时用分部积分把较高次方化为较低次方.

**例 5** 求积分

$$\int \tan^4 x\,dx$$

**解**

$$\int \tan^4 x\,dx = \int \tan^2 x \cdot \tan^2 x\,dx = \int \tan^2 x \cdot (\sec^2 x - 1)\,dx$$

$$= \int \tan^2 x \sec^2 x\,dx - \int \tan^2 x\,dx$$

$$= \int \tan^2 x \sec^2 x\,dx - \int (\sec^2 x - 1)\,dx$$

$$= \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int \sec^2 x \, dx + \int dx$$

在第一个积分中，令

$$u = \tan x, \quad du = \sec^2 x \, dx$$

并且有

$$\int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 + C_1$$

其余两个积分为标准形式，所以

$$\int \tan^4 x \, dx = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C$$ ■

**例 6** 求积分

$$\int \sec^3 x \, dx$$

**解** 用分部积分，取

$$u = \sec x, \quad dv = \sec^2 x \, dx, \quad v = \tan x, \quad du = \sec x \tan x \, dx$$

于是

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x \, dx &= \sec x \tan x - \int (\tan x)(\sec x \tan x \, dx) \\ &= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x \, dx \quad (\tan^2 x = \sec^2 x - 1) \\ &= \sec x \tan x + \int \sec x \, dx - \int \sec^3 x \, dx\end{aligned}$$

合并两个正割函数立方的积分，给出

$$2\int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x + \int \sec x \, dx$$

和

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C$$ ■

### 7.2.4 正弦函数和余弦函数之积的积分

积分

$$\int \sin mx \sin nx \, dx, \quad \int \sin mx \cos nx \, dx \quad 和 \quad \int \cos mx \cos nx \, dx$$

出现在三角函数应用于数学和自然科学问题的许多地方. 可以用分部积分法求这几个积分，但是在每种场合需要两个这样的积分. 更简单的方法是利用恒等式

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos (m - n)x - \cos (m + n)x] \tag{3}$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin (m - n)x + \sin (m + n)x] \tag{4}$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos (m - n)x + \cos (m + n)x] \tag{5}$$

这三个恒等式来自正弦函数和余弦函数的和角公式(见 1.3 节). 它们给出的函数很容易求反导数.

**例 7** 求积分

$$\int \sin 3x \cos 5x \, dx$$

**解** 从公式(4)用 $m = 3$ 和 $n = 5$，得到

$$\int \sin 3x \cos 5x \, dx = \frac{1}{2}\int [\sin (-2x) + \sin 8x] dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (\sin 8x - \sin 2x)\,dx = -\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4} + C$$ ■

## 习题 7.2

在习题 1 ~ 14 中，求积分.

1. $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x\, dx$.
2. $\int_0^{\pi} \sin^5 \frac{x}{2}\, dx$.
3. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x\, dx$.
4. $\int_0^{\pi/6} 3\cos^5 3x\, dx$.
5. $\int_0^{\pi/2} \sin^7 y\, dy$.
6. $\int_0^{\pi/2} 7\cos^7 t\, dt$.
7. $\int_0^{\pi} 8\sin^4 x\, dx$.
8. $\int_0^{1} 8\cos^4 2\pi x\, dx$.
9. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 16\sin^2 x\cos^2 x\, dx$.
10. $\int_0^{\pi} 8\sin^4 y\cos^2 y\, dy$.
11. $\int_0^{\pi/2} 35\sin^4 x\cos^3 x\, dx$.
12. $\int_0^{\pi} \sin 2x\cos^2 2x\, dx$.
13. $\int_0^{\pi/4} 8\cos^3 2\theta\sin 2\theta\, d\theta$.
14. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta\cos^3 2\theta\, d\theta$.

在习题 15 ~ 22 中，求积分.

15. $\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\, dx$.
16. $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx$
17. $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\sin^2 t}\, dt$.
18. $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos^2\theta}\, d\theta$.
19. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1+\tan^2 x}\, dx$.
20. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\sec^2 x - 1}\, dx$.
21. $\int_0^{\pi/2} \theta\sqrt{1-\cos 2\theta}\, d\theta$.
22. $\int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos^2 t)^{3/2} dt$.

在习题 23 ~ 32 中，求积分.

23. $\int_{-\pi/3}^{0} 2\sec^3 x\, dx$.
24. $\int e^x \sec^3 e^x dx$.
25. $\int_0^{\pi/4} \sec^4\theta\, d\theta$.
26. $\int_0^{\pi/12} 3\sec^4 3x\, dx$.
27. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^4\theta\, d\theta$.
28. $\int_{\pi/2}^{\pi} 3\csc^4 \frac{\theta}{2}\, d\theta$.
29. $\int_0^{\pi/4} 4\tan^3 x\, dx$.
30. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 6\tan^4 x\, dx$.
31. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cot^3 x\, dx$.
32. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} 8\cot^4 t\, dt$.

在习题 33 ~ 38 中，求积分.

33. $\int_{-\pi}^{0} \sin 3x\cos 2x\, dx$.
34. $\int_0^{\pi/2} \sin 2x\cos 3x\, dx$.
35. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 3x\sin 3x\, dx$.
36. $\int_0^{\pi/2} \sin x\cos x\, dx$.
37. $\int_0^{\pi} \cos 3x\cos 4x\, dx$.
38. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\cos 7x\, dx$.
39. **曲面面积** 求绕 $x$ 轴旋转弧
$$x = t^{2/3}, y = t^2/2, 0 \le t \le 2$$
产生的曲面面积.
40. **弧长** 求曲线
$$y = \ln(\cos x), 0 \le x \le \pi/3$$
的长度.
41. **弧长** 求曲线
$$y = \ln(\sec x), 0 \le x \le \pi/4$$
的长度.
42. **重心** 求以 $x$ 轴和曲线 $y = \sec x$ 以及直线 $x = -\pi/4$ 和 $x = \pi/4$ 为界的区域的重心.
43. **体积** 求绕 $x$ 轴旋转曲线 $y = \sin x$ 的一段拱形产生的旋转体体积.
44. **面积** 求 $x$ 轴和曲线 $y = \sqrt{1+\cos 4x}$，$0 \le x \le \pi$ 之间区域的面积.

## 7.3 三角代换

在包含 $\sqrt{a^2-x^2}$，$\sqrt{a^2+x^2}$ 和 $\sqrt{x^2-a^2}$ 的积分中，用三角代换把它们变换成可以直接求积的积分可能是有效的.

最常见的代换是 $x = a\tan\theta$，$x = a\sin\theta$ 和 $x = a\sec\theta$. 它们来自图 7.2 中的参考直角三角形.

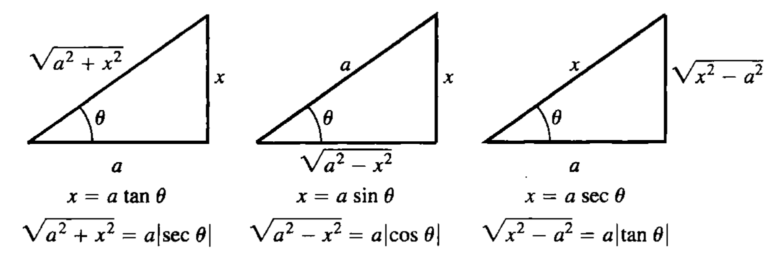



图 7.2 3 种基本代换的参考三角形，对于每一种代换确定标记为 $x$ 和 $a$ 的两条边

用 $x = a\tan\theta$，

$$a^2 + x^2 = a^2 + a^2\tan^2\theta = a^2(1+\tan^2\theta) = a^2\sec^2\theta$$

用 $x = a\sin\theta$,

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2\sin^2\theta = a^2(1-\sin^2\theta) = a^2\cos^2\theta$$

用 $x = a\sec\theta$,

$$x^2 - a^2 = a^2\sec^2\theta - a^2 = a^2(\mathrm{sce}^2\theta - 1) = a^2\tan^2\theta$$

我们要求在积分法中使用的任何代换是可逆的，所以能够在以后变回原来的变量. 例如，如果使用代换 $x = a\tan\theta$，那么在积分后必须能够置 $\theta = \tan^{-1}(x/a)$. 如果使用代换 $x = a\sin\theta$，积分后必须能够置 $\theta = \sin^{-1}(x/a)$. 对于代换 $x = a\sec\theta$ 的要求也是一样.

正如从 1.5 节所知，这 3 个代换中的三角函数仅对于有选择的 $\theta$ 值存在反函数(见图 7.3). 为了可逆性，

$$x = a\tan\theta \quad \text{要求} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), \quad -\frac{\pi}{0} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$x = a\sin\theta \quad \text{要求} \quad \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$x = a\sec\theta \quad \text{要求} \quad \theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), \quad \begin{cases} 0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}, & \text{若} \dfrac{x}{a} \geqslant 1 \\ \dfrac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi, & \text{若} \dfrac{x}{a} \leqslant -1 \end{cases}$$

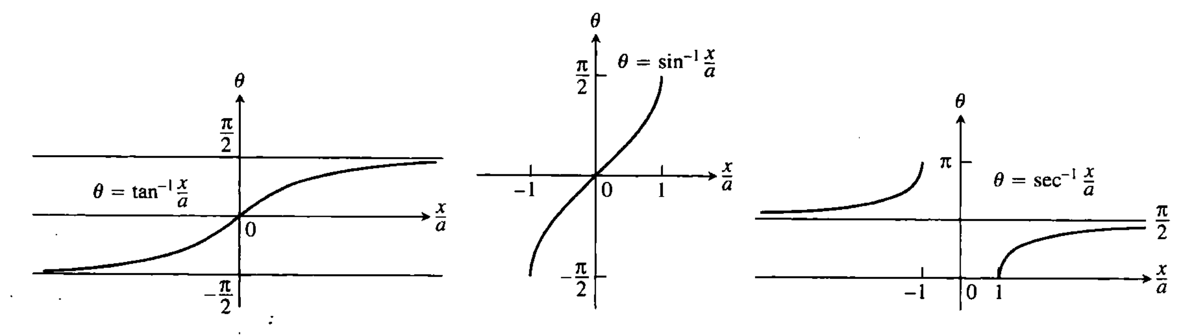



图 7.3　对 $x/a$ 的反正切、反正弦和反正割作为 $x/a$ 的函数画出的图形

为了简化使用代换 $x = a\sec\theta$ 的计算，将其使用范围限制在 $x/a \geqslant 1$ 的积分. 这样就使 $\theta$ 落入区间 $[0, \pi/2)$，并且满足 $\tan\theta \geqslant 0$. 由此而有 $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 + \tan^2\theta} = |a\tan\theta| = a\tan\theta$，只要 $a > 0$，这就避免在计算中出现绝对值.

**例 1**　求积分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}$$

**解**　设置代换

$$x = 2\tan\theta, \quad dx = 2\sec^2\theta\, d\theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$4 + x^2 = 4 + 4\tan^2\theta = 4(1 + \tan^2\theta) = 4\sec^2\theta$$

于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}} = \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{4\sec^2\theta}} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{|\sec\theta|} \qquad (\sqrt{\sec^2\theta} = |\sec\theta|)$$

$$= \int \sec\theta\, d\theta \qquad \left(\sec\theta > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2}+\frac{x}{2}\right|+C \qquad (\text{由图7.4})$$

$$= \ln\left|\sqrt{4+x^2}+x\right|+C' \qquad (\text{取} C' = C - \ln 2)$$

请注意，在这里如何用 $x$ 表示 $\ln|\sec\theta+\tan\theta|$：我们对原代换 $x=2\tan\theta$ 画一个参考三角形(见图7.4)，并由这个三角形确定 $\tan\theta$ 和 $\sec\theta$ 的比. ■

**例2**　求积分

$$\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}}$$

**解**　设置代换

$$x = 3\sin\theta,\quad \mathrm{d}x = 3\cos\theta\,\mathrm{d}\theta,\quad -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$$

$$9-x^2 = 9-9\sin^2\theta = 9(1-\sin^2\theta) = 9\cos^2\theta$$

于是

$$\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}} = \int\frac{9\sin^2\theta\cdot 3\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{|3\cos\theta|} = 9\int\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta \quad \left(\cos\theta>0,\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 9\int\frac{1-\cos2\theta}{2}\mathrm{d}\theta = \frac{9}{2}\left(\theta-\frac{\sin2\theta}{2}\right)+C$$

$$= \frac{9}{2}(\theta-\sin\theta\cos\theta)+C \qquad (\sin2\theta = 2\sin\theta\cos\theta)$$

$$= \frac{9}{2}\left(\sin^{-1}\frac{x}{3}-\frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right)+C \qquad (\text{由图7.5})$$

$$= \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3}-\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+C$$

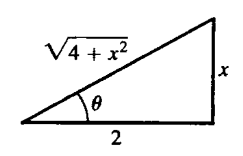



图7.4　代换 $x=2\tan\theta$ 的参考三角形(例1)：$\tan\theta=\frac{x}{2}$，$\sec\theta=\frac{\sqrt{4+x^2}}{2}$

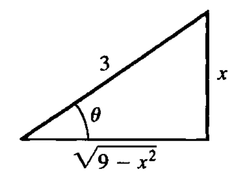



图7.5　代换 $x=3\sin\theta$ 的参考三角形(例2)：$\sin\theta=\frac{x}{3}$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$ ■

**例3**　求积分

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{25x^2-4}},\quad x>\frac{2}{5}$$

**解**　先把根式改写成

$$\sqrt{25x^2-4} = \sqrt{25\left(x^2-\frac{4}{25}\right)} = 5\sqrt{x^2-\left(\frac{2}{5}\right)^2}$$

使被求根的表达式具备 $x^2-a^2$ 的形式. 然后置代换

$$x=\frac{2}{5}\sec\theta,\quad \mathrm{d}x=\frac{2}{5}\sec\theta\tan\theta\,\mathrm{d}\theta,\quad 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

$$x^2-\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}\sec^2\theta-\frac{4}{25} = \frac{4}{25}(\sec^2\theta-1) = \frac{4}{25}\tan^2\theta$$

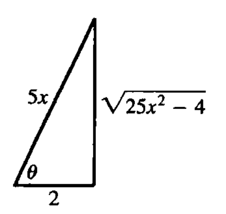



图7.6　例3的参考三角形：若 $x=(2/5)\sec\theta$，$0<\theta<\pi/2$，则 $\theta=\sec^{-1}(5x/2)$，并且可以从这个直角三角形确定 $\theta$ 的其他三角函数的值

$$\sqrt{x^2-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{2}{5}|\tan\theta|=\frac{2}{5}\tan\theta\quad(\tan\theta>0,0<\theta<\pi/2)$$

利用这些代换得到

$$\int\frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}}=\int\frac{dx}{5\sqrt{x^2-(4/25)}}=\int\frac{(2/5)\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{5\cdot(2/5)\tan\theta}$$

$$=\frac{1}{5}\int\sec\theta\,d\theta=\frac{1}{5}\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C$$

$$=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{5x}{2}+\frac{\sqrt{25x^2-4}}{2}\right|+C\qquad(\text{由图}7.6)$$ ■

### 习题 7.3

在习题 1 ~ 28 中，求积分.

**1.** $\int\frac{dy}{\sqrt{9+y^2}}$.

**2.** $\int\frac{3\,dy}{\sqrt{1+9y^2}}$.

**3.** $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{4+x^2}$.

**4.** $\int_{0}^{2}\frac{dx}{8+2x^2}$.

**5.** $\int_{0}^{3/2}\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

**6.** $\int_{0}^{1/2\sqrt{2}}\frac{2\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

**7.** $\int\sqrt{25-t^2}\,dt$.

**8.** $\int\sqrt{1-9t^2}\,dt$.

**9.** $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-49}},\ x>\frac{7}{2}$.

**10.** $\int\frac{5\,dx}{\sqrt{25x^2-9}},\ x>\frac{3}{5}$.

**11.** $\int\frac{\sqrt{y^2-49}}{y}\,dy,\ y>7$.

**12.** $\int\frac{\sqrt{y^2-25}}{y^3}\,dy,\ y>5$.

**13.** $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}},\ x>1$.

**14.** $\int\frac{2\,dx}{x^3\sqrt{x^2-1}},\ x>1$.

**15.** $\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+4}}$.

**16.** $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$.

**17.** $\int\frac{8\,dw}{w^2\sqrt{4-w^2}}$.

**18.** $\int\frac{\sqrt{9-w^2}}{w^2}\,dw$.

**19.** $\int_{0}^{\sqrt{3}/2}\frac{4x^2\,dx}{(1-x^2)^{3/2}}$.

**20.** $\int_{0}^{1}\frac{dx}{(4-x^2)^{3/2}}$.

**21.** $\int\frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}},\ x>1$.

**22.** $\int\frac{x^2\,dx}{(x^2-1)^{5/2}},\ x>1$.

**23.** $\int\frac{(1-x^2)^{3/2}}{x^6}\,dx$.

**24.** $\int\frac{(1-x^2)^{1/2}}{x^4}\,dx$.

**25.** $\int\frac{8\,dx}{(4x^2+1)^2}$.

**26.** $\int\frac{6\,dt}{(9t^2+1)^2}$.

**27.** $\int\frac{v^2\,dv}{(1-v^2)^{5/2}}$.

**28.** $\int\frac{(1-r^2)^{5/2}}{r^8}\,dr$.

在习题 29 ~ 36 中，使用适合的代换后再用三角代换求积分.

**29.** $\int_{0}^{\ln 4}\frac{e^t\,dt}{\sqrt{e^{2t}+9}}$.

**30.** $\int_{\ln(3/4)}^{\ln(4/3)}\frac{e^t\,dt}{(1+e^{2t})^{3/2}}$.

**31.** $\int_{1/12}^{1/4}\frac{3\,dt}{\sqrt{t}+4t\sqrt{t}}$.

**32.** $\int_{1}^{e}\frac{dy}{y\sqrt{1+(\ln y)^2}}$.

**33.** $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

**34.** $\int\frac{dx}{1+x^2}$.

**35.** $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

**36.** $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

在习题 37 ~ 40 中，解初值问题求出 $y$ 作为 $x$ 的函数.

**37.** $x\frac{dy}{dx}=\sqrt{x^2-4}$，$x\geqslant 2$，$y(2)=0$.

**38.** $\sqrt{x^2-9}\frac{dy}{dx}=1$，$x>3$，$y(5)=\ln 3$.

**39.** $(x^2+4)\frac{dy}{dx}=3$，$y(2)=0$.

**40.** $(x^2+1)^2\frac{dy}{dx}=\sqrt{x^2+1}$，$y(0)=1$.

**41. 面积** 求第一象限内由坐标轴和曲线 $y=\sqrt{9-x^2}/3$ 包围的区域的面积.

**42. 体积** 求绕 $x$ 轴旋转第一象限内由坐标轴以及曲线 $y=2/(1+x^2)$ 和直线 $x=1$ 包围的区域产生的旋转体体积.

## 7.4 有理函数部分分式积分法

本节讲述如何把有理函数(多项式的商)表示成更简单的分式之和，这些分式称为部分分式，对它们更容易求积分. 例如，有理函数 $(5x-3)/(x^2-2x-3)$ 可以改写成

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3}=\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-3}$$

这个等式可以通过对右端的两个分式取公分母 $(x+1)(x-3)$ 用代数方法证实. 从把有理函数改变成

这种和的过程中获得的技巧，在其他场合也是有用的(例如用某种变换方法求解微分方程). 为了求上述表达式左端的有理函数$(5x-3)/(x^2-2x-3)$的积分，我们只需求右端两个分式的积分之和：

$$\int \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}\,dx = \int \frac{2}{x+1}\,dx + \int \frac{3}{x-3}\,dx = 2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + C$$

把有理函数改写成更为简单的分式之和的方法称为**部分分式法**. 在上述例子的事例中，它包含求常数 $A$ 和 $B$ 使得

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} \tag{1}$$

(假定我们暂且不知道 $A=2$ 和 $B=3$ 满足等式.)公式 $A/(x+1)$ 和 $B/(x-3)$ 称为**部分分式**，因为它们的分母仅是原来分母 $x^2-2x-3$ 的一部分. $A$ 和 $B$ 称为**未定系数**，直至它们真正值被求出.

为了求 $A$ 和 $B$，我们首先消去式(1)中的分式，并且按 $x$ 的幂重新组合，得到

$$5x-3 = A(x-3) + B(x+1) = (A+B)x - 3A + B$$

这将成为对 $x$ 的恒等式，当且仅当两端 $x$ 同次幂的系数相等：

$$A+B=5, \quad -3A+B=-3$$

解这两个联立方程，给出 $A=2$ 和 $B=3$.

**方法的一般描述**

能否把有理函数$f(x)/g(x)$表示成部分分式之和，取决于两件事情：

(1)*$f(x)$的次数必须小于$g(x)$的次数.* 就是说，有理函数必须是真分式. 否则，$f(x)$用$g(x)$相除会产生余项. 请参见本小节后面的例3.

(2)*我们必须知道$g(x)$的因式.* 在理论上，任何带实系数的多项式可以分解成实系数的线性因式和二次因式的积. 在实践中，求多项式的因式可能是很困难的.

下面给出当$g(x)$的因式为已知时，如何求真分式$f(x)/g(x)$的部分分式的方法.

**求部分分式的方法($f(x)/g(x)$为真分式)**

**(1)**令 $x-r$ 是 $g(x)$ 的线性因式. 假设$(x-r)^m$是整除 $g(x)$ 的 $x-r$ 的最高次幂. 那么，对于这个因式，确定 $m$ 个部分分式之和：

$$\frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-r)^m}$$

对于 $g(x)$ 的每个不同的线性因式做这件情.

**(2)**令 $x^2+px+g$ 是 $g(x)$ 的二次因式. 假设$(x^2+px+g)^n$是这个因式整除 $g(x)$ 的最高次幂，并且 $x^2+px+g$ 没有实根. 那么，对于这个因式，确定 $n$ 个部分分式之和：

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}$$

对于 $g(x)$ 的每个不同的二次因式做这件事情.

**(3)**置原分式$f(x)/g(x)$同所有这些部分分式之和相等. 消去所得等式中的分式，并且按 $x$ 的降幂排列项.

**(4)**令 $x$ 对应幂的系数相等，并且对于所得方程组求解未定系数.

**例 1** 利用部分分式求积分

$$\int \frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)}\,dx$$

**解**　把部分分式分解成

$$\frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+3}$$

的形式. 为了求未定系数 $A$，$B$，$C$ 的值，消除分式，得到

$$\begin{aligned}x^2+4x+1&=A(x+1)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x+1)\\&=(A+B+C)x^2+(4A+2B)x+(3A-3B-C)\end{aligned}$$

上式两端的多项式是恒等式，所以从 $x$ 同次幂的系数相等得到

$$\begin{aligned}&x^2\text{ 的系数：}\quad A+B+C=1\\&x^1\text{ 的系数：}\quad 4A+2B=4\\&x^0\text{ 的系数：}\quad 3A-3B-C=1\end{aligned}$$

对于这样一个线性方程组，可以用几种方法求解未知数 $A$，$B$，$C$，包括变元消去法，或者利用计算器或计算机. 无论用哪一种方法，其解为 $A=3/4$，$B=1/2$，$C=-1/4$. 因此有

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)}\,\mathrm{d}x&=\int\left[\frac{3}{4}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{4}\frac{1}{x+3}\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{3}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln|x+3|+K\end{aligned}$$

其中 $K$ 是任意的积分常数(避免同我们已经标记为 $C$ 的未定系数混淆). ■

**例 2**　求积分

$$\int\frac{6x+7}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$$

**解**　首先把被积函数表示成带未定系数的部分分式之和：

$$\begin{aligned}\frac{6x+7}{(x+2)^2}&=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}\\6x+7&=A(x+2)+B\qquad(\text{两端乘}(x+2)^2)\\&=Ax+(2A+B)\end{aligned}$$

令 $x$ 对应幂的系数相等，给出

$$A=6,\quad 2A+B=12+B=7\quad\text{或}\quad A=6,\quad B=-5$$

因此，

$$\begin{aligned}\int\frac{6x+7}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x&=\int\left(\frac{6}{x+2}-\frac{5}{(x+2)^2}\right)\mathrm{d}x=6\int\frac{\mathrm{d}x}{x+2}-5\int(x+2)^{-2}\mathrm{d}x\\&=6\ln|x+2|+5(x+2)^{-1}+C\end{aligned}$$

■

**例 3**　求积分

$$\int\frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}\,\mathrm{d}x$$

**解**　首先用分母除分子，得到一个多项式和一个真分式：

$$\begin{array}{r}2x\phantom{-4x^2-x-3}\\x^2-2x-3\overline{)2x^3-4x^2-x-3}\\\underline{2x^3-4x^2-6x\phantom{-3}}\\5x-3\end{array}$$

然后把被积函数这个假分式表示成一个多项式和一个真分式的和：

$$\frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}=2x+\frac{5x-3}{x^2-2x-3}$$

在本节开始的例子中我们已经求出右端分式的部分分式分解，所以

$$\int\frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}\,dx=\int 2x\,dx+\int\frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx=\int 2x\,dx+\int\frac{2}{x+1}\,dx+\int\frac{3}{x-3}\,dx$$

$$=x^2+2\ln|x+1|+3\ln|x-3|+C$$

■

一个二次多项式称为**不可约的**，是指不能把它表示成两个实系数线性因式的积. 就是说，这个多项式没有实根.

**例 4**　利用部分分式求积分

$$\int\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx$$

**解**　分母带有一个不可约的二次因式及一个重复的线性因式，所以把被积函数写成

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x-1)^2}\tag{2}$$

消除方程的分式形式，得到

$$\begin{aligned}-2x+4&=(Ax+B)(x-1)^2+C(x-1)(x^2+1)+D(x^2+1)\\&=(A+C)x^3+(-2A+B-C+D)x^2\\&\quad+(A-2B+C)x+(B-C+D)\end{aligned}$$

令同类项系数相等，给出

$x^3$ 的系数：　$0=A+C$

$x^2$ 的系数：　$0=-2A+B-C+D$

$x^1$ 的系数：　$-2=A-2B+C$

$x^0$ 的系数：　$4=B-C+D$

求解这些联立方程，得到 $A$，$B$，$C$，$D$ 的值：

$-4=-2A$，　$A=2$　　（从第 2 个方程减第 4 个方程）

$C=-A=-2$　　（由第 1 个方程）

$B=1$　　（在第 3 个方程中代入 $A=2$ 和 $C=-2$）

$D=4-B+C=1$　　（由第 4 个方程）

把这些值代入方程(2)，得到

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}=\frac{2x+1}{x^2+1}-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

最后，利用上述展开式可以求积分：

$$\begin{aligned}\int\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx&=\int\left(\frac{2x+1}{x^2+1}-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx\\&=\int\left(\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx\\&=\ln(x^2+1)+\tan^{-1}x-2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C\end{aligned}$$

■

**例 5**　求积分

$$\int\frac{dx}{x(x^2+1)^2}$$

**解** 被积函数部分分式的形式为

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

用 $x(x^2+1)$ 乘两端，得到

$$\begin{aligned}1&=A(x^2+1)^2+(Bx+C)x(x^2+1)+(Dx+E)x\\&=A(x^4+2x^2+1)+B(x^4+x^2)+C(x^3+x)+Dx^2+Ex\\&=(A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A\end{aligned}$$

令对应系数相等，得到方程组

$$A+B=0,\quad C=0,\quad 2A+B+D=0,\quad C+E=0,\quad A=1$$

解这个方程组给出 $A=1$，$B=-1$，$C=0$，$D=-1$，$E=0$. 因此，

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x(x^2+1)^2}&=\int\left[\frac{1}{x}+\frac{-x}{x^2+1}+\frac{-x}{(x^2+1)^2}\right]dx=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x\,dx}{x^2+1}-\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}\\&=\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}-\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2}\qquad(u=x^2+1,\ du=2x\,dx)\\&=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|u|+\frac{1}{2u}+K=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2(x^2+1)}+K\\&=\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{2(x^2+1)}+K\end{aligned}$$

■

## 习题 7.4

在习题 1 ~ 8 中，用部分分式展开有理函数(多项式的商).

1. $\frac{5x-13}{(x-3)(x-2)}$.
2. $\frac{5x-7}{x^2-3x+2}$.
3. $\frac{x+4}{(x+1)^2}$.
4. $\frac{2x+2}{x^2-2x+1}$.
5. $\frac{z+1}{z^2(z-1)}$.
6. $\frac{z}{z^3-z^2-6z}$.
7. $\frac{t^2+8}{t^2-5t+6}$.
8. $\frac{t^4+9}{t^4+9t^2}$.

在习题 9 ~ 16 中，把被积函数表示成部分分式的和，并且求积分.

9. $\int\frac{dx}{1-x^2}$.
10. $\int\frac{dx}{x^2+2x}$.
11. $\int\frac{x+4}{x^2+5x-6}dx$.
12. $\int\frac{2x+1}{x^2-7x+12}dx$.
13. $\int_4^8\frac{y\,dy}{y^2-2y-3}$.
14. $\int_{1/2}^1\frac{y+4}{y^2+y}dy$.
15. $\int\frac{dt}{t^3+t^2-2t}$.
16. $\int\frac{x+3}{2x^3-8x}dx$.

在习题 17 ~ 20 中，把被积函数表示成部分分式的和，并且求积分.

17. $\int_0^1\frac{x^3dx}{x^2+2x+1}$.
18. $\int_{-1}^0\frac{x^3dx}{x^2-2x+1}$.
19. $\int\frac{dx}{(x^2-1)^2}$.
20. $\int\frac{x^2dx}{(x-1)(x^2+2x+1)}$.

在习题 21 ~ 28 中，把被积函数表示成部分分式的和，并且求积分.

21. $\int_0^1\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$.
22. $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{3t^2+t+4}{t^3+t}dt$.
23. $\int\frac{y^2+2y+1}{(y^2+1)^2}dy$.
24. $\int\frac{8x^2+8x+2}{(4x^2+1)^2}dx$.
25. $\int\frac{2s+2}{(s^2+1)(s-1)^3}ds$.
26. $\int\frac{s^4+81}{s(s^2+9)^2}ds$.
27. $\int\frac{2\theta^3+5\theta^2+8\theta+4}{(\theta^2+2\theta+2)^2}d\theta$.
28. $\int\frac{\theta^4-4\theta^3+2\theta^2-3\theta+1}{(\theta^2+1)^3}d\theta$.

在习题 29 ~ 34 中，对被积函数做长除法，把所得真分式表示成部分分式之和，然后求积分.

29. $\int\frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x}dx$.
30. $\int\frac{x^4}{x^2-1}dx$.
31. $\int\frac{9x^3-3x+1}{x^3-x^2}dx$.
32. $\int\frac{16x^3}{4x^2-4x+1}dx$.
33. $\int\frac{y^4+y^2-1}{y^3+y}dy$.
34. $\int\frac{2y^4}{y^3-y^2+y-1}dy$.

在习题 35 ~ 40 中，求积分.

35. $\int \frac{e^t dt}{e^{2t}+3e^t+2}$.　　36. $\int \frac{e^{4t}+2e^{2t}-e^t}{e^{2t}+1}\,dt$.

37. $\int \frac{\cos y\,dy}{\sin^2 y+\sin y-6}$.　　38. $\int \frac{\sin\theta\,d\theta}{\cos^2\theta+\cos\theta-2}$.

39. $\int \frac{(x-2)^2\tan^{-1}(2x)-12x^3-3x}{(4x^2+1)(x-2)^2}\,dx$.

40. $\int \frac{(x+1)^2\tan^{-1}(3x)+9x^3+x}{(9x^2+1)(x+1)^2}\,dx$.

在习题 41 ~ 44 中，求解初值问题获得 $x$ 作为 $t$ 的函数.

41. $(t^2-3t+2)\frac{dx}{dt}=1\quad(t>2)$，$x(3)=0$.

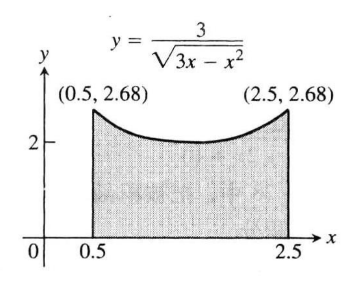
42. $(3t^4+4t^2+1)\frac{dx}{dt}=2\sqrt{3}$，$x(1)=-\pi\sqrt{3}/4$.

43. $(t^2+2t)\frac{dx}{dt}=2x+2\quad(t,\ x>0)$，$x(1)=1$.

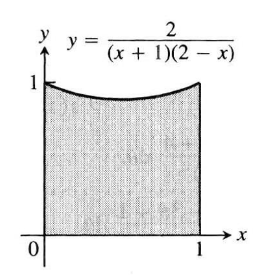
44. $(t+1)\frac{dx}{dt}=x^2+1\quad(t>-1)$，$x(0)=\pi/4$.

在习题 45 和 46 中，求绕指定轴旋转带阴影区域产生的旋转体体积.

45. $x$ 轴.

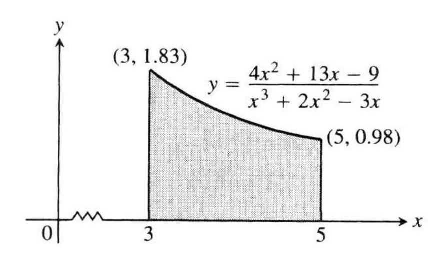



46. $y$ 轴.




**T**47. 对第一象限内以 $x$ 轴以及曲线 $y=\tan^{-1}x$ 和直线 $x=\sqrt{3}$ 为界的区域，求形心的 $x$ 坐标(准确到两位小数).

**T**48. 求附图所示区域的形心的 $x$ 坐标(准确到两位小数).




49. **社会扩散** 社会学家有时用“社会扩散”这个习惯用语描述信息在人群中间传播的方式. 传播的信息可能是一则谣言，一种文化时尚，或者一项技术革新的新闻. 在数量足够大的人群中，获得信息的人数 $x$ 被视为时间 $t$ 的可微函数，而假定扩散的速率 $dx/dt$ 同获得信息的人数和未获得信息的人数之积成正比. 这就导致方程

$$\frac{dx}{dt}=kx(N-x)$$

其中 $N$ 是人群中的人数.

假设 $t$ 以天数计算，$k=1/250$，并且两人从 $t=0$ 开始在人数 $N=1000$ 的人群中间传播一则谣言.

(a) 求 $x$ 作为 $t$ 的函数.

(b) 什么时候人群中将有半数的人听到这个谣言?(这时是谣言传播最快的时间.)

50. **二阶化学反应** 许多化学反应是两种物质分子相互作用的结果，它们在反应过程中经历产生一种新物质的变化. 反应的速率通常是依赖于两种分子的浓度. 如果在 $t=0$ 时物质 $A$ 的数量为 $a$，物质 $B$ 的数量为 $b$，并且产生新物质在时间 $t$ 的数量是 $x$，那么 $x$ 形成的速率可以由微分方程

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x)$$

或

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)}\frac{dx}{dt}=k$$

给出，其中 $k$ 是化学反应常数. 在下述条件下对这个方程的两端积分获得 $x$ 和 $t$ 之间的关系:

(a) $a=b$;　　(b) $a\neq b$.

假定在每种情况，当 $t=0$ 时 $x=0$.

## 7.5 积分表与计算机代数系统

我们在本节讨如何利用积分表和计算机代数系统求积分.

### 7.5.1 积分表

在本书附录 B.3 中提供一个积分简表. 简表中的积分公式用到 $a$, $b$, $c$, $m$, $n$ 等常数, 这些常数通常假定可以取任意实数值而不必是整数. 在公式中偶然提及对常数值的限制. 例如, 公式 5 要求 $n \neq -1$, 公式 11 要求 $n \neq 2$. (范围更大的积分表出现在一些汇编表中, 例如 *CRC Mathematical Tables*(《CRC(微积分复习卡)数学表》), 其中包含数以千计的积分.)

对简表中的公式还假定, 常数不能取需要用零做除数的值或者对负数取偶次根的值. 例如, 公式 8 假定$a \neq 0$, 而公式 13(a)和(b)在 $b$ 为负数时不能使用.

**例 1** 求积分

$$\int x(2x+5)^{-1}\mathrm{d}x$$

**解** 利用公式 8(不能用公式 7, 因为公式 7 要求 $n \neq -1$):

$$\int x(ax+b)^{-1}\mathrm{d}x = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|ax+b| + C$$

取 $a=2$ 和 $b=5$, 得到

$$\int x(2x+5)^{-1}\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{5}{4}\ln|2x+5| + C$$ ■

**例 2** 求积分

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x-4}}$$

**解** 利用公式 13(a):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax-b}} = \frac{2}{\sqrt{b}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{ax-b}{b}} + C$$

取 $a=2$ 和 $b=4$, 得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x-4}} = \frac{2}{\sqrt{4}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{2x-4}{4}} + C = \tan^{-1}\sqrt{\frac{x-2}{2}} + C$$ ■

**例 3** 求积分

$$\int x\sin^{-1}x\,\mathrm{d}x$$

**解** 利用公式 99:

$$\int x^n\sin^{-1}ax\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sin^{-1}ax - \frac{a}{n+1}\int\frac{x^{n+1}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-a^2x^2}}, \quad n \neq -1$$

取 $n=1$ 和 $a=1$, 得到

$$\int x\sin^{-1}x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

右端的积分从表中的公式 33 求出:

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C$$

取 $a=1$,

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\sin^{-1}x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$$

合并后的结果是

$$\int x\sin^{-1}x\,dx = \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C\right)$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right)\sin^{-1}x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C'$$ ■

### 7.5.2 归约公式

重复用分部积分法所需的时间，有时可以通过应用某些积分公式而缩短，例如下面的公式：

$$\int \tan^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x - \int \tan^{n-2}x\,dx \tag{1}$$

$$\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}dx \tag{2}$$

$$\int \sin^n x\cos^m x\,dx = -\frac{\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^{n-2}x\cos^m x\,dx \quad (n \neq -m) \tag{3}$$

这样的公式称为**归约公式**，因为它们把包含函数某个乘方的积分转化成降低乘方后同样形式的公式. 重复应用这样的公式，最终可以把原积分表示成乘方降低到足以直接计算的积分.

**例 4** 求积分

$$\int \tan^5 x\,dx$$

**解** 应用公式(1)和取 $n=5$，得到

$$\int \tan^5 x\,dx = \frac{1}{4}\tan^4 x - \int \tan^3 x\,dx$$

然后，再应用公式(1)和取 $n=3$ 求剩余的积分：

$$\int \tan^3 x\,dx = \frac{1}{2}\tan^2 x - \int \tan x\,dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$$

合并后的结果是

$$\int \tan^5 x\,dx = \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\cos x| + C'$$ ■

正如归约公式形式的暗示，它们是用分部积分法推导出来的.（参看 7.1 节的例 5.）

### 7.5.3 用 CAS 求积分

CAS(计算机代数系统)的强大能力在于它们具有用符号方式求积分的功能. 这种功能是由特定系统提供的**积分命令**实现的. 例如，在 Maple 中用 **int** 命令；在 Mathematica 中用 **integrate** 命令.

**例 5** 假定我们需要求函数

$$f(x) = x^2\sqrt{a^2+x^2}$$

的积分. 利用 Maple，首先定义或指出函数的名称：

```
> f: = x^2 * sqrt(a^2 + x^2);
```

然后，对函数 $f$ 使用积分命令认定积分变量：

```
> int(f,x);
```

Maple 返回结果

$$\frac{1}{4}x(a^2+x^2)^{3/2}-\frac{1}{8}a^2x\sqrt{a^2+x^2}-\frac{1}{8}a^4\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$$

如果想要查看答案能否化简，输入

> simplify(%);

Maple 返回

$$\frac{1}{8}a^2x\sqrt{a^2+x^2}+\frac{1}{4}x^3\sqrt{a^2+x^2}-\frac{1}{8}a^4\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$$

如果要求对区间 $0\leqslant x\leqslant\pi/2$ 求定积分，可以使用命令格式

> int (f, x = 0..Pi/2);

Maple 将会返回表达式

$$\frac{1}{64}\pi(4a^2+\pi^2)^{(3/2)}-\frac{1}{32}a^2\pi\sqrt{4a^2+\pi^2}+\frac{1}{8}a^4\ln(2)$$
$$-\frac{1}{8}a^4\ln(\pi+\sqrt{4a^2+\pi^2})+\frac{1}{16}a^4\ln(a^2)$$

也可以对于常数 $a$ 的特定值求定积分：

> a: = 1;
> int (f, x = 0..1);

Maple 返回数值答案

$$\frac{3}{8}\sqrt{2}+\frac{1}{8}\ln(\sqrt{2}-1)$$ ■

**例 6** 用一种 CAS 求积分

$$\int\sin^2x\cos^3x\,dx$$

**解** 使用 Maple，我们给出输入

> int ((sin^2)(x) * (cos^3)(x),x);

Maple 直接返回

$$-\frac{1}{5}\sin(x)\cos(x)^4+\frac{1}{15}\cos(x)^2\sin(x)+\frac{2}{15}\sin(x)$$ ■

计算机代数系统如何处理积分因系统而异. 我们在例 5 和例 6 中使用了 Maple. 使用 Mathematica 将会返回某些不同的结果：

(1) 在例 5 中，输入

*In [1]* : = Integrat e[x^2 * Sqrt[a^2 + x^2],x]

Mathematica 返回

$$Out\,[1]=\sqrt{a^2+x^2}\left(\frac{a^2x}{8}+\frac{x^3}{4}\right)-\frac{1}{8}a^4\text{Log}[x+\sqrt{a^2+x^2}]$$

这是没有化简的中间结果. 这个答案同积分表中的公式 22 接近.

(2) 在例 6 中，Mathematica 对于积分

*In [2]* : = Integrate [Sin [x]^2 * Cos [x]^3, x]

的回答是

$$Out\,[2]=\frac{\text{Sin}[x]}{8}-\frac{1}{48}\text{Sin}[3x]-\frac{1}{80}\text{Sin}[5x]$$

不同于 Maple 的答案.

尽管CAS具有很强大的能力，并且能够帮助我们求解困难的问题，但是每一种CAS也存在固有的局限性. 甚至存在这样的情况，CAS可能使问题变得更为复杂，例如系统产生的答案很难使用或者很难解释. 此外，需要指出，无论Maple或者Mathematica返回的答案都不包含任意常数$C$. 另一方面，对于CAS难于处理的问题作一点数学上的思考就可能化为非常容易解决的问题. 我们在习题63中提供这样一个例子.

### 7.5.4 非初等积分

随着计算机和计算器用符号操作方式求反导数的进展，重新引起人们对下述问题的兴趣：确定哪些反导数能够表示成我们已经讨论过的初等函数的有限组合，哪些反导数不能这样表示. 那些不具备初等反导数的函数，它们的积分称为**非初等**积分. 非初等积分的求值需要用无穷级数(第8章)或者数值积分方法(仅给出近似值). 非初等积分的例子包括误差函数(这种函数测量随机误差的概率)

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

以及像

$$\int \sin x^2 dx \quad 和 \quad \int \sqrt{1+x^4}\,dx$$

这样的积分(出现在工程技术和物理学中). 上述积分以及其他一些积分，像

$$\int \frac{e^x}{x}dx,\quad \int e^{(e^x)}dx,\quad \int \frac{1}{\ln x}dx,\quad \int \ln(\ln x)\,dx,\quad \int \frac{\sin x}{x}dx,\quad \int\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx \quad (0<k<1)$$

看起来如此容易，引诱我们试图弄清如何去计算它们. 然而，可以证明，对于这些积分，不存在把它们表示成初等函数的有限组合的方法. 这个结论同样适用于通过代换能够变成这些形式的积分. 作为微积分基本定理第1部分的一个推论，所有这些被积函数具有反导数，因为它们是连续函数. 但是，反导数不是初等函数.

本章提出求积的积分不属于非初等积分类型，但是读者在其他工作中可能遇到非初等积分.

### 习题7.5

在习题1～26中，利用本书附录B.3中的积分表求积分.

**1.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-3}}$. **2.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+4}}$.

**3.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-2}}$. **4.** $\int \frac{x\,dx}{(2x+3)^{3/2}}$.

**5.** $\int x\sqrt{2x-3}\,dx$. **6.** $\int x(7x+5)^{3/2}dx$.

**7.** $\int \frac{\sqrt{9-4x}}{x^2}dx$. **8.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x-9}}$.

**9.** $\int x\sqrt{4x-x^2}\,dx$. **10.** $\int \frac{\sqrt{x-x^2}}{x}dx$.

**11.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{7+x^2}}$. **12.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{7-x^2}}$.

**13.** $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx$. **14.** $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$.

**15.** $\int e^{2t}\cos 3t\,dt$. **16.** $\int e^{-3t}\sin 4t\,dt$.

**17.** $\int x\cos^{-1}x\,dx$. **18.** $\int x\tan^{-1}x\,dx$.

**19.** $\int x^2\tan^{-1}x\,dx$. **20.** $\int \frac{\tan^{-1}x}{x^2}dx$.

**21.** $\int \sin 3x\cos 2x\,dx$. **22.** $\int \sin 2x\cos 3x\,dx$.

**23.** $\int 8\sin 4t\sin\frac{t}{2}\,dt$. **24.** $\int \sin\frac{t}{3}\sin\frac{t}{6}\,dt$.

**25.** $\int \cos\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{4}\,d\theta$. **26.** $\int \cos\frac{\theta}{2}\cos 7\theta\,d\theta$.

在习题27～36中，利用代换把积分变成在积分表中可以找到的积分，然后求积分.

**27.** $\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+1)^2}dx$. **28.** $\int \frac{x^2+6x}{(x^2+3)^2}dx$.

**29.** $\int \sin^{-1}\sqrt{x}\,dx$. **30.** $\int \frac{\cos^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

**31.** $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$. **32.** $\int \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x}}dx$.

**33.** $\int \cot t\sqrt{1-\sin^2 t}\,dt$, $0<t<\pi/2$.

**34.** $\int \frac{dt}{\tan t\sqrt{4-\sin^2 t}}$. **35.** $\int \frac{dy}{y\sqrt{3+(\ln y)^2}}$.

**36.** $\int \tan^{-1}\sqrt{y}\,dy$.

在习题37～46中，利用归约公式求积分.

**37.** $\int \sin^5 2x\,dx$. **38.** $\int 8\cos^4 2\pi t\,dt$.

**39.** $\int \sin^2 2\theta\cos^3 2\theta\,d\theta$. **40.** $\int 2\sin^2 t\sec^4 t\,dt$.

**41.** $\int 4\tan^3 2x\,dx$. **42.** $\int 8\cot^4 t\,dt$.

**43.** $\int 2\sec^3 \pi x\,dx$. **44.** $\int 3\sec^4 3x\,dx$.

**45.** $\int \csc^5 x\,dx$. **46.** $\int 16x^3(\ln x)^2 dx$.

在习题47～52中，先作代换（可能是三角代换）然后应用归约公式求积分.

**47.** $\int e^t\sec^3(e^t-1)dt$. **48.** $\int \frac{\csc^3\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}}d\theta$.

**49.** $\int_0^1 2\sqrt{x^2+1}\,dx$. **50.** $\int_0^{\sqrt{3}/2}\frac{dy}{(1-y^2)^{5/2}}$.

**51.** $\int_1^2 \frac{(r^2-1)^{3/2}}{r}dr$. **52.** $\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{dt}{(t^2+1)^{7/2}}$.

**53. 曲面面积** 求绕 $x$ 轴旋转曲线 $y=\sqrt{x^2+2}$，$0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$ 产生的曲面面积.

**54. 弧长** 求曲线 $y=x^2$，$0\leqslant x\leqslant\sqrt{3}/2$ 的长度.

**55. 形心** 求由曲线 $y=1/\sqrt{x+1}$ 和直线 $x=3$ 从第一象限切割的区域的形心.

**56. 对 y 轴的矩** 一块密度为常数 $\delta=1$ 的薄板占据第一象限内由曲线 $y=36/(2x+3)$ 和直线 $x=3$ 包围的区域. 求薄板对 $y$ 轴的矩.

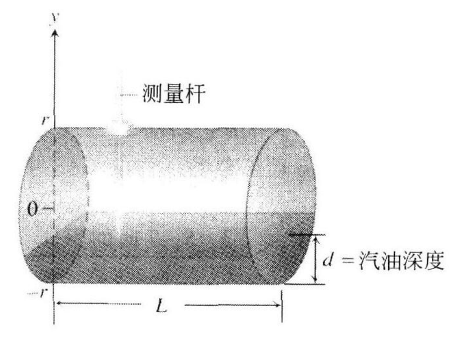
**T 57.** 利用积分表和一种计算器求绕 $x$ 轴旋转曲线 $y=x^2$，$-1\leqslant x\leqslant 1$ 产生的曲面面积，准确到两位小数.

**58. 体积** 你的公司财务部上司请你求一个公式，她可以在计算机程序中用于计算公司油罐中年底汽油的库存量. 如附图所示，典型的油罐形状像水平放置的正圆柱体，它的半径为 $r$，长度为 $L$. 用标明厘米刻度的垂直测量杆获取油面深度的数据，送到财务部办公室.

(a) 证明，按照图中的表示法，油罐灌入深度到 $d$ 的汽油的体积为

$$V = 2L\int_{-r}^{-r+d}\sqrt{r^2-y^2}\,dy$$

(b) 求这个积分




**59.** 积分

$$\int_a^b \sqrt{x-x^2}\,dx$$

对于任意 $a$ 和 $b$ 可能具有的最大值是多少？提出答案的理由.

**60.** 积分

$$\int_a^b x\sqrt{2x-x^2}\,dx$$

对于任意 $a$ 和 $b$ 可能具有的最大值是多少？提出答案的理由.

**计算机探究**

在习题61和62中，用一种CAS（计算机代数系统）求积分.

**61.** 求积分

(a) $\int x\ln x\,dx$. (b) $\int x^2\ln x\,dx$. (c) $\int x^3\ln x\,dx$.

(d) 从上述积分中看出什么模式？预测 $\int x^4\ln x\,dx$ 的积分公式，然后用一种CAS求积分，检验预测是否正确.

(e) $\int x^n\ln x\,dx\,(n\geqslant 1)$ 的积分公式是什么？用CAS检验你的答案.

**62.** 求积分

(a) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$. (b) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$. (c) $\int \frac{\ln x}{x^4}dx$.

(d) 从上述积分中看出什么模式？预测

$$\int \frac{\ln x}{x^5}dx$$

的积分公式，然后用一种CAS求积分，检验预测是否正确.

(e)

$$\int \frac{\ln x}{x^n}dx,\quad n\geqslant 2$$

的积分公式是什么？用一种CAS检验你的答案.

**63.**

(a) 用一种 CAS 求积分

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\, dx$$

其中 $n$ 是任意正整数. 你的 CAS 求得结果吗?

(b) 继续求 $n=1, 2, 3, 5, 7$ 时的积分. 评述结果的复杂性.

(c) 此时代入 $x=(\pi/2)-u$, 并且将新积分和旧积分相加. 积分

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\, dx$$

的值是什么? 这个习题说明, 如何用一点数学技巧解决由 CAS 不能直接求解的问题.

## 7.6 数值积分

某些函数, 像 $\sin(x^2)$, $1/\ln x$ 和 $\sqrt{1+x^4}$, 它们的反导数设有初等公式. 对于一个必须求积分的函数 $f$, 当我们无法求出可供使用的反导数时, 可以划分积分区间, 在每个子区间上用一个密切拟合的多项式代替 $f$, 然后求这些多项式的积分, 并且把结果相加作为 $f$ 的积分的近似值. 这个过程是数值积分的一个例子. 我们在本节讨论两种这样的方法, 一个是*梯形法则*, 另一个是*辛普森法则*. 在我们的描述中, 假定 $f$ 是正值函数, 不过对它的唯一要求是在积分区间 $[a, b]$ 上连续.

### 7.6.1 梯形逼近

求定积分值的梯形法则, 在逼近曲线和 $x$ 轴之间的区域时是基于梯形而不是矩形, 如图 7.7 所示.

在图中分点 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 不必取为等距离的, 但是如果用等距离划分, 得到的公式更简单. 因此, 我们假定每个子区间的长度为

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

长度 $\Delta x = (b-a)/n$ 称为**步长**或者**网格步长**. 位于第 $i$ 个子区间之上的梯形的面积等于

$$\Delta x \left(\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\right) = \frac{\Delta x}{2}(y_{i-1}+y_i)$$

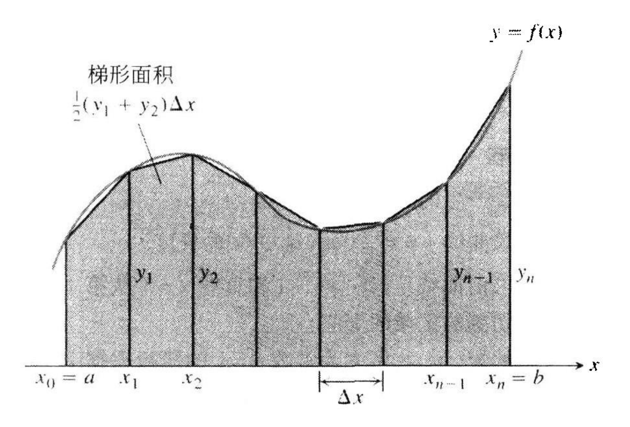



图 7.7 梯形法则用直线段逼近曲线 $y=f(x)$ 的短弧段. 为了逼近 $f$ 从 $a$ 到 $b$ 的积分, 把连接线段端点和 $x$ 轴构成的梯形面积相加

其中 $y_{i-1}=f(x_{i-1})$, $y_i=f(x_i)$. 这个面积是梯形的横向"高度" $\Delta x$ 乘它的两个纵向"底边"的平均值(见图 7.7). 于是, 在曲线 $y=f(x)$ 下方和 $x$ 轴上方的面积由全部梯形面积之和逼近:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(y_0+y_1)\Delta x + \frac{1}{2}(y_1+y_2)\Delta x + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{2}(y_{n-2}+y_{n-1})\Delta x + \frac{1}{2}(y_{n-1}+y_n)\Delta x \\ &= \Delta x\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) \\ &= \frac{\Delta x}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) \end{aligned}$$

其中

$$y_0 = f(a),\quad y_1 = f(x_1),\quad \cdots,\quad y_{n-1} = f(x_{n-1}),\quad y_n = f(b)$$

梯形法则说明：用 $T$ 估计 $f(x)$ 从 $a$ 到 $b$ 的积分.

**梯形法则**

为了逼近 $\int_a^b f(x)\,dx$，使用

$$T = \frac{\Delta x}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$$

$y_i(i=0,1,2,\cdots,n-1,n)$ 是 $f$ 在划分点

$x_0 = a,\ x_1 = a + \Delta x,\ x_2 = a + 2\Delta x,\ \cdots,\ x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x,\ x_n = b$

的值，其中 $\Delta x = (b-a)/n$.

**表 7.1**

| $x$ | $y = x^2$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| $\frac{5}{4}$ | $\frac{25}{16}$ |
| $\frac{6}{4}$ | $\frac{36}{16}$ |
| $\frac{7}{4}$ | $\frac{49}{16}$ |
| 2 | 4 |

**例 1** 利用 $n = 4$ 的梯形法则估计 $\int_1^2 x\,dx$. 比较估计值和准确值.

**解** 把区间[1, 2]划分成 4 个等长的子区间(见图 7.8). 然后，在每个划分点计算 $y = x^2$(见表 7.1).

利用梯形法则中的这些 $y$ 值和 $n = 4$ 及 $\Delta x = (2-1)/4 = 1/4$，得到

$$\begin{aligned} T &= \frac{\Delta x}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4) \\ &= \frac{1}{8}\left(1 + 2\left(\frac{25}{16}\right) + 2\left(\frac{36}{16}\right) + 2\left(\frac{49}{16}\right) + 4\right) \\ &= \frac{75}{32} = 2.343\,75 \end{aligned}$$

由于抛物线是向上凹的，逼近线段位于曲线之上，给出的每个梯形的面积略大于曲线下方对应的条形区域的面积. 积分的准确值是

$$\int_1^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\bigg]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$T$ 逼近作为积分值的估计超过实际值 7/3 约 0.5%. 百分误差为(2.343 75 − 7/3)/(7/3) ≈ 0.004 46 或者 0.446%. ■

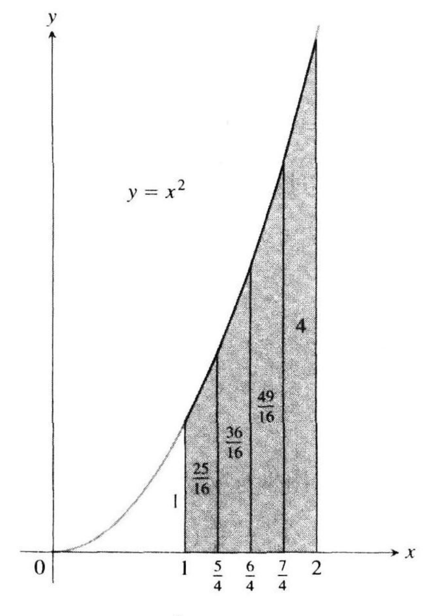



图 7.8 $y = x^2$ 图形下方从 $x = 1$ 到 $x = 2$ 的面积的梯形逼近是略高的估计(例 1)

### 7.6.2 辛普森法则：用抛物线逼近

逼近连续函数定积分的另外一个法则来源于用抛物线替代产生梯形的直线段. 同前面一样，我们把区间$[a, b]$划分成长度等于 $h = \Delta x = (b-a)/n$ 的 $n$ 个子区间，但是，要求 $n$ 为偶数. 在每对相邻的子区间上用抛物线逼近曲线 $y = f(x) \geq 0$，如图 7.9 所示. 典型的抛物线穿过曲线上的 3 个相邻点$(x_{i-1}, y_{i-1})$，$(x_i, y_i)$和$(x_{i+1}, y_{i+1})$.

让我们来计算位于穿过 3 个相邻点的抛物线下方阴影区的面积. 为了简化计算，首先考虑取 $x_0 = -h$，$x_1 = 0$ 和 $x_2 = h$ 的情况(见图 7.10)，其中 $h = \Delta x = (b-a)/n$. 如果向左或者向右移动 $y$ 轴，在抛物线下方的面积保持不变. 抛物线方程的形式为

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

所以在抛物线下方从 $x=-h$ 到 $x=h$ 的面积等于

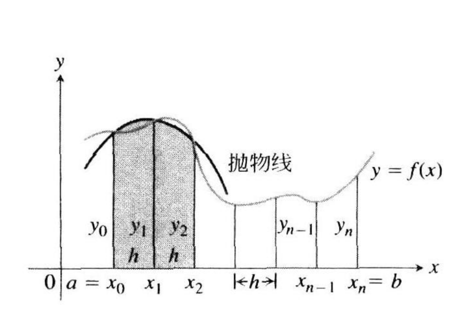



图 7.9　辛普森法则用抛物线逼近曲线的短弧段

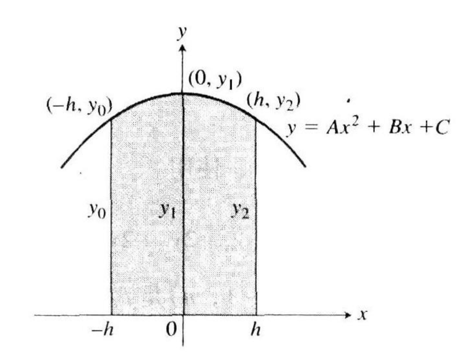



图 7.10　通过从 $-h$ 到 $h$ 积分，求出阴影区域的面积 $\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$

$$A_p=\int_{-h}^{h}(Ax^2+Bx+C)\,\mathrm{d}x=\frac{Ax^3}{3}+\frac{Bx^2}{2}+Cx\Big]_{-h}^{h}=\frac{2Ah^3}{3}+2Ch=\frac{h}{3}(2Ah^2+6C)$$

由于曲线穿过 3 个点 $(-h,\ y_0)$，$(0,\ y_1)$ 和 $(h,\ y_2)$，又有

$$y_0=Ah^2-Bh+C,\quad y_1=C,\quad y_2=Ah^2+Bh+C$$

由此得到

$$C=y_1$$
$$Ah^2-Bh=y_0-y_1$$
$$Ah^2+Bh=y_2-y_1$$
$$2Ah^2=y_0+y_2-2y_1$$

因此，可以用坐标 $y_0$，$y_1$ 和 $y_2$ 表示面积 $A_p$：

$$A_p=\frac{h}{3}(2Ah^2+6C)=\frac{h}{3}((y_0+y_2-2y_1)+6y_1)=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$$

此时，把抛物线水平移动到它在图 7.9 中的阴影区位置，并不改变它下方的面积. 因此，在图形 7.9 中经过点 $(x_0,\ y_0)$，$(x_1,\ y_1)$ 和 $(x_2,\ y_2)$ 的抛物线下方的面积依然是

$$\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$$

同样，在经过点 $(x_2,\ y_2)$，$(x_3,\ y_3)$ 和 $(x_4,\ y_4)$ 的抛物线下方的面积是

$$\frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4)$$

计算抛物线下方所有的面积，并且对结果求和，给出逼近

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\approx\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)+\frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4)+\cdots+\frac{h}{3}(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)$$
$$=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\cdots+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)$$

最后这个结果称为辛普森法则. 在抛物线逼近中，不要求函数取正值，像推导过程所显示的那样，但是为了应用这个法则，子区间的数目必须是偶数，因为每段抛物线弧使用两个子区间.

人物传记

托马斯·辛普森
(Thomas Simpson, 1720—1761)

**辛普森法则**

为了逼近$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,使用

$$S=\frac{\Delta x}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\cdots+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)$$

$y_i(i=0, 1, 2, \cdots, n-1, n)$是$f$在划分点

$x_0=a,\ x_1=a+\Delta x,\ x_2=a+2\Delta x,\ \cdots,\ x_{n-1}=a+(n-1)\Delta x,\ x_n=b$

的值，其中$n$为偶数，并且$\Delta x=(b-a)/n$.

注意上述法则中的系数模式：1，4，2，4，2，4，2，…，4，1.

**例 2** 利用辛普森法则取$n=4$逼近$\int_0^2 5x^4\mathrm{d}x$.

**表 7.2**

| $x$ | $y=5x^4$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{16}$ |
| 1 | 5 |
| $\frac{3}{2}$ | $\frac{405}{16}$ |
| 2 | 80 |

**解** 把区间[0,2]划分成4个子区间，并且计算$y=5x^4$在划分点的值(见表7.2). 然后应用辛普森法则，取$n=4$和$\Delta x=1/2$:

$$S=\frac{\Delta x}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+y_4)$$

$$=\frac{1}{6}\left(0+4\left(\frac{5}{16}\right)+2(5)+4\left(\frac{405}{16}\right)+80\right)=32\frac{1}{12}$$

这个估计同准确值32仅有1/12的差别，其百分误差小于0.3%，而且这是只用4个子区间得到的结果. ■

### 7.6.3 误差分析

凡是在使用逼近方法的场合,就会出现逼近可能具有何等精确度的问题. 下述定理给出使用梯形法则和辛普森法则时估计误差的公式. **误差**是求定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$时由法则得到的逼近值同实际值之差.

**定理 1 (梯形法则和辛普森法则中的误差估计)** 若$f''$是连续的，并且$M$是$|f''|$在$[a,b]$上取值的任意上界，则$f$从$a$到$b$积分的$n$步梯形法则逼近的误差$E_T$满足不等式

$$|E_T|\leqslant\frac{M(b-a)^3}{12n^2}\quad(\text{梯形法则})$$

若$f^{(4)}$是连续的，并且$M$是$|f^{(4)}|$在$[a,b]$上取值的任意上界，则$f$从$a$到$b$积分的$n$步辛普森法则逼近的误差$E_S$满足不等式

$$|E_S|\leqslant\frac{M(b-a)^5}{180n^4}\quad(\text{辛普森法则})$$

定理1向我们表明，对于给定的容许误差，步长$\Delta x=(b-a)/n$应该取多大. 为了看出定理在用梯形法则时为什么成立，我们从高等微积分的如下结果开始：若$f''$在区间$[a,b]$上连续，则对于$a$和$b$之间的某个数$c$，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=T-\frac{b-a}{12}\cdot f''(c)(\Delta x)^2$$

因此，当$\Delta x$趋近零时，由

$$E_T = -\frac{b-a}{12} \cdot f''(c)(\Delta x)^2$$

定义的误差作为 $\Delta x$ 的平方趋近零.

不等式

$$|E_T| \leqslant \frac{b-a}{12} \max |f''(x)| (\Delta x)^2$$

给出误差值的一个上界，其中 max 是对区间 $[a,b]$ 取值. 在实践中，通常无法求出 $\max|f''(x)|$ 的准确值，因此必须对它估计一个上界或者“最坏情况”值. 若 $M$ 是 $|f''(x)|$ 在 $[a,b]$ 上的值的任意上界，所以在 $[a,b]$ 上 $|f''(x)| \leqslant M$，则

$$|E_T| \leqslant \frac{b-a}{12} M(\Delta x)^2$$

如果用 $(b-a)/n$ 代换 $\Delta x$，得到

$$|E_T| \leqslant \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$$

为了估计辛普森法则的误差，我们从高等微积分的如下结果开始：若 4 阶导数 $f(4)$ 连续，则对于 $a$ 和 $b$ 之间的某个点 $c$，有

$$\int_a^b f(x)\,dx = S - \frac{b-a}{180} \cdot f^{(4)}(c)(\Delta x)^4$$

因此，当 $\Delta x$ 趋近零时，误差

$$E_S = -\frac{b-a}{180} \cdot f^{(4)}(c)(\Delta x)^4$$

作为 $\Delta x$ 的 4 次方趋近零.（这一点有助于解释辛普森法则为什么多半比梯形法则给出更好的结果.）

不等式

$$|E_S| \leqslant \frac{b-a}{180} \max |f^{(4)}(x)| (\Delta x)^4$$

给出误差值的一个上界，其中 max 是对区间 $[a, b]$ 取值. 同梯形法则误差公式中的 $\max|f''(x)|$ 一样，我们通常无法求出 $\max|f^{(4)}(x)|$ 的准确值，因此必须用一个上界代替. 若 $M$ 是 $|f^{(4)}(x)|$ 在 $[a, b]$ 上的值的任意上界，则

$$|E_S| \leqslant \frac{b-a}{180} M(\Delta x)^4$$

用 $(b-a)/n$ 代换 $\Delta x$，上述表达式给出

$$|E_S| \leqslant \frac{M(b-a)^5}{180n^4}$$

下面举一个使用辛普森法则的误差估计的例子.

**例 3** 使用辛普森法则取 $n = 4$ 逼近 $\int_0^2 5x^4\,dx$（例 2），求误差估计的一个上界.

**解** 为了估计误差，首先求 $f(x) = 5x^4$ 的 4 阶导数在区间 $0 \leqslant x \leqslant 2$ 上的值的一个上界 $M$. 由于 4 阶导数具有常数值 $f^{(4)}(x) = 120$，我们就取 $M = 120$. 用 $b - a = 2$ 和 $n = 4$，辛普森法则的误差估计给出

$$|E_S| \leqslant \frac{M(b-a)^5}{180n^4} = \frac{120(2)^5}{180 \cdot 4^4} = \frac{1}{12}$$ ■

**例 4** 正如我们在第 5 章所见，ln 2 的值可以从积分

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

计算.

表 7.3 显示，使用不同的 $n$ 值时，积分 $\int_1^2 (1/x)\,dx$ 的梯形法则逼近的 $T_n$ 值和辛普森法则逼近的 $S_n$ 值. 请注意，辛普森法则比梯形法则有多么巨大的改进. 特别注意，当 $n$ 值加倍（$h = \Delta x$ 的值因此减半）时，$T_n$ 的误差是以 2 的平方相除，而 $S_n$ 的误差是以 2 的 4 次方相除.

**表 7.3　$\ln 2 = \int_1^2 (1/x)\,dx$ 的梯形法则逼近（$T_n$）和辛普森法则逼近（$S_n$）**

| $n$ | $T_n$ | \|误差\| 小于... | $S_n$ | \|误差\| 小于... |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 0.6937714032 | 0.0006242227 | 0.6931502307 | 0.0000030502 |
| 20 | 0.6933033818 | 0.0001562013 | 0.6931473747 | 0.0000001942 |
| 30 | 0.6932166154 | 0.0000694349 | 0.6931472190 | 0.0000000385 |
| 40 | 0.6931862400 | 0.0000390595 | 0.6931471927 | 0.0000000122 |
| 50 | 0.6931721793 | 0.0000249988 | 0.6931471856 | 0.0000000050 |
| 100 | 0.6931534305 | 0.0000062500 | 0.6931471809 | 0.0000000004 |

这在 $\Delta x = (b-a)/n$ 非常小时具有显著的效果. 辛普森逼近在 $n = 50$ 时舍入的精度达到 7 位小数，而在 $n = 100$ 时达到 9 位小数（十亿分之一）！ ■

若 $f(x)$ 是次数低于 4 的多项式，则它的 4 阶导数为零，其误差

$$E_S = -\frac{b-a}{180} f^{(4)}(c)(\Delta x)^4 = -\frac{b-a}{180}(0)(\Delta x)^4 = 0$$

因此，$f$ 的任何积分的辛普森逼近不再有误差. 换句话说，如果 $f$ 是常数、线性函数或者是 2 次多项式或 3 次多项式，辛普森法则对 $f$ 的任何积分将给出准确值，无论划分的子区间是多少. 同样，如果 $f$ 是常数或者线性函数，它的二阶导数为零，并且

$$E_T = -\frac{b-a}{12} f''(c)(\Delta x)^2 = -\frac{b-a}{12}(0)(\Delta x)^2 = 0$$

因此，梯形法则对 $f$ 的任何积分将给出准确值. 这是不足为奇数的，因为这时梯形同图形完全拟合.

从理论上说，尽管减小步长 $\Delta x$ 会降低梯形逼近和辛普森逼近中的误差，然而这样做在实践上可能是行不通的.

当 $\Delta x$ 非常小时，比如说 $\Delta x = 10^{-5}$，计算机或者计算器在计算 $S$ 和 $T$ 时必须进行的算术运算中，舍入误差可能积累到这样一种程度，不能再用误差公式描述误差如何变化. 当步长 $\Delta x$ 缩小到某个限度后，实际上可能使情况恶化. 虽然这在本书中不作为一个问题，但是读者如果遇到舍入误差的麻烦，应该参阅有关数值分析的书籍寻求替代方法.

**例 5**　一座城市打算从一小片受污染的沼泽地（见图 7.11）中抽出污水并且填土. 这块沼泽地平均深 5 英尺. 在抽水后对这片沼泽地大约需要填入多少立方码泥土？

**解**　为了计算沼泽地的容量，对这片面积作出估计，再用 5 相乘. 为了估计面积，利用辛普森法则，取 $\Delta x = 20$ ft，而不同的 $y$ 等于跨越沼泽地测量出的距离，如图 7.11

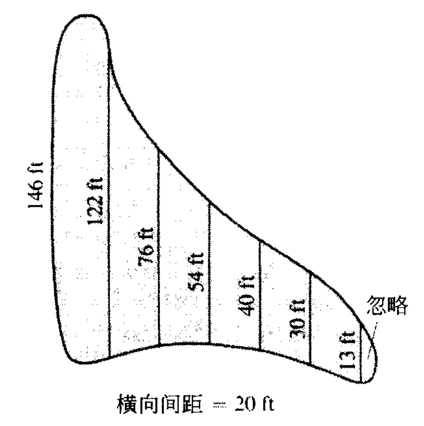



图 7.11　例 5 中沼泽地的大小

所示. 面积

$$S = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6)$$
$$= \frac{20}{3}(146 + 488 + 152 + 216 + 80 + 120 + 13) = 8100$$

填土的容量约为(8100)(5) =40500 $ft^3$ 或者 1500 $yd^3$. ■

## 习题 7.6

在习题 1 ~ 10 中, 对于积分的指令包含两部分, 一部分针对梯形法则, 一部分针对辛普森法则:

**(1)使用梯形法则**

(a)用 $n=4$ 步估计积分, 并且求 $|E_T|$ 的上界.

(b)直接求积分和求 $|E_T|$.

(c)利用公式($|E_T|$/(实际值))×100, 把 $|E_T|$ 表示成积分实际值的百分数.

**(2)使用辛普森法则**

(a)用 $n=4$ 步估计积分, 并且求 $|E_S|$ 的上界.

(b)直接求积分和求 $|E_S|$.

(c)利用公式($|E_S|$/(实际值))×100, 把 $|E_S|$ 表示成积分实际值的百分数.

**1.** $\int_1^2 x\,dx$. **2.** $\int_1^3 (2x-1)\,dx$.

**3.** $\int_{-1}^1 (x^2+1)\,dx$. **4.** $\int_{-2}^0 (x^2-1)\,dx$.

**5.** $\int_0^2 (t^3+t)\,dt$. **6.** $\int_{-1}^1 (t^3+1)\,dt$.

**7.** $\int_1^2 \frac{1}{s^2}\,ds$. **8.** $\int_2^4 \frac{1}{(s-1)^2}\,ds$.

**9.** $\int_0^{\pi} \sin t\,dt$. **10.** $\int_0^1 \sin \pi t\,dt$.

在习题 11 ~ 22 中, 分别用(a)梯形法则和(b)辛普森法则逼近积分, 估计要求误差值小于 $10^{-4}$ 所需的最少子区间的数目. (习题 11 ~ 18 中的积分来自习题 1 ~ 8.)

**11.** $\int_1^2 x\,dx$. **12.** $\int_1^3 (2x-1)\,dx$.

**13.** $\int_{-1}^1 (x^2+1)\,dx$. **14.** $\int_{-2}^0 (x^2-1)\,dx$.

**15.** $\int_0^2 (t^3+t)\,dt$. **16.** $\int_{-1}^1 (t^3+1)\,dt$.

**17.** $\int_1^2 \frac{1}{s^2}\,ds$. **18.** $\int_2^4 \frac{1}{(s-1)^2}\,ds$.

**19.** $\int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx$. **20.** $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

**21.** $\int_0^2 \sin(x+1)\,dx$. **22.** $\int_{-1}^1 \cos(x+\pi)\,dx$.

**23. 游泳池中水的容量** 长方体游泳池的宽度为 30 ft, 长度为 50 ft. 附表显示从游泳池一端到另一端每 5 ft 间隔处的水深 $h(x)$. 对积分

$$V = \int_0^{50} 30 \cdot h(x)\,dx$$

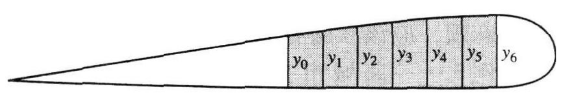
用梯形法则取 $n=10$ 估计游泳池中水的容量.

| 位置(ft) $x$ | 深度(ft) $h(x)$ | 位置(ft) $x$ | 深度(ft) $h(x)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 6.0 | 30 | 11.5 |
| 5 | 8.2 | 35 | 11.9 |
| 10 | 9.1 | 40 | 12.3 |
| 15 | 9.9 | 45 | 12.7 |
| 20 | 10.5 | 50 | 13.0 |
| 25 | 11.0 | | |

**24. 赛车行驶距离** 附表显示赛车从静止状态加速到 130 mph 的时间与速率数据. 赛车在达到这个速度时行驶了多少距离? (利用梯形法则估计速度曲线下方的面积, 但是需要注意, 时间区间长度是变化的.)

| 速率变化 | 时间(s) | 速率变化 | 时间(s) |
|---|---|---|---|
| 0 到 30 mph | 2.2 | 0 到 90 mph | 12.7 |
| 0 到 40 mph | 3.2 | 0 到 100 mph | 16.0 |
| 0 到 50 mph | 4.5 | 0 到 110 mph | 20.6 |
| 0 到 60 mph | 5.9 | 0 到 120 mph | 26.2 |
| 0 到 70 mph | 7.8 | 0 到 130 mph | 37.1 |
| 0 到 80 mph | 10.2 | | |

**25. 机翼设计** 一架新飞机的设计需要在每个机翼中置放截面面积固定的汽油箱. 附图显示机翼截面的比例图. 油箱必须贮 5000 lb 汽油, 它的密度为 42 $lb/ft^3$. 估计油箱的长度.




$y_0 = 1.5$ ft, $y_1 = 1.6$ ft, $y_2 = 1.8$ ft, $y_3 = 1.9$ ft, $y_4 = 2.0$ ft, $y_5 = y_6 = 2.1$ ft 水平间距 = 1 ft

**26. 导航站上的柴油消耗** 导航站上一台连续运转的柴油发电机, 在一周内以逐渐增加的速率耗油, 如附表所示, 直到更换过滤器时必须临时

关闭．利用梯形法则估计发电机在那一周内的耗油量．

| 星期 | 耗油率（升/h） | 星期 | 耗油率（升/h） |
|---|---|---|---|
| 日 | 0.019 | 四 | 0.025 |
| 一 | 0.020 | 五 | 0.028 |
| 二 | 0.021 | 六 | 0.031 |
| 三 | 0.023 | 日 | 0.035 |

**27. 正弦积分函数的可用值** *正弦积分函数*

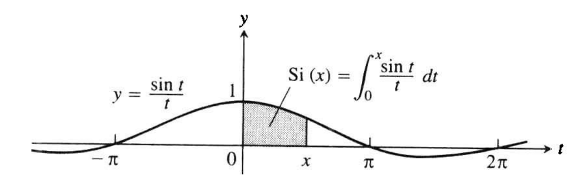
$$\mathrm{Si}(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \quad (x\text{ 的正弦积分})$$

是在工程技术中出现的许多函数之一，这些函数的公式不能简化．不存在用初等函数表示的 $(\sin t)/t$ 的反导数公式．但是，$\mathrm{Si}(x)$ 的值很容易用数值积分估计．

虽然 $\mathrm{Si}(x)$ 的表示法中没有明确显示，但是被积函数是

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{\sin t}{t}, & t\neq 0\\ 1, & t=0\end{cases}$$

即 $(\sin t)/t$ 在区间 $[0,x]$ 上的连续延拓．这个函数在其的定义域的每个点存在各阶导数．它的图形是光滑的，可以指望从辛普森法则获得令人满意的结果．




(a) 利用在区间 $[0,\pi/2]$ 上 $|f^{(4)}|\leqslant 1$ 这个事实，对于用辛普森法则取 $n=4$ 估计

$$\mathrm{Si}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{t}\,dt$$

出现的误差给出一个上界．

(b) 用辛普森法则取 $n=4$ 估计 $\mathrm{Si}(\pi/2)$．

(c) 把从(a)中求出的误差上界表示成从(b)中求出的值的百分数．

**28. 误差函数** *误差函数*

$$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

在概率论以及热流理论和信号传输理论中是很重要的．对它必须用数值方法计算，因为对于 $e^{-t^2}$ 的反导数不存在初等表达式．

(a) 利用辛普森法则取 $n=10$ 估计 $\mathrm{erf}(1)$．

(b) 在区间 $[0,1]$ 中

$$\left|\frac{d^4}{dt^4}\left(e^{-t^2}\right)\right|\leqslant 12$$

利用这个结果对(a)中估计的误差大小给出一个上界．

**29.** 证明：在梯形法则中对于 $\int_a^b f(x)\,dx$ 的和 $T$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数 $f$ 的黎曼和．（提示：利用介值定理证明，在子区间 $[x_{k-1},x_k]$ 中存在 $c_k$，满足 $f(c_k)=(f(x_{k-1})+f(x_k))/2$．）

**30.** 证明：在辛普森法则中对于 $\int_a^b f(x)\,dx$ 的和 $S$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数 $f$ 的黎曼和．（参见习题 29．）

**T31. 椭圆积分** 椭圆

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

的长度被证明为

$$\text{长度}=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,dt$$

其中 $e$ 是椭圆的离心率．这个公式中的积分称为*椭圆积分*，被积函数除开当 $e=0$ 和 $e=1$ 的情形外是非初等函数．

(a) 利用梯形法则取 $n=10$，估计当 $a=1$ 和 $e=1/2$ 时椭圆的长度．

(b) 利用 $f(t)=\sqrt{1-e^2\cos^2 t}$ 的二阶导数的绝对值小于 1 这个事实，对于(a)中得到的椭圆长度估计的误差给出一个上界．

**T32.** 曲线 $y=\sin x$ 的一个拱形的长度由

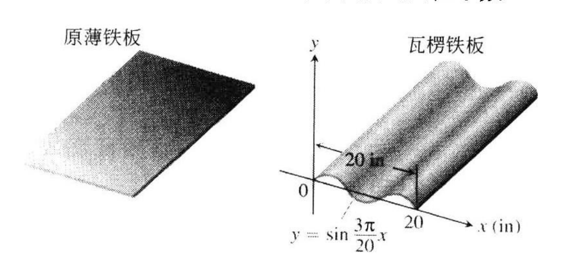
$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$$

给出．用辛普森法则取 $n=8$ 估计 $L$．

**T33.** 金属材料加工公司为制作如附图所示的瓦楞铁板屋顶的合同投标．瓦楞铁板的截面同曲线

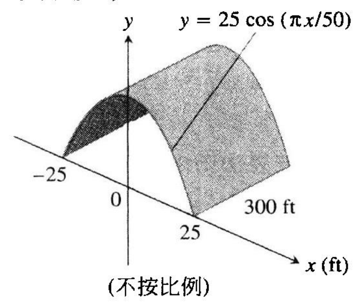
$$y=\sin\frac{3\pi}{20}x,\ 0\leqslant x\leqslant 20\ \text{in}$$

一致．如果屋顶是用薄铁板冲压而成，在加工中不伸展材料，原铁板应有多宽？为了求出答案，用数值积分逼近正弦曲线的长度到两位小数．




**T34.** 工程公司为修建如附图所示的隧道合同投标．隧道长 300 ft，基底宽 50 ft．隧道的截面像曲线

$y=25\cos(\pi x/50)$ 的一个拱形. 遂道建立后将在内壁(不包括路面)敷设防水密封层，建造成本为每平方英尺 1.75 美元. 增加这个遂道密封层的成本将是多少？(提示：用数值积分求余弦曲线的长度.)




在习题 35 和 36 中，求绕 $x$ 轴旋转曲线产生的旋转曲面面积(达到两位小数).

**35.** $y=\sin x$，$0\leqslant x\leqslant \pi$.

**36.** $y=x^2/4$，$0\leqslant x\leqslant 2$.

**37.** 用数值积分估计

$$\sin^{-1}0.6=\int_0^{0.6}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

的值. 作为参照，$\sin^{-1}0.6=0.643\ 50$ 是达到 5 位小数的数值.

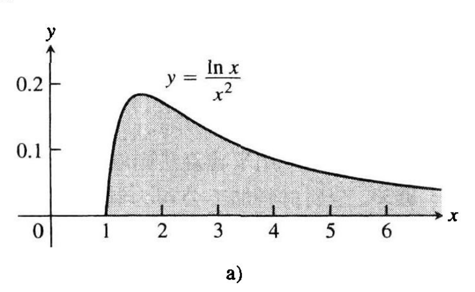
**38.** 用数值积分估计

$$\pi=4\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

的值.

## 7.7 反常积分

迄今为止，我们要求定积分具备两种性质：第一，被积函数的定义域$[a,b]$是有限的；第二，在这个定义域上被积函数的值域也是有限的. 在实践中，可能遇到的麻烦是这两个条件中有一个不满足，或者两个都不满足. 求曲线 $y=(\ln x)/x^2$ 下方从 $x=1$ 到 $x=\infty$ 的面积的积分，就是被积函数的定义域为无限的一个例子(见图 7.12a). 求曲线 $y=1/\sqrt{x}$下方从 $x=0$ 到 $x=1$ 的面积的积分则是被积函数的值域为无限的例子(见图 7.12b). 在这两种情况下，积分被称为是*反常的*，而积分要作为极限来计算. 在第 8 章会见到，当研究某些无穷级数的收敛性时，反常积分起着重要的作用.



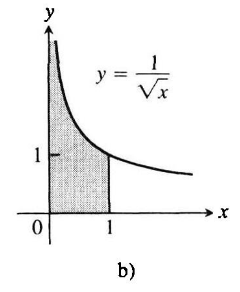




图 7.12 这两条无限曲线下方区域的面积是有限的吗？

### 7.7.1 无穷积分限

考察第一象限内位于曲线 $y=\mathrm{e}^{-x/2}$下方的无限区域(见图 7.13a). 你也许认为这个区域具有无限面积，但是我们将会看到，这个面积是有限的. 下面来说明如何确定面积的值. 首先求右边以直线 $x=b$ 为界的这部分区域的面积 $A(b)$(见图 7.13b)，

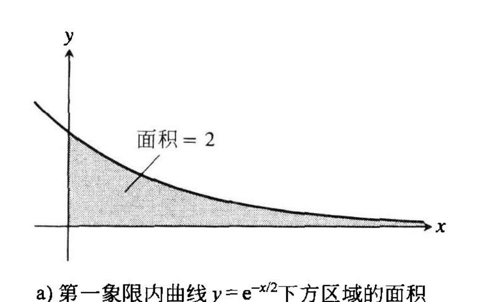
$$A(b)=\int_0^b\mathrm{e}^{-x/2}\mathrm{d}x=-2\mathrm{e}^{-x/2}\Big]_0^b=-2\mathrm{e}^{-b/2}+2$$

然后求 $A(b)$当 $b\to\infty$ 时的极限，

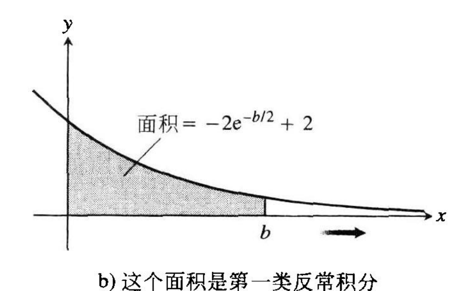
$$\lim_{b\to\infty}A(b)=\lim_{b\to\infty}(-2\mathrm{e}^{-b/2}+2)=2$$

我们指定曲线下方从 $x=0$ 到 $x=\infty$ 的区域的面积为

$$\int_0^\infty\mathrm{e}^{-x/2}\mathrm{d}x=\lim_{b\to\infty}\int_0^b\mathrm{e}^{-x/2}\mathrm{d}x=2$$



a) 第一象限内曲线 $y=e^{-x/2}$ 下方区域的面积



b) 这个面积是第一类反常积分

图 7.13

**定义** 具有无穷积分限的积分是**第一类反常积分**.

(1) 若 $f(x)$ 在区间 $[a,\infty)$ 上连续，则

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,b]$ 上连续，则

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

(3) 若 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\infty)$ 上连续，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx$$

其中 $c$ 是任意实数.

在每一种情形，如果极限是有限的，就说反常积分**收敛**，并且把极限定义为反常积分的**值**. 如果极限不存在，就说反常积分**发散**.

可以证明，在定义的第(3)项中对于 $c$ 的选择并不重要. 对任何适合的选择，可以计算或者确定 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ 的收敛或者发散.

如果在积分区间上 $f\geqslant 0$，可以把上述定义中的任何积分解释成区域的面积. 例如，我们把图 7.13 中的反常积分解释成一个面积. 在那种情形，面积取有限值 2. 如果 $f\geqslant 0$ 而且反常积分发散，就说曲线下方的面积是**无限的**.

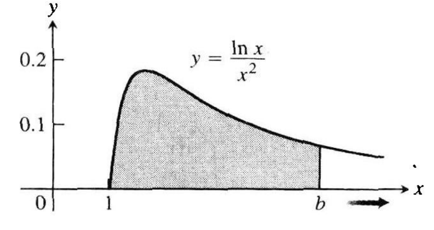


图 7.14 这条曲线下方的面积是一个反常积分(例 1)

**例 1** 曲线 $y=(\ln x)/x^2$ 下方从 $x=0$ 到 $x=\infty$ 的面积是有限的吗? 如果是有限的，它的值是多少?

**解** 我们求曲线下方从 $x=0$ 到 $x=b$ 的面积，并且考察这个面积当 $b=\infty$ 时的极限. 如果极限是有限的，把它作为曲线下方的面积(见图 7.14). 区域从 $x=1$ 到 $x=b$ 的面积为

$$\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[(\ln x)\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_1^b - \int_1^b\left(-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

(用分部积分，取 $u=\ln x, dv=dx/x^2, du=dx/x, v=-1/x$)

$$= -\frac{\ln b}{b} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^b = -\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1$$

面积当 $b\to\infty$ 时的极限为

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{\ln b}{b}-\frac{1}{b}+1\right] = -\left[\lim_{b\to\infty}\frac{\ln b}{b}\right]-0+1$$

$$= -\left[\lim_{b\to\infty}\frac{1/b}{1}\right]+1 = 0+1 = 1 \quad (\text{洛必达法则})$$

因此，这个反常积分收敛，面积为有限值 1. ■

人物传记

勒戎·狄利克雷

(Lejeune Dirichlet，1805—1859)

**例 2** 求积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

**解** 按照定义(第(3)项)，可以选择 $c=0$，并且把积分写成

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

接着求上述等式右端的两个反常积分：

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \tan^{-1}x\Big]_a^0 = \lim_{b\to-\infty}(\tan^{-1}0-\tan^{-1}a) = 0-\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \tan^{-1}x\Big]_0^b = \lim_{b\to-\infty}(\tan^{-1}b-\tan^{-1}0) = \frac{\pi}{2}-0 = \frac{\pi}{2}$$

因此，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$

由于 $1/(1+x^2)>0$，这个反常积分可以解释成曲线之下和 $x$ 轴之上的区域的(有限)面积(见图 7.15). ■

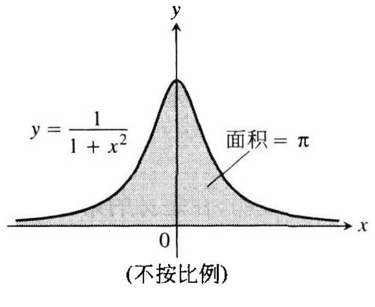



图 7.15 这条曲线下方区域的面积是有限的(例 2)

### 7.7.2 积分 $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$

函数 $y=1/x$ 是被积函数为 $y=1/x^p$ 这种形式的反常积分收敛和发散的分界线. 正如下面的例子所示，若 $p>1$，则反常积分收敛；若 $p\leqslant 1$，则反常积分发射.

**例 3** 和分 $\int_1^{\infty} dx/x^p$ 当 $p$ 取什么值时收敛?当积分收敛时，积分值是什么?

**解** 如果 $p\neq 1$，

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big]_1^b = \frac{1}{1-p}(b^{-p+1}-1) = \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}}-1\right)$$

因此，

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}}-1\right)\right] = \begin{cases}\frac{1}{p-1}, & p>1\\ \infty, & p<1\end{cases}$$

这是因为

$$\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^{p-1}} = \begin{cases}0, & p>1\\ \infty, & p<1\end{cases}$$

所以，如果 $p>1$，积分收敛于值 $1/(p-1)$；如果 $p<1$，积分发散.

如果 $p=1$，积分也发散：

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\ln x\Big]_1^b=\lim_{b\to\infty}(\ln b-\ln 1)=\infty$$ ■

### 7.7.3 带垂直渐近线的被积函数

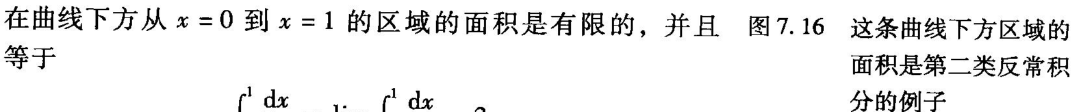
另外一类反常积分出现在被积函数具有垂直渐近线的积分中，这种垂直渐近线表示在一个积分限或者在两个积分限之间的某个点的无限不连续性. 如果被积函数$f$是积分区间上的正值函数，可以把反常积分再次解释为积分限之间位于$f$的图形之下和$x$轴之上的区域的面积.

考虑第一象限内位于曲线$y=1/\sqrt{x}$下方从$x=0$到$x=1$的区域(见图7.12b). 首先求从$x=a$到$x=1$这部分面积(见图7.16)：

$$\int_a^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\Big]_a^1=2-2\sqrt{a}$$

然后，求这个面积当$a\to0^+$时的极限：

$$\lim_{a\to0^+}\int_a^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{a\to0^+}(2-2\sqrt{a})=2$$



在曲线下方从$x=0$到$x=1$的区域的面积是有限的，并且等于

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{a\to0^+}\int_a^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=2$$

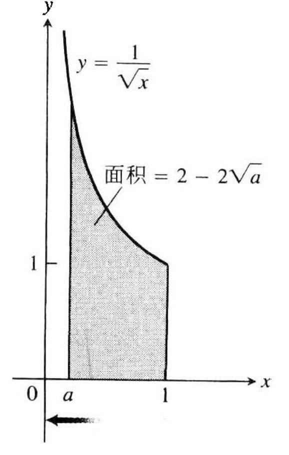



图7.16 这条曲线下方区域的面积是第二类反常积分的例子

**定义** 被积函数在积分区间内一点的值变成无穷大的积分是**第二类反常积分**.

(1)若$f(x)$在区间$(a,b]$上连续而在点$a$是不连续的，则

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx$$

(2)若$f(x)$在区间$[a,b)$上连续而在点$b$是不连续的，则

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx$$

(3)若$f(x)$在点$c(a<c<b)$不连续而在$[a,c)\cup(c,b]$上是连续的，则

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

在每一种情形，如果极限是有限的，就说反常积分**收敛**，并且把极限定义为反常积分的**值**. 如果极限不存在，就说反常积分**发散**.

在上述定义的第(3)项中，如果公式右端的两个积分都收敛，左端的积分也就收敛；否则左端的积分发散.

**例4** 考察积分

$$\int_0^1\frac{1}{1-x}\,dx$$

的收敛性.

**解** 被积函数$f(x)=1/(1-x)$在区间$[0,1)$上连续，但是在$x=1$是不连续的，并且当$x\to1^-$时函数值变成无穷大(见图7.17). 求积分：

$$\lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to 1^-}\left[-\ln|1-x|\right]_0^b = \lim_{b\to 1^-}\left[-\ln(1-b)+0\right] = \infty$$

这个极限是无限的，所以积分发散. ■

**例 5** 求积分

$$\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}}$$

**解** 被积函数 $f(x)=\frac{1}{(x-1)^{2/3}}$ 在 $x=1$ 有垂直渐近线并且在区间 $[0,1)$ 和 $(1,3]$ 上连续(见图 7.18). 因此，由上述定义的第(3)项，

$$\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}}$$

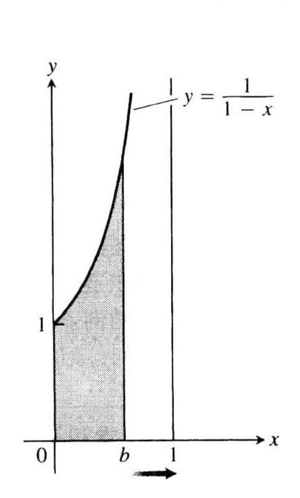



图 7.17 在曲线之下和 $x$ 轴之上从 $x=0$ 到 $x=1$ 的区域的面积不是一个实数(例 4)

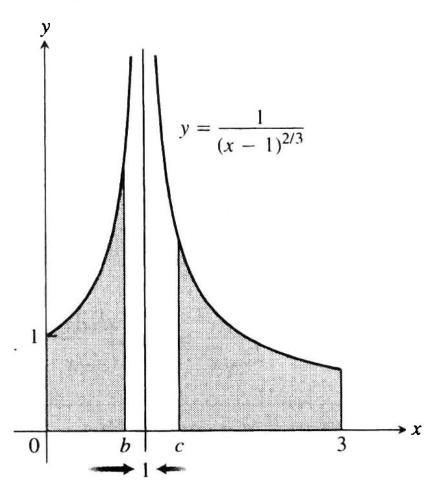



图 7.18 例 5 说明曲线下面的区域的面积存在(所以它是一个实数)

下面求这个等式右端的两个反常积分：

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b\to 1^-} 3(x-1)^{1/3}\Big]_0^b = \lim_{b\to 1^-}\left[3(b-1)^{1/3}+3\right] = 3$$

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c\to 1^+}\int_c^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c\to 1^+} 3(x-1)^{1/3}\Big]_c^3 = \lim_{c\to 1^+}\left[3(3-1)^{1/3}-3(c-1)^{1/3}\right] = 3\sqrt[3]{2}$$

最后得到

$$\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}} = 3+3\sqrt[3]{2}$$ ■

用计算机代数系统(CAS)可以计算许多收敛的反常积分. 为了应用 Maple 求积分

$$\int_2^\infty \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$$

(这个积分收敛)，输入

```
> f: = (x + 3)/((x - 1) * (x^ 2 + 1));
```

然后用积分命令

```
> int (f,x = 2.. infinity);
```

Maple 返回答案

$$-\frac{1}{2}\pi + \ln(5) + \arctan(2)$$

为了得到数值结果，用求值命令 **evalf** 并且指定结果包含的数字位数如下：

> evalf (% ,6);

其中符号% 指示计算机对屏幕上的最后表达式求值，在这里是指$(-1/2)\pi + \ln(5) + \arctan(2)$. Maple 返回 1.145 79.

在应用 Mathematica 计算这个积分时，输入

*In [1]* : = Integrate [ (x + 3)/((x - 1)(x^ 2 + 1)), {x, 2, Infinity} ]

返回

*Out [1]* = $\frac{-\pi}{2}$ + ArcTan [2] + Log [5]

为了获得 6 位数字的结果，用命令“N[ % , 6]”；它同样得到 1.145 79.

### 7.7.4 收敛与发散检验法

当我们不能直接求反常积分时，就尝试确定它是收敛还是发散. 如果积分发散，问题已经了结. 如果积分收敛，可以用数值方法求近似值. 检验反常积分收敛或者发散的两种主要方法是直接比较检验法和极限比较检验法.

**例 6** 积分$\int_4^{\infty} e^{-x^2}dx$ 是否收敛?

**解** 按照定义，

$$\int_1^{\infty} e^{-x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x^2}dx$$

我们不能直接求这个积分，因为它是非初等积分. 但是可以证明，它的极限当 $b\to\infty$ 大时是有限的. 我们知道$\int_1^b e^{-x^2}dx$ 是 $b$ 的增函数，因此，当 $b\to\infty$ 时它有有限的极限或者变成无穷大. 由于对于 $x\geqslant 1$ 的每个值有 $e^{-x^2}\leqslant e^{-x}$(见图 7.19)，$\int_1^b e^{-x^2}dx$ 不会变成无穷大，所以

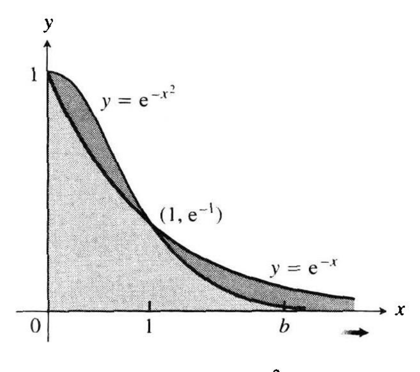



图 7.19 对于 $x>1$，$e^{-x^2}$的图形位于 $e^{-x}$的图形之下(例 6)

$$\int_1^b e^{-x^2}dx \leqslant \int_1^b e^{-x}dx = -e^{-b} + e^{-1} < e^{-1} \approx 0.367\,88$$

因此

$$\int_1^{\infty} e^{-x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x^2}dx$$

收敛于某个确定的有限值. 对于这个积分，我们除了知道是正数并且小于 0.37 以外，不知道准确值是什么. 这里得出的结论依赖于附录 A.7 中讨论的实数的完备性性质. ■

例 6 中 $e^{-x^2}$和 $e^{-x}$的比较是下述检验法的特例.

人物传记

卡尔 · 魏尔斯特拉斯
(Karl Weierstrass, 1815—1897)

**定理 2 (直接比较检验法)** 令 $f$ 和 $g$ 是区间$[a,\infty)$上的连续函数，对于所有 $x\geqslant a$ 满足$0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$. 那么

**(1)** 若$\int_a^{\infty} g(x)dx$ 收敛，则$\int_a^{\infty} f(x)dx$ 收敛；

**(2)** 若$\int_a^{\infty} f(x)dx$ 发散，则$\int_a^{\infty} g(x)dx$ 发散.

**证明** 证明定理 2 的推理同例 6 中的推理类似．若对于 $x \geqslant a$ 有 $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx, \quad b > a$$

像在例 6 中那样，由此推出：

$$若\int_a^\infty g(x)\,dx 收敛，则\int_a^\infty f(x)\,dx 收敛$$

把这个结论转换成另一种说法：

$$若\int_a^\infty f(x)\,dx 发散，则\int_a^\infty g(x)\,dx 发散$$

■

**例 7**

**(a)** 积分 $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ 收敛，因为

$$在区间[1,\infty)上 0 \leqslant \frac{\sin^2 x}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}，并且\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx 收敛(例 3)$$

**(b)** 积分 $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2 - 0.1}}\,dx$ 发散，因为

$$在区间[1,\infty)上 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 0.1}} \geqslant \frac{1}{x}，并且\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx 发散(例 3)$$

■

> **定理 3（极限比较检验法）** 若正值函数 $f$ 和 $g$ 在区间$[a,\infty)$上连续，并且
>
> $$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad 0 < L < \infty$$
>
> 则
>
> $$\int_a^\infty f(x)\,dx \quad 和 \quad \int_a^\infty g(x)\,dx$$
>
> 同时收敛或者同时发散．

定理 3 的证明在高等微积分中给出．

虽然两个函数从 $a$ 到$\infty$ 的反常积分可以同时收敛，但是并不意味着它们的积分必定有相同的值，这一点可以从下面的例子看出．

**例 8** 把积分

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1 + x^2}$$

同$\int_1^\infty (1/x^2)\,dx$ 作比较，证明它收敛．求两个积分值并且作比较．

**解** 函数$f(x) = 1/x^2$ 和$f(x) = 1/(1 + x^2)$是在区间$[1,\infty)$上连续的正值函数．此外，

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x^2}{1/(1 + x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + x^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^2} + 1\right) = 0 + 1 = 1$$

是一个正的有限极限（见图 7.20）．因此，

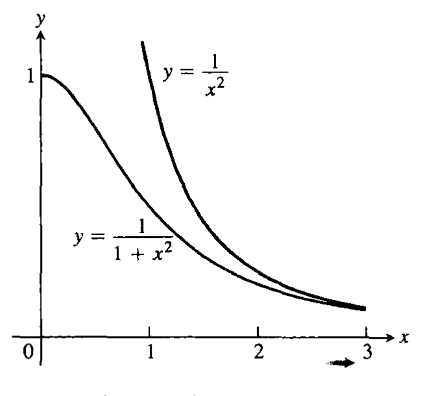


图 7.20 例 8 中的函数

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

收敛,因为$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$收敛.

然而，两个积分收敛于不同的值：

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2-1} = 1 \quad (例 3)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}[\tan^{-1}b - \tan^{-1}1] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$ ■

## 习题 7.7

在习题 1 ~ 34 中，不用积分表求积分.

1. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$.
2. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1.001}}$.
3. $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.
4. $\int_0^{4} \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$.
5. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^{2/3}}$.
6. $\int_{-8}^{1} \frac{dx}{x^{1/3}}$.
7. $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
8. $\int_0^{1} \frac{dr}{r^{0.999}}$.
9. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{2\,dx}{x^2-1}$.
10. $\int_{-\infty}^{2} \frac{2\,dx}{x^2+4}$.
11. $\int_2^{\infty} \frac{2}{v^2-v}\,dv$.
12. $\int_2^{\infty} \frac{2\,dt}{t^2-1}$.
13. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}$.
14. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4)^{3/2}}$.
15. $\int_0^{1} \frac{\theta+1}{\sqrt{\theta^2+2\theta}}\,d\theta$.
16. $\int_0^{2} \frac{s+1}{\sqrt{4-s^2}}\,ds$.
17. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.
18. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$.
19. $\int_0^{\infty} \frac{dv}{(1+v^2)(1+\tan^{-1}v)}$.
20. $\int_0^{\infty} \frac{16\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$.
21. $\int_{-\infty}^{0} \theta e^{\theta}\,d\theta$.
22. $\int_0^{\infty} 2e^{-\theta}\sin\theta\,d\theta$.
23. $\int_{-\infty}^{0} e^{-|x|}\,dx$.
24. $\int_{-\infty}^{\infty} 2xe^{-x^2}\,dx$.
25. $\int_0^{1} x\ln x\,dx$.
26. $\int_0^{1} (-\ln x)\,dx$.
27. $\int_0^{2} \frac{ds}{\sqrt{4-s^2}}$.
28. $\int_0^{1} \frac{4r\,dr}{\sqrt{1-r^4}}$.
29. $\int_1^{2} \frac{ds}{s\sqrt{s^2-1}}$.
30. $\int_2^{4} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-4}}$.
31. $\int_{-1}^{4} \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$.
32. $\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$.
33. $\int_{-1}^{\infty} \frac{d\theta}{\theta^2+5\theta+6}$.
34. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$.

在习题 35 ~ 64 中，用积分的直接比较检验法或者极限比较检验法检验积分收敛. 如果两种方法都适用，选择你宁愿使用的一种检验法.

35. $\int_0^{\pi/2} \tan\theta\,d\theta$.
36. $\int_0^{\pi/2} \cot\theta\,d\theta$.
37. $\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{\pi-\theta}}$.
38. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta\,d\theta}{(\pi-2\theta)^{1/3}}$.
39. $\int_0^{\ln 2} x^{-2}e^{-1/x}\,dx$.
40. $\int_0^{1} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.
41. $\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{t}+\sin t}$.
42. $\int_0^{1} \frac{dt}{t-\sin t}$.(提示:当 $t \geqslant 0$ 时 $t \geqslant \sin t$.)
43. $\int_0^{2} \frac{dx}{1-x^2}$.
44. $\int_0^{2} \frac{dx}{1-x}$.
45. $\int_{-1}^{1} \ln|x|\,dx$.
46. $\int_{-1}^{1} -x\ln|x|\,dx$.
47. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$.
48. $\int_4^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$.
49. $\int_2^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{v-1}}$.
50. $\int_0^{\infty} \frac{d\theta}{1+e^{\theta}}$.
51. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^6+1}}$.
52. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.
53. $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}\,dx$.
54. $\int_2^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-1}}$.
55. $\int_{\pi}^{\infty} \frac{2+\cos x}{x}\,dx$.
56. $\int_{\pi}^{\infty} \frac{1+\sin x}{x^2}\,dx$.
57. $\int_4^{\infty} \frac{2\,dt}{t^{3/2}-1}$.
58. $\int_2^{\infty} \frac{1}{\ln x}\,dx$.
59. $\int_1^{\infty} \frac{e^x}{x}\,dx$.
60. $\int_{e^e}^{\infty} \ln(\ln x)\,dx$.
61. $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x-x}}\,dx$.
62. $\int_1^{\infty} \frac{1}{e^x-2x}\,dx$.
63. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$.
64. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.
65. 求使下列积分收敛的 $p$ 值：

(a) $\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^p}$. (b) $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p}$.

**66.** $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ **可能不等于** $\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} f(x)\,dx$ 证明

$$\int_0^\infty \frac{2x\,dx}{x^2+1}$$

发散，因而

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{2x\,dx}{x^2+1}$$

发散. 然后证明

$$\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} \frac{2x\,dx}{x^2+1} = 0$$

在习题 67 ~ 70 中，所求面积、形心和体积涉及的区域是第一象限内位于曲线 $y = e^{-x}$ 和 $x$ 轴之间的无限区域.

**67.** 求区域的面积.

**68.** 求区域的形心.

**69.** 求绕 $y$ 轴旋转区域产生的旋转体体积.

**70.** 求绕 $x$ 轴旋转区域产生的旋转体体积.

**71.** 求位于曲线 $y=\sec x$ 和 $y=\tan x$ 之间从 $x=0$ 到 $x=\pi/2$ 的区域的面积.

**72.** 绕 $x$ 轴旋转习题 71 中的区域产生旋转体.

(a) 求旋转体的体积.

(b) 证明旋转体的内部表面和外部表面的面积为无穷大.

**73. 估计定义域为无限区域的收敛反常积分的值**

(a) 证明

$$\int_3^\infty e^{-3x}dx = \frac{1}{3}e^{-9} < 0.000\,042$$

因此 $\int_3^\infty e^{-x^2}dx < 0.000\,042$. 解释为什么这意味着可以用 $\int_0^3 e^{-x^2}dx$ 代替 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ 而不至于引入大于 0.000 042 的误差值.

**T** (b) 求积分 $\int_0^3 e^{-x^2}$ 的数值.

**74. 表面积无限的油漆筒或者加布里埃耳喇叭筒**

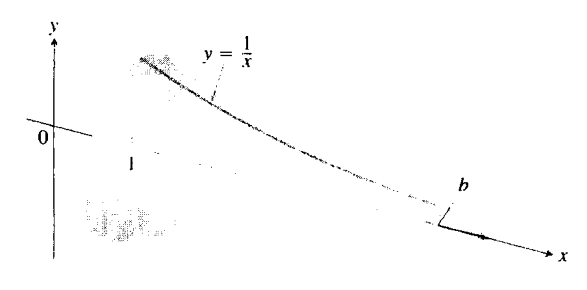
如例 3 所示，积分 $\int_1^\infty (dx/x)$ 发散. 这意味着积分

$$\int_1^\infty 2\pi\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx$$

也发散，上面这个积分是绕 $x$ 轴旋转曲线 $y=1/x\,(1\leq x)$ 扫出的旋转体*表面积*的度量. 从比较这两个积分看出，对于每个有限值 $b>1$，

$$\int_1^b 2\pi\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx > 2\pi\int_1^b \frac{1}{x}\,dx$$

但是，作为旋转体*体积*的积分




$$\int_1^\infty \pi\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$$

收敛.

(a) 计算这个积分.

(b) 有时，这个旋转体被描述为这样一个油漆筒，它所盛的油漆不足以涂抹它的内壁. 请对这一点略加思考. 作为常识而言，不能用有限量的油漆覆盖无限的表面. 但是，如果我们在这个喇叭筒中盛满油漆（有限量），那么就盖住了它无限的表面. 请对这个明显的矛盾作出解释.

**75. 正弦积分函数** 积分

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$$

称为*正弦积分函数*，在光学中有重要的应用.

**T** (a) 画出被积函数 $(\sin t)/t$，$t>0$ 的图形. Si 函数是处处增加的函数还是处处减少的函数？试想 $\mathrm{Si}(x)=0$ 对于 $x>0$ 成立吗？通过绘制函数 $\mathrm{Si}(x)$ 对于 $0\leq x\leq 25$ 的图形检验答案.

(b) 考察积分

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$$

的收敛性. 如果积分收敛，它的值是什么？

**76. 误差函数** 函数

$$\mathrm{erf}\,(x) = \int_0^x \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\,dt$$

称为*误差函数*，在概率论与统计学中有着重要的应用.

**T** (a) 画出误差函数对于 $0\leq x\leq 25$ 的图形.

(b) 考察积分

$$\int_0^\infty \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\,dt$$

的收敛性. 如果积分收敛，它的值是什么？在 13.4 节习题 31 可以见到如何证实你的估计.

**77. 正态概率分布函数** 函数

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

称为以$\mu$为均值和$\sigma$为标准差的正态概率密度函数. 数$\mu$表明分布集中的位置，而$\sigma$度量分布围绕均值的"散布".

从概率论知道

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=1$$

在下面部分令$\mu=0$和$\sigma=1$.

T (a)画出$f$的图形. 求$f$增加的区间和$f$减少的区间，以及任何局部极值和它们出现的位置.

(b)求积分

$$\int_{-n}^{n}f(x)\,dx$$

其中取$n=1, 2, 3$.

(c)对于

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=1$$

给出有说服力的论据.

(提示：证明对于$x>1$有$0<f(x)<e^{-x/2}$，而对于$b>1$，当$b\to\infty$时有$\int_b^{\infty}e^{-x/2}dx\to 0$.)

**78.** 证明：如果$f(x)$在每个实数区间上是可积的，并且$a$和$b$是$a<b$的实数，那么

(a)$\int_{-\infty}^{a}f(x)\,dx$和$\int_{a}^{\infty}f(x)\,dx$同时收敛，当且仅当$\int_{-\infty}^{b}f(x)\,dx$和$\int_{b}^{\infty}f(x)\,dx$同时收敛.

(b)$\int_{-\infty}^{a}f(x)\,dx+\int_{a}^{\infty}f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{b}f(x)\,dx+\int_{b}^{\infty}f(x)\,dx$，只要其中包含的积分收敛.

**计算机探究**

在习题79～82中，用一种CAS(计算机代数系统)考察取不同$p$值(包括非整数值)时的积分. 积分对于什么$p$值收敛？当积分收敛时，它的值是什么？画出被积函数对于不同$p$值的图形.

**79.** $\int_0^{e}x^p\ln x\,dx$.

**80.** $\int_e^{\infty}x^p\ln x\,dx$.

**81.** $\int_0^{\infty}x^p\ln x\,dx$.

**82.** $\int_{-\infty}^{\infty}x^p\ln|x|\,dx$.

## 第7章复习指导问题

**1.** 分部积分法的公式是什么？它来源于何处？为什么你可能需要使用它？

**2.** 当应用分部积分法公式时，如何选择$u$和$dv$？对于形式为$\int f(x)\,dx$的积分怎样应用分部积分法？

**3.** 部分分式积分法的目标是什么？

**4.** 当多项式$f(x)$的次数小于多项式$g(x)$的次数时，如果

(a)$g(x)$是不同线式因式的积，

(b)$g(x)$包含重复的线性因式，

(c)$g(x)$包含不可约的二次因式，

如何把$f(x)/g(x)$表示成部分分式之和？如果$f$的次数不小于$g$的次数，应该怎么做？

**5.** 如果被积函数是形式为$\sin^n x\cos^m x$的积，其中$m$和$n$是非负整数，如何求积分？对于每种情形给出一个具体的例子.

**6.** 求$\sin mx\sin nx$，$\sin mx\cos nx$和$\cos mx\cos nx$的积分时分别做什么代换？对于每种情况给出一个例子.

**7.** 用什么代换有时能够把包含$\sqrt{a^2-x^2}$，$\sqrt{a^2+x^2}$和$\sqrt{x^2-a^2}$的积分变换成直接求积的积分？对于每种情形给出一个例子.

**8.** 对于包含在3个基本三角代换中的变量加上什么限制才能保证代换是可逆的(存在逆代换)？

**9.** 通常如何使用积分表？如果积分表中不包含你需要的特定积分，应该怎样做？

**10.** 什么是归约公式？如何使用归约公式？举一个例子。

**11.** 对于数值积分合作草拟一份"如何做"的简短指南，由你写关于梯形法则的部分.

(a)关于法则本身需要说明什么？怎样使用它？怎样达到要求的精度？

(b)如果你是写关于辛普森法则的部分，需要说明什么？

**12.** 如何比较辛普森法则与梯形法则的相对优缺点？

**13.** 什么是第一类反常积分和第二类反常积分？如何定义两种不同类型的反常积分的值？举出一些例子说明.

**14.** 对于不能直接求积的反常积分，可以用什么检验法确定积分的收敛和发散？举出一些使用它们的例子.

## 第 7 章实习习题

在习题 1 ~ 8 中，用分部积分法求积分.

1. $\int \ln(x+1)\,dx$.
2. $\int x^2 \ln x\,dx$.
3. $\int \tan^{-1}3x\,dx$.
4. $\int \cos^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)dx$.
5. $\int (x+1)^2 e^x dx$.
6. $\int x^2\sin(1-x)dx$.
7. $\int e^x\cos 2x\,dx$.
8. $\int e^{-2x}\sin 3x\,dx$.

在习题 9 ~ 28 中，求积分. 在计算中可能需要首先用代换.

9. $\int \frac{x\,dx}{x^2-3x+2}$.
10. $\int \frac{x\,dx}{x^2+4x+3}$.
11. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$.
12. $\int \frac{x+1}{x^2(x-1)}dx$.
13. $\int \frac{\sin\theta\,d\theta}{\cos^2\theta+\cos\theta-2}$.
14. $\int \frac{\cos\theta\,d\theta}{\sin^2\theta+\sin\theta-6}$.
15. $\int \frac{3x^2+4x+4}{x^3+x}dx$.
16. $\int \frac{4x\,dx}{x^3+4x}$.
17. $\int \frac{v+3}{2v^3-8v}dv$.
18. $\int \frac{(3v-7)dv}{(v-1)(v-2)(v-3)}$.
19. $\int \frac{dt}{t^4+4t^2+3}$.
20. $\int \frac{t\,dt}{t^4-t^2-2}$.
21. $\int \frac{x^3+x^2}{x^2+x-2}dx$.
22. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x}dx$.
23. $\int \frac{x^3+4x^2}{x^2+4x+3}dx$.
24. $\int \frac{2x^3+x^2-21x+24}{x^2+2x-8}dx$.
25. $\int \frac{dx}{x(3\sqrt{x+1})}$.
26. $\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})}$.
27. $\int \frac{ds}{e^s-1}$.
28. $\int \frac{ds}{\sqrt{e^s+1}}$.

在习题 29 ~ 32 中，求积分：**(a)** 不用三角代换；**(b)** 用三角代换.

29. $\int \frac{y\,dy}{\sqrt{16-y^2}}$.
30. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4+x^2}}$.
31. $\int \frac{x\,dx}{4-x^2}$.
32. $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{4t^2-1}}$.

在习题 33 ~ 36 中，求积分.

33. $\int \frac{x\,dx}{9-x^2}$.
34. $\int \frac{dx}{x(9-x^2)}$.
35. $\int \frac{dx}{9-x^2}$.
36. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

在习题 37 ~ 44 中，求积分.

37. $\int \sin^3 x\cos^4 x\,dx$.
38. $\int \cos^5 x\sin^5 x\,dx$.
39. $\int \tan^4 x\sec^2 x\,dx$.
40. $\int \tan^3 x\sec^3 x\,dx$.
41. $\int \sin 5\theta\cos 6\theta\,d\theta$.
42. $\int \cos 3\theta\cos 3\theta\,d\theta$.
43. $\int \sqrt{1+\cos(t/2)}\,dt$.
44. $\int e^t\sqrt{\tan^2 e^t+1}\,dt$.

45. 用辛普森法则估计积分

$$\ln 3 = \int_1^3 \frac{1}{x}dx$$

的值，为了保证误差的绝对值不超过 $10^{-4}$，按照辛普森法则的误差界公式，应该使用多少个子区间？（记住，辛普森法则的子区间数目必须为偶数.）

46. 由简单计算显示，如果 $0\leqslant x\leqslant 1$，那么 $f(x)=\sqrt{1+x^4}$ 的二阶导数位于 0 与 8 之间. 根据这一点，为了用梯形法则估计 $f$ 从 0 到 1 积分的误差的绝对值不超过 $10^{-3}$，大约需要用多少个子区间？

47. 直接计算显示

$$\int_0^{\pi} 2\sin^2 x\,dx = \pi$$

利用 $n=6$ 的梯形法则估计，如何接近这个值？利用 $n=6$ 的辛普森法则估计，如何接近这个值？试用两种法则求出积分.

48. 你计划用辛普森法则估计积分

$$\int_1^2 f(x)\,dx$$

的值，要求误差大小低于 $10^{-5}$. 你已断定在整个积分区间上 $|f^{(4)}(x)|\leqslant 3$. 为了保证所需精度，应使用多少个子区间？（记住，辛普森法则的子区间数目必须是偶数.）

49. **平均温度** 计算一年 365 天温度函数

$$f(x) = 37\sin\left(\frac{2\pi}{365}(x-101)\right)+25$$

的平均值. 这是估计阿拉斯加州费尔班克斯镇年平均气温的一种方法. 国家气象局公布的官方数字，那里年正常日平均气温为 25.7℉，略高于 $f(x)$ 的平均值.

50. **气体的热容量** 热容量 $C_v$ 是给定质量的气体在体积不变的条件下温度升高 1℃ 所需的热量，

以 cal/deg-mol(卡/度-克分子量)为单位. 氧气的热容量依赖于它的温度 $T$，并且满足公式

$$C_v = 8.27 + 10^{-5}(26T - 1.87T^2)$$

求 $C_v$ 对于 $20° \leqslant T \leqslant 675$ ℃的平均值以及达到平均值时的温度.

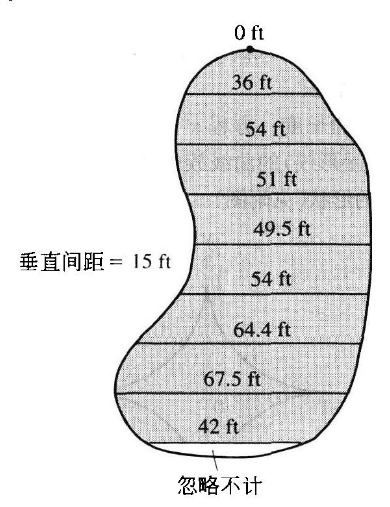
**51. 燃料效率** 汽车上的计算机给出以加仑每小时计数的燃料消耗的读数. 在一次旅行中，一位乘客记录下一小时旅程每 5 分钟的油耗如下：

| 时间 | gal/h | 时间 | gal/h |
|---|---|---|---|
| 0 | 2.5 | 35 | 2.5 |
| 5 | 2.4 | 40 | 2.4 |
| 10 | 2.3 | 45 | 2.3 |
| 15 | 2.4 | 50 | 2.4 |
| 20 | 2.4 | 55 | 2.4 |
| 25 | 2.5 | 60 | 2.3 |
| 30 | 2.6 | | |

(a) 使用梯形法则求这一小时行程中总油耗的近似值.

(b) 如果汽车在这一小时内以 60 英里的速度行驶，它在那段行程中的燃料效率(以 mi/gal 为单位)是多少?

**52. 新停车场** 为了满足停车需求，你所在的城市指定了如附图所示的一块场地. 作为市政工程师，市政委员会要求你计算能否用 11 000 美元修建这个停车场. 场地清理费为 0.10 美元 1 平方英尺，铺设费为 2 美元 1 平方英尺. 使用辛普森法则计算此项工程能否用 11 000 美元建成.




在习题 53 ~ 62 中，求反常积分.

**53.** $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$.

**54.** $\int_0^1 \ln x \, dx$.

**55.** $\int_{-1}^1 \frac{dy}{y^{2/3}}$.

**56.** $\int_{-2}^0 \frac{d\theta}{(\theta + 1)^{3/5}}$.

**57.** $\int_3^\infty \frac{2 \, du}{u^2 - 2u}$.

**58.** $\int_1^\infty \frac{3v - 1}{4v^3 - v^2} \, dv$.

**59.** $\int_0^\infty x^2 e^{-x} \, dx$.

**60.** $\int_{-\infty}^0 x e^{3x} \, dx$.

**61.** $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{4x^2 + 9}$.

**62.** $\int_{-\infty}^\infty \frac{4 \, dx}{x^2 + 16}$.

在习题 63 ~ 68 的反常积分中，哪些收敛，哪些发散?

**63.** $\int_6^\infty \frac{d\theta}{\sqrt{\theta^2 + 1}}$.

**64.** $\int_0^\infty e^{-u} \cos u \, du$.

**65.** $\int_1^\infty \frac{\ln z}{z} dz$.

**66.** $\int_1^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \, dt$.

**67.** $\int_{-\infty}^\infty \frac{2 \, dx}{e^x + e^{-x}}$.

**68.** $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2(1 + e^x)}$.

在习题 69 ~ 98 中，求积分. 这些积分是按随机顺序列出的.

**69.** $\int \frac{x \, dx}{1 + \sqrt{x}}$.

**70.** $\int \frac{x^3 + 2}{4 - x^2} \, dx$.

**71.** $\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)^2}$.

**72.** $\int \frac{dx}{\sqrt{-2x - x^2}}$.

**73.** $\int \frac{2 - \cos x + \sin x}{\sin^2 x} \, dx$.

**74.** $\int \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \, d\theta$.

**75.** $\int \frac{9 \, dv}{81 - v^4}$.

**76.** $\int_2^\infty \frac{dx}{(x - 1)^2}$.

**77.** $\int \theta \cos(2\theta + 1) d\theta$.

**78.** $\int \frac{x^3 dx}{x^2 - 2x + 1}$.

**79.** $\int \frac{\sin 2\theta \, d\theta}{(1 + \cos 2\theta)^2}$.

**80.** $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos 4x} \, dx$.

**81.** $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{2 - x}}$.

**82.** $\int \frac{\sqrt{1 - v^2}}{v^2} \, dv$.

**83.** $\int \frac{dy}{y^2 - 2y + 2}$.

**84.** $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{8 - 2x^2 - x^4}}$.

**85.** $\int \frac{z + 1}{z^2(z^2 + 4)} \, dz$.

**86.** $\int x^3 e^{(x^2)} dx$.

**87.** $\int \frac{t \, dt}{\sqrt{9 - 4t^2}}$.

**88.** $\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2} \, dx$.

**89.** $\int \frac{e^t \, dt}{e^{2t} + 3e^t + 2}$.

**90.** $\int \tan^3 t \, dt$.

**91.** $\int_1^\infty \frac{\ln y}{y^3} \, dy$.

**92.** $\int \frac{\cot v \, dv}{\ln \sin v}$.

**93.** $\int e^{\ln \sqrt{x}} \, dx$.

**94.** $\int e^\theta \sqrt{3 + 4e^\theta} \, d\theta$.

95. $\int \frac{\sin 5t\ dt}{1+(\cos 5t)^2}$.

96. $\int \frac{dv}{\sqrt{e^{2v}-1}}$.

97. $\int \frac{dr}{1+\sqrt{r}}$.

98. $\int \frac{4x^3-20x}{x^4-10x^2+9}dx$.

## 第 7 章补充和提高习题

在习题 1 ~ 6 中，求积分.

1. $\int (\sin^{-1}x)^2 dx$.

2. $\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m)}$.

3. $\int x \sin^{-1}x\ dx$.

4. $\int \sin^{-1}\sqrt{y}\ dy$.

5. $\int \frac{dt}{t-\sqrt{1-t^2}}$.

6. $\int \frac{dx}{x^4+4}$.

在习题 7 和 8 中，求积分.

7. $\lim_{x\to\infty}\int_{-x}^{x}\sin t\ dt$.

8. $\lim_{x\to 0^+} x\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt$.

在习题 9 和 10 中，求极限：首先用定积分表示它们，然后求积分.

9. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\sqrt[n]{1+\frac{k}{n}}$.

10. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$.

11. **求弧长** 求曲线

$$y=\int_0^x\sqrt{\cos 2t}\ dt,\quad 0\leqslant x\leqslant \pi/4$$

的长度.

12. **求弧长** 求曲线

$$y=\ln(1-x^2),0\leqslant x\leqslant 1/2$$

的长度.

13. **求体积** 绕 $y$ 轴旋转第一象限内由 $x$ 轴和曲线 $y=3x\ \sqrt{1-x}$ 包围的区域，求产生的旋转体体积.

14. **求体积** 绕 $x$ 轴旋转第一象限内由 $x$ 轴和曲线 $y=5/(x\ \sqrt{5-x})$ 以及直线 $x=1$ 和 $x=4$ 包围的区域，求产生的旋转体体积.

15. **求体积** 绕 $y$ 轴旋转第一象限内由坐标轴以及曲线 $y=e^x$ 和直线 $x=1$ 包围的区域，求产生的旋转体体积.

16. **求体积** 绕直线 $x=\ln 2$ 旋转第一象限内上方以曲线 $y=e^x-1$ 为界和下方以 $x$ 轴为界以及右边以直线 $x=\ln 2$ 为界的区域，求产生的旋转体体积.

17. **求体积** 令 $R$ 是第一象限内的“三角形”区域，上方以直线 $y=1$ 为界，下方以曲线 $y=\ln x$ 为界，左边以直线 $x=1$ 为界.

(a) 绕 $x$ 轴旋转 $R$;

(b) 绕直线 $y=1$ 旋转 $R$.

求产生的旋转体体积.

18. **求体积**（续习题 17）

(a) 绕 $y$ 轴旋转区域 $R$;

(b) 绕直线 $x=1$ 旋转区域 $R$.

求产生的旋转体体积.

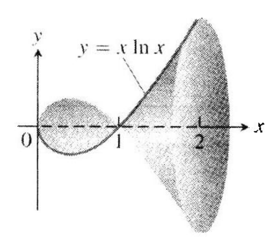
19. **求体积** 绕 $x$ 轴旋转 $x$ 轴和曲线

$$y=f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ x\ln x, & 0<x\leqslant 2\end{cases}$$

之间的区域产生附图所示的旋转体.

(a) 证明 $f$ 在 $x=0$ 连续.

(b) 求旋转体体积.




20. **求体积** 绕 $x$ 轴旋转第一象限内以两条坐标轴和曲线 $y=-\ln x$ 为界的区域，求产生的旋转体体积.

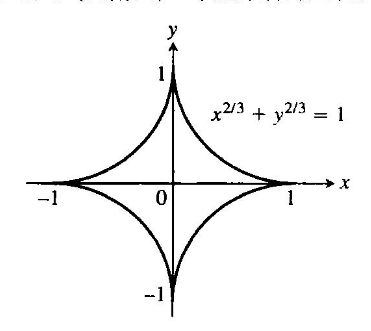
21. **区域的形心** 求第一象限内下方以 $x$ 轴为界、上方以曲线 $y=\ln x$ 为界和右边以直线 $x=e$ 为界的区域的形心.

22. **区域的形心** 求平面内由曲线 $y=\pm(1-x^2)^{-1/2}$ 以及直线 $x=0$ 和 $x=1$ 包围的区域的形心.

23. **曲线的长度** 求曲线 $y=\ln x$ 从 $x=1$ 到 $x=e$ 的长度.

24. **曲面的面积** 求绕 $y$ 轴旋转习题 23 的曲线产生的曲面面积.

25. **星状线的长度** 方程 $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ 是称为*星状线*（不是星形线）的曲线族中的一种，因为这些曲线像星的形状（见附图）. 求这条特殊星状线的长度.



**26. 由星状线产生的曲面** 求绕 $x$ 轴旋转习题 25 的星状线产生的曲面面积.

**27.** 反常积分

$$\int_1^{\infty}\left(\frac{ax}{x^2+1}-\frac{1}{2x}\right)\mathrm{d}x$$

对于 $a$ 的哪个值或者哪些值收敛? 求对应的积分值.

**28.** 对于每个 $x>0$, 令

$$G(x)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$$

证明: 对于每个 $x>0$, $xG(x)=1$.

**29. 无限的面积与有限的体积** 对于曲线 $y=x^{-p}$ $(1\leqslant x<\infty)$ 和 $x$ 轴之间的区域, 以及绕 $x$ 轴旋转这个区域产生的旋转体, 当 $p$ 取什么值时区域具有无限面积而旋转体的体积是有限的?

**30. 无限的面积与有限的体积** 对于第一象限内由曲线 $y=x^{-p}$ 和 $y$ 轴以及直线 $x=1$ 和 $x$ 轴上的区间 $[0,1]$ 包围的区域, 当 $p$ 取什么值时绕一条坐标轴旋转这个区域产生的旋转体具有无限面积而旋转体体积是有限的?

**Γ 函数和斯特林公式** 欧拉 Γ 函数(Γ 是希腊字母 $g$ 的大写) $\Gamma(x)$ 用积分把阶乘函数从非负整数扩充到其他实数值. 函数的表达式是

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t,\quad x>0$$

对于每个正数 $x$, 数值 $\Gamma(x)$ 是 $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ 对 $t$ 从 0 到 ∞ 的积分. 图 7.21 显示 Γ 在原点附近的图形. 当你作第 13 章补充和提高习题第 23 题后, 将会看出如何计算 $\Gamma(1/2)$.

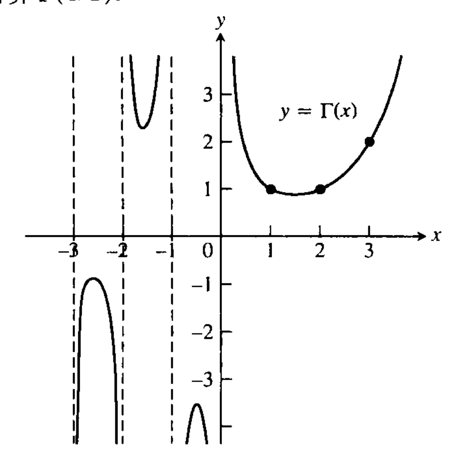



图 7.21 欧拉 Γ 函数 $\Gamma(x)$ 是 $x$ 的连续函数, 它在每个正整数 $n+1$ 的值为 $n!$. 定义 Γ 的积分公式仅对 $x>0$ 有效, 但是应用公式 $\Gamma(x)=(\Gamma(x+1))/x$ 可以把它扩展到负的非整数值, 这就是习题 31 要证明的问题

**31. 如果 $n$ 是非负整数, $\Gamma(n+1)=n!$**

(a) 证明 $\Gamma(1)=1$.

(b) 然后对 $\Gamma(x+1)$ 的积分应用分部积分法, 证明 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$. 这就给出

$$\begin{aligned}\Gamma(2)&=1\Gamma(1)=1\\ \Gamma(3)&=2\Gamma(2)=2\\ \Gamma(4)&=3\Gamma(3)=6\\ &\vdots\\ \Gamma(n+1)&=n\Gamma(n)=n! \qquad (1)\end{aligned}$$

(c) 用数学归纳法证明等式(1)对于每个非负整数成立.

**32. 斯特林公式** 苏格兰数学家詹姆斯 · 斯特林(1692—1770)证明了

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\mathrm{e}}{x}\right)^x\sqrt{\frac{x}{2\pi}}\Gamma(x)=1$$

所以对于很大的 $x$,

$$\Gamma(x)=\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x\sqrt{\frac{2\pi}{x}}(1+\varepsilon(x)),$$

$$\text{当 } x\to\infty \text{ 时 } \varepsilon(x)\to 0 \qquad (2)$$

舍弃 $\varepsilon(x)$, 导致逼近

$$\Gamma(x)\approx\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\quad(\text{斯特林公式})\ (3)$$

(a) **$n!$ 的斯特林逼近** 利用公式(3)和等式 $n!=n\Gamma(n)$, 证明

$$n!\approx\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2n\pi}\quad(\text{斯特林逼近})\ (4)$$

当你作 8.1 节中的习题 90 时, 将会看出由公式(4)得到逼近

$$\sqrt[n]{n!}\approx\frac{n}{\mathrm{e}} \qquad (5)$$

**T** (b) 对于 $n=10, 20, 30, \cdots$, 把从计算器求得的 $n!$ 的值同由斯特林逼近给出的值作比较, 直到你的计算器能够计算的全部值.

**T** (c) 公式(2)的一种改进给出

$$\Gamma(x)=\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\mathrm{e}^{1/(12x)}(1+\varepsilon(x))$$

或者

$$\Gamma(x)\approx\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\mathrm{e}^{1/(12x)}$$

这个逼近表明

$$n!\approx\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2n\pi}\,\mathrm{e}^{1/(12n)} \qquad (6)$$

对于 10!, 把从你的计算器、斯特林逼近和公式(6)得到的值作比较.

# 第8章　无穷序列与无穷级数

**概述**　人人都知道如何把两个数甚至几个数加在一起. 然而，怎样把无穷多的数加在一起呢？我们在这一章来回答这个问题，它是无穷序列与无穷级数理论的一部分.

这个理论的一项重要应用，是给出把已知的可微函数$f(x)$表示成$x$幂的无限和的方法，所以看起来像是"具有无穷多项的多项式."此外，这个方法扩展我们对多项式如何求值以及如何求导数和积分的知识，因此我们能够处理比至今遇到的更为一般的函数. 这些新的函数经常用于解决科学和工程技术中的重大问题.

## 8.1　序列

**历史述评**

**序列与级数**

序列是给定顺序的一系列数的列表

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

表中$a_1$，$a_2$，$a_3$等每一个代表一个数. 这些数是序列的**项**. 例如，序列

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \cdots, 2n, \cdots$$

的第一项$a_1=2$，第2项$a_2=4$，第$n$项$a_n=2n$. 整数$n$称为$a_n$的**下标**，指示$a_n$在表中出现的位置. 序列中的顺序是重要的. 序列2，4，6，8，…和序列4，2，6，8，…是不同的序列.

我们可以把序列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

想象成一个函数，这个函数把1映射到$a_1$，2映射到$a_2$，3映射到$a_3$，以及在一般情况下把正整数$n$映射到第$n$项$a_n$. 这就引出序列的形式定义.

> **定义**　数的**无穷序列**是定义域为正整数集合的函数.

与序列

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \cdots, 2n, \cdots$$

相关的函数使1变成$a_1=2$，2变成$a_2=4$，等等. 这个序列的一般特性由公式$a_n=2n$描述.

我们同样可以取定义域的整数大于某个给定的数$n_0$，并且允许这种类型的序列. 例如，序列

$$12, 14, 16, 18, 20, 22, \cdots$$

用公式$a_n=10+2n$描述. 它也能用更简单的公式$b_n=2n$描述，其中下标$n$从6开始并且增加. 为了允许这种更简单的公式，我们令序列的第一个下标为任意整数. 在上述序列中，$\{a_n\}$从$a_1$开始，而$\{b_n\}$从$b_6$开始.

序列可以用指定它们的项的表示规则描述，像

$$a_n=\sqrt{n},\quad b_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n},\quad c_n=\frac{n-1}{n},\quad d_n=(-1)^{n+1}$$

或者用罗列项的方式描述，像

$$\{a_n\}=\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots, \sqrt{n}, \cdots\}$$

$$\{b_n\}=\left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \cdots\right\}$$

$$\{c_n\}=\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \cdots\right\}$$

$$\{d_n\}=\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots\}$$

有时也写成

$$\{a_n\} = \{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$$

图 8.1 显示用图形表示序列的两种方法. 第一种方法在实数轴上标明序列 $a_1$, $a_2$, $a_3$, …, $a_n$, …中的前面几个点. 第二种方法显示定义序列的函数的图形. 函数仅对整数输入有定义, 而图形由 $xy$ 平面中的一些点组成, 它们位于 $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, …, $(n, a_n)$, ….

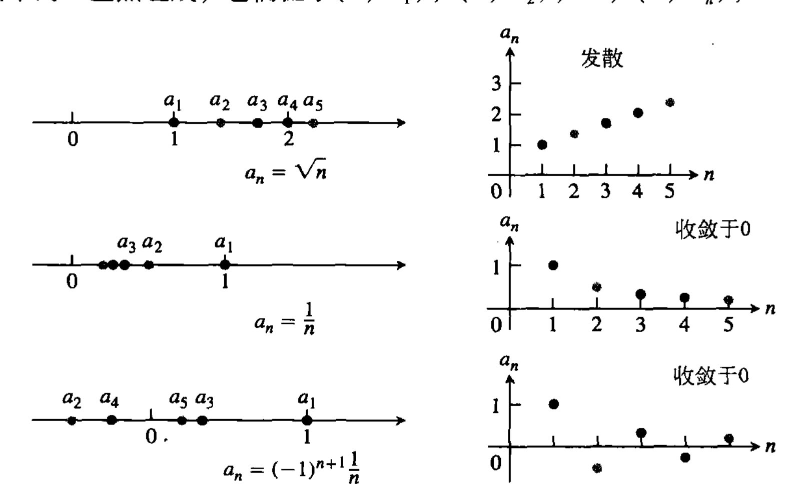



图 8.1 序列可以用实线上的点表示, 或者用平面上的点表示, 其中横轴 $n$ 代表项的下标号, 纵轴 $a_n$ 代表项的值

### 8.1.1 收敛性与发散性

有时序列中的数当下标 $n$ 增加时趋近某个唯一的值. 在序列

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$$

中出现这种情况, 它的项当 $n$ 增大时趋近 0; 在序列

$$\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots, 1-\frac{1}{n}, \cdots\right\}$$

中也出现这种情况, 它的项当 $n$ 增大时趋近 1. 另一方面, 像

$$\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots, \sqrt{n}, \cdots\}$$

这样的序列, 它的项随着 $n$ 的增加而变得比任何数都大, 而像

$$\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots\}$$

这样的序列, 它的项在 1 和 -1 之间来回变动, 不会收敛到一个唯一的值. 下面的定义给出序列收敛于某个有限值的含义. 它表明, 如果通过取下标 $n$ 大于某个值 $N$ 而达到序列中足够远的项, 那么 $a_n$ 同序列极限之差将变得比预先任意选定的数 $\varepsilon > 0$ 小.

**定义** 序列 $\{a_n\}$ **收敛**于数 $L$, 是指对于每个正数 $\varepsilon$, 存在一个对应的整数 $N$, 使得对于所有 $n$, 有

$$n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

如果不存在这样的数 $L$, 就说 $\{a_n\}$ **发散**.

如果 $\{a_n\}$ 收敛于 $L$, 记为 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, 或者简单地表示成 $a_n \to L$, 并且称 $L$ 为序列的**极限** (见图 8.2).

人物传记

尼古拉·奥雷姆

(Nicole Oresme，大约 1320—1382)

上述定义同 2.4 节中函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限的定义 $(\lim_{x\to\infty} f(x))$ 非常相似. 我们将利用这种联系计算序列的极限.

**例 1** 证明：

**(a)** $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$；**(b)** $\lim_{n\to\infty}k=k$ （$k$ 为任意常数）.

**解**

**(a)** 设给定 $\varepsilon>0$. 必须证明存在这样一个整数 $N$，对于所有 $n$，

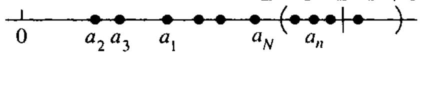
$$n>N \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$$

如果 $(1/n)<\varepsilon$ 或者 $n>1/\varepsilon$，这个蕴涵式成立. 如果 $N$ 是大于 $1/\varepsilon$ 的任何整数，蕴涵式对于所有 $n>N$ 成立. 这证明 $\lim_{n\to\infty}(1/n)=0$.

**(b)** 设给定 $\varepsilon>0$. 必须证明存在这样一个整数 $N$，对于所有 $n$，

$$n>N \quad\Rightarrow\quad |k-k|<\varepsilon$$

由于 $k-k=0$，可以用任何正整数作为 $N$，并且蕴涵式成立. 这证明对于任意常数 $k$，$\lim_{n\to\infty}k=k$. ■



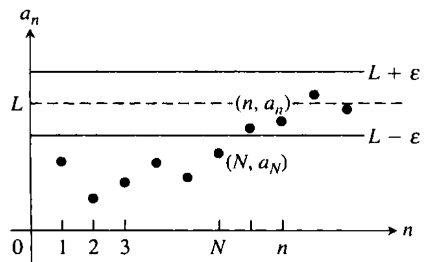




图 8.2 如果 $y=L$ 是点序列 $\{(n, a_n)\}$ 的水平渐近线，则 $a_n\to L$；在这个图形中，所有在 $a_N$ 后面的 $a_n$ 位于 $L$ 的 $\varepsilon$ 范围内

**例 2** 证明序列 $\{1,-1,1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots\}$ 发散.

**解** 假定序列收敛于某数 $L$. 在极限定义中选择 $\varepsilon=1/2$，序列中下标 $n$ 大于某个 $N$ 的所有项 $a_n$ 必须位于 $L$ 的 $\varepsilon=1/2$ 范围内. 由于数 1 在序列中每隔一项后重复出现，必定有数 1 位于 $L$ 的 $\varepsilon=1/2$ 距离的范围内. 由此推出 $|L-1|<1/2$，或者等价于 $1/2<L<3/2$. 同样，数 $-1$ 重复出现在序列中下标任意大的地方. 所以也必须有 $|L-(-1)|<1/2$，或者等价于 $-3/2<L<-1/2$. 但是数 $L$ 不能同时位于区间 $(1/2, 3/2)$ 和 $(-3/2, -1/2)$ 内，因为这两个区间不重叠. 因此，不存在这样的极限 $L$，所以序列发散.

注意，对于任意小于 1 的正数 $\varepsilon$ 可以作同样论证而不限于选择 $\varepsilon=1/2$. ■

序列 $\{\sqrt{n}\}$ 也是发散的，但是出于不同的原因. 当 $n$ 增加时，它的项变得比任何固定的数都大. 序列的这种性质我们用

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$$

描述. 在表示序列的极限为无穷大时，不说项 $a_n$ 同 $\infty$ 之差当 $n$ 增加时变小. 我们也不断言序列趋近某个无穷大的数. 我们仅限于用记号表述这样的概念：当 $n$ 变得很大时，$a_n$ 最终达到并保持比任何固定的数大.

**定义** 序列 $\{a_n\}$ **发散到无穷大**，是指对于每个数 $M$，存在这样一个整数 $N$，使得对于所有大于 $N$ 的 $n$，有 $a_n>M$. 如果这个条件满足，我们记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty \quad 或 \quad a_n\to\infty$$

同样，如果对于每个数 $m$，存在这样一个整数 $N$，使得对于所有 $n>N$，有 $a_n<m$，那么就说序列 $\{a_n\}$ **发散到负无穷大**，并且记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty \quad 或 \quad a_n\to-\infty$$

序列可能发散而不是发散到无穷大或者负无穷大，如在例 2 见到的情况. 序列{1，-2，3，-4，5，-6，7，-8，…}和{1，0，2，0，3，0，…}也是这种发散的例子.

### 8.1.2 求序列的极限

由于序列是定义域限制为正整数的函数，所以毫不奇怪，第 2 章中给出的函数极限定理存在对序列的变型.

> **定理 1** 令$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是实数序列，并且令 $A$ 和 $B$ 是实数. 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，则下述法则成立.
>
> (1) 和法则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$.　　(2) 差法则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$.
>
> (3) 积法则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$.　　(4) 常数倍法则 $\lim\limits_{n\to\infty}(k \cdot b_n) = k \cdot B$（$k$ 为任意数）.
>
> (5) 商法则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$，如果 $B \neq 0$.

证明同 2.2 节定理 1 的证明类似，从略.

**例 3** 把定理 1 同例 1 中的极限结合起来，得到：

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right) = -1 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = -1 \cdot 0 = 0$.（常数倍法则及例 1(a)）

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 1 - 0 = 1$.（差法则和例 1(a)）

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n^2} = 5 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 5 \cdot 0 \cdot 0 = 0$.（积法则）

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4-7n^6}{n^6+3} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4/n^6)-7}{1+(3/n^6)} = \dfrac{0-7}{1+0} = -7$.（和法则及商法则） ■

在应用定理 1 时需要注意，定理并不表明，例如，当序列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的和$\{a_n + b_n\}$存在极限时每个序列就有极限. 例如，序列$\{a_n\} = \{1, 2, 3, \cdots\}$和$\{b_n\} = \{-1, -2, -3, \cdots\}$这两个序列都发散，但是它们的和$\{a_n + b_n\} = \{0, 0, 0, \cdots\}$显然收敛于 0.

定理 1 的一个推论是：发散序列$\{a_n\}$的每个非零倍数的序列发散. 假定结论相反，那么对于某个数 $c \neq 0$，$\{ca_n\}$收敛. 于是，在定理 1 的常数倍法则中取 $k = 1/c$，看出序列

$$\left\{\frac{1}{c} \cdot ca_n\right\} = \{a_n\}$$

收敛. 因此，$\{ca_n\}$不能收敛，除非$\{a_n\}$也收敛. 如果$\{a_n\}$不收敛，那么$\{ca_n\}$不收敛.

下面的定理是 2.2 节夹层定理的序列变形. 要求读者在习题 95 中证明这个定理.

> **定理 2（序列的夹层定理）** 令$\{a_n\}$，$\{b_n\}$和$\{c_n\}$为实数序列. 如果 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ 对于超过某个下标 $N$ 的所有 $n$ 成立，并且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$，那么也有$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

定理 2 的一个直接推论如下：若 $|b_n| \leqslant c_n$ 且 $c_n \to 0$，则 $b_n \to 0$. 这是因为 $-c_n \leqslant b_n \leqslant c_n$. 我们在下面的例子中利用这个结果.

**例 4** 由于 $1/n \to 0$，我们知道：

(a) $\dfrac{\cos n}{n} \to 0$，因为 $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\cos n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$；　　(b) $\dfrac{1}{2^n} \to 0$，因为 $0 \leqslant \dfrac{1}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n}$；

(c) $(-1)^n\frac{1}{n}\to 0$，因为 $-\frac{1}{n}\leqslant(-1)^n\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{n}$. ■

定理 1 和定理 2 的应用范围由于下面的定理而扩大. 这个定理说明，把连续函数应用到一个收敛序列，将产生一个收敛序列. 我们陈述这个定理而不予证明(证明见习题 96).

> **定理 3 (用于序列的连续函数定理)** 令 $\{a_n\}$ 是实数序列. 若 $a_n\to L$，且 $f$ 是在 $L$ 连续和在所有 $a_n$ 有定义的函数，则 $f(a_n)\to f(L)$.

**例 5** 证明 $\sqrt{(n+1)/n}\to 1$.

**解** 我们知道 $(n+1)/n\to 1$. 在定理 3 中取 $f(x)=\sqrt{x}$ 和 $L=1$，给出 $\sqrt{(n+1)/n}\to\sqrt{1}=1$. ■

**例 6** 序列 $\{1/n\}$ 收敛于 0. 在定理 3 中取 $a_n=1/n$，$f(x)=2^x$ 及 $L=0$，看出 $2^{1/n}=f(1/n)\to f(L)=2^0=1$. 由此可知序列 $\{2^{1/n}\}$ 收敛于 1(见图 8.3).

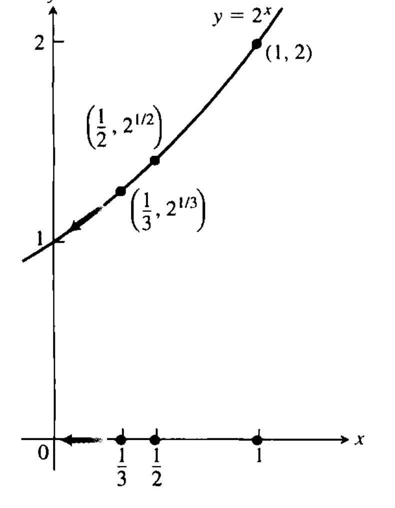



图 8.3 当 $n\to\infty$ 时，$1/n\to 0$ 且 $2^{1/n}\to 2^0$ (例 6)

### 8.1.3 用洛必达法则求极限

下面的定理使我们能够利用洛必达法则求某些序列的极限. 它建立 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 同 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 之间的联系.

> **定理 4** 假定 $f(x)$ 是对所有 $x\geqslant n_0$ 定义的函数，$\{a_n\}$ 是这样的实数序列，对于 $n\geqslant n_0$ 有 $a_n=f(n)$. 那么
> $$\lim_{x\to\infty}f(x)=L \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}a_n=L$$

**证明** 假定 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L$. 那么对于每个正数 $\varepsilon$，存在这样一个数 $M$，使得对于所有 $x$，

$$x>M \quad\Rightarrow\quad |f(x)-L|<\varepsilon$$

令 $N$ 是大于 $M$ 且大于或者等于 $n_0$ 的整数. 于是

$$n>N \quad\Rightarrow\quad a_n=f(n) \text{ 及 } \quad |a_n-L|=|f(n)-L|<\varepsilon$$ ■

**例 7** 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$$

**解** 函数 $(\ln x)/x$ 对所有 $x\geqslant 1$ 有定义，并且在正整数同所给序列一致. 因此，如果 $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)/x$ 存在，那么根据定理 5，$\lim\limits_{n\to\infty}(\ln n)/n$ 等于 $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)/x$. 应用一次洛必达法则证明

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=\frac{0}{1}=0$$

由此断定 $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln n)/n=0$. ■

在我们用洛必达法则求序列的极限时，经常把 $n$ 看成连续的实变量，并且直接对 $n$ 微分. 这样就不必像在例 7 做的那样改写 $a_n$ 的公式.

**例 8** 第 $n$ 项为

$$a_n=\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$$

的序列收敛吗？如果收敛，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

**解** 这个极限导致 $1^\infty$ 型不定式. 如果首先对 $a_n$ 取自然对数,

$$\ln a_n = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = n\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$$

把不定式变成 $\infty\cdot 0$ 型，就能应用洛必达法则. 于是,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln a_n &= \lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \quad (\infty\cdot 0)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)}{1/n} \quad \left(\frac{0}{0}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{-2/(n^2-1)}{-1/n^2} \quad (\text{洛必达法则})\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2-1} = 2\end{aligned}$$

由于 $\ln a_n \to 2$ 以及 $f(x)=e^x$ 是连续函数，由定理 4 可知

$$a_n = e^{\ln a_n} \to e^2$$

序列 $\{a_n\}$ 收敛于 $e^2$. ■

### 8.1.4 常见的序列极限

下述定理给出几个经常出现的序列极限.

**定理 5** 下面 6 个序列收敛于列出的极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}x^{1/n}=1 \quad (x>0)$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0 \quad (|x|<1)$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$ （任意 $x$）.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$ （任意 $x$）.

在公式(3)至(6)中，当 $n\to\infty$ 时 $x$ 保持固定.

**证明** 第(1)个极限已在例 7 中求出. 第(2)和第(3)个极限可以通过取对数和应用定理 4 证明(见习题 93 和 94). 剩余 3 个极限的证明在附录 A.6 中给出. ■

**例 9**

(a) $\frac{\ln(n^2)}{n}=\frac{2\ln n}{n}\to 2\cdot 0=0$. （公式(1)）

(b) $\sqrt[n]{n^2}=n^{2/n}=(n^{1/n})^2\to(1)^2=1$. （公式(2)）

(c) $\sqrt[n]{3n}=3^{1/n}(n^{1/n})\to 1\cdot 1=1$. （公式(3)，取 $x=3$ 和公式(2)）

(d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^n\to 0$. $\left(\text{公式(4)，取 } x=-\frac{1}{2}\right)$

(e) $\left(\frac{n-2}{n}\right)^n=\left(1+\frac{-2}{n}\right)^n\to e^{-2}$. （公式(5)，取 $x=-2$）

(f) $\frac{100^n}{n!}\to 0$. （公式(6)，取 $x=100$） ■

**附注：阶乘记号**

阶乘记号 $n!$（“$n$ 的阶乘”）代表从 1 到 $n$ 的 $n$ 个整数的乘积 $1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n$. 注意 $(n+1)!=(n+1)\cdot n!$. 因此,

$$4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$$
$$5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=5\cdot 4!=120$$

我们把 0! 定义为 1. 阶乘的值比指数的值增长还快，从下面的表中可以看出这一点.

| $n$ | $e^n$（舍入后） | $n!$ |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 |
| 5 | 148 | 120 |
| 10 | 22 026 | 3 628 800 |
| 20 | $4.9\times10^8$ | $2.4\times10^{18}$ |

### 8.1.5 序列的递归定义

至今我们是从下标 $n$ 的值直接计算序列的每个 $a_n$ 项. 但是，时常采用下述**递归方式**定义序列：

(1) 给出序列首项或者前面几项的值；

(2) 给出从某项之前的一项或者几项计算该项的规则，这种规则称为**递归公式**.

**例 10**

(a) 算式 $a_1=1$ 和 $a_n=a_{n-1}+1$ 定义正整数序列 1，2，3，…，$n$，…. 从 $a_1=1$，得到 $a_2=a_1+1=2$，$a_3=a_2+1=3$，等等.

(b) 算式 $a_1=1$ 和 $a_n=n\cdot a_{n-1}$ 定义阶乘序列 1，2，6，24，…，$n!$，…. 从 $a_1=1$，得到 $a_2=2\cdot a_1=2$，$a_3=3\cdot a_2=6$，$a_4=4\cdot a_3=24$，等等.

(c) 算式 $a_1=1$，$a_2=1$ 和 $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$ 定义**斐波那契数**序列 1，1，2，3，5，…. 从 $a_1=1$ 和 $a_2=1$，得到 $a_3=1+1=2$，$a_4=2+1=3$，$a_5=3+2=5$，等等.

(d) 正如从应用牛顿法可以看到的那样，算式 $x_0=1$ 和 $x_{n+1}=x_n-[(\sin x_n-x_n^2)/(\cos x_n-2x_n)]$ 定义一个序列，当它收敛时给出方程 $\sin x-x^2=0$ 的一个解. ■

### 8.1.6 有界非减序列

一般序列的项可能来回变动，有时取较大的值，有时取较小的值. 有一类重要的特殊序列，它的每一项至少同其前项一样大.

> **定义**　序列 $\{a_n\}$ 称为**非减序列**，是指对于所有 $n$，它的项具有 $a_n\leqslant a_{n+1}$ 的特性.

**例 11**　下述序列是非减序列：

(a) 自然数的序列 1，2，3，…，$n$，…；

(b) 序列 $\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，…，$\frac{n}{n+1}$，…；

(c) 常数序列 $\{3\}$. ■

存在两类非减序列：一类序列的项增加，超过任何有限的界；另一类序列的项不是如此.

> **定义**　序列 $\{a_n\}$ 称为**上有界的**，是指存在这样一个数 $M$，使得对于所有 $n$，满足 $a_n\leqslant M$. 数 $M$ 是 $\{a_n\}$ 的一个**上界**. 如果 $M$ 是 $\{a_n\}$ 的一个上界，但是 $\{a_n\}$ 没有比 $M$ 小的上界，那么 $M$ 是 $\{a_n\}$ 的**上确界**.

**例 12**

(a) 序列 1，2，3，…，$n$，…没有上界.

(b) 序列 $\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，…，$\frac{n}{n+1}$，…以 $M=1$ 为上界. 这个序列没有一个比数 1 小的上界，所以 1 是上确界(习题 113). ■

有上界的非减序列总是存在上确界. 这就是在附录 A.7 中讨论的实数的完备性性质. 我们将要证明，若 $L$ 是序列的上确界，则序列收敛于 $L$.

假定在 $xy$ 平面内画出点 $(1, a_1)$，$(2, a_2)$，…，$(n, a_n)$，…. 如果 $M$ 是序列的一个上界，那么所有这些点将位于直线 $y=M$ 的上方或者下方(见图 8.4). 直线

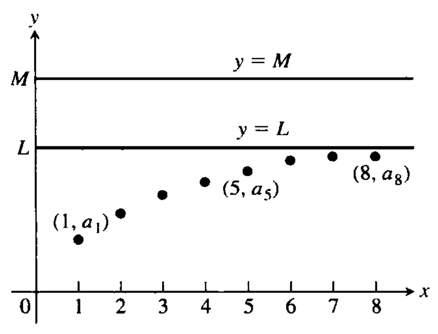



图 8.4　如果非减序列的项有一个上界 $M$，那么它们有极限 $L\leqslant M$

$y=L$ 是最低的这种直线. 没有点$(n,a_n)$位于直线 $y=L$ 之上，但是，只要 $\varepsilon$ 是一正数，就会有某些点位于任何更低的直线$y=L-\varepsilon$ 之上. 序列收敛于 $L$，因为

(a)对于所有的 $n$ 值，$a_n \leqslant L$;

(b)给定任何 $\varepsilon>0$，至少存在一个整数 $N$，对于它有 $a_N>L-\varepsilon$.

$\{a_n\}$是非减序列这个事实进一步表明，对于所有 $n \geqslant N$，有

$$a_n \geqslant a_N > L-\varepsilon$$

因此，所有超越第 $N$ 个数 $a_N$ 的所有数 $a_n$ 位于 $L$ 的 $\varepsilon$ 范围内. 这正好是 $L$ 是序列$\{a_n\}$的极限的条件.

有关非减序列的事实概述在下面的定理中. 对于非增序列，有类似的结果(见习题 107).

**定理 6 (非减序列定理)** 实数的非减序列收敛，当且仅当它是上有界的. 如果非减序列收敛，那么它收敛于它的上确界.

定理 6 蕴涵当非减序列上有界时收敛. 如果序列不是上有界的，那么它发散到无穷大.

## 习题 8.1

在习题 1～6 中，给出序列$\{a_n\}$第 $n$ 项的公式. 求 $a_1$，$a_2$，$a_3$ 和 $a_4$ 的值.

**1.** $a_n=\dfrac{1-n}{n^2}$.　**2.** $a_n=\dfrac{1}{n!}$.

**3.** $a_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.　**4.** $a_n=2+(-1)^n$.

**5.** $a_n=\dfrac{2^n}{2^{n+1}}$.　**6.** $a_n=\dfrac{2^n-1}{2^n}$.

在习题 7～12 中，给出序列第一项或者前两项以及其余项的递归公式. 写出序列的前 10 项.

**7.** $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+(1/2^n)$.

**8.** $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n/(n+1)$.

**9.** $a_1=2$，$a_{n+1}=(-1)^{n+1}a_n/2$.

**10.** $a_1=-2$，$a_{n+1}=na_n/(n+1)$.

**11.** $a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.

**12.** $a_1=2$，$a_2=-1$，$a_{n+2}=a_{n+1}/a_n$.

在习题 13～22 中，求序列第 $n$ 项的公式.

**13.** 序列 1，-1，1，-1，1，…(带交错正负号的 1).

**14.** 序列 -1，1，-1，1，-1，…(带交错正负号的 1).

**15.** 序列 1，-4，9，-16，25，…(正整数的平方，带交错正负号).

**16.** 序列 $1，-\frac{1}{4}，\frac{1}{9}，-\frac{1}{16}，\frac{1}{25}$，…(正整数平方的倒数，带交错正负号).

**17.** 序列 0，3，8，15，24，…(正整数的平方减 1).

**18.** 序列 -3，-2，-1，0，1，…(从 -3 开始的整数).

**19.** 序列 1，5，9，13，17，…(每隔一个奇正整数的正整数).

**20.** 序列 2，6，10，14，18，…(每隔一个偶正整数的正整数).

**21.** 序列 1，0，1，0，1，…(交替的 1 和 0).

**22.** 序列 0，1，1，2，2，3，3，4，…(每个正整数重复).

在习题 23～84 的序列$\{a_n\}$中，哪些序列收敛，哪些序列发散? 求每个收敛序列的极限.

**23.** $a_n=2+(0.1)^n$.　**24.** $a_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n}$.

**25.** $a_n=\dfrac{1-2n}{1+2n}$.　**26.** $a_n=\dfrac{2n+1}{1-3\sqrt{n}}$.

**27.** $a_n=\dfrac{1-5n^4}{n^4+8n^3}$.　**28.** $a_n=\dfrac{n+3}{n^2+5n+6}$.

**29.** $a_n=\dfrac{n^2-2n+1}{n-1}$.　**30.** $a_n=\dfrac{1-n^3}{70-4n^2}$.

**31.** $a_n=1+(-1)^n$.

**32.** $a_n=(-1)^n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$.

**33.** $a_n=\left(\dfrac{n+1}{2n}\right)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$.

**34.** $a_n=\left(2-\dfrac{1}{2^n}\right)\left(3+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

**35.** $a_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.　**36.** $a_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

**37.** $a_n=\sqrt{\dfrac{2n}{n+1}}$.　**38.** $a_n=\dfrac{1}{(0.9)^n}$.

**39.** $a_n=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{n}\right)$.　**40.** $a_n=n\pi\cos(n\pi)$.

**41.** $a_n=\dfrac{\sin n}{n}$.　**42.** $a_n=\dfrac{\sin^2 n}{2^n}$.

**43.** $a_n=\dfrac{n}{2^n}$.　**44.** $a_n=\dfrac{3^n}{n^3}$.

**45.** $a_n=\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$.

**46.** $a_n=\frac{\ln n}{\ln 2n}$.

**47.** $a_n=8^{1/n}$.

**48.** $a_n=(0.03)^{1/n}$.

**49.** $a_n=\left(1+\frac{7}{n}\right)^n$.

**50.** $a_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

**51.** $a_n=\sqrt[n]{10n}$.

**52.** $a_n=\sqrt[n]{n^2}$.

**53.** $a_n=\left(\frac{3}{n}\right)^{1/n}$.

**54.** $a_n=(n+4)^{1/(n+4)}$.

**55.** $a_n=\frac{\ln n}{n^{1/n}}$.

**56.** $a_n=\ln n-\ln(n+1)$.

**57.** $a_n=\sqrt[n]{4^n n}$.

**58.** $a_n=\sqrt[n]{3^{2n+1}}$.

**59.** $a_n=\frac{n!}{n^n}$ （提示：同 $1/n$ 比较）.

**60.** $a_n=\frac{(-4)^n}{n!}$.

**61.** $a_n=\frac{n!}{10^{6n}}$.

**62.** $a_n=\frac{n!}{2^n\cdot 3^n}$.

**63.** $a_n=\left(\frac{1}{n}\right)^{1/(\ln n)}$.

**64.** $a_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

**65.** $a_n=\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^n$.

**66.** $a_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

**67.** $a_n=\left(\frac{x^n}{2n+1}\right)^{1/n}$，$x>0$.

**68.** $a_n=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$.

**69.** $a_n=\frac{3^n\cdot 6^n}{2^{-n}\cdot n!}$.

**70.** $a_n=\frac{(10/11)^n}{(9/10)^n+(11/12)^n}$.

**71.** $a_n=\tanh n$.

**72.** $a_n=\sinh(\ln n)$.

**73.** $a_n=\frac{n^2}{2n-1}\sin\frac{1}{n}$.

**74.** $a_n=n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$.

**75.** $a_n=\tan^{-1}n$.

**76.** $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\tan^{-1}n$.

**77.** $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{\sqrt{2^n}}$.

**78.** $a_n=\sqrt[n]{n^2+n}$.

**79.** $a_n=\frac{(\ln n)^{200}}{n}$.

**80.** $a_n=\frac{(\ln n)^5}{\sqrt{n}}$.

**81.** $a_n=n-\sqrt{n^2-n}$.

**82.** $a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+n}}$.

**83.** $a_n=\frac{1}{n}\int_1^n\frac{1}{x}\,dx$.

**84.** $a_n=\int_1^n\frac{1}{x^p}\,dx$，$p>1$.

**85.** 序列的第 1 项是 $x_1=1$. 每个后继项是它前面所有项的和：

$$x_{n+1}=x_1+x_2+\cdots+x_n$$

写出序列前面足够多的项，以便导出 $x_n$ 对于 $n\geqslant 2$ 成立的一般公式.

**86.** 一个有理数的序列描述如下：

$$\frac{1}{1},\frac{3}{2},\frac{7}{5},\frac{17}{12},\cdots,\frac{a}{b},\frac{a+2b}{a+b},\cdots$$

其中的分子组成一个序列，分母组成第二个序列，它们的比组成第三个序列. 令 $x_n$ 和 $y_n$ 分别是第 $n$ 个分式 $r_n=x_n/y_n$ 的分子和分母.

(a) 证明 $x_1^2-2y_1^2=-1$，$x_2^2-2y_2^2=+1$，并且在更一般的情况下，若

$$a^2-2b^2=-1 \text{ 或 } +1$$

则分别有

$$(a+2b)^2-2(a+b)^2=+1 \text{ 或 } -1$$

(b) 分式 $r_n=x_n/y_n$ 当 $n$ 增加时趋近一个极限. 这个极限是什么？（提示：利用(a)中的结果证明 $r_n^2-2=\pm(1/y_n)^2$ 并且 $y_n$ 不小于 $n$.）

**87. 牛顿法** 序列

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

来源于牛顿法的递归公式. 这个序列收敛吗？如果它收敛，收敛于什么值？在下面每一种情况下，从确定产生序列的函数 $f$ 开始.

(a) $x_0=1$，$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-2}{2x_n}=\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n}$.

(b) $x_0=1$，$x_{n+1}=x_n-\frac{\tan x_n-1}{\sec^2 x_n}$.

(c) $x_0=1$，$x_{n+1}=x_n-1$.

**88.** (a) 假定 $f(x)$ 对于区间 $[0,1]$ 内的所有 $x$ 是可微的，并且 $f(0)=0$. 用规则 $a_n=nf(1/n)$ 定义序列 $\{a_n\}$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=f'(0)$.

利用(a)中的结果求下列序列 $\{a_n\}$ 的极限：

(b) $a_n=n\tan^{-1}\frac{1}{n}$.

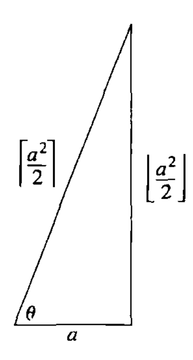
(c) $a_n=n(e^{1/n}-1)$.

(d) $a_n=n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$.

**89. 毕达哥拉斯三元组** 如果正整数 $a$，$b$，$c$ 满足 $a^2+b^2=c^2$，那么 $a$，$b$，$c$ 称为**毕达哥拉斯三元组**. 令 $a$ 为奇正整数，并且令

$$b=\left\lfloor\frac{a^2}{2}\right\rfloor \quad \text{和} \quad c=\left\lceil\frac{a^2}{2}\right\rceil$$

分别是 $a^2/2$ 的底整数和顶整数.




(a) 证明 $a^2+b^2=c^2$.（提示：令 $a=2n+1$，并且用 $n$ 表示 $b$ 和 $c$.）

(b) 通过直接计算或者借助于附图，求

$$\lim_{a\to\infty}\frac{\left\lfloor \frac{a^2}{2} \right\rfloor}{\left\lceil \frac{a^2}{2} \right\rceil}$$

**90. $n$! 的 $n$ 次根**

(a) 证明 $\lim_{n\to\infty}(2n\pi)^{1/(2n)}=1$，因此，利用斯特林逼近（见第 7 章补充和提高习题 32(a)），对于很大的 $n$ 值，有

$$\sqrt[n]{n!}\approx\frac{n}{\mathrm{e}}$$

**T** (b) 对于 $n=40, 50, 60, \cdots$ 检验(a)中的逼近，直到你的计算器允许的限度.

**91.** (a) 假设 $\lim_{n\to\infty}(1/n^c)=0$，其中 $c$ 是任意的正常数. 证明：对于任意正常数，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^c}=0$$

(b) 如果 $c$ 是任意正常数，证明 $\lim_{n\to\infty}(1/n^c)=0$.（提示：如果 $\varepsilon=0.001$ 和 $c=0.04$，$N$ 应取多么大的值，才能保证当 $n>N$ 时有 $|1/n^c-0|<\varepsilon$?）

**92. 拉链定理** 证明对于序列的"拉链定理"：若 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 同时收敛于 $L$，则序列

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n, \cdots$$

收敛于 $L$.

**93.** 证明 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

**94.** 证明 $\lim_{n\to\infty}x^{1/n}=1\ (x>0)$.

**95.** 证明定理 2.

**96.** 证明定理 3.

在习题 97 ~ 100 中，确定序列是不是非减的和上有界的.

**97.** $a_n=\frac{3n+1}{n+1}$.

**98.** $a_n=\frac{(2n+3)!}{(n+1)!}$.

**99.** $a_n=\frac{2^n3^n}{n!}$.

**100.** $a_n=2-\frac{2}{n}-\frac{1}{2^n}$.

在习题 101 ~ 106 的序列中，哪些序列收敛，哪些序列发散？提出答案的理由.

**101.** $a_n=1-\frac{1}{n}$.

**102.** $a_n=n-\frac{1}{n}$.

**103.** $a_n=\frac{2^n-1}{2^n}$.

**104.** $a_n=\frac{2^n-1}{3^n}$.

**105.** $a_n=((-1)^n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

**106.** 序列的第 1 项是 $x_1=\cos(1)$. 下面的项 $x_2$ 是 $x_1$ 和 $\cos(2)$ 中的较大者，$x_3$ 是 $x_2$ 和 $\cos(3)$ 中的较大者（继续下去）. 一般而言，

$$x_{n+1}=\max\{x_n, \cos(n+1)\}$$

**107. 非增序列** 在数的序列 $\{a_n\}$ 中，如果对于每个 $n$ 有 $a_n\geqslant a_{n+1}$，那么序列称为**非增序列**. 在序列 $\{a_n\}$ 中，如果对于每个 $n$ 存在一个数 $M$ 使得 $M\leqslant a_n$，那么序列称为**下有界的**；这样的 $M$ 称为序列的**下界**. 从定理6 推断，下有界的非增序列收敛，而不是下有界的非增序列发散.

（续习题 107）在习题 108 ~ 112 中，利用习题 107 的结论确定哪些序列收敛和哪些序列发散.

**108.** $a_n=\frac{n+1}{n}$.

**109.** $a_n=\frac{1+\sqrt{2n}}{\sqrt{n}}$.

**110.** $a_n=\frac{1-4^n}{2^n}$.

**111.** $a_n=\frac{4^{n+1}+3^n}{4^n}$.

**112.** $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n-3$.

**113. 序列 $\{n/(n+1)\}$ 以 1 为上确界** 证明：若 $M$ 是一个小于 1 的数，则序列 $\{n/(n+1)\}$ 的项最终超过 $M$. 就是说，若 $M<1$，则存在这样一个整数 $N$，使得只要 $n>N$ 就有 $n/(n+1)>M$. 由于 $n/(n+1)<1$ 对于每个 $n$ 成立，这证明 1 是 $\{n/(n+1)\}$ 的上确界.

**114. 上确界的唯一性** 证明：若序列 $\{a_n\}$ 有两个上确界 $M_1$ 和 $M_2$，则 $M_1=M_2$. 就是说，一个序列不能有两个不同的上确界.

**115.** 如果正数序列 $\{a_n\}$ 是上有界的，那么它必定收敛的结论成立吗？提出答案的理由.

**116.** 证明：如果 $\{a_n\}$ 是收敛序列，那么对于每个正数 $\varepsilon$，存在一个对应的整数 $N$，使得对于所有的 $m$ 和 $n$，

$$m>N \text{ 和 } n>N \quad\Rightarrow\quad |a_m-a_n|<\varepsilon$$

**117. 极限的唯一性** 证明序列的极限是唯一的. 就是证明：如果存在数 $L_1$ 和 $L_2$，使得 $a_n \to L_1$ 和 $a_n \to L_2$，那么 $L_1 = L_2$.

**118. 极限与子序列** 如果一个序列的项按它们已有的顺序出现在另一个序列中，那么称第一个序列为第二个序列的**子序列**. 证明：如果序列 $\{a_n\}$ 的两个子序列有不同的极限 $L_1 \neq L_2$，那么 $\{a_n\}$ 发散.

**119.** 对于序列 $\{a_n\}$ 的偶数下标项用 $a_{2k}$ 表示，而奇数下标项用 $a_{2k+1}$ 表示. 证明：如果 $a_{2k} \to L$ 和 $a_{2k+1} \to L$，那么 $a_n \to L$.

**120.** 证明一个序列 $\{a_n\}$ 收敛于 0，当且仅当它的绝对值的序列 $\{|a_n|\}$ 收敛于 0.

**T** 在习题 121 ~ 124 中，试验用一种计算器求 $N$ 的值，使得不等式对于所有的 $n > N$ 成立. 假定不等式是出现在序列极限的形式定义中的不等式，在每种情形考察的是什么序列和序列的极限是什么?

**121.** $|\sqrt[n]{0.5} - 1| < 10^{-3}$.  **122.** $|\sqrt[n]{n} - 1| < 10^{-3}$.

**123.** $(0.9)^n < 10^{-3}$.  **124.** $2^n/n! < 10^{-7}$.

**125. 由牛顿法产生的序列** 适用于可微函数 $f(x)$ 的牛顿法，从一个初值 $x_0$ 开始，构造一个在有利情况下收敛于 $f$ 的零点的数序列 $\{x_n\}$. 这个序列的递归公式为

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

(a) 证明，对于 $f(x) = x^2 - a\ (a > 0)$ 递归公式可以写成 $x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$.

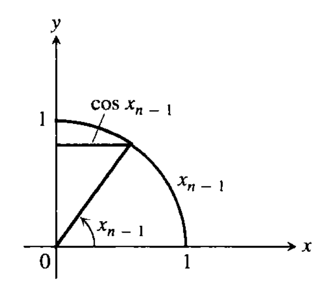
(b) 从 $x_0 = 1$ 和 $a = 3$ 开始，计算序列的逐个项，直到出现重复. 序列逼近什么数? 予以解释.

**126.** (续习题 125) 重作习题 125(b)，用 $a = 2$ 代替 $a = 3$.

**127. $\pi/2$ 的递归定义** 如果从 $x_1 = 1$ 开始，用规则 $x_n = x_{n-1} + \cos x_{n-1}$ 定义 $\{x_n\}$ 的后继项，将产生快速收敛于 $\pi/2$ 的序列.

(a) 试定义这个序列.

(b) 利用后面的附图解释序列为什么快速收敛.




**128.** 根据《华尔街日报》1992 年 12 月 15 日在头版发表的一篇文章，福特汽车公司生产汽车冲压件的平均劳动时间从 1980 年估计的 15 小时下降到大约 $7\frac{1}{4}$ 小时. 日本的汽车公司仅需大约 $3\frac{1}{2}$ 小时.

福特公司自 1980 年以来的提高表现为平均劳动时间每年降低 6%. 如果维持这个速率，那么福特公司到 1992 年生产汽车冲压件所需的平均劳动时间大约为

$$S_n = 7.25(0.94)^n$$

假定日本生产每辆汽车的冲压件继续用 $3\frac{1}{2}$ 小时，福特公司需要用多少年才能赶上日本公司? 用两种方法求解：

(a) 求序列 $\{s_n\}$ 中小于或者等于 3.5 的首项.

**T** (b) 画出 $f(x) = 7.25(0.94)^x$ 的图形，并且用绘图器 Trace 功能键求图形同直线 $y = 3.5$ 相交的位置.

**计算机探究**

用一种 CAS (计算机代数系统) 对习题 129 ~ 140 中的序列执行下列处理步骤：

(a) 计算序列的前 25 项，然后画出图形. 序列显现是上有界的还是下有界的? 序列看起来是收敛还是发散? 如果序列收敛，它的极限 $L$ 是什么?

(b) 如果序列收敛，求一个这样的整数 $N$，使得对于 $n \geq N$ 有 $|a_n - L| \leq 0.01$. 在序列中从多远起的项落入 $L$ 的 0.0001 范围内?

**129.** $a_n = \sqrt[n]{n}$.

**130.** $a_n = \left(1 + \frac{0.5}{n}\right)^n$.

**131.** $a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{5^n}$.

**132.** $a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + (-2)^n$.

**133.** $a_n = \sin n$.

**134.** $a_n = n \sin \frac{1}{n}$.

**135.** $a_n = \frac{\sin n}{n}$. **136.** $a_n = \frac{\ln n}{n}$. **139.** $a_n = \frac{8^n}{n!}$. **140.** $a_n = \frac{n^{41}}{19^n}$.

**137.** $a_n = (0.9999)^n$. **138.** $a_n = 123456^{1/n}$.

## 8.2 无穷级数

无穷级数是数的无穷序列$\{a_n\}$的项之和

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

本节的目标在于了解这种无限和的含义，以及建立计算它的方法. 由于无穷级数中有无限多项相加，不能靠一直用加法去观察出现什么结局. 我们采用一种替代方法，限于考察序列前面 $n$ 项和的结果. 前 $n$ 项和

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

是通常的有限和，并且能够用常规加法计算. 这种和称为*第 $n$ 部分和*. 当 $n$ 增大时，我们期望这个部分和按照序列的项趋近极限的同样意义下，越来越接近一个极限值，正如 8.1 节讨论的那样.

例如，为了确定像

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

这样一个表达式的含义，我们从第 1 项开始求部分和，一次加一项，并且寻找这些部分和如何增加的模式.

| 部分和 | | 部分和隐含的表达式 | 值 |
|---|---|---|---|
| 第 1 个 | $s_1 = 1$ | $2-1$ | $1$ |
| 第 2 个 | $s_2 = 1 + \frac{1}{2}$ | $2 - \frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ |
| 第 3 个 | $s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ | $2 - \frac{1}{4}$ | $\frac{7}{4}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 第 $n$ 个 | $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$ | $2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ | $\frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$ |

从上面的表可以看出，确实存在一种模式. 部分和构成一个序列，它的第 $n$ 项是

$$s_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

这个部分和的序列收敛于 2，因为$\lim_{n\to\infty}(1/2^{n-1}) = 0$. 我们说

$$\text{“无穷级数 } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots \text{ 的和是 2.”}$$

这个级数中任意有限项的和是否等于 2? 不是. 我们能够实际逐项相加无穷多项吗? 不能. 但是我们仍然能够定义它们的和，即把这个和定义为部分和的序列当 $n\to\infty$ 时的极限，在这个例子中是 2(见图 8.5). 对于序列和极限的知识使我能够破除有限和的局限.

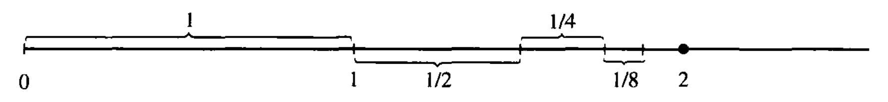



图 8.5 作为长度 1，1/2，1/4，1/8，…逐一相加的和趋近 2

**定义**　给定数的序列$\{a_n\}$，形式为

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

的表达式是一个**无穷级数**. 数 $a_n$ 是级数的**第 $n$ 项**. 由

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

定义的序列$\{s_n\}$是级数的**部分和的序列**，数 $s_n$ 是**第 $n$ 个部分和**. 如果部分和序列收敛于极限 $L$，就说级数**收敛**并且它的和是 $L$. 在这种情况，也记为

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$$

如果级数的部分和的序列不收敛，就说级数**发散**.

人物传记

布莱斯·帕斯卡
(Blaise Pascal，1623—1662)

当我们开始考察一个给定级数 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ 时，可能不知道它收敛或者发散. 无论是哪一种情况，用求和记号把级数写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ 或 } \sum a_n \quad (\text{已知从 1 到 } \infty \text{ 求和时的有用缩写})$$

是方便的.

### 8.2.1　等比级数

**等比级数**是形式为

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

的级数，其中 $a$ 和 $r$ 是固定的实数，且 $a \neq 0$(等比级数亦称几何级数). 也可以把这个级数写成 $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$. 比 $r$ 可以是正数，像在级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots$$

中，$r = 1/2$，$a = 1$. $r$ 也可以是负数，像在级数

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \cdots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \cdots$$

中，$r = -1/3$，$a = 1$.

如果 $r = 1$，等比级数的第 $n$ 个部分和为

$$s_n = a + a(1) + a(1)^2 + \cdots + a(1)^{n-1} = na$$

并且级数发散，因为$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$(其符号取决于 $a$ 的符号). 如果 $r = -1$，级数发散，因为第 $n$ 部分和在 $a$ 与 0 之间交替. 如果 $|r| \neq 1$，可以用下述方法确定级数收敛或者发散:

$$\begin{aligned} s_n &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \\ rs_n &= ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \quad (\text{用 } r \text{ 乘 } s_n) \\ s_n - rs_n &= a - ar^n \quad (\text{从 } s_n \text{ 减 } rs_n, \text{消去右端大多数项}) \\ s_n(1-r) &= a(1-r^n) \quad (\text{提取因式}) \end{aligned}$$

$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, r \neq 1 \quad (\text{如果 } r \neq 1, \text{可以求解 } s_n)$$

若 $|r|<1$，则当 $n\to\infty$ 时 $r^n\to 0$（如在 8.1 节中），且 $s_n\to a/(1-r)$. 若 $|r|>1$，则 $|r^n|\to\infty$，且级数发散.

> 若 $|r|<1$，等比级数 $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$ 收敛于 $a/(1-r)$：
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}, \quad |r|<1$$
>
> 若 $|r|\geqslant 1$，级数发散.

我们已经确定了等比级数在什么情况下收敛或者发散，以及收敛到什么值. 在下面几小节将会看到，我们经常能够确定一个级数收敛，但是不知道它收敛到什么值. 等比级数之和的公式 $a/(1-r)$ 仅适用于表达式 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ 中求和下标从 $n=1$ 开始（或者在把级数写成 $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ 时下标从 $n=0$ 开始）.

**例 1** 取 $a=1/9$ 和 $r=1/3$ 的等比级数是

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1/9}{1-(1/3)} = \frac{1}{6}$$ ■

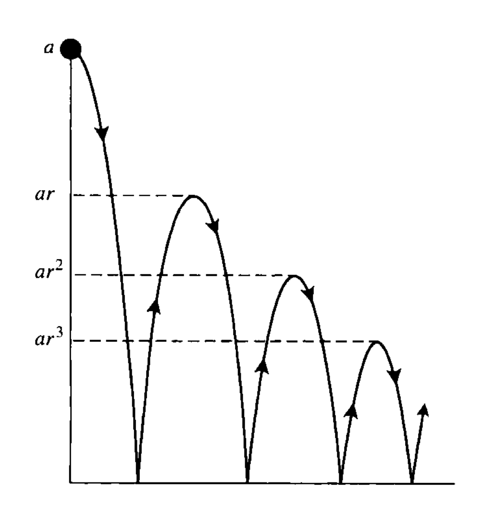
**例 2** 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 5}{4^n} = 5-\frac{5}{4}+\frac{5}{16}-\frac{5}{64}+\cdots$$

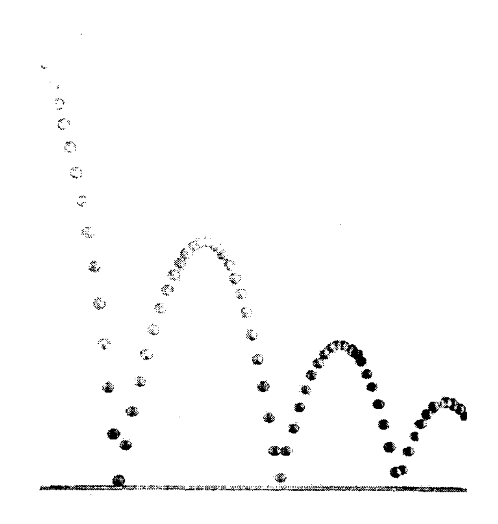
是取 $a=5$ 和 $r=-1/4$ 的等比级数. 它收敛于

$$\frac{a}{1-r} = \frac{5}{1+(1/4)} = 4$$ ■

**例 3** 在平坦的地面之上 $a$ 米的地方降落一个球. 当球每次在下降一段距 $h$ 撞击地面后，反弹一段距离 $rh$，其中 $r$ 是正数，但是 $r<1$. 求球在降落和反弹过程中上上下下经过的总距离（见图 8.6）.




a) 说明如何用等比级数计算球跳动经过的总垂直距离，假定球每次反弹的高度按因子 $r$ 降低



b) 弹跳中的球的闪光照相

图 8.6 例 3 的图形

**解** 总距离为

$$s = a + \underbrace{2ar + 2ar^2 + 2ar^3 + \cdots}_{\text{此和等于}2ar/(1-r)} = a + \frac{2ar}{1-r} = a\frac{1+r}{1-r}$$

例如，如果 $a=6$ m，$r=2/3$，那么这个距离为

$$s = 6\frac{1+(2/3)}{1-(2/3)} = 6\left(\frac{5/3}{1/3}\right) = 30 \text{ m}$$ ■

**例 4** 把循环小数 5. 232 323… 表示成两个整数之比.

**解**

$$\begin{aligned} 5.232\,323\cdots &= 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{(100)^2} + \frac{23}{(100)^3} + \cdots \\ &= 5 + \frac{23}{100}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \cdots\right)}_{1/(1-0.01)} \quad (a = 1, r = 1/100) \\ &= 5 + \frac{23}{100}\left(\frac{1}{0.99}\right) = 5 + \frac{23}{99} = \frac{518}{99} \end{aligned}$$ ■

可惜，像这样收敛的等比级数之和的公式是少见的，而我们时常不得不解决级数和的估计问题(后面进一步讨论). 但是，下面的例子属于另一种情况，其中我们能够求出级数和的准确值.

**例 5** 求“叠缩”级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

的和.

**解** 我们寻求级数部分和序列中可能导出 $s_k$ 公式的模式. 关键注意部分分式分解

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

由此有

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

和

$$s_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

取消括号并且消去带相反符号的相邻项，部分和退化成

$$s_k = 1 - \frac{1}{k+1}$$

此时看出，当 $k\to\infty$ 时 $s_k\to1$. 所以，级数收敛，它的和是 1：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$ ■

### 8.2.2 发散级数

一个级数不收敛的一个原因可能是它的项不变小.

**例 6** 级数 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots + \frac{n+1}{n} + \cdots$$

发散，因为部分和增长最终超过任何预先指定的值. 级数每一项大于 1，所以 $n$ 项的和大于 $n$. ■

### 8.2.3 发散性第 $n$ 项检验法

请注意，如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\lim_{n\to\infty} a_n$ 必定等于零. 为了弄清原因，令 $s$ 代表级数的和，而

$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 是第 $n$ 部分和. 当 $n$ 非常大时，$s_n$ 和 $s_{n-1}$ 都接近于 $s$，所以它们的差 $a_n$ 接近于零. 更形式地表示成

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to S - S = 0 \quad (\text{序列的差法则})$$

这就证实下述定理.

**定理 7** 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $a_n \to 0$.

对于例 6 中出现的一类级数，定理 7 导出一种发散性检验法.

**发散性第 $n$ 项检验法**

若 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 不存在或者不等于零，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

**附注**

注意定理 7 并不表明，如果 $a_n \to 0$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 就收敛. 一个级数可能当 $a_n \to 0$ 时发散.

**例 7**

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ 发散，因为 $n^2 \to \infty$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ 发散，因为 $\frac{n+1}{n} \to 1$. $\quad (\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0)$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ 发散，因为 $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$ 不存在.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2n+5}$ 发散，因为 $\lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2n+5} = -\frac{1}{2} \neq 0$. ■

**例 8** 级数

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{2\text{项}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{4\text{项}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{2^n\text{项}} + \cdots$$

发散，因为可以把级数的项分成组，每一组的和等于 1，所以部分和无限地增加. 然而，级数的项构成收敛于零的序列. 8.3 节的例 1 说明，调和级数也具有这种特性. ■

### 8.2.4 组合级数

只要有两个收敛级数，我们就可以通过对它们逐项相加、逐项相减或者对它们用常数相乘来构成新的收敛级数.

**定理 8** 若 $\sum a_n = A$ 和 $\sum b_n = B$ 是收敛级数，则有

(1) 和法则 $\quad \sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n = A + B$

(2) 差法则 $\quad \sum(a_n - b_n) = \sum a_n - \sum b_n = A - B$

(3) 常数倍法则 $\quad \sum k a_n = k \sum a_n = kA \quad$ ($k$ 是任意数)

**证明** 级数的这 3 条法则从 8.1 节定理 1 中序列的类似法则推出. 为了证明级数的和法则，令

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

于是 $\sum(a_n + b_n)$ 的部分和为

$$s_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n)$$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = A_n + B_n$$

由于 $A_n \to A$，$B_n \to B$，根据序列的和法则，我们得到 $s_n \to A + B$. 差法则的证明是类似的.

为了证明级数的常数倍法则，注意 $\sum ka_n$ 的部分和构成序列

$$s_n = ka_1 + ka_2 + \cdots + ka_n = k(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = kA_n$$

根据序列的常数倍法则，它收敛于 $kA$. ■

作为定理 8 的系，我们有下列结果：

> (1) 发散级数的每个非零常数倍级数发散.
> (2) 若 $\sum a_n$ 收敛而 $\sum b_n$ 发散，则 $\sum(a_n + b_n)$ 和 $\sum(a_n - b_n)$ 同时发散.

这两个系的证明从略.

**注意** 需要记住，当级数 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 同时发散时，级数 $\sum(a_n + b_n)$ 却可能收敛. 例如，级数 $\sum a_n = 1 + 1 + 1 + \cdots$ 和 $\sum b_n = (-1) + (-1) + (-1) + \cdots$ 同时发散，然而 $\sum(a_n + b_n) = 0 + 0 + 0 + \cdots$ 收敛于 0.

**例 9** 求下列级数的和：

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} - 1}{6^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{6^{n-1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^{n-1}} \quad \text{（差法则）}$$

$$= \frac{1}{1 - (1/2)} - \frac{1}{1 - (1/6)} \quad \text{（等比级数取 } a = 1, r = 1/2 \text{ 及 } a = 1, r = 1/6\text{）}$$

$$= 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5}.$$

(b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2^n} = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \text{（常数倍法则）}$$

$$= 4\left(\frac{1}{1 - (1/2)}\right) \quad \text{（等比级数取 } a = 1, r = 1/2\text{）}$$

$$= 8.$$ ■

### 8.2.5 增添项或删除项

对级数可以增添有限数目的项或者删除有限数目的项而不会改变级数的收敛性或发散性，不过在收敛的情形这样做通常会改变级数的和. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ 对于任何 $k > 1$ 收敛，且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} a_n$$

反过来，若 $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ 对于任何 $k > 1$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 因此，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n}$$

和

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\right) - \frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125}$$

### 8.2.6 改变下标

只要保持级数中项的顺序，就能改变任何级数的下标而不影响它的收敛性. 为了提高下标起始值 $h$ 个单位，在 $a_n$ 的算式中用 $n - h$ 代替 $n$：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1+h}^{\infty} a_{n-h} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

为了降低下标起始值 $h$ 个单位，在 $a_n$ 的算式中用 $n+h$ 代替 $n$：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1-h}^{\infty} a_{n+h} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

这样做就像作平移一样. 在等比级数的起始项中我们见过用下标 $n=0$ 代替下标 $n=1$ 的做法，但是也可以用任何其他起始下标值. 我们通常优先选择导致简单表达式的下标.

**人物传记**

理查德·戴德金（Richard Dedekind，1831—1916）

**例 10** 可以把等比级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$$

写成

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^{n-5}} \quad 乃至 \quad \sum_{n=-4}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}}$$

无论选择什么下标，级数的部分和保持不变. ■

## 习题 8.2

在习题 1 ~ 6 中，求级数第 $n$ 部分和的公式，并且在级数收敛时用它求级数的和.

1. $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\cdots+\frac{2}{3^{n-1}}+\cdots$.
2. $\frac{9}{100}+\frac{9}{100^2}+\frac{9}{100^3}+\cdots+\frac{9}{100^n}+\cdots$.
3. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$.
4. $1-2+4-8+\cdots+(-1)^{n-1}2^{n-1}+\cdots$.
5. $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots$.
6. $\frac{5}{1\cdot 2}+\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{5}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{5}{n(n+1)}+\cdots$.

在习题 7 ~ 14 中，写出级数的前面几项，展现级数是如何开始的. 然后求级数的和.

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$.
8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4^n}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{4^n}$.
10. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{4^n}$.
11. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$.
12. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$.
13. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{5^n}\right)$.
14. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^{n+1}}{5^n}\right)$.

在习题 15 ~ 22 中，用部分分式求级数的和.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$.
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)(2n+1)}$.
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{40n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$.
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{1/n}}-\frac{1}{2^{1/(n+1)}}\right)$.
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln(n+2)}-\frac{1}{\ln(n+1)}\right)$.
22. $\sum_{n=1}^{\infty} (\tan^{-1}(n)-\tan^{-1}(n+1))$.

在习题 23 ~ 40 中，哪些级数收敛，哪些级数发散？提出答案的理由. 如果级数收敛，求它的和.

23. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.
24. $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2})^n$.
25. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{3}{2^n}$.
26. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}n$.
27. $\sum_{n=0}^{\infty} \cos n\pi$.
28. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{5^n}$.
29. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n}$.
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{1}{n}$.
31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{10^n}$.
32. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}$, $|x|>1$.
33. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n-1}{3^n}$.
34. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.
35. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{1000^n}$.
36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.
37. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.
38. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+1}\right)$.

**39.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e}{\pi}\right)^n$.　　**40.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{n\pi}}{\pi^{ne}}$.

在习题 41 ~ 44 中，写出等比级数的前面几项，以便求 $a$ 和 $r$，并且求级数的和. 然后用 $x$ 表示不等式 $|r|<1$，并且求使不等式成立和级数收敛的 $x$ 值.

**41.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$.　　**42.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$.

**43.** $\sum_{n=0}^{\infty}3\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$.　　**44.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{1}{3+\sin x}\right)^n$.

在习题 45 ~ 50 中，求使给定等比级数收敛的 $x$ 值. 此外，对于那些 $x$ 值求级数的和(作为 $x$ 的函数).

**45.** $\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n$.　　**46.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{-2n}$.

**47.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+1)^n$.　　**48.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n(x-3)^n$.

**49.** $\sum_{n=0}^{\infty}\sin^n x$.　　**50.** $\sum_{n=0}^{\infty}(\ln x)^n$.

在习题 51 ~ 58 中，把每个数表示成两个整数之比.

**51.** $0.\overline{23}=0.23\ 23\ 23\cdots$.

**52.** $0.\overline{234}=0.234\ 234\ 234\cdots$.

**53.** $0.\overline{7}=0.7777\cdots$.

**54.** $0.\overline{d}=0.dddd\cdots$，其中 $d$ 是数字.

**55.** $0.0\overline{6}=0.06666\cdots$.

**56.** $1.\overline{414}=1.414\ 414\ 414\cdots$.

**57.** $1.24\overline{123}=1.24\ 123\ 123\ 123\cdots$.

**58.** $3.\overline{142857}=3.142857\ 142857\cdots$.

**59.** 习题 5 中的级数，也可以写成

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}\text{ 和}\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(n+4)}$$

把它写成从(**a**)$n=-2$，(**b**)$n=0$ 和(**c**)$n=5$ 开始的级数.

**60.** 习题 6 中的级数，也可以写成

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n(n+1)}\text{ 和}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{(n+1)(n+2)}$$

把它写成从(**a**)$n=-1$，(**b**)$n=3$ 和(**c**)$n=20$ 开始的级数.

**61.** 构造一个非零项的无穷级数，它的和等于：(**a**)1，(**b**) −3，(**c**)0.

**62.**（续习题 61）能否构造收敛于任何预定数的非零项无穷级数？作出解释.

**63.** 用例子说明，即使级数 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 收敛，并且所有的 $b_n$ 不等于零，级数 $\sum(a_n/b_n)$ 也可能发散.

**64.** 寻找收敛的等比级数 $A=\sum a_n$ 和 $B=\sum b_n$，用来说明 $\sum a_n b_n$ 可能收敛但是不等于 $AB$ 这个事实.

**65.** 用例子说明，即使 $A=\sum a_n$，$B=\sum b_n\neq 0$，并且所有的 $b_n$ 不等于零，级数 $\sum(a_n/b_n)$ 也可能收敛于某个不等于 $A/B$ 的值.

**66.** 如果 $\sum a_n$ 收敛，并且对于所有 $n$，$a_n>0$，那么关于级数 $\sum(1/a_n)$ 能够得出什么结论？提出答案的理由.

**67.** 如果对发散级数添加有限多项，或者从发散级数删除有限多项，会产生什么结果？提出答案的理由.

**68.** 如果级数 $\sum a_n$ 收敛而 $\sum b_n$ 发散，那么对于它们逐项求和的级数 $\sum(a_n+b_n)$ 能够得出什么结论？提出答案的理由.

**69.** 用(**a**)$a=2$ 和(**b**)$a=13/2$，构造收敛于数 5 的等比级数 $\sum ar^{n-1}$.

**70.** 求满足

$$1+e^b+e^{2b}+e^{3b}+\cdots=9$$

的 $b$ 值.

**71.** 使无穷级数

$$1+2r+r^2+2r^3+r^4+2r^5+r^6+\cdots$$

收敛的 $r$ 值是什么？当级数收敛时求它的和.

**72.** 证明：用收敛的等比级数的一个部分和 $s_n$ 代替级数，产生的误差 $(L-s_n)$ 为 $ar^n/(1-r)$.

## 8.3　积分检验法

对于给定的级数，需要知道它是收敛的还是发散的. 在本节和后面两节，我们讨论非负项级数. 如果这样一种级数的部分和序列是有界的，它就是收敛级数. 只要证实一个给定的级数不收敛，通常就没有可以用于对它求和的公式，所以要转向研究逼近级数和的方法.

### 8.3.1　非减部分和

假定 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是一个无穷级数，对于所有 $n$，级数的项 $a_n\geqslant 0$. 在这种情况下每个部分和大于或

者等于它的前一个部分和，因为 $s_{n+1}=s_n+a_n$：

$$s_1 \leqslant s_2 \leqslant s_3 \leqslant \cdots \leqslant s_n \leqslant s_{n+1} \leqslant \cdots$$

由于部分和构成一个非减序列，非减序列定理(8.1 节定理 6)表明，当且仅当部分和序列上有界时级数收敛.

**定理 6 的系** 非负项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，当且仅当它的部分和序列是上有界的.

**例 1** 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

称为**调和级数**. 调和级数是发散级数，但是这个结果不是由第 $n$ 项检验法推出的. 第 $n$ 项 $1/n$ 趋近零，但是级数依然发散. 这个级数发散的原因在于它的部分和序列没有上界. 为明白这一点，用下述方法组合级数的项：

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{>\frac{2}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{>\frac{4}{8}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16}\right)}_{>\frac{8}{16}=\frac{1}{2}} + \cdots$$

前两项的和是 $1+1/2=1.5$. 其后两项的和是 $1/3+1/4$，它大于 $1/4+1/4=1/2$. 其后 4 项的和是 $1/5+1/6+1/7+1/8$，它大于 $1/8+1/8+1/8+1/8=1/2$. 其后 8 项的和是 $1/9+1/10+1/11+1/12+1/13+1/14+1/15+1/16$，它大于 $8/16=1/2$. 其后 16 项的和大于 $16/32=1/2$，等等. 一般以$1/2^{n+1}$结束的 $2^n$ 项的和大于 $2^n/2^{n+1}=1/2$. 这个部分和序列不是上有界的：如果 $n=2^k$，部分和 $s_n$ 大于 $k/2$. 所以调和级数发散. ■

### 8.3.2 积分检验法

我们用一个同调和级数有关的级数引入积分检验法，不过这个级数的第 $n$ 项是 $1/n^2$ 而非 $1/n$.

**例 2** 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

收敛吗?

**解** 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$，我们把它同 $\int_1^{\infty}(1/x^2)\mathrm{d}x$ 比较来确定收敛性. 为了作比较，把级数的项想象成函数 $f(x)=1/x^2$ 的值，并且将这些值解释为曲线 $y=1/x^2$ 下面那些矩形的面积.

如图 8.7 所示，

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\ &= f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \\ &< f(1) + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{(矩形面积之和小于图形下面的面积)} \\ &< 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \quad \left(\int_1^n (1/x^2)\,\mathrm{d}x < \int_1^{\infty} (1/x^2)\,\mathrm{d}x\right) \end{aligned}$$

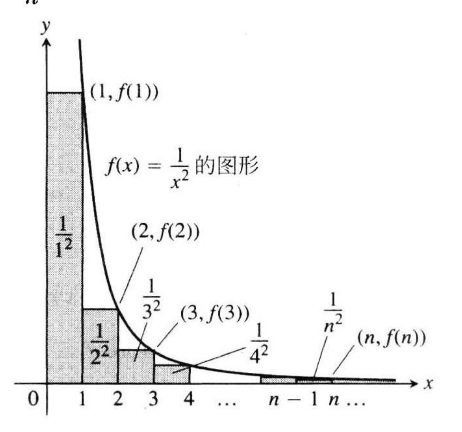



图 8.7 $f(x)=1/x^2$ 图形下面的矩形面积之和小于图形下面的面积(例 2)

$$< 1 + 1 = 2 \quad \left(\text{如在 7.7 节例 3 那样}, \int_1^{\infty} (1/x^2)\,dx = 1\right)$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ 的部分和是上有界的(以 2 为上界)，级数收敛. 已知这个级数的和是 $\pi^2/6 \approx 1.644\,93$. ■

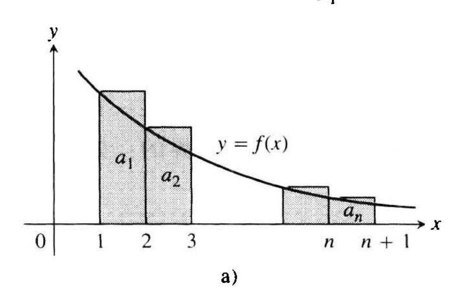
> **定理 9(积分检验法)** 令 $\{a_n\}$ 为正项序列. 假定 $a_n = f(n)$，其中 $f$ 是对于所有 $x \geqslant N$($N$ 是正整数)的连续正值减函数. 那么，级数 $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ 和积分 $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ 同时收敛或者同时发散.

**附注**

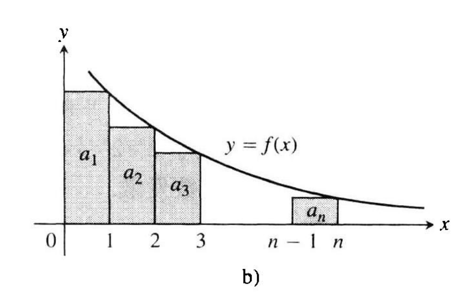
注意级数和积分在收敛情况下不必需具有相同的值. 如我们在例 2 中指出的那样，$\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2) = \pi^2/6$，而 $\int_1^{\infty}(1/x^2)\,dx = 1$.

**证明** 我们就 $N = 1$ 的情形证明定理. 对于一般 $N$ 值的证明是类似的. 从假设 $f$ 是减函数开始，对于每个 $n$ 有 $f(n) = a_n$. 这引导我们考察图 8.8a 中的矩形，它们的面积为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，而包围的总面积大于曲线 $y = f(x)$ 下面从 $x = 1$ 到 $x = n + 1$ 的面积. 就是说，

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$




a)




b)

图 8.8 根据积分检验法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与积分 $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ 同时收敛或者同时发散

在图 8.8b 中用了左边而不是右边的矩形. 如果暂时忽略第 1 个矩形的面积 $a_1$，看出

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leqslant \int_1^n f(x)\,dx$$

如果包含 $a_1$，那么有

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leqslant a_1 + \int_1^n f(x)\,dx$$

结合这两个不等式给出

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leqslant a_1 + \int_1^n f(x)\,dx$$

上面的不等式对于每个 $n$ 成立，当 $n \to \infty$ 时同样成立.

如果 $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ 是有限的，右边的不等式说明 $\sum a_n$ 是有限的. 如果 $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ 是无限的，左边的不等式说明 $\sum a_n$ 是无限的. 因此，级数与积分同时为有限的或者同时为无限的. ■

**例 3** 证明：$p$ **级数**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

($p$ 为实常数)在 $p>1$ 时收敛，而在 $p\leqslant 1$ 时发散.

**解** 若 $p>1$，则 $f(x)=1/x^p$ 是 $x$ 的正值减函数. 由于

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_1^{\infty}x^{-p}\mathrm{d}x=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b=\frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^{p-1}}-1\right)$$

$$=\frac{1}{1-p}(0-1)=\frac{1}{p-1}\quad(\text{当 } b\to\infty \text{ 时 } b^{p-1}\to\infty, \text{因为 } p-1>0)$$

依据积分检验法，级数收敛. 需要强调，$p$ 级数的和不等于 $1/(p-1)$. 这个级数收敛，但是我们不知道它收敛的值.

若 $p<1$，则 $1-p>0$，而有

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}(b^{1-p}-1)=\infty$$

依据积分检验法，级数发散.

若 $p=1$，则得到(发散的)调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

我们证明了 $p$ 级数在 $p>1$ 时收敛，但是对于所有其他的 $p$ 值发散. ■

$p$ 级数在 $p=1$ 时是**调和级数**(例 1). $p$ 级数检验法正好证明调和级数发散. 如果增加 $p$ 值，例如把 $p$ 增加到 1.000 000 001，级数就收敛!

调和级数的部分和趋近无穷大的过程是非常缓慢的. 例如，调和级数在取 1.78 亿项之后，其部分和才超过 20. (另参见习题 33(b).)

### 8.3.3 误差估计

如果用积分检验法证明级数 $\sum a_n$ 收敛，我们可能需要估计级数的总和 $S$ 及其第 $n$ 部分和 $s_n$ 之差的**余数** $R_n$ 的大小. 就是说，我们要估计

$$R_n=S-s_n=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots$$

为了得到余数的一个下界，对矩形面积的和同曲线 $y=f(x)\,(x\geqslant n)$ 下面的面积作比较(参见图 8.8a). 由此看出

$$R_n=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots\geqslant\int_{n+1}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

同样，从图 8.8b 求出余数的一个上界

$$R_n=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots\leqslant\int_{n}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

这两个比较证明下述给出余数大小的上下界的结果:

**积分检验法中的余数的界**

假设 $\{a_k\}$ 是 $a_k=f(k)$ 的正项序列，其中 $f$ 是对于所有 $x\geqslant n$ 的连续正值减函数，并且 $\sum a_n$ 收敛于 $S$. 那么，余数 $R_n=S-s_n$ 满足不等式

$$\int_{n+1}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x\leqslant R_n\leqslant\int_{n}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

如果对不等式(1)中的两端加进部分和 $s_n$，得到

$$s_n+\int_{n+1}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x\leqslant S\leqslant s_n+\int_{n}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

因为 $s_n+R_n=S$. 不等式(2)对于估计收敛级数的和的逼近误差是很有用的. 这个误差不可能大于如式(2)所给的包含 $S$ 的区间的长度.

**例 4** 利用(2)中的不等式和 $n=10$ 估计级数 $\sum(1/n^2)$ 的和.

**解** 我们有 $$\int_n^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_n^b=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$$

利用这个结果和(2)中的不等式，得到

$$s_{10}+\frac{1}{11}\leqslant S\leqslant s_{10}+\frac{1}{10}$$

取 $s_{10}=1+(1/4)+(1/9)+(1/16)+\cdots+(1/100)\approx1.549\,77$，上面的不等式给出

$$1.640\,68\leqslant S\leqslant 1.649\,97$$

如果用这个区间的中点逼近级数和 $S$，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\approx1.6453$$

这个逼近的误差小于包含 $S$ 的区间长度的一半，所以误差小于 0.005. ■

## 习题 8.3

在习题 1 ~ 30 的级数中，哪些级数收敛，哪些级数发散？提出答案的理由. (当检验答案时，记住对于判定级数的收敛或者发散，可能有一种以上方法.)

**1.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}$. **2.** $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}$. **3.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$.

**4.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n+1}$. **5.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\sqrt{n}}$. **6.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n\sqrt{n}}$.

**7.** $\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{8^n}$. **8.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-8}{n}$. **9.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$.

**10.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$. **11.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}$. **12.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{4^n+3}$.

**13.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-2}{n+1}$. **14.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$. **15.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+1}$.

**16.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}$. **17.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\ln n}$.

**18.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. **19.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln 2)^n}$.

**20.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln 3)^n}$. **21.** $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(1/n)}{(\ln n)\sqrt{\ln^2 n-1}}$.

**22.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+\ln^2 n)}$. **23.** $\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$.

**24.** $\sum_{n=1}^{\infty}n\tan\frac{1}{n}$. **25.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{1+e^{2n}}$.

**26.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{1+e^n}$. **27.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8\tan^{-1}n}{1+n^2}$.

**28.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$. **29.** $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sech} n$.

**30.** $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sech}^2 n$.

在习题 31 和 32 中，什么 $a$ 值(如果存在)使级数收敛？

**31.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{n+2}-\frac{1}{n+4}\right)$. **32.** $\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{2a}{n+1}\right)$.

**33.** (**a**)像图 8.7 和图 8.8 中那样，绘制图形说明调和级数的部分和满足不等式

$$\ln(n+1)=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx\leqslant1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$
$$\leqslant1+\int_1^{n}\frac{1}{x}\,dx=1+\ln n$$

**T** (**b**)虽然我们知道调和级数发散，但是从来没有表明它发散的经验数据. 这是由于它的部分和增加太缓慢. 为了明白我们所说的意思，假定把 130 亿年前宇宙诞生之日作为起点，取 $s_1=1$，并且每秒增加一个新项. 那么，级数至今的部分和 $s_n$ 大约是多少(设一年为 365 天)？

**34.** 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1/(nx))$ 存在使它收敛的任何 $x$ 值吗？提出答案的理由.

**35.** 假设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正数项的发散级数，那么也存在正数项的发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$，其中对于每个 $n$ 有 $b_n<a_n$. (**a**)这个结论正确吗？(**b**)是否存在一个“最小的”正数项的发散级数？提出答案的理由.

**36.** (续习题 35)存在一个“最大的”正数项的收敛级数吗？作出解释.

**37.** **柯西并项检验法** 柯西并项检验法指出：假设 $\{a_n\}$ 是收敛于 0 的正数项非增序列(对任何 $n$

有 $a_n \geqslant a_{n+1}$). 那么，$\sum a_n$ 收敛当且仅当 $\sum 2^n a_{2^n}$ 收敛. 例如，$\sum(1/n)$ 发散，因为 $\sum 2^n \cdot (1/2^n) = \sum 1$ 发散. 说明柯西并项检验法为什么是适用的.

**38.** 利用习题 37 的柯西并项检验法，证明

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 在 $p>1$ 时收敛而在 $p \leqslant 1$ 时发散.

**39. 对数项 $p$ 级数**

(a) 证明

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} \ (p\text{ 是正常数})$$

当且仅当 $p>1$ 时收敛.

(b) 由(a)中的结论，对于级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

的收敛性可得出什么推断？提出答案的理由.

**40.** (续习题 39)利用习题 39 的结果判定下面哪些级数收敛，哪些级数发散. 在每种情形提出答案的依据.

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)}$. (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1.01}}$.

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n^3)}$. (d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$.

**41. 欧拉常数** 像图 8.8 中那样的图形启示，当 $n$ 增加时，和

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

同积分 $\ln n = \int_1^n \frac{1}{x}\,dx$

之间的差的变化很小. 为了研究这个看法，执行下列处理步骤：

(a) 在定理 9 的证明中取 $f(x) = 1/x$，证明

$$\ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leqslant 1 + \ln n$$

或者

$$0 < \ln(n+1) - \ln n \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \leqslant 1$$

因此，序列

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

是下有界的和上有界的.

(b) 证明

$$\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(n+1) - \ln n$$

并且利用这个结果证明，(a)中的序列 $\{a_n\}$ 是减序列.

由于下有界的减序列收敛(见 8.1 节习题 107)，(a)中定义的数序列 $a_n$ 收敛：

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \to \gamma$$

数 $\gamma$ 称为*欧拉常数*，它的值为 0.5772…. 同其他特殊常数(如 $\pi$ 和 e)对照，对于 $\gamma$ 的表示没有找到其他用公式表示的简单法则.

**42.** 利用积分检验法证明级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$$

收敛.

**43.** (a) 对于级数 $\sum(1/n^3)$，利用不等式(2)取 $n=10$，求一个包含和 $S$ 的区间.

(b) 像在例 4 那样，利用在(a)中求出的区间的中点逼近级数的和. 逼近的最大误差是多少?

**44.** 用级数 $\sum(1/n^4)$ 重作习题 43.

# 8.4 比较检验法

## 8.4.1 比较检验法

我们已经见过如何判定等比级数、$p$ 级数和一些其他级数的收敛性. 对于许多其他级数的收敛性，可以通过对它们的项同那些已知是收敛级数的项作比较来检验.

> **定理 10 (比较检验法)** 令 $\sum a_n$ 为非负项的级数.
>
> **(a)** 若存在收敛级数 $\sum c_n$，对于某个整数 $N$ 和所有 $n>N$ 有 $a_n \leqslant c_n$，则 $\sum a_n$ 收敛.
>
> **(b)** 若存在非负项的发散级数 $\sum d_n$，对于某个整数 $N$ 和所有 $n>N$ 有 $a_n \geqslant d_n$，则 $\sum a_n$ 发散.

**证明** 在(a)中，级数 $\sum a_n$ 的部分和是以

$$M = a_1 + a_2 + \cdots + a_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n$$

为上界，因此，它们构成具有极限 $L\leqslant M$ 的非减序列，从而 $\sum a_n$ 收敛.

在(b)中，$\sum a_n$ 的部分和不是上有界的. 否则，$\sum d_n$ 的部分和将以

$$M^* = d_1 + d_2 + \cdots + d_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

为界，因而 $\sum d_n$ 将收敛而不发散. 由此推知 $\sum a_n$ 发散. ■

**人物传记**

萨克森的阿尔伯特

(Albert of Saxony，1316—1390)

**例 1**

**(a)** 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$$

发散，因为它的第 $n$ 项

$$\frac{5}{5n-1} = \frac{1}{n-\frac{1}{5}} > \frac{1}{n}$$

大于发散的调和级数的第 $n$ 项.

**(b)** 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

收敛，因为它的所有项是正数，并且小于或等于级数

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots$$

的对应项. 等式左边的等比级数收敛，并且有

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1-(1/2)} = 3$$

3 是级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(1/n!)$ 的部分和的一个上界这个事实并不意味着级数收敛于 3. 在 8.9 节将会看到，这个级数收敛于 e.

**(c)** 级数

$$5 + \frac{2}{3} + \frac{1}{7} + 1 + \frac{1}{2+\sqrt{1}} + \frac{1}{4+\sqrt{2}} + \frac{1}{8+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{2^n+\sqrt{n}} + \cdots$$

收敛. 为了看出这一点，我们忽略前面 3 项，并且把其余的项同收敛的等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(1/2^n)$ 的对应项比较. 截去前几项后序列中的项 $1/(2^n+\sqrt{n})$ 小于等比级数的对应项 $1/2^n$. 从逐项比较看出

$$1 + \frac{1}{2+\sqrt{1}} + \frac{1}{4+\sqrt{2}} + \frac{1}{8+\sqrt{3}} + \cdots \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

所以，依据比较检验法，截去项后的级数和原来的级数收敛. ■

### 8.4.2 极限比较检验法

现在介绍一种比较检验法，在 $a_n$ 为 $n$ 的有理函数的级数收敛检验中特别有用.

> **定理 11（极限比较检验法）** 假定对于所有的 $n\geqslant N$（$N$ 是整数）有 $a_n>0$ 和 $b_n>0$.
>
> **(1)** 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c>0$，则 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 同时收敛或者同时发散.
>
> **(2)** 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ 且 $\sum b_n$ 收敛，则 $\sum a_n$ 收敛.
>
> **(3)** 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$ 且 $\sum b_n$ 发散，则 $\sum a_n$ 发散.

**证明** 我们给出对(1)的证明. (2)和(3)的证明在习题 37(a)和(b)中留作习题.

由于$c/2>0$，存在这样一个整数$N$，使得对于所有$n$，有

$$n > N \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{a_n}{b_n} - c\right| < \frac{c}{2} \quad (\text{极限定义，取 } \varepsilon = c/2, L = c\text{，并且用 } a_n/b_n \text{ 代替 } a_n)$$

因此，对于$n>N$，

$$-\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} - c < \frac{c}{2}$$

$$\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3c}{2}$$

$$\left(\frac{c}{2}\right)b_n < a_n < \left(\frac{3c}{2}\right)b_n$$

若$\sum b_n$收敛，则根据直接比较检验法，$\sum(3c/2)b_n$和$\sum a_n$收敛. 若$\sum b_n$发散，则根据直接比较检验法，$\sum(c/2)b_n$和$\sum a_n$发散. ■

**例2** 下面哪些级数收敛，哪些级数发散？

(a) $\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\frac{7}{16}+\frac{9}{25}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2+2n+1}$.

(b) $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1}$.

(c) $\frac{1+2\ln 2}{9}+\frac{1+3\ln 3}{14}+\frac{1+4\ln 4}{21}+\cdots=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+n\ln n}{n^2+5}$.

**解** (a)令$a_n=(2n+1)/(n^2+2n+1)$. 对于很大的$n$，我们预期$a_n$同$2n/n^2=2/n$具有相似的特性，因为对于这样的$n$，$a_n$的分子和分母中的首项占支配地位，所以我们令$b_n=1/n$. 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

发散，以及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{n^2+2n+1}=2$$

依据极限比较检验法第(1)部分，$\sum a_n$发散. 自然我们也可以取$b_n=2/n$，但是用$1/n$更为简单.

(b)令$a_n=1/(2^n-1)$. 对于很大的$n$，我们预期$a_n$同$1/2^n$具有相似的特性，所以我们令$b_n=1/2^n$. 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

收敛，以及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-(1/2^n)}=1$$

依据极限比较检验法第(1)部分，$\sum a_n$收敛.

(c)令$a_n=(1+n\ln n)/(n^2+5)$. 对于很大的$n$，我们预期$a_n$同$(n\ln n)/n^2=(\ln n)/n$具有相似的特性，对于$n\geqslant 3$，$(\ln n)/n$大于$1/n$，所以我们取$b_n=1/n$. 由于

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$$

发散，以及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2\ln n}{n^2+5}=\infty$$

依据极限比较检验法第(3)部分，$\sum a_n$发散. ■

**例 3**　级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{3/2}}$ 收敛吗?

**解**　由于对于任何正常数 $c$，$\ln n$ 增长比 $n^c$ 更慢(见 8.1 节习题 91)，我们预期对于充分大的 $n$ 有

$$\frac{\ln n}{n^{3/2}}<\frac{n^{1/4}}{n^{3/2}}=\frac{1}{n^{5/4}}$$

实际上，取 $a_n=(\ln n)/n^{3/2}$ 和 $b_n=1/n^{5/4}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{1/4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{(1/4)n^{-3/4}}\quad(\text{洛必达法则})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^{1/4}}=0$$

由于 $\sum b_n=\sum(1/n^{5/4})$ ($p>1$ 的 $p$ 级数)收敛，依据极限比较检验法第(2)部分，$\sum a_n$ 收敛. ■

## 习题 8.4

在习题 1 ~ 36 中，哪些级数收敛，哪些级数发散? 提出答案的理由.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n+\sqrt{n}}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{2^n}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos n}{n^2}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3n-1}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2\sqrt{n}}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$.
9. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\ln(\ln n)}$.
10. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^2}$.
11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^2}{n^3}$.
12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^3}{n^3}$.
13. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$.
14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^2}{n^{3/2}}$.
15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\ln n}$.
16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\ln n)^2}$.
17. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$.
18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\ln^2 n)}$.
19. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$.
20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$.
21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-n}{n2^n}$.
22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2^n}{n^2 2^n}$.
23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}+1}$.
24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}+1}{3^n}$.
25. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$.
26. $\sum_{n=1}^{\infty}\tan\frac{1}{n}$.
27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10n+1}{n(n+1)(n+2)}$.
28. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{5n^3-3n}{n^2(n-2)(n^2+5)}$.
29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tan^{-1}n}{n^{1.1}}$.
30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sec^{-1}n}{n^{1.3}}$.
31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\coth n}{n^2}$.
32. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tanh n}{n^2}$.
33. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.
34. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$.
35. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$.
36. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2^2+3^2+\cdots+n^2}$.
37. 证明:
    (a) 极限比较检验法第(2)部分;
    (b) 极限比较检验法第(3)部分.
38. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是非负数项的收敛级数，对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n/n)$ 能够得出什么结论? 作出解释.
39. 假设对于 $n\geqslant N$($N$ 是整数)有 $a_n>0$ 和 $b_n>0$. 如果 $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n)=\infty$ 而 $\sum a_n$ 收敛，对于级数 $\sum b_n$ 能够得出什么结论? 提出答案的理由.
40. 证明: 若 $\sum a_n$ 是非负项的收敛级数，则 $\sum a_n^2$ 收敛.

**计算机探究**

41. 暂时还不知道级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3\sin^2 n}$$

收敛或者发散. 用一种 CAS(计算机代数系统)通过执行下列处理步骤考察级数的特性:

(a) 定义部分和序列

$$s_k=\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^3\sin^2 n}$$

当你试图求 $s_k$ 当 $k\to\infty$ 的极限时会出现什么情况? CAS 对于这种极限能否得到最后形式的答案?

(b) 画出部分和序列前面 100 个点 $(k, s_k)$. 这些点是否显现收敛? 估计序列的极限是什么?

(c) 然后画出部分和序列前面 200 个点 $(k, s_k)$. 用你自己的表述方式讨论序列的特性.

(d) 再画出部分和序列前面 400 个点 $(k, s_k)$. 当 $k=355$ 时将会出现什么情况? 计算数 355/113. 解释从计算器上在 $k=355$ 时出现的情况. 猜测这种情况在 $k$ 取什么值时可能重现?

关于这个级数, 从 Clifford A. Pickover 写的 *Mazes for the Mind*(《智力的迷津》)一书(圣马丁出版公司, 纽约, 1992)可以找到有趣的讨论.

## 8.5 比率检验法与根检验法

### 8.5.1 比率检验法

比率检验法(也称检比法)通过检查比率 $a_{n+1}/a_n$ 度量级数增加(或者下降)的速率. 对于等比级数 $\sum ar^n$ 而言, 这个速率为常数 $((ar^{n+1})/(ar^n)=r)$, 并且级数当且仅当它的比率的绝对值小于 1 时收敛. 比率检验法是扩充这个结果的强有力的准则.

**定理 12 (比率检验法)** 令 $\sum a_n$ 是正数项的级数, 并且假定

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$$

那么 (a) 若 $\rho<1$, 则级数收敛; (b) 若 $\rho>1$ 或者 $\rho$ 是无穷大, 则级数发散; (c) 若 $\rho=1$, 则检验没有结果.

**证明**

**(a) $\rho<1$.** 令 $r$ 是在 $\rho$ 和 1 之间的数. 于是, 数 $\varepsilon=r-\rho$ 是正数. 由于

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\to\rho$$

当 $n$ 充分大时, 例如对于所有 $n\geqslant N$, $a_{n+1}/a_n$ 必定位于 $\rho$ 的 $\varepsilon$ 范围内. 特别是, 当 $n\geqslant N$ 时,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\rho+\varepsilon=r$$

就是说

$$\begin{aligned}
a_{N+1}&<ra_N\\
a_{N+2}&<ra_{N+1}<r^2a_N\\
a_{N+3}&<ra_{N+2}<r^3a_N\\
&\vdots\\
a_{N+m}&<ra_{N+m-1}<r^ma_N
\end{aligned}$$

这些不等式表明, 级数在第 $n$ 项以后的项, 比具有比率 $r<1$ 的等比级数的项更快地趋近零. 更确切地说, 考虑级数 $\sum c_n$, 其中当 $n=1, 2, \cdots, N$ 时 $c_n=a_n$, 并且 $c_{N+1}=ra_N$, $c_{N+2}=r^2a_N$, $\cdots$, $c_{N+m}=r^ma_N$, $\cdots$. 现在对于所有 $n$ 有 $a_n\leqslant c_n$, 并且

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}c_n&=a_1+a_2+\cdots+a_{N-1}+a_N+ra_N+r^2a_N+\cdots\\
&=a_1+a_2+\cdots+a_{N-1}+a_N(1+r+r^2+\cdots)
\end{aligned}$$

由于 $|r|<1$, 等比级数 $1+r+r^2+\cdots$ 收敛, 所以 $\sum c_n$ 收敛. 由于 $a_n\leqslant c_n$, 级数 $\sum a_n$ 也收敛.

**(b) $1<\rho\leqslant\infty$.** 从某个下标 $M$ 起,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \text{并且} \quad a_M < a_{M+1} < a_{M+2} < \cdots$$

级数的项当 $n$ 变为无穷大时不趋近零，依据第 $n$ 项检验法，级数发散.

**(c) $\rho=1$.** 从级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \quad \text{和} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

看出，当 $\rho=1$ 时必须用其他检验法检验级数的收敛性.

$$\text{对于}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}:\quad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1/(n+1)}{1/n}=\frac{n}{n+1}\to 1$$

$$\text{对于}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}:\quad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1/(n+1)^2}{1/n^2}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\to 1^2=1$$

在两种情况下 $\rho=1$，但是第一个级数发散而第二个级数收敛. ■

当级数的项包含涉及 $n$ 的表达式的阶乘或者涉及 $n$ 的自乘的表达式时，比率检验法通常是有效的.

**例 1**　考察下列级数的收敛性：

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+5}{3^n}$;　　(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!n!}$;　　(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n!n!}{(2n)!}$.

**解**

(a) 对于级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+5)/3^n$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2^{n+1}+5)/3^{n+1}}{(2^n+5)/3^n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2^{n+1}+5}{2^n+5}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2+5\cdot 2^{-n}}{1+5\cdot 2^{-n}}\right)\to\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1}=\frac{2}{3}$$

这个级数收敛，因为 $\rho=2/3$ 小于 1. 这并不意味着 2/3 是级数的和. 事实上

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+5}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{3^n}=\frac{1}{1-(2/3)}+\frac{5}{1-(1/3)}=\frac{21}{2}$$

(b) 若 $a_n=\frac{(2n)!}{n!n!}$，则

$$a_{n+1}=\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n!n!(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)!(n+1)!(2n)!}=\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}=\frac{4n+2}{n+1}\to 4$$

这个级数发散，因为 $\rho=4$ 大于 1.

(c) 若 $a_n=4^n n!n!/(2n)!$，则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{4^{n+1}(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}\cdot\frac{(2n)!}{4^n n!n!}=\frac{4(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{2(n+1)}{2n+1}\to 1$$

由于 $a_{n+1}/a_n$ 的极限是 $\rho=1$，我们不能从比率检验法判定级数是否收敛. 如果注意 $a_{n+1}/a_n=(2n+2)/(2n+1)$，可以得出 $a_{n+1}$ 总是大于 $a_n$ 的结论，因为 $(2n+2)/(2n+1)$ 总是大于 1. 因此，所有项大于或者等于 $a_1=2$，而第 $n$ 项当 $n\to\infty$ 时不趋近零. 这个级数发散. ■

### 8.5.2　根检验法

至今我们对于级数 $\sum a_n$ 提出的收敛检验法，在级数项 $a_n$ 的公式相对简单的情况下是非常适用的. 但是，对于判定项 $a_n$ 比较复杂的某些级数的收敛性未必有效. 考察下面的级数.

**例 2**　令

$$a_n=\begin{cases}n/2^n, & n\text{ 为奇数}\\ 1/2^n, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$$

级数$\sum a_n$收敛吗？

**解** 我们写出级数的前面几项：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{5}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{7}{2^7}+\cdots = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{1}{16}+\frac{5}{32}+\frac{1}{64}+\frac{7}{128}+\cdots$$

显然，这不是等比级数. 第$n$项当$n\to\infty$时趋近零，所以我们不知道级数是否发散. 积分检验法看起来无能为力. 比率检验法产生

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \dfrac{1}{2n}, & n\text{ 为奇数} \\ \dfrac{n+1}{2}, & n\text{ 为偶数} \end{cases}$$

当$n\to\infty$时，比率交替变成很小的值和很大的值而无极限.

可以回答这个级数收敛性问题的检验法是根检验法. ■

**定理 13（根检验法）** 令$\sum a_n$是在$n\geqslant N$时项$a_n\geqslant 0$的级数，并且假定

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho$$

那么(a)级数在$\rho<1$时收敛；(b)级数在$\rho>1$或$\rho$是无穷大时发散；(c)检验法在$\rho=1$时没有结果.

**证明**

**(a) $\rho<1$.** 选取$\varepsilon>0$为这样一个小的数，使得$\rho+\varepsilon<1$. 由于$\sqrt[n]{a_n}\to\rho$，项$\sqrt[n]{a_n}$最终会比$\varepsilon$更接近$\rho$. 换句话说，存在这样一个下标$M\geqslant N$，使得当$n\geqslant M$时

$$\sqrt[n]{a_n} < \rho+\varepsilon$$

于是，对于$n\geqslant M$也有

$$a_n < (\rho+\varepsilon)^n$$

现在，级数

$$\sum_{n=M}^{\infty}(\rho+\varepsilon)^n$$

是比率为$(\rho+\varepsilon)<1$的等比级数，因而收敛. 依据比较检验法，级数$\sum_{n=M}^{\infty}a_n$收敛，由此推出级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = a_1+\cdots+a_{M-1}+\sum_{n=M}^{\infty}a_n$$

收敛.

**(b) $1<\rho\leqslant\infty$.** 对于所有超过某个整数$M$的下标有$\sqrt[n]{a_n}>1$，所以，对于$n>N$有$a_n>1$. 级数的项不收敛于零. 依据第$n$项检验法，级数发散.

**(c) $\rho=1$.** 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$和$\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$显示，当$\rho=1$时根检验法没有结果. 这时第一个级数发散而第二个级数收敛，但是在两种情况下都有$\sqrt[n]{a_n}\to 1$. ■

**例 3** 下面哪些级数收敛，哪些级数发散？

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$;　　(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$;　　(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+n}\right)^n$.

**解**

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ 收敛，因为 $\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}}=\frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}}=\frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2}\to\frac{1}{2}<1.$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$ 发散，因为 $\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}}=\frac{2}{(\sqrt[n]{n})^2}\to\frac{2}{1}>1.$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+n}\right)^n$ 收敛，因为 $\sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+n}\right)^n}=\frac{1}{1+n}\to 0<1.$ ■

**例 4** （重复例 2）令

$$a_n=\begin{cases}n/2^n, & n \text{ 为奇数}\\ 1/2^n, & n \text{ 为偶数}\end{cases}$$

级数 $\sum a_n$ 收敛吗？

**解** 我们应用根检验法，求出

$$\sqrt[n]{a_n}=\begin{cases}\sqrt[n]{n}/2, & n \text{ 为奇数}\\ 1/2, & n \text{ 为偶数}\end{cases}$$

因此，

$$\frac{1}{2}\leqslant\sqrt[n]{a_n}\leqslant\frac{\sqrt[n]{n}}{2}$$

由于 $\sqrt[n]{n}\to 1$（见 8.1 节定理 5），根据夹层定理有 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1/2$. 这个极限小于 1，所以依据根检验法，级数收敛. ■

## 习题 8.5

在习题 1 ~ 26 中，哪些级数收敛，哪些级数发散？提出答案的理由.（在检查答案时，记住判定级数收敛或者发散的方法可能不止一种.）

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\sqrt{2}}}{2^n}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}n!e^{-n}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{10^n}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-2}{n}\right)^n$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{1.25^n}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{3^n}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^n$.
11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}$.
12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^n}{n^n}$.
13. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$.
14. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n$.
15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$.
16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\ln n}{2^n}$.
17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n!}$.
18. $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}(n^3)$.
19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$.
20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^n(n+1)!}{3^nn!}$.
21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)!}$.
22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.
23. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(\ln n)^n}$.
24. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(\ln n)^{(n/2)}}$.
25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\ln n}{n(n+2)!}$.
26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^32^n}$.

在习题 27 ~ 38 中，由项的公式定义的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，哪些收敛，哪些发散？提出答案的理由.

27. $a_1=2,\ a_{n+1}=\frac{1+\sin n}{n}a_n$.
28. $a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1+\tan^{-1}n}{n}a_n$.
29. $a_1=\frac{1}{3},\ a_{n+1}=\frac{3n-1}{2n+5}a_n$.
30. $a_1=3,\ a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$.
31. $a_1=2,\ a_{n+1}=\frac{2}{n}a_n$.
32. $a_1=5,\ a_{n+1}=\frac{\sqrt[n]{n}}{2}a_n$.

33. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{1+\ln n}{n} a_n$.

34. $a_1 = \dfrac{1}{2},\ a_{n+1} = \dfrac{n+\ln n}{n+10} a_n$.

35. $a_1 = \dfrac{1}{3},\ a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n}$.

36. $a_1 = \dfrac{1}{2},\ a_{n+1} = (a_n)^{n+1}$.

37. $a_n = \dfrac{2^n n! n!}{(2n)!}$.

38. $a_n = \dfrac{(3n)!}{n!(n+1)!(n+2)!}$.

在习题 39 ~ 44 中，哪些级数收敛，哪些级数发散？提出答案的理由.

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^n}{(n^n)^2}$.

40. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^n}{n^{(n^2)}}$.

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{2^{(n^2)}}$.

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{(2^n)^2}$.

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{4^n 2^n n!}$.

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{[2\cdot 4\cdot \cdots \cdot (2n)](3^n+1)}$.

45. 无论是比率检验法还是根检验法都无助于检验 $p$ 级数. 试对级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

应用这两种方法，并且说明用它们检验不能提供关于级数收敛性的信息.

46. 说明无论用比率检验法还是根检验法都不能提供关于级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p} \quad (p\text{ 是常数})$$

收敛性的信息.

47. 令

$$a_n = \begin{cases} n/2^n, & n\text{ 是素数} \\ 1/2^n, & n\text{ 是非素数} \end{cases}$$

级数 $\sum a_n$ 收敛吗？提出答案的理由.

## 8.6 交错级数，绝对收敛与条件收敛

**交错级数**是交替出现正项和负项的级数. 下面是 3 个交错级数的例子：

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots \tag{1}$$

$$-2+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^n 4}{2^n}+\cdots \tag{2}$$

$$1-2+3-4+5-6+\cdots+(-1)^{n+1}n+\cdots \tag{3}$$

级数(1)称为**交错调和级数**，我们很快会看到它收敛. 级数(2)是比 $r=-1/2$ 的等比级数，收敛于 $-2/[1+(1/2)]=-4/3$. 级数(3)发散，因为第 $n$ 项不趋近零.

我们应用交错级数检验法证明交错调和级数的收敛性.

**定理 14（交错级数检验法(莱布尼茨定理)）** 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$$

收敛，只要下述三个条件全部满足：

(1) 所有项 $u_n$ 都是正数；

(2) 存在某个整数 $N$，对于所有 $n \geqslant N$ 有 $u_n \geqslant u_{n+1}$；

(3) $u_n \to 0$.

**证明** 若 $n$ 是偶数，例如 $n=2m$，则级数的前 $n$ 项和为

$$s_{2m} = (u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2m-1}-u_{2m})$$
$$= u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots-(u_{2m-2}-u_{2m-1})-u_{2m}$$

第一个等式说明 $s_{2m}$ 是 $m$ 个非负项之和，因为带括号的每个项是正数或零. 因此 $s_{2m+2} \geqslant s_{2m}$，而序

列$\{s_{2m}\}$是非减序列. 第二个等式说明$s_{2m}\leqslant u_1$. 由于$\{s_{2m}\}$是非减的和上有界的，因此它存在极限，比方说

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m} = L \tag{4}$$

若$n$是奇数，例如$n=2m+1$，则级数的前$n$项和为$s_{2m+1}=s_{2m}+u_{2m+1}$. 由于$u_n\to 0$,

$$\lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$$

并且当$m\to\infty$时，

$$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1} \to L + 0 = L \tag{5}$$

结合等式(4)和(5)的结果，给出$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = L$(见8.1节习题119). ■

**例1** 交错调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

满足定理14取$N=1$时的所有三个必需条件，它因此收敛. ■

级数部分和的图形解释(见图8.9)显示交错级数在定理14取$N=1$的三个条件满足时如何收敛于它的极限$L$. 从$x$轴上的原点开始，我们画出正距离$s_1=u_1$. 为了求对应于$s_2=u_1-u_2$的点，后退一段等于$u_2$的距离. 由于$u_2\leqslant u_1$，不会退回到比原点更远的位置. 继续用这种拉锯式方法，按级数中符号的要求前进或者后退. 但是对于$n\geqslant N$，每一步前进或者后退的距离比前一步短(至多相同)，因为$u_{n+1}\leqslant u_n$. 然而，由于第$n$项当$n$增加时趋近零，前进或者后退的步长越来越小. 我们是在越过极限$L$的两边摆动，而摆动的幅度趋近零. 极限$L$位于任何两次相继的部分和$s_n$和$s_{n+1}$之间，所以同$s_n$之差的值小于$u_{n+1}$.

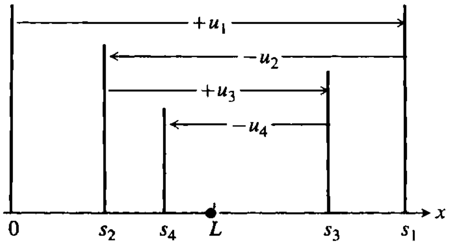



图8.9 满足定理14对于$N=1$的三个假设的交错级数，其部分和从头起交替跨越极限

因为对于$n\geqslant N$,

$$|L - s_n| < u_{n+1}$$

我们对收敛的交错级数的和可以作出有用的估计.

**定理15(交错级数估计定理)** 如果交错级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$$

满足定理14中的三个条件，那么对于$n\geqslant N$,

$$s_n = u_1 - u_2 + \cdots + (-1)^{n+1} u_n$$

逼近级数的和$L$，其误差的绝对值小于$u_{n+1}$，即第一个未使用项的绝对值. 而且，余式$L-s_n$的符号与第一个未用项的符号相同.

对于余式符号的证明在习题53留作练习.

**例2** 对级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} \;\vdots\; + \frac{1}{256} - \cdots$$

试用定理15作估计(级数的和是已知的). 定理表明，如果在8项之后截断级数，那么舍弃部分的总和为正并且小于1/256. 前8项的和是0.664 062 5. 级数的和为

$$\frac{1}{1-(-1/2)} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$$

差(2/3) - 0. 664 062 5 = 0. 002 604 166 6…为正数并且小于(1/256) = 0. 003 906 25. ■

### 8.6.1 绝对收敛与条件收敛

> **定义** 如果级数$\sum a_n$对应项绝对值的级数$\sum |a_n|$收敛，就说$\sum a_n$ **绝对收敛**(**是绝对收敛的**).

例 2 中的等比级数绝对收敛，因为对应项绝对值的级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$$

收敛. 交错调和级数不是绝对收敛的. 它对应项绝对值的级数是(发散的)调和级数.

> **定义** 收敛而不绝对收敛的级数称为**条件收敛**.

交错调和级数是条件收敛级数.

绝对收敛由于两个原因而很重要. 第一，我们已经有了对于正项级数收敛的有效检验法；第二，如果级数绝对收敛，那么如下面定理要证明的那样，它也收敛.

> **定理 16（绝对收敛检验法）** 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

**证明** 对于每个 $n$,

$$-|a_n|\leqslant a_n\leqslant|a_n|,\quad 所以\ 0\leqslant a_n+|a_n|\leqslant 2|a_n|$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}2|a_n|$收敛，而根据直接比较检验法，非负项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|)$收敛. 等式 $a_n=(a_n+|a_n|)-|a_n|$使我们把$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$表示成两个收敛级数之差：

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|-|a_n|)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|)-\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. ■

**注意** 我们可以把定理 16 重新表达为：每个绝对收敛级数收敛. 但是逆定理不成立：许多收敛级数并不绝对收敛(如例 1 中的交错调和级数).

**例 3**

**(a)** 对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\cdots$$

对应的绝对值的级数是收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots$$

原来的级数收敛，因为它绝对收敛.

**(b)** 对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}=\frac{\sin 1}{1}+\frac{\sin 2}{4}+\frac{\sin 3}{9}+\cdots,$$

对应的绝对值的级数是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|=\frac{|\sin 1|}{1}+\frac{|\sin 2|}{4}+\frac{|\sin 3|}{9}+\cdots$$

通过它同级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ 的比较知其收敛，因为对于每个 $n$ 有 $|\sin n|\leqslant 1$. 原来的级数绝对收敛，因此它收敛. ■

**例 4** 如果 $p$ 是正常数，序列 $\{1/n^p\}$ 是极限为零的减序列. 因此，交错 $p$ 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}=1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\cdots,\quad p>0$$

收敛.

如果 $p>1$，级数绝对收敛. 例如，取 $p=3/2$，得到绝对收敛级数

$$1-\frac{1}{2^{3/2}}+\frac{1}{3^{3/2}}-\frac{1}{4^{3/2}}+\cdots$$

如果 $0<p\leqslant 1$，级数条件收敛. 例如，取 $p=1/2$，得到条件收敛级数

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$$ ■

### 8.6.2 级数重排

对于有限和的项我们总是可以重排的. 对于绝对收敛的无穷级数同样可以重排(证明概要参见习题 60).

> **定理 17 (绝对收敛级数的重排定理)** 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,并且 $b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots$ 是序列 $\{a_n\}$ 的任意重排,那么 $\sum b_n$ 绝对收敛,并且
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

如果我们重排一个条件收敛级数的项，那么得到不同的结果. 事实上，可以证明：对于任何实数 $r$，可以对给定的条件收敛级数重排，使得它的和等于 $r$. (我们略去对这个事实的证明. )因此，我们必须始终按给定的顺序对条件收敛级数的项求和.

至此，我们建立了几种对级数收敛性和发散性的检验法，小结如下：

> **(1) 第 $n$ 项检验法**：除非 $a_n\to 0$，否则级数发散.
>
> **(2) 等比级数**：若 $|r|<1$，则级数 $\sum ar^n$ 收敛；否则级数发散.
>
> **(3) $p$ 级数**：若 $p>1$，则级数 $\sum 1/n^p$ 收敛；否则级数发散.
>
> **(4) 非负项的级数**：试用积分检验法、比率检验法或者根检验法. 另外试用比较检验法同一个已知级数比较.
>
> **(5) 具有某些负值项的级数**：检验 $\sum|a_n|$ 是否收敛. 它若收敛，则 $\sum a_n$ 也收敛，因为绝对收敛蕴涵收敛.
>
> **(6) 交错级数**：若 $\sum a_n$ 满足交错级数检验法的三个条件，则级数收敛.

### 习题 8.6

在习题 1 ~ 10 的交错级数中，哪些收敛，哪些发散？提出答案的理由.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{3/2}}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{10}\right)^n$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{10^n}{n^{10}}$.
5. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln n}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$.

7. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{\ln n^2}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}$.

在习题11 ~ 44 的级数中,哪些绝对收敛,哪些收敛,哪些发散?提出答案的理由.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(0.1)^n$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(0.1)^n}{n}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^3+1}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n!}{2^n}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+3}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n^2}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3+n}{5+n}$.

20. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(n^3)}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1+n}{n^2}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{n+5^n}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2(2/3)^n$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\sqrt[n]{10})$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\tan^{-1}n}{n^2+1}$.

26. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\ln n}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n-\ln n}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-100)^n}{n!}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty}(-5)^{-n}$.

31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+2n+1}$.

32. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\ln n}{\ln n^2}\right)^n$.

33. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}$.

34. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}$.

35. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)^n}{(2n)^n}$.

36. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n!)^2}{(2n)!}$.

37. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^n n!n}$.

38. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n!)^2 3^n}{(2n+1)!}$.

39. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

40. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n^2+n}-n)$.

41. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n})$.

42. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$.

43. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{sech} n$.

44. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{csch} n$.

在习题45 ~ 48 中,用级数前4项的和作为整个级数和的近似值,估计误差的大小.

45. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$. (可以证明和为 ln 2.)

46. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{10^n}$.

47. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(0.01)^n}{n}$.
(在8.7 节将看到,和为 ln 1.01.)

48. $\frac{1}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n,\quad 0<t<1$.

**T** 在习题49 和 50 中,求级数和的逼近,要求误差小于 $5\times10^{-6}$.

49. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}$. (在 8.9 节将看到,这个级数和等于 cos 1,即 1 弧度的余弦值.)

50. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}$. (在 8.9 节将看到,这个级数和等于 $e^{-1}$.)

51. (a)级数

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{9}-\frac{1}{4}+\frac{1}{27}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{2^n}+\cdots$$

不满足定理 14 的条件之一. 请问不满足哪一个条件?

(b)求(a)中级数的和.

**T**52. 满足定理 14 的条件的交错级数的极限 $L$ 位于任何两个相邻部分和之间. 这暗示用平均值

$$\frac{s_n+s_{n+1}}{2}=s_n+\frac{1}{2}(-1)^{n+2}a_{n+1}$$

估计 $L$. 计算

$$s_{20}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{21}$$

作为交错调和级数之和的逼近. 这个级数和的准确值是 ln 2 =0.6931….

53. **满足定理 14 的条件的交错级数的余式符号** 证明定理 15 中的论断: 只要交错级数满足定理 14 中的条件, 当用一个部分和逼近它时, 余式(未用项之和)与第一个未用项有相同的符号. (提示: 对剩余的项按接连的成对项分组.)

54. 证明级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

前 $2n$ 项的和同级数

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots$$

前 $n$ 项的和相等. 这两个级数是否收敛？第一个级数前 $2n+1$ 项的和是什么？如果两个级数收敛，它们的和是什么？

**55.** 证明：若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散.

**56.** 证明：若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

**57.** 证明：若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 和 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

同时绝对收敛，则下列级数绝对收敛：

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$.　　(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$（$k$ 为任意数）.

**58.** 用例子说明，即使 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同时收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 也可能发散.

**T 59.** 在交错调和级数中，假定目标是对级数的项重排，获得一个收敛于 $-1/2$ 的新级数. 新的排列从第一个负数项开始，那就是 $-1/2$. 只要得到一个部分和小于或者等于 $-1/2$，就按顺序加入正数项，直到新的部分和大于 $-1/2$. 然后按顺序加入负数项，直到部分和再次小于或者等于 $-1/2$. 继续这个过程，直到所取部分和高于目标值或者至低于目标值至少 3 次为止. 如果 $s_n$ 是重排后的新级数的前 $n$ 项之和，画出各点 $(n, s_n)$ 说明部分和是如何变化的.

**60. 绝对收敛级数重排定理（定理 17）证明概要**

(a) 令 $\varepsilon$ 是正实数，$L=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，以及 $s_k=\sum_{n=1}^{k} a_n$. 证明，对于某个下标 $N_1$ 和某个下标 $N_2 \geqslant N_1$ 有

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{及} \quad |s_{N_2}-L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

由于所有项 $a_1, a_2, \cdots, a_{N_2}$ 出现在序列 $\{b_n\}$ 中的某些位置，存在一个下标 $N_3 \geqslant N_2$，使得当 $n \geqslant N_3$ 时，$\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)-s_{N_2}$ 至多是 $m \geqslant N_1$ 的 $a_m$ 项之和. 因此，如果 $n \geqslant N_3$，那么

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k - L\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} b_k - s_{N_2}\right| + |s_{N_2}-L| \leqslant \sum_{k=N_1}^{\infty} |a_k| + |s_{N_2}-L| < \varepsilon$$

(b) 在(a)中的论据表明，如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，那么 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛并且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. 现在证明，由于 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛到 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

## 8.7 幂级数

现在我们能够检验无穷级数的收敛性，研究看起来像“无穷多项式”的和. 这种和称为幂级数，因为它们被定义为某个变量的幂的无穷级数，在我们的情形以 $x$ 为变量. 同多项式一样，对幂级数可以进行加、减、乘运算以及求微分和积分，产生新的幂级数.

### 8.7.1 幂级数与收敛性

我们从下面的形式定义开始.

**定义**　**关于 $x$ 的幂级数**是形式为

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \tag{1}$$

的级数. **关于 $x=a$ 的幂级数**是形式为

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots \tag{2}$$

的级数，其中**中心** $a$ 和**系数** $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ 是常数.

式(1)是在式(2)中取 $a=0$ 的特例.

**例1** 在式(1)中对全部系数取1，得到等比级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

这是首项为1和比为1的等比级数. 它对于 $|x|<1$ 收敛于 $1/(1-x)$. 我们用

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad -1 < x < 1 \tag{3}$$

表示这个结果. ■

到现在，我们用式(3)作为右边级数的和的公式. 下面改变重点：把右边级数的部分和看成逼近左边函数的多项式 $P_n(x)$. 对于接近0的 $x$ 值，只需取级数的几项就能得到满意的逼近. 当我们向 $x=1$ 或者 $x=-1$ 移动时，必须取更多项. 图8.10显示 $f(x)=1/(1-x)$ 以及逼近多项式 $y_n=P_n(x)$ 在 $n=0$，1，2和 $n=8$ 时的图形. 函数 $f(x)=1/(1-x)$ 在包含 $x=1$ 的区间上不是连续的，它在这个点有一条垂直渐近线. 当 $x\geqslant 1$ 时，多项式逼近不适用.

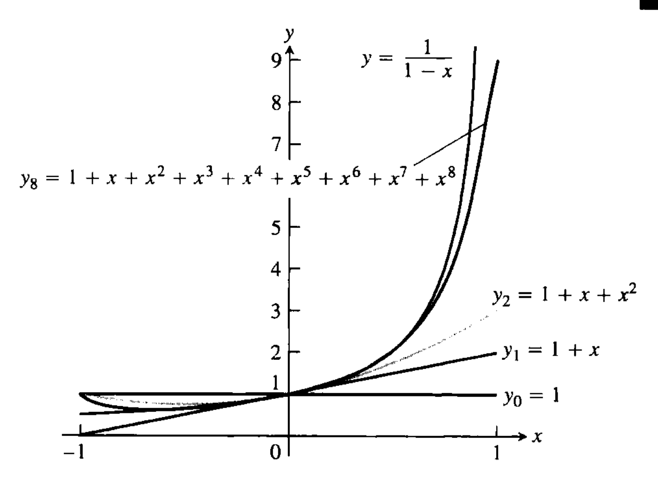


图8.10 $f(x)=1/(1-x)$ 及其4个多项式逼近的图形(例1)

**例2** 幂级数

$$1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n + \cdots \tag{4}$$

同式(2)取 $a=2$，$c_0=1$，$c_1=-1/2$，$c_2=1/4$，…，$c_n=(-1/2)^n$ 相当. 这是首项为1和比 $r=-\frac{x-2}{2}$ 的等比级数. 这个级数对于 $\left|\frac{x-2}{2}\right|<1$ 或 $0<x<4$ 收敛. 级数和为

$$\frac{1}{1-r} = \frac{1}{1+\frac{x-2}{2}} = \frac{2}{x}$$

所以

$$\frac{2}{x} = 1 - \frac{(x-2)}{2} + \frac{(x-2)^2}{4} - \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n + \cdots, \quad 0 < x < 4$$

级数(4)对于接近2的 $x$ 值产生 $f(x)=2/x$ 很有用的多项式逼近：

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-2) = 2 - \frac{x}{2}$$

$$P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 = 3 - \frac{3x}{2} + \frac{x^2}{4}$$

等等(见图8.11). ■

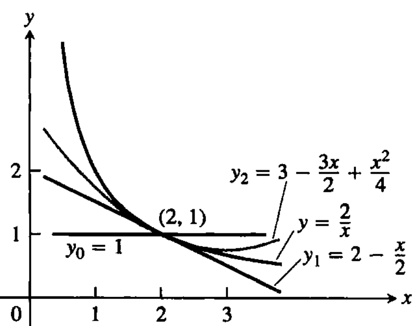


图8.11 $f(x)=2/x$ 及其前3个多项式逼近的图形(例2)

下面的例子说明通常如何检验幂级数的收敛性和可能产生的结果.

**例 3** 下列幂级数对于什么 $x$ 值收敛？

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots.$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots.$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots.$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n=1+x+2!x^2+3!x^3+\cdots.$

**解** 对级数 $\sum|u_n|$ 应用比率检验法，其中 $u_n$ 是上述级数的第 $n$ 项.

(a) $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{n}{n+1}|x|\to|x|.$

级数对于 $|x|<1$ 绝对收敛. 若 $|x|>1$，则级数发散，因为第 $n$ 项不收敛于零. 在 $x=1$，得到交错调和级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

这个级数收敛. 在 $x=-1$，得到

$$-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\cdots$$

这是调和级数的负值项级数，它发散. 级数(a)对于 $-1<x\leqslant1$ 收敛，而对于其余 $x$ 值发散.

(b) $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{2n-1}{2n+1}x^2\to x^2.$

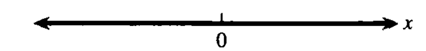
级数对于 $x^2<1$ 绝对收敛. 它对于 $x^2>1$ 发散，因为第 $n$ 项不收敛于零. 在 $x=1$，级数变成

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

根据交错级数定理它收敛. 级数在 $x=-1$ 也收敛，因为它再度成为满足收敛性条件的交错级数. 级数在 $x=-1$ 的值是它在 $x=1$ 的值的负数. 级数(b)对于 $-1\leqslant x\leqslant1$ 收敛，而对于其余 $x$ 值发散.

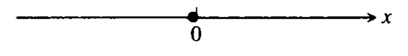
(c) 对于每个 $x$ 值 $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right|=\frac{|x|}{n+1}\to0.$

级数对于所有 $x$ 值绝对收敛.




(d) $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{(n+1)!\ x^{n+1}}{n!\ x^n}\right|=(n+1)|x|\to\infty$，除非 $x=0$.

级数对于除去 $x=0$ 之外的所有 $x$ 值发散.




■

上面的例子说明幂级数可能怎样收敛. 下面的结果显示，如果幂级数在一个以上的值收敛，那么它在这些值的一个完整区间上收敛.

> **定理 18（幂级数收敛定理）** 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ 对于 $x=c\neq0$ 收敛. 则它对于所有 $|x|<|c|$ 的 $x$ 值收敛. 若幂级数对于 $x=d$ 发散，则它对于所有 $|x|>|d|$ 的 $x$ 值发散.

**证明** 假定 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ 收敛. 那么$\lim_{n\to\infty} a_n c^n = 0$. 因此，存在这样一个整数 $N$，使得对于所有 $n \geqslant N$ 有 $|a_n c^n| < 1$. 就是说，对于 $n \geqslant N$ 有

$$|a_n| < \frac{1}{|c|^n} \tag{5}$$

现在取满足 $|x| < |c|$ 的任意 $x$ 值，并且考虑级数

$$|a_0| + |a_1 x| + \cdots + |a_{N-1}x^{N-1}| + |a_N x^N| + |a_{N+1}x^{N+1}| + \cdots$$

在 $|a_N x^N|$ 前面仅有有限多项，而它们的和是有限的. 由于不等式(5)，从 $|a_N x^N|$ 开始的项和随后的项的和小于

$$\left|\frac{x}{c}\right|^N + \left|\frac{x}{c}\right|^{N+1} + \left|\frac{x}{c}\right|^{N+2} + \cdots \tag{6}$$

但是级数(6)是比 $r = |x/c|$ 的等比级数，由于 $|x| < |c|$，它的和小于1. 因此级数(6)收敛. 所以原来级数绝对收敛. 这就证明定理前半部分.

定理后半部分由前半部分推出. 如果级数在 $x = d$ 发散而在满足 $|x_0| > |d|$ 的值 $x_0$ 收敛，那么我们可以在定理前半部分取 $c = x_0$，并由此得出级数在 $x = d$ 绝对收敛的结论. 但是级数不能同时在一处绝对收敛和发散. 因此，如果级数在 $d$ 发散，那么它对于满足 $|x| > |d|$ 的所有 $x$ 发散. ■

为了简化记号，定理 18 处理形式为 $\sum a_n x^n$ 的级数的收敛性问题. 对于形式为 $\sum a_n (x-a)^n$ 的级数，可以用 $x'$代换 $x - a$ 而把定理的结果应用于级数 $\sum a_n (x')^n$.

### 8.7.2 幂级数的收敛半径

从刚才证明的定理和讨论过的例子中，我们导出这样的结论：幂级数 $\sum c_n (x-a)^n$ 的收敛特性表现为三种可能的方式之一：它可能仅在 $x = a$ 收敛，或者处处收敛，也可能在以$x = a$ 为中心半径为 $R$ 的某个区间上收敛. 我们把这个结论作为定理 18 的系予以证明.

**定理 18 的系** 级数 $\sum c_n (x-a)^n$ 的收敛性用下述三种可能性之一描述：

(1)存在这样一个正数 $R$，级数对于满足 $|x-a| > R$ 的 $x$ 值发散，但是对于满足 $|x-a| < R$ 的 $x$ 值收敛. 级数在两个端点 $x = a - R$ 和 $x = a + R$ 的任何一个可能收敛，也可能不收敛.

(2)级数对于每个 $x$ 绝对收敛($R = \infty$).

(3)级数在 $x = a$ 收敛而在 $x$ 的其他值发散($R = 0$).

**证明** 首先假定 $a = 0$，所以幂级数的中心在0. 如果级数处处收敛，那么我们处于第(2)种情形. 如果级数仅在 $x = 0$ 收敛，我们则处于第(3)种情形. 否则，存在这样一个非零数 $d$，使得 $\sum c_n d^n$ 发散. 使级数 $\sum c_n x^n$ 收敛的 $x$ 值的集合 $S$ 是非空集合，因为它包含 0，同时还包含一个正数 $p$. 根据定理 18，级数对于所有满足 $|x| > |d|$ 的 $x$ 值发散，所以对于所有 $x \in S$ 有 $|x| \leqslant |d|$，而 $S$ 是有界集合. 由实数的完备性性质(参见附录 A.7)，一个非空有界集合有一个上确界 $R$. (上确界 $R$ 是元素 $x \in S$ 中满足 $x \leqslant R$ 的最小数.)如果 $|x| > R \geqslant p$，那么 $x \notin S$，所以级数 $\sum c_n x^n$ 发散. 如果 $|x| < R$，那么 $|x|$ 不是 $S$ 的一个上界(因为它小于上确界)，所以存在一个数 $b \in S$，满足 $b > |x|$. 由于 $b \in S$，级数 $\sum c_n b^n$ 收敛，因此，由定理 18 级数 $\sum c_n |x|^n$ 收敛. 这就证明以 $a = 0$ 为中心的幂级数的这个系.

对于中心在 $a \neq 0$ 的幂级数，设 $x' = (x - a)$，并且重复对 $x'$的论证. 由于当 $x = a$ 时 $x' = 0$，级数 $\sum c_n (x')^n$ 以 $x' = 0$ 为中心的收敛区间的半径 $R'$，同级数 $\sum c_n (x-a)^n$ 以 $x = a$ 为中心的收敛区间的半径 $R$ 相等. 这就证实这个系对于一般情形是正确的. ■

$R$ 称为幂级数的**收敛半径**，而中心在 $x=a$ 和半径为 $R$ 的区间称为**收敛区间**. 收敛区间可以是开区间、闭区间或者半开区间，随特定的级数而定. 在 $|x-a|<R$ 的点 $x$，级数绝对收敛. 如果级数对于所有 $x$ 值收敛，就说它的收敛半径为无穷大. 如果级数仅在 $x=a$ 收敛，就说它的收敛半径为零.

**如何检验幂级数的收敛性**

(1) 用比率检验法(或者 $n$ 次根检验法)求级数绝对收敛的区间. 通常，这是一个开区间

$$|x-a|<R \quad 或 \quad a-R<x<a+R$$

(2) 如果级数绝对收敛的区间是有限的，在每个端点检验收敛性或者发散性，像在例 3 的(a)和(b)那样. 用比较检验法、积分检验法或者交错级数检验法作检验.

(3) 如果级数绝对收敛的区间是 $a-R<x<a+R$，级数对于 $|x-a|>R$ 的 $x$ 值发散(它甚至不是条件收敛)，因为对于那些 $x$ 值第 $n$ 项不趋近零.

### 8.7.3 逐项微分

高等微积分有一个定理，讲述幂级数在其收敛区间的每个内点可以逐项求微分.

**定理 19 (逐项微分定理)** 如果级数 $\sum c_n(x-a)^n$ 对于某个 $R>0$ 的开区间 $a-R<x<a+R$ 收敛，它定义一个函数 $f$ 如下：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n, \quad a-R<x<a+R$$

这样一个函数在收敛区间的内部存在各阶导数. 可以从原来级数逐项求导数获得这些导数：

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(x-a)^{n-1}$$

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n(x-a)^{n-2}$$

等等. 每个这样的导数在原来级数的收敛区间的每个内点收敛.

**例 4** 设

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, \quad -1<x<1$$

求 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的级数.

**解**

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}, \quad -1<x<1$$

$$f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}=2+6x+12x^2+\cdots+n(n-1)x^{n-2}+\cdots$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}, \quad -1<x<1$$ ■

**注意** 逐项微分可能不适合于其他类型的级数. 例如，三角级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n!x)}{n^2}$$

对于所有 $x$ 值收敛. 但是如果逐项求微分，得到的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cos(n!x)}{n^2}$$

对于所有 $x$ 值发散. 这不是一个幂级数，因为它不是 $x$ 的正整数幂的和.

### 8.7.4 逐项积分

在幂级数的整个收敛区间内也可以逐项求积分. 这个结果在高等微积分教程中证明.

**定理 20（逐项积分定理）** 假定

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

对于 $a-R<x<a+R(R>0)$ 收敛. 那么

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

对于 $a-R<x<a+R$ 收敛，并且对于 $a-R<x<a+R$ 有

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$$

**例 5** 识别函数

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

**解** 对原来级数逐项求微分，得到

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \quad -1 < x < 1$$

这是首项为 1 和比等于 $-x^2$ 的等比级数，所以

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

现在可以对 $f'(x)=1/(1+x^2)$ 积分，得到

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \tan^{-1}x + C$$

$f(x)$ 的级数当 $x=0$ 时为零，所以 $C=0$. 因此

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \tan^{-1}x, \quad -1 < x < 1 \tag{7}$$

可以证明级数在 $x=\pm 1$ 也收敛于 $\tan^{-1}x$，但是我们略去证明. ■

请注意，例 5 中原级数在原收敛区间的两个端点收敛，但是定理 20 只能保证微分后的级数在收敛区间内收敛.

**例 6** 级数

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots$$

在开区间 $-1<t<1$ 上收敛. 因此，

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots \Big]_0^x \quad (\text{定理 } 20)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \quad -1 < x < 1$$

还可以证明，这个级数在 $x=1$ 收敛于数 $\ln 2$，但是那不是由定理保证的. ■

### 8.7.5 幂级数的乘法

另外一个定理讲述绝对收敛的幂级数可以用乘多项式的方法相乘. 我们也略去这个定理的证明.

**定理 21 (幂级数的乘法定理)** 若级数

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \quad 和 \quad B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

对于 $|x|<R$ 绝对收敛，且

$$c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+a_2b_{n-2}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$$

则级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

对于 $|x|<R$ 绝对收敛于 $A(x)B(x)$:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

求两个已知幂级数乘积的一般项系数 $c_n$ 可能是冗长而乏味的. 实际上，我们通常只求前面少数几项的系数. 例如，从例 1 和例 6 得到

$$\frac{1}{1-x}\ln(1+x)=(1+x+x^2+\cdots)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\right)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{6}-\frac{x^4}{6}\cdots$$

## 习题 8.7

在习题 1 ~ 32 中，求级数的收敛半径和收敛区间. (a) 级数对于什么 $x$ 值收敛？(b) 级数对于什么 $x$ 值绝对收敛？(c) 级数对于什么 $x$ 值条件收敛？

**1.** $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$.

**2.** $\sum_{n=0}^{\infty}(x+5)^n$.

**3.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4x+1)^n$.

**4.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-2)^n}{n}$.

**5.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{10^n}$.

**6.** $\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n$.

**7.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{n+2}$.

**8.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+2)^n}{n}$.

**9.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\sqrt{n}\,3^n}$.

**10.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$.

**11.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n!}$.

**12.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^nx^n}{n!}$.

**13.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}$.

**14.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x+3)^{2n+1}}{n!}$.

**15.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$.

**16.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{\sqrt{n^2+3}}$.

**17.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(x+3)^n}{5^n}$.

**18.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{4^n(n^2+1)}$.

**19.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n}x^n}{3^n}$.

**20.** $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n}(2x+5)^n$.

**21.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^nx^n$.

**22.** $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln n)x^n$.

**23.** $\sum_{n=1}^{\infty}n^nx^n$.

**24.** $\sum_{n=0}^{\infty}n!(x-4)^n$.

**25.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x+2)^n}{n2^n}$.

**26.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n(n+1)(x-1)^n$.

**27.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(\ln n)^2}$. (从 8.3 节习题 39 获得对 $\sum 1/(n(\ln n)^2)$ 的所需信息.)

**28.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n\ln n}$. (从 8.3 节习题 38 获得对 $\sum 1/(n\ln n)$ 的所需信息.)

**29.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4x-5)^{2n+1}}{n^{3/2}}$.

**30.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x+1)^{n+1}}{2n+2}$.

**31.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+\pi)^n}{\sqrt{n}}$.

**32.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-\sqrt{2})^{2n+1}}{2^n}$.

在习题 33 ~ 38 中，求级数的收敛区间，以及收敛区间内级数的和作为 $x$ 的函数.

**33.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{4^n}$.

**34.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^{2n}}{9^n}$.

**35.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-1\right)^n$.

**36.** $\sum_{n=0}^{\infty}(\ln x)^n$.

**37.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2+1}{3}\right)^n$.

**38.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n$.

**39.** 级数

$$1-\frac{1}{2}(x-3)+\frac{1}{4}(x-3)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n(x-3)^n+\cdots$$

对于 $x$ 的什么值收敛？它的和是什么？对这个给定的级数逐项微分得到什么级数？新级数对于 $x$ 的什么值收敛？它的和是什么？

**40.** 如果对习题 39 中的级数逐项积分，得到什么新级数？新级数对于 $x$ 的什么值收敛？它的和的另外一个名称是什么？

**41.** 级数

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}+\cdots$$

对于所有 $x$ 值收敛于 $\sin x$.

(a) 求 $\cos x$ 的级数的前面 6 项. 级数对于 $x$ 的什么值收敛？

(b) 在 $\sin x$ 的级数中用 $2x$ 代换 $x$，求对于所有 $x$ 值收敛于 $\sin 2x$ 的级数.

(c) 利用(a)中的结果和级数乘法，计算 $2\sin x\cos x$ 的级数的前面 6 项. 把得到的答案同(b)中的答案比较.

**42.** 级数

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

对于所有 $x$ 值收敛于 $e^x$.

(a) 求 $(d/dx)e^x$ 的级数. 得到 $e^x$ 的级数吗？解释得到的答案.

(b) 求 $\int e^x dx$ 的级数. 得到 $e^x$ 的级数吗？解释得到的答案.

(c) 在 $e^x$ 的级数中用 $-x$ 代换 $x$，求对于所有 $x$ 值收敛于 $e^{-x}$ 的级数. 然后用 $e^x$ 的级数乘 $e^{-x}$ 的级数，求 $e^{-x}\cdot e^x$ 的级数的前面 6 项.

**43.** 级数

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\frac{62x^9}{2835}+\cdots$$

对于 $-\pi/2<x<\pi/2$ 的 $x$ 值收敛于 $\tan x$.

(a) 求 $\ln(|\sec x|)$ 的级数的前面 5 项. 级数对于 $x$ 的什么值收敛？

(b) 求 $\sec^2 x$ 的级数的前面 5 项. 级数对于 $x$ 的什么值收敛？

(c) 通过习题 44 中给出的 $\sec x$ 的级数自乘，验证在(b)中得到的结果.

**44.** 级数

$$\sec x=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\frac{277}{8064}x^8+\cdots$$

对于 $-\pi/2<x<\pi/2$ 的 $x$ 值收敛于 $\sec x$.

(a) 求 $\ln(|\sec x+\tan x|)$ 的级数的前面 5 项. 级数对于 $x$ 的什么值收敛？

(b) 求 $\sec x\tan x$ 的级数的前面 4 项. 级数对于 $x$ 的什么值收敛？

(c) 通过习题 43 中给出的 $\tan x$ 的级数乘 $\sec x$ 的级数，验证在(b)中得到的结果.

**45. 收敛幂级数的唯一性**

(a) 证明：若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 都是收敛级数，且对于开区间 $(-c,c)$ 中的所有 $x$ 值两个级数相等，则对于每个 $n$ 有 $a_n=b_n$.（提示：令 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$. 逐项微分，证明 $a_n$ 和 $b_n$ 同时等于 $f^{(n)}(0)/n!$.）

(b) 证明：若对于开区间 $(-c,c)$ 中的所有 $x$ 值幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$，则对于每个 $n$ 有 $a_n=0$.

**46. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n^2/2^n)$ 的和** 为了求这个级数的和，把 $1/(1-x)$ 表示成等比级数，求所得等式两端对 $x$ 的微分，用 $x$ 乘微分后的等式两端，再对两端微分，再用 $x$ 乘两端，并且置 $x=1/2$. 得到什么结果？（来源：David E. Dobbs, "Letter to the editor"（致编辑的信），*Illinois Mathematics Teacher*（《伊利诺伊数学教师》），第 33 卷，第 4 期，1982，27 页.）

**47. 在端点的收敛性** 用一些例子说明，幂级数在其收敛区间一个端点的收敛可能是条件收敛或者绝对收敛.

**48.** 构造收敛区间如下的幂级数：

(a) $(-3, 3)$； (b) $(-2, 0)$； (c) $(1, 5)$

## 8.8 泰勒级数与麦克劳林级数

本节讲述无限可微的函数如何生成称为泰勒级数的幂级数. 在许多场合，这种级数可以提供对生成函数很有用的多项式逼近.

### 8.8.1 级数表示法

从定理 19 知道，幂级数的和在级数收敛区间内是具有各阶导数的连续函数. 但是，反过来

有什么结论？如果函数$f(x)$在区间$I$上具有各阶导数，它在$I$上能够表示成幂级数吗？如果可能，它的系数是什么？

如果假定$f(x)$是具有正收敛半径的幂级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots$$

的和，那么对第二个问题很容易作出回答. 在收敛区间$I$内重复对级数逐项微分，得到

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2+\cdots+na_n(x-a)^{n-1}+\cdots$$

$$f''(x)=1\cdot 2a_2+2\cdot 3a_3(x-a)+3\cdot 4a_4(x-a)^2+\cdots$$

$$f'''(x)=1\cdot 2\cdot 3a_3+2\cdot 3\cdot 4a_4(x-a)+3\cdot 4\cdot 5a_5(x-a)^2+\cdots$$

等等，对于所有$n$，$n$阶导数为

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+\text{以}(x-a)\text{为因式的项之和}$$

由于所有这些等式在$x=a$成立，我们有

$$f'(a)=a_1$$

$$f''(a)=1\cdot 2a_2$$

$$f'''(a)=1\cdot 2\cdot 3a_3$$

而在一般情况下，

$$f^{(n)}(a)=n!a_n$$

这些公式对于在区间$I$上收敛于$f$(“在$I$上表示$f$”)的值的任何幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$$

揭示出系数的模式. 如果存在这样一个级数(还是待解决的问题)，那么仅有一个这样的级数，它的第$n$项系数为

$$a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

如果$f$有一个级数表示，那么这个级数必定是

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots \tag{1}$$

但是，我们如果从以$x=a$为中心的区间$I$上的任意无限可微函数出发，并且用它生成式(1)中的级数，那么级数在区间$I$内的每个$x$值收敛于$f(x)$吗？我们将会看到，对于某些函数而言，答案是可能如此，但是对于另外一些函数，答案是不可能如此.

### 8.8.2 泰勒级数与麦克劳林级数

**定义** 令$f$是在包含$a$作为内点的某个区间上处处存在各阶导数的函数. 那么**由$f$在$x=a$生成的泰勒级数**是

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

**由$f$生成的麦克劳林级数**是

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

即是由$f$在$x=0$生成的泰勒级数.

人物传记

布鲁克·泰勒
(Brook Taylor, 1685—1731)
柯林·麦克劳林
(Colin Maclaurin, 1698—1746)

由 $f$ 生成的麦克劳林级数经常也称为 $f$ 的泰勒级数.

**例 1** 求由 $f(x)=1/x$ 在 $x=2$ 生成的泰勒级数. 如果这个级数收敛于 $1/x$, 那么在什么地方收敛?

**解** 需要求出 $f(2)$, $f'(2)$, $f''(2)$, $\cdots$. 求导数得到

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{-1}, & f(2) &= 2^{-1}=\frac{1}{2}\\
f'(x) &= -x^{-2}, & f'(2) &= -\frac{1}{2^2}\\
f''(x) &= 2!x^{-3}, & \frac{f''(2)}{2!} &= 2^{-3}=\frac{1}{2^3}\\
f'''(x) &= -3!x^{-4}, & \frac{f'''(2)}{3!} &= -\frac{1}{2^4}\\
&\vdots & &\vdots\\
f^{(n)}(x) &= (-1)^n n!x^{-(n+1)}, & \frac{f^{(n)}(2)}{n!} &= \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

泰勒级数为

$$\begin{aligned}
&f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n+\cdots\\
&=\frac{1}{2}-\frac{(x-2)}{2^2}+\frac{(x-2)^2}{2^3}-\cdots+(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}+\cdots
\end{aligned}$$

这是首项为 1/2 和比 $r=-(x-2)/2$ 的等比级数. 级数对于 $|x-2|<2$ 的 $x$ 值绝对收敛, 它的和等于

$$\frac{1/2}{1+(x-2)/2}=\frac{1}{2+(x-2)}=\frac{1}{x}$$

在这个例子中, 由 $f(x)=1/x$ 在 $x=2$ 生成的泰勒级数收敛于 $1/x$, 收敛区间为 $|x-2|<2$ 或者 $0<x<4$. ■

### 8.8.3 泰勒多项式

可微函数 $f$ 在点 $a$ 的线性化是由

$$P_1(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

给出的一次多项式. 在 3.10 节我们曾用这个线性化逼近 $x=a$ 附近的 $f(x)$. 如果 $f$ 在 $x=a$ 存在高阶导数, 那么它也有高阶多项式逼近, 对于每个存在的导数有一个多项式逼近. 这些多项式称为 $f$ 的泰勒多项式.

**定义** 令 $f$ 是在以 $a$ 为内点的某个区间内具有 $k$ 阶导数的函数, 其中 $k=1, 2, \cdots, N$. 那么, 对于从 0 到 $N$ 的任何整数, 由 $f$ 在 $x=a$ 生成的 ***n* 阶泰勒多项式**是多项式

$$\begin{aligned}
P_n(x)=&f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots\\
&+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n
\end{aligned}$$

我们说 $n$ 阶泰勒多项式而不说 $n$ 次泰勒多项式, 是因为 $f^{(n)}(a)$ 可以为 0. 例如, $f(x)=\cos x$ 在 $x=0$ 的前面两个泰勒多项式是 $P_0(x)=1$ 和 $P_1(x)=1$. 这个一阶泰勒多项式的次数是 0 而不

是1.

正如$f$在$x=a$的线性化对$f$在$a$的邻域内提供最佳线性逼近一样，$f$的高阶泰勒多项式对$f$分别提供相应次数的“最佳”多项式逼近.（见习题32.）

**例2** 求由$f(x)=e^x$在$x=0$生成的泰勒级数和泰勒多项多.

**解** 由于

$$f(x)=e^x,\quad f'(x)=e^x,\quad \cdots,\quad f^{(n)}(x)=e^x,\quad \cdots$$

我们有

$$f(0)=e^0=1,\quad f'(0)=1,\quad \cdots,\quad f^{(n)}(0)=1,\quad \cdots$$

由$f$在$x=0$生成的泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

这也是$e^x$的麦克劳林级数. 在8.9节将会看到这个级数在每个$x$值收敛于$e^x$.

$f$在$x=0$的$n$阶泰勒多项式是

$$P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

参见图8.12. ■

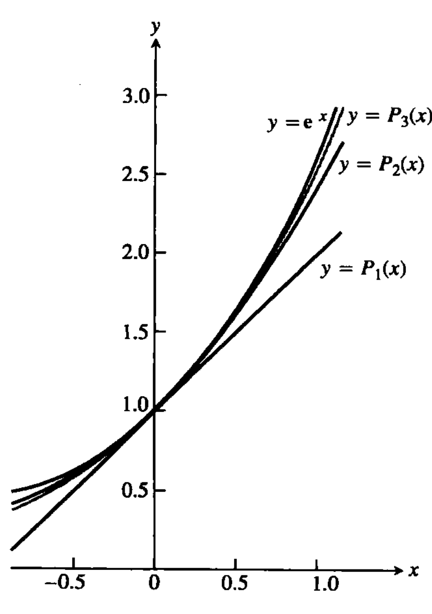



图8.12 $f(x)=e^x$和它的泰勒多项式 $P_1(x)=1+x$ $P_2(x)=1+x+(x^2/2!)$ $P_3(x)=1+x+(x^2/2!)+(x^3/3!)$ 的图形；注意它们在中心$x=0$附近非常接近(例2)

**例3** 求由$f(x)=\cos x$在$x=0$生成的泰勒级数和泰勒多项式.

**解** 余弦函数和它的导数是

$$\begin{aligned} f(x)&=\cos x, & f'(x)&=-\sin x\\ f''(x)&=-\cos x, & f^{(3)}(x)&=\sin x\\ &\vdots & &\vdots\\ f^{(2n)}(x)&=(-1)^n\cos x, & f^{(2n+1)}(x)&=(-1)^{n+1}\sin x \end{aligned}$$

在$x=0$，余弦函数为1而正弦函数为0，所以

$$f^{(2n)}(0)=(-1)^n,\quad f^{(2n+1)}(0)=0$$

由$f$在$x=0$生成的泰勒级数是

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

$$=1+0\cdot x-\frac{x^2}{2!}+0\cdot x^3+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^{2k}}{(2k)!}$$

这也是$\cos x$的麦克劳林级数. 在8.9节将会看到这个级数在每个$x$值收敛于$\cos x$.

由于$f^{(2n+1)}(0)=0$，$2n$阶和$2n+1$阶泰勒多项式相等：

$$P_{2n}(x)=P_{2n+1}(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

图 8.13 显示这些多项式在 $x=0$ 附近如何逼近 $f(x)=\cos x$. 图中仅画出右半部分图形，因为图形对 $y$ 轴是对称的.

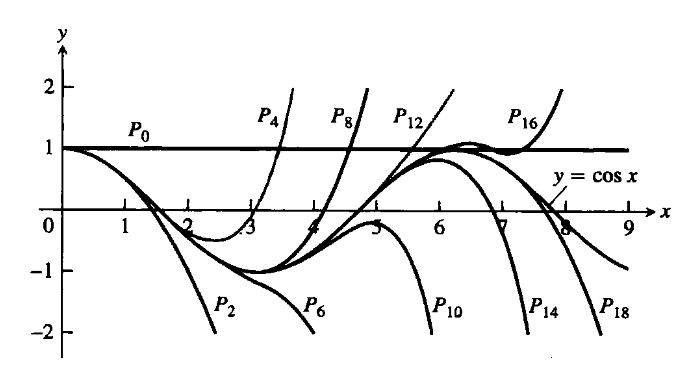



图 8.13 多项式 $P_{2n}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ 当 $n\to\infty$ 时收敛于 $\cos x$;我们能够单独从在 $x=0$ 所知的余弦函数及其导数的值推断 $\cos x$ 在任意远处的特性 ■

**例 4** 可以证明(虽然不容易)

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ e^{-1/x^2}, & x\neq 0\end{cases}$$

(见图 8.14)在 $x=0$ 存在各阶导数，并且对于所有 $n$ 有 $f^{(n)}(0)=0$. 这意味着由 $f$ 在 $x=0$ 生成的泰勒级数是

$$\begin{aligned}&f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots\\&=0+0\cdot x+0\cdot x^2+\cdots+0\cdot x^n+\cdots\\&=0+0+\cdots+0+\cdots\end{aligned}$$

这个级数对于每个 $x$ 值收敛(它的和为 0)，但是仅在 $x=0$ 收敛于 $f(x)$. ■

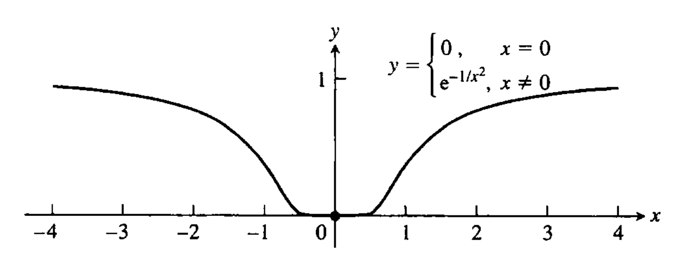



图 8.14 $y=e^{-1/x^2}$ 的连续延拓的图形在原点如此平坦，以致它在那里的各阶导数为 0(例 4)

还遗留两个问题:

(1) 正常情况下我们可以预期泰勒级数对于 $x$ 的什么值收敛于生成函数?

(2) 一个函数的泰勒多项式在给定的区间上以怎样的精度逼近函数?

问题的答案在下一节由泰勒定理给出.

## 习题 8.8

在习题 1 ~ 8 中，求由 $f$ 在 $x=a$ 生成的 0，1，2，3 阶泰勒多项式.

**1.** $f(x)=\ln x$，$a=1$.

**2.** $f(x)=\ln(1+x)$，$a=0$.

**3.** $f(x)=1/x$，$a=2$.

**4.** $f(x)=1/(x+2)$，$a=0$.

5. $f(x)=\sin x$，$a=\pi/4$. 6. $f(x)=\cos x$，$a=\pi/4$.

7. $f(x)=\sqrt{x}$，$a=4$. 8. $f(x)=\sqrt{x+4}$，$a=0$.

在习题 9 ~ 20 中，求函数的麦克劳林级数.

9. $e^{-x}$. 10. $e^{x/2}$.

11. $\frac{1}{1+x}$. 12. $\frac{1}{1-x}$.

13. $\sin 3x$. 14. $\sin\frac{x}{2}$.

15. $7\cos(-x)$. 16. $5\cos \pi x$.

17. $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. 18. $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

19. $x^4-2x^3-5x+4$. 20. $(x+1)^2$.

在习题 21 ~ 28 中，求由 $f$ 在 $x=a$ 产生的泰勒级数.

21. $f(x)=x^3-2x+4$，$a=2$.

22. $f(x)=2x^3+x^2+3x-8$，$a=1$.

23. $f(x)=x^4+x^2+1$，$a=-2$.

24. $f(x)=3x^5-x^4+2x^3+x^2-2$，$a=-1$.

25. $f(x)=1/x^2$，$a=1$.

26. $f(x)=x/(1-x)$，$a=0$.

27. $f(x)=e^x$，$a=2$.

28. $f(x)=2^x$，$a=1$.

29. 利用由 $e^x$ 在 $x=a$ 生成的泰勒级数，证明

$$e^x=e^a\left[1+(x-a)+\frac{(x-a)^2}{2!}+\cdots\right]$$

30. (续习题 29)求由 $e^x$ 在 $x=1$ 生成的泰勒级数. 把答案同习题 29 中的公式比较.

31. 令 $f(x)$ 在 $x=a$ 存在直到 $n$ 阶导数. 证明：$n$ 阶泰勒多项式和它的前面 $n$ 阶导数同 $f$ 及其前面 $n$ 阶导数在 $x=a$ 具有相同的值.

32. **泰勒多项式的逼近特性** 假定 $f(x)$ 在以 $x=a$ 为中心的区间上是可微的，并且 $g(x)=b_0+b_1(x-a)+\cdots+b_n(x-a)^n$ 是带常系数 $b_0$，$b_1$，…，$b_n$ 的 $n$ 次多项式. 令 $E(x)=f(x)-g(x)$. 证明：如果对 $g$ 附加条件

**(a)** $E(a)=0$ (在 $x=a$ 的逼近误差为零)，

**(b)** $\lim\limits_{x\to a}\frac{E(x)}{(x-a)^n}=0$ (误差与 $(x-a)^n$ 相比可以忽略)，

那么

$$g(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

因此，泰勒多项式 $P_n(x)$ 是次数小于或者等于 $n$ 的唯一多项式，它在 $x=a$ 的误差为零，同时与 $(x-a)^n$ 相比可以忽略.

**二次逼近** 由二次可微函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 生成的二阶泰勒多项式称为 $f$ 在 $x=a$ 的*二次逼近*. 在习题 33 ~ 38 中，(**a**)求 $f$ 的线性化(一阶泰勒多项式)，(**b**)求 $f$ 在 $x=0$ 的二次逼近.

33. $f(x)=\ln(\cos x)$. 34. $f(x)=e^{\sin x}$.

35. $f(x)=1/\sqrt{1-x^2}$. 36. $f(x)=\cosh x$.

37. $f(x)=\sin x$. 38. $f(x)=\tan x$.

## 8.9 泰勒级数的收敛性

在上一节，我们提出在什么情况下可以预期泰勒级数收敛于生成函数的问题. 本节用下述定理回答这个问题.

**定理 22（泰勒定理）** 若函数 $f$ 及其前 $n$ 阶导数 $f'$，$f''$，…，$f^{(n)}$ 在 $a$ 和 $b$ 之间的闭区间上连续，且 $f^{(n)}$ 在 $a$ 和 $b$ 之间的开区间上可微，则在 $a$，$b$ 之间存在这样一个数 $c$，使

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

泰勒定理是中值定理的推广(习题 39). 在本节最后给出泰勒定理的证明.

我们应用泰勒定理时，通常需要让 $a$ 固定，并且把 $b$ 作为自变量. 在这样的情况下，如果把 $b$ 换成 $x$，更容易使用泰勒公式.

下面是定理在作这种变换后的变形.

**泰勒公式** 若函数$f$在包含$a$的一个开区间$I$上存在各阶导数，则对于每个正整数$n$以及$I$中的每个$x$值，

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x) \quad (1)$$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (2)$$

$c$是$a$和$b$之间的一个数.

当我们用这种方式陈述定理时，表明对于每个$x\in I$，有

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$$

函数$R_n(x)$由$(n+1)$阶导数$f^{(n+1)}$在某个点$c$的值确定，$c$依赖于$a$和$x$并且介于它们之间. 对于任何所需的$n$值，这个公式同时给出$f$的$n$阶多项式逼近以及使用区间$I$上这个逼近时的误差公式.

公式(1)称为**泰勒公式**. 函数$R_n(x)$称为在区间$I$上用$P_n(x)$逼近$f$的$n$**阶余式**或者**误差项**. 如果对于所有$x\in I$，当$n\to\infty$时$R_n(x)\to 0$，就说由$f$在$x=a$生成的泰勒级数在$I$上**收敛**于$f$，并且写成

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

通常可以估计$R_n$而无需知道$c$的值，如下面例子的说明.

**例1** 证明：由$f(x)=e^x$在$x=0$生成的泰勒级数对于每个实数值$x$收敛于$f(x)$.

**解** 函数$f$在整个区间$(-\infty,\infty)$上存在各阶导数. 在公式(1)和(2)中用$f(x)=e^x$和$a=0$，给出

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x) \quad \text{(由 8.8 节例 2 的多项式)}$$

以及对于0和$x$之间的某个数$c$，

$$R_n(x)=\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

由于$e^x$是$x$的增函数，$e^c$位于$e^0=1$和$e^x$之间. 当$x$为负数时，$c$也是负数，并且$e^c<1$. 当$x$为0时，$e^x=1$，并且$R_n(x)=0$. 当$x$为正数时，$c$也是正数，并且$e^c<e^x$. 因此，对于上面给出的$R_n(x)$，有

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},\quad x\leqslant 0\quad (e^c<1)$$

和

$$|R_n(x)|<e^x\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},\quad x>0\quad (e^c<e^x)$$

最后，由于对于每个$x$值，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0 \quad \text{(8.1 节)}$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，而级数对于每个$x$值收敛于$e^x$. 因此，

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\cdots \quad (3)$$

■

利用例 1 的结果和 $x=1$ 可以写成公式

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+R_n(1)$$

其中

$$R_n(1)=e^c\frac{1}{(n+1)!}<\frac{e}{(n+1)!}\quad(e^c<e^1)$$

$c$ 是 0 与 1 之间的某个数

### 8.9.1 余式估计

像在例 1 所做的那样，经常可能估计 $R_n(x)$. 估计方法很简便，我们把它陈述为下面的定理备以后引用.

**定理 23（余式估计定理）** 若存在这样一个正常数 $M$，使得对于 $x$ 和 $a$ 之间并且包含 $x$ 和 $a$ 在内的所有 $t$ 满足 $|f^{(n+1)}(t)|\leqslant M$，则泰勒定理中的余式 $R_n^{(x)}$ 满足不等式

$$|R_n(x)|\leqslant M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

若这个条件对于每个 $n$ 成立，并且 $f$ 满足泰勒定理中的其他条件，则级数收敛于 $f(x)$.

下面是应用定理 23 的例子.

**例 2** 证明 $\sin x$ 在 $x=0$ 的泰勒级数对于所有 $x$ 值收敛.

**解** 函数及其导数为

$$\begin{aligned}
f(x)&=\sin x, & f'(x)&=\cos x\\
f''(x)&=-\sin x, & f'''(x)&=-\cos x\\
&\vdots & &\vdots\\
f^{(2k)}(x)&=(-1)^k\sin x, & f^{(2k+1)}(x)&=(-1)^k\cos x
\end{aligned}$$

所以

$$f^{(2k)}(0)=0,\quad f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k$$

级数仅有奇数幂项，对于 $n=2k+1$，泰勒定理给出

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}+R_{2k+1}(x)$$

$\sin x$ 的各阶导数的绝对值小于或者等于 1，所以可以应用取 $M=1$ 的余式估计定理，得到

$$|R_{2k+1}(x)|\leqslant 1\cdot\frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!}$$

由于当 $k\to\infty$ 时 $(|x|^{2k+2}/(2k+2)!)\to 0$，无论 $x$ 是什么值，$R_{2k+1}(x)\to 0$，并且 $\sin x$ 的麦克劳林级数对于每个 $x$ 值收敛于 $\sin x$. 因此，

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\tag{4}$$

■

**例 3** 证明：$\cos x$ 在 $x=0$ 的泰勒级数对于每个 $x$ 值收敛于 $\cos x$.

**解** 把余式加进 $\cos x$ 的泰勒多项式（8.8 节例 3），得到 $\cos x$ 取 $n=2k$ 的泰勒公式：

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+R_{2k}(x)$$

因为余弦函数的各阶导数的绝对值小于或者等于 1，取 $M=1$ 的余式估计定理给出

$$|R_{2k}(x)| \leqslant 1 \cdot \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

对于每个 $x$ 值，当 $k\to\infty$ 时 $R_{2k}(x)\to 0$. 因此，级数对于每个 $x$ 值收敛于 $\cos x$. 于是，

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \tag{5}$$

■

在 $\cos x$ 的泰勒级数中用 $2x$ 代换 $x$，可以求 $\cos 2x$ 的泰勒级数：

$$\cos 2x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \cdots \quad (式(5)\ 用\ 2x\ 代换\ x)$$

$$= 1 - \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{2^4x^4}{4!} - \frac{2^6x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}x^{2k}}{(2k)!}$$

**例 4** 什么 $x$ 值能够在用 $x-(x^3/3!)$ 代替 $\sin x$ 时使误差值不大于 $3\times10^{-4}$?

**解** 这里可以利用 $\sin x$ 的泰勒级数是对所有非零 $x$ 值的交错级数这样一个事实. 根据交错级数估计定理(8.6 节)，级数

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} \;\Big|\; + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

在 $(x^3/3!)$ 之后的截断误差不大于

$$\left|\frac{x^5}{5!}\right| = \frac{|x|^5}{120}$$

因此，如果

$$\frac{|x|^5}{120} < 3\times10^{-4} \quad 或 \quad |x| < \sqrt[5]{360\times10^{-4}} \approx 0.514 \quad (为稳妥作了舍弃)$$

误差将小于或者等于 $3\times10^{-4}$.

交错级数估计定理能够提供余式估计定理所不能提供的某些事实：那就是 $\sin x$ 的估计 $x-(x^3/3!)$ 当 $x$ 是正数时为不足的估计，因为这时 $x^5/120$ 是正数.

图 8.15 显示 $\sin x$ 的图形以及它的一些泰勒多项式逼近的图形. 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$P_3(x)=x-(x^3/3!)$ 的图形同正弦曲线几乎是没有区别的. ■

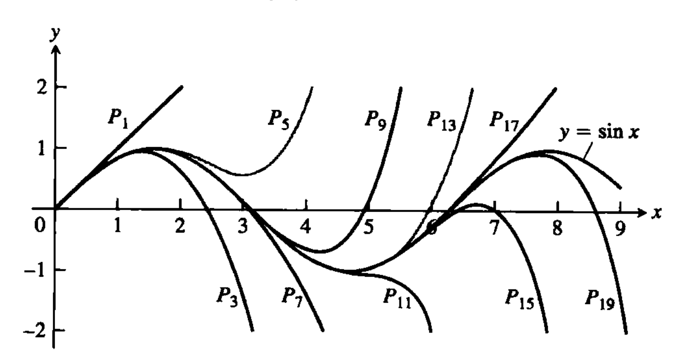



图 8.15 多项式 $P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ 当 $x\to\infty$ 时收敛于 $\sin x$；注意，对于 $x\leqslant1$，$P_3(x)$ 非常紧密地逼近正弦曲线(例 4)

### 8.9.2 应用泰勒级数

对于泰勒级数，在它们的收敛区间的交集上，可以相加和相减以及用常数相乘，而其结果仍

然是泰勒级数. $f(x)+g(x)$ 的泰勒级数是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的泰勒级数之和，因为 $f+g$ 的 $n$ 阶导数是 $f^{(n)}+g^{(n)}$，等等. 因此，对 $\cos 2x$ 的泰勒级数加 1 再除以 2，就得到 $(1+\cos 2x)/2$ 的泰勒级数，而 $\sin x+\cos x$ 的泰勒级数是 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的泰勒级数逐项的和.

泰勒级数可以用于以级数形式表示非初等积分. 例如，像 $\int \sin x^2 dx$ 这样的积分出现在光衍射的研究中. 但是，不存在表示 $\sin x^2$ 的反导数的简单公式.

**例 5** 把 $\int \sin x^2 dx$ 表示成幂级数.

**解** 从 $\sin x$ 的级数得到

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \frac{x^{18}}{9!} - \cdots$$

因此，

$$\int \sin x^2 dx = C + \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15\cdot 7!} + \frac{x^{19}}{19\cdot 9!} - \cdots$$

■

**例 6** 估计 $\int_0^1 \sin x^2 dx$,要求误差小于 0.001.

**解** 从例 5 中的不定积分,

$$\int_0^1 \sin x^2 dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{11\cdot 5!} - \frac{1}{15\cdot 7!} + \frac{1}{19\cdot 9!} - \cdots$$

这是交错级数，而由实验求出

$$\frac{1}{11\cdot 5!} \approx 0.000\,76$$

是级数中数值小于 0.001 的第 1 项. 级数前面两项的和给出

$$\int_0^1 \sin x^2 dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} \approx 0.310$$

■

有时，我们能够通过把有关函数表示成泰勒级数求不定式的值. 请看下面的例子.

**例 7** 求极限

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$$

的值.

**解** $\sin x$ 和 $\tan x$ 取到 $x^5$ 项的泰勒级数分别是

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, \quad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots$$

因此，

$$\sin x - \tan x = -\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{8} - \cdots = x^3\left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} - \cdots\right)$$

所以

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} - \cdots\right) = -\frac{1}{2}$$

■

### 8.9.3 欧拉恒等式

读者可以回忆一下，复数是形式为 $a+bi$ 的数，其中 $a$ 和 $b$ 是实数，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$. 如果在 $\mathrm{e}^x$ 的泰勒级数中代入 $x=\mathrm{i}\theta$（$\theta$ 是实数），并且利用关系式

$$\mathrm{i}^2=-1,\quad \mathrm{i}^3=\mathrm{i}^2\mathrm{i}=-\mathrm{i},\quad \mathrm{i}^4=\mathrm{i}^2\mathrm{i}^2=1,\quad \mathrm{i}^5=\mathrm{i}^4\mathrm{i}=\mathrm{i}$$

等简化结果，得到

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) = \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

这并不是对 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 的证明，因为我们尚未对 e 自乘一个虚数幂的含义给出定义. 相反，这只是说明如何定义 $e^{i\theta}$ 使其同已知的其他事实相符.

> **定义** 对于任何实数 $\theta$，$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. (6)

等式(6)称为**欧拉恒等式**，对于任何复数 $a+bi$，它使我们能把 $e^{a+bi}$ 定义为 $e^a \cdot e^{bi}$. 这个恒等式的一个推论是公式

$$e^{i\pi} = -1$$

当把此式写成 $e^{i\pi}+1=0$ 的形式时，这个公式就将数学中最重要的 5 个常数 0，1，e，$\pi$ 和 i 结合在一起.

### 8.9.4 泰勒定理的证明

我们证明假定 $a<b$ 的泰勒定理. 当 $a>b$ 时，定理的证明几乎是相同的.

泰勒多项式

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

及其前面 $n$ 阶导数，在 $x=a$ 同函数 $f$ 及其前面 $n$ 阶导数一致. 如果在泰勒多项式和函数中增加形式为 $K(x-a)^{n+1}$(其中 $K$ 是任意常数)的另外一项，并不妨碍这种一致性，因为这样一项及其前面 $n$ 阶导数在 $x=a$ 全部等于零. 新函数

$$\phi_n(x) = P_n(x) + K(x-a)^{n+1}$$

及其前面 $n$ 阶导数，在 $x=a$ 仍然同函数 $f$ 及其前面 $n$ 阶导数一致.

此刻我们选取特殊的 $K$ 值，使曲线 $y=\phi_n(x)$ 在 $x=b$ 同原来曲线 $y=f(x)$ 一致. 用符号表示，

$$f(b) = P_n(b) + K(b-a)^{n+1} \quad 或 \quad K = \frac{f(b)-P_n(b)}{(b-a)^{n+1}} \tag{7}$$

取由式(7)定义的 $K$，函数

$$F(x) = f(x) - \phi_n(x)$$

是对原来函数 $f$ 同逼近函数 $\phi_n$ 在 $[a,b]$ 内每个 $x$ 的差的度量.

现在利用罗尔定理(4.2 节). 首先，由于 $F(a)=F(b)=0$ 以及 $F$ 和 $F'$ 都是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，可知对于 $(a,b)$ 中的某个 $c$，有

$$F'(c_1) = 0$$

其次，由于 $F'(a)=F'(c_1)=0$ 以及 $F'$ 和 $F''$ 都在 $[a,c_1]$ 上连续，可知对于 $(a,c_1)$ 中的某个 $c_2$，有

$$F''(c_2) = 0$$

对 $F''$，$F'''$，…，$F^{(n-1)}$ 相继应用罗尔定理，推知

$$\begin{gathered} 在(a,c_2)中存在 c_3，使 F'''(c_3) = 0 \\ 在(a,c_3)中存在 c_4，使 F^{(4)}(c_4) = 0 \\ \cdots\cdots \\ 在(a,c_{n-1})中存在 c_n，使 F^{(n)}(c_n) = 0 \end{gathered}$$

最后，因为 $F^{(n)}$ 在 $[a,c_n]$ 上连续并且在 $(a,c_n)$ 上可微，以及 $F^{(n)}(a)=F^{(n)}(c_n)=0$，罗尔定理暗示在 $(a,c_n)$ 中存在一个数 $c_{n+1}$，使

$$F^{(n+1)}(c_{n+1})=0 \tag{8}$$

如果对 $F(x)=f(x)-P_n(x)-K(x-a)^{n+1}$ 共微分 $n+1$ 次，得到

$$F^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-0-(n+1)!K \tag{9}$$

等式(8)和(9)共同给出

$$K=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \qquad (c=c_{n+1}\text{ 是}(a,b)\text{ 内的某个常数}) \tag{10}$$

等式(7)和(8)给出

$$f(b)=P_n(b)+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

定理证毕. ■

## 习题 8.9

在习题 1 ~ 6 中，利用代换(像在例 4 那样)求函数在 $x=0$ 的泰勒级数.

**1.** $e^{-5x}$. **2.** $e^{-x/2}$.

**3.** $5\sin(-x)$. **4.** $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

**5.** $\cos\sqrt{x+1}$. **6.** $\cos(x^{3/2}/\sqrt{2})$.

在习题 7 ~ 18 中，求函数在 $x=0$ 的泰勒级数.

**7.** $x e^x$. **8.** $x^2\sin x$.

**9.** $\frac{x^2}{2}-1+\cos x$. **10.** $\sin x-x+\frac{x^3}{3!}$.

**11.** $x\cos\pi x$. **12.** $x^2\cos(x^2)$.

**13.** $\cos^2 x$(提示：$\cos^2 x=(1+\cos 2x)/2$).

**14.** $\sin^2 x$. **15.** $\frac{x^2}{1-2x}$.

**16.** $x\ln(1+2x)$. **17.** $\frac{1}{(1-x)^2}$.

**18.** $\frac{2}{(1-x)^3}$.

**19.** 当用 $x-(x^3/6)$ 代替 $\sin x$ 时，什么 $x$ 值能够使逼近误差的数值不大于 $5\times10^{-4}$？提出答案的理由.

**20.** 如果用 $1-(x^2/6)$ 代替 $\cos x$，并且 $|x|<0.5$，对误差能够作出什么估计？$1-(x^2/2)$ 偏于过大还是过小？提出答案的理由.

**21.** 逼近 $\sin x=x$ 当 $|x|<10^{-3}$ 时的紧密程度如何？这些 $x$ 值中的什么值使 $x<\sin x$？

**22.** 当 $x$ 很小时用 $\sqrt{1+x}=1+(x/2)$ 作为 $\sqrt{1+x}$ 的估计式. 估计当 $|x|<0.01$ 时的误差.

**23.** 当 $x$ 很小时用 $e^x=1+x+(x^2/2)$ 作为 $e^x$ 的估计式. 应用余式估计定理估计当 $|x|<0.1$ 时的误差.

**24.** (续习题 23)当 $x<0$ 时，$e^x$ 的级数是交错级数. 应用交错级数估计定理，估计用 $1+x+(x^2/2)$ 代替 $e^x$ 当 $-0.1<x<0$ 时引起的误差. 把你的估计同在习题 23 中得到的结果比较.

在习题 25 ~ 28 中，求 $F(x)$ 在整个给定区间上误差数值小于 $10^{-3}$ 的逼近多项式.

**25.** $F(x)=\int_0^x \sin t^2\,dt$，$[0,1]$.

**26.** $F(x)=\int_0^x t^2 e^{-t^2}\,dt$，$[0,1]$.

**27.** $F(x)=\int_0^x \tan^{-1}t\,dt$：**(a)** $[0,0.5]$；**(b)** $[0,1]$.

**28.** $F(x)=\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt$：**(a)** $[0,0.5]$；**(b)** $[0,1]$.

在习题 29 ~ 34 中，利用级数求极限值.

**29.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-(1+x)}{x^2}$. **30.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$.

**31.** $\lim\limits_{t\to0}\frac{1-\cos t-(t^2/2)}{t^4}$. **32.** $\lim\limits_{\theta\to0}\frac{\sin\theta-\theta+(\theta^3/6)}{\theta^5}$.

**33.** $\lim\limits_{y\to0}\frac{y-\tan^{-1}y}{y^3}$. **34.** $\lim\limits_{y\to0}\frac{\tan^{-1}y-\sin y}{y^3\cos y}$.

**35.** 用 $e^x$ 和 $\sin x$ 的麦克劳林级数相乘，求 $e^x\sin x$ 的麦克劳林级数的前面 5 个非零项.

**36.** 用 $e^x$ 和 $\cos x$ 的麦克劳林级数相乘，求 $e^x\cos x$ 的麦克劳林级数的前面 5 个非零项.

**37.** 利用恒等式 $\sin^2 x=(1-\cos 2x)/2$ 求 $\sin^2 x$ 的麦克劳林级数. 然后对这个级数微分，求 $2\sin x\cos x$ 的麦克劳林级数. 验证这是 $\sin 2x$ 的级数.

**38.** (续习题 37)利用恒等式 $\cos^2 x=\cos 2x+\sin^2 x$ 求 $\cos^2 x$ 的幂级数.

**39. 泰勒定理与中值定理** 解释中值定理为什么是泰勒定理的特例.

**40. 在拐点的线性化** 证明：若二次可微函数 $f(x)$

的图形在 $x=a$ 有一个拐点，则 $f$ 在 $x=a$ 的线性化也是 $f$ 在 $x=a$ 的二次逼近. 这说明为什么切线在拐点处同曲线拟合非常好.

**41.（第二种）二阶导数检验法** 利用公式

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(c_2)}{2}(x-a)^2$$

建立下述检验法：

令 $f$ 存在连续的一阶导数和二阶导数，并且假定 $f'(a)=0$，那么

(a) 若在内部包含 $a$ 的一个区间上 $f''\leqslant 0$，则 $f$ 在 $a$ 有局部极大值.

(b) 若在内部包含 $a$ 的一个区间上 $f''\geqslant 0$，则 $f$ 在 $a$ 具有局部极小值.

**42. 三次逼近** 利用泰勒公式以及 $a=0$ 和 $n=3$，求 $f(x)=1/(1-x)$ 在 $x=0$ 的标准三次逼近. 当 $|x|\leqslant 0.1$ 时对于逼近的误差数值给出一个上界.

**43.** (a) 利用泰勒公式取 $n=2$，求 $f(x)=(1+x)^k$ 在 $x=0$ 的二次逼近（$k$ 为常数）.

(b) 如果 $k=3$，区间 $[0,1]$ 中的什么 $x$ 值将使二次逼近中的误差数值小于 1/100？

**44. 改进对 $\pi$ 的逼近**

(a) 令 $P$ 是对 $\pi$ 准确到 $n$ 位小数的逼近. 证明 $P+\sin P$ 给出准确到 $3n$ 位小数的逼近.（提示：令 $P=\pi+x$.）

T (b) 用计算器试验这个改进.

**45. 由 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 生成的泰勒级数是 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$** 由收敛半径为 $c>0$ 的幂级数定义的函数，在 $(-c,c)$ 的每个点存在收敛于这个函数的泰勒级数. 通过证明由 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 生成的泰勒级数是级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 本身来证明这一点.

这个结果的一个直接推论是，像

$$x\sin x=x^2-\frac{x^4}{3!}+\frac{x^6}{5!}-\frac{x^8}{7!}+\cdots$$

和

$$x^2e^x=x^2+x^3+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^5}{3!}+\cdots$$

这样由 $x$ 的幂乘泰勒级数得到的级数，以及通过对收敛的幂级数积分和微分得到的级数，是由它们代表的函数产生的泰勒级数本身.

**46. 偶函数和奇函数的泰勒级数**（续 8.7 节习题 45） 假定 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 对于开区间 $(-c,c)$ 上的所有 $x$ 收敛. 证明：

(a) 若 $f$ 是偶函数，则 $a_1=a_3=a_5=\cdots=0$，即 $f$ 在 $x=0$ 的泰勒级数仅含 $x$ 的偶次幂项.

(b) 若 $f$ 是奇函数，则 $a_0=a_2=a_4=\cdots=0$，即 $f$ 在 $x=0$ 的泰勒级数仅含 $x$ 的奇次幂项.

**47. 周期函数的泰勒多项式**

(a) 通过证明存在这样一个正常数 $M$，使得对于所有 $x$ 有 $|f(x)|\leqslant M$，证明每个连续的周期函数 $f(x)(-\infty<x<\infty)$ 的值是有界的.

(b) 证明，由 $f(x)=\cos x$ 生成的每个具有正次数的泰勒多项式的图形，当 $|x|$ 增加时最终必定远离 $\cos x$ 的图形. 从图 8.13 中可以看出这一点. $\sin x$ 的泰勒多项式有相似的特性（见图 8.15）.

T**48.** (a) 一起画出曲线 $y=(1/3)-(x^2)/5$ 和 $y=(x-\tan^{-1}x)/x^3$ 以及直线 $y=1/3$ 的图形.

(b) 利用泰勒级数解释从图形中见到的结果. 极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan^{-1}x}{x^3}$$

的值是什么？

**49.** 利用公式(6)把下列 e 的幂写成 $a+bi$ 的形式：

(a) $e^{-i\pi}$；

(b) $e^{i\pi/4}$；

(c) $e^{-i\pi/2}$.

**50.** 利用公式(6)，证明

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \text{ 和 } \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

**51.** 通过组合 $e^{i\theta}$ 和 $e^{-i\theta}$ 的泰勒级数，证实习题 50 中的公式.

**52.** 证明：

(a) $\cosh i\theta=\cos\theta$； (b) $\sinh i\theta=i\sin\theta$.

**53.** 通过 $e^x$ 和 $\sin x$ 的泰勒级数相乘，求 $e^x\sin x$ 的泰勒级数直到 $x^5$ 的项. 这个级数是

$$e^x\cdot e^{ix}=e^{(1+i)x}$$

的级数的虚部. 利用这个事实检验你的答案. $e^x\sin x$ 的级数对于什么 $x$ 值收敛？

**54.** 当 $a$ 和 $b$ 是实数时，我们用公式

$$e^{(a+ib)x}=e^{ax}\cdot e^{ibx}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)$$

定义 $e^{(a+ib)x}$. 对公式右端微分，证明

$$\frac{d}{dx}e^{(a+ib)x}=(a+ib)e^{(a+ib)x}$$

因此熟悉的法则 $(d/dx)e^{kx}=ke^{kx}$ 对于复数 $k$ 和实数 $k$ 都成立.

**55.** 利用$e^{i\theta}$的定义证明，对于任何实数$\theta$, $\theta_1$和$\theta_2$，有(**a**)$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$，(**b**)$e^{-i\theta}=1/e^{i\theta}$.

**56.** 两个复数$a+ib$和$c+id$当且仅当$a=c$和$b=d$时相等. 利用这事实，从

$$\int e^{(a+ib)x}dx=\frac{a-ib}{a^2+b^2}e^{(a+ib)x}+C$$

求

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx \quad 和 \quad \int e^{ax}\sin bx\,dx$$

其中$C=C_1+iC_2$是复数积分常数.

**计算机探究**

泰勒公式取$n=1$和$a=0$给出一个函数在$x=0$的线性化. 取$n=2$和$n=3$，得到标准的二次逼近和三次逼近. 在这部分习题中，考察同这3种逼近有关的误差. 寻求下面两个问题的答案.

(**a**)用每种逼近代替函数时，什么$x$值能够使误差小于$10^{-2}$?

(**b**)用每种逼近在指定区间上逼近函数，预计最大误差有多大?

在习题57~62中，用一种CAS(计算机代数系统)对于函数和区间执行下列处理步骤，辅助解答(a)和(b)中的问题.

第1步：在指定区间上绘制函数图形.

第2步：求在$x=0$的泰勒多项式$P_1(x)$，$P_2(x)$和$P_3(x)$.

第3步：对于每个泰勒多项式计算同余式相关的$(n+1)$阶导数$f^{n+1}(c)$. 画出这个导数在指定区间上作为$c$的函数的图形，并且估计它的最大绝对值$M$.

第4步：计算每个多项式的余式$R_n(x)$. 用第3步估计的$M$代替$f^{n+1}(c)$，画出$R_n(x)$在指定区间上的图形. 然后估计回答问题(a)中的$x$值.

第5步：通过画出$E_n(x)=|f(x)-R_n(x)|$在指定区间上的图形，对估计出的误差和实际误差$E(x)$作比较. 这将有助于回答问题(b).

第6步：一起画出函数及其3个泰勒多项式逼近的图形. 讨论同在第4步和第5步中获得信息有关的图形.

**57.** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, $|x|\leqslant\dfrac{3}{4}$.

**58.** $f(x)=(1+x)^{3/2}$, $-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2$.

**59.** $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $|x|\leqslant 2$.

**60.** $f(x)=(\cos x)(\sin 2x)$, $|x|\leqslant 2$.

**61.** $f(x)=e^{-x}\cos 2x$, $|x|\leqslant 1$.

**62.** $f(x)=e^{x/3}\sin 2x$, $|x|\leqslant 2$.

## 8.10 二项式级数

这一节介绍用于估计二项式$(1+x)^m$的幂和根的二项式级数. 本节最后给出常用级数参照表.

### 8.10.1 幂和根的二项式级数

当$m$是常数时，由$f(x)=(1+x)^m$生成的泰勒级数为

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}x^k+\cdots \quad (1)$$

这个级数称为**二项式级数**，对于$|x|<1$绝对收敛. 为了导出这个级数，首先列出函数及其各阶导数:

$$\begin{aligned}
f(x)&=(1+x)^m\\
f'(x)&=m(1+x)^{m-1}\\
f''(x)&=m(m-1)(1+x)^{m-2}\\
f'''(x)&=m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}\\
&\vdots\\
f^{(k)}(x)&=m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)(1+x)^{m-k}
\end{aligned}$$

然后计算它们在$x=0$的值，并且代入泰勒级数公式，就得到级数(1).

如果$m$是大于或者等于零的整数，级数在$(m+1)$项后终止，因为从$k=m+1$项起的系数为零.

如果 $m$ 不是正整数或者零，级数是无穷级数，并且对于 $|x|<1$ 收敛. 为了明白这一点，令 $u_k$ 是包含 $x^k$ 的项. 于是利用绝对收敛的比率检验法，看出当 $k\to\infty$ 时

$$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \left|\frac{m-k}{k+1}x\right| \to |x|$$

对于二项式级数的推导，仅在说明二项式级数是由 $f(x)=(1+x)^m$ 生成的，并且对于 $|x|<1$ 收敛. 推导过程没有证明级数收敛于 $(1+x)^m$. 不过，二项式级数的确收敛于 $(1+x)^m$，但是我们略去证明(见习题 20.)

**二项式级数**

对于 $-1<x<1$,

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\binom{m}{k}x^k$$

其中我们定义

$$\binom{m}{1} = m, \quad \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2!}$$

以及

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}, \quad k \geqslant 3$$

**例 1** 如果 $m=-1$，有

$$\binom{-1}{1} = -1, \quad \binom{-1}{2} = \frac{-1(-2)}{2!} = 1$$

以及

$$\binom{-1}{k} = \frac{-1(-2)(-3)\cdots(-1-k+1)}{k!} = (-1)^k\left(\frac{k!}{k!}\right) = (-1)^k$$

利用这些系数值并且用 $-x$ 代换 $x$，二项式级数公式给出我们熟悉的等比级数

$$(1+x)^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^k x^k + \cdots$$ ■

**例 2** 从 3.10 节例 1 知道，对于很小的 $|x|$，$\sqrt{1+x}\approx 1+(x/2)$. 取 $m=1/2$，二项式级数给出二阶逼近和高阶逼近，并且具有由交错级数估计定理产生的误差估计：

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^3 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{4!}x^4 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \cdots$$

代换 $x$ 将给出其他逼近. 例如，用 $-x^2$ 代换 $x$，对于很小的 $|x^2|$，有

$$\sqrt{1-x^2} \approx 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}$$

用 $-\frac{1}{x}$ 代换 $x$，对于很小的 $\left|\frac{1}{x}\right|$，即很大的 $|x|$，有

$$\sqrt{1-\frac{1}{x}} \approx 1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}$$ ■

### 8.10.2 常用级数

**常用泰勒级数**

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad |x|<1$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-x)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\quad |x|<1$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad |x|<\infty$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad |x|<\infty$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\quad |x|<\infty$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},\quad -1<x\leqslant 1$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\tanh^{-1}x=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad |x|<1$$

$$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\quad |x|\leqslant 1$$

**二项式级数**

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)x^2}{2!}+\frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!}+\cdots+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)x^k}{k!}+\cdots$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{m}{k}x^k,\quad |x|<1$$

其中

$$\binom{m}{1}=m,\quad \binom{m}{2}=\frac{m(m-1)}{2!},\quad \binom{m}{k}=\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}\quad (k\geqslant 3)$$

**注**：为了写出二项式级数的紧凑形式，习惯上把$\binom{m}{0}$定义为 1，并且取 $x^0=1$(即使通常不包含 $x=0$ 的情形)，由此产生

$$(1+x)^m=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}x^k$$

如果 $m$ 是正整数，级数在 $x^m$ 项终结，并且级数的和对于所有 $x$ 收敛.

### 习题 8.10

在习题 1 ~ 10 中，求函数的二项式级数的前面 4 项.

**1.** $(1+x)^{1/2}$.　　**2.** $(1+x)^{1/3}$.

**3.** $(1-x)^{-1/2}$.　　**4.** $(1-2x)^{1/2}$.

**5.** $\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-2}$.　　**6.** $\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-2}$.

**7.** $(1+x^3)^{-1/2}$.　　**8.** $(1+x^2)^{-1/3}$.

**9.** $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}$.　　**10.** $\left(1-\frac{2}{x}\right)^{1/3}$.

在习题 11 ~ 14 中，求函数的二项式级数.

**11.** $(1+x)^4$.　　**12.** $(1+x^2)^3$.

**13.** $(1-2x)^3$.　　**14.** $\left(1-\frac{x}{2}\right)^4$.

**15.** (a) 利用二项式级数，以及

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = (1-x^2)^{-1/2}$$

这个事实，生成函数 $\sin^{-1}x$ 的泰勒级数的前面4个非零项. 这个级数的收敛半径是多大?

(b) **$\cos^{-1}x$ 的级数** 利用(a)中的结果，求函数 $\cos^{-1}x$ 的泰勒级数的前面5个非零项.

**16.** (a) **$\sinh^{-1}x$ 的级数** 求函数

$$\sinh^{-1}x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

的泰勒级数的前面4个非零项.

T (b) 利用从(a)中所得级数的前面3项估计 $\sinh^{-1}0.25$. 给出估计误差数值的一个上界.

**17.** 从 $-1/(1+x)$ 的二项式级数求 $1/(1+x)^2$ 的泰勒级数.

**18.** 利用 $1/(1-x^2)$ 的二项式级数求 $2x/(1-x^2)^2$ 的幂级数.

**19. $\sin^{-1}$ 的级数** 对 $(1-x^2)^{-1/2}$ 的二项式级数积分，证明，对于 $|x|<1$,

$$\sin^{-1}x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

**20.** 利用下列步骤证明公式(1)：

(a) 对级数

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\binom{m}{k}x^k$$

微分，证明

$$f'(x) = \frac{mf(x)}{1+x}, \quad -1<x<1$$

(b) 定义 $g(x)=(1+x)^{-m}f(x)$，证明 $g'(x)=0$.

(c) 由(b)证明

$$f(x) = (1+x)^m$$

## 第8章复习指导问题

**1.** 什么是无穷序列? 无穷序列收敛和发散的含义是什么? 举出一些例子.

**2.** 什么是非减序列? 非减序列在什么条件下具有极限? 举出一些例子.

**3.** 什么定理可以用于计算序列的极限? 举出一些例子.

**4.** 什么定理有时可以让我们用洛必达法则计算序列的极限? 举一个例子.

**5.** 在处理序列和级数时很可能出现哪6个序列的极限?

**6.** 什么是无穷级数? 无穷级数收敛和发散的含义是什么? 举出一些例子.

**7.** 什么是等比级数? 等比级数何时收敛和发散? 等比级数收敛时的和是什么? 举出一些例子.

**8.** 除开等比级数，你知道什么其他收敛级数和发散级数?

**9.** 什么是级数发散性第 $n$ 项检验法? 这种检验法包含的思想是什么?

**10.** 关于收敛级数的逐项和以及逐项差可以得出什么结论? 关于收敛级数和发散级数的常数倍可以得出什么结论?

**11.** 如果对收敛级数和发散级数添加有限项，会产生什么结果? 如果从收敛级数和发散级数删除有限项，会产生什么结果?

**12.** 如何改变级数的下标? 为什么可能需要这样做?

**13.** 非负项无穷级数在什么条件下收敛，在什么条件下发散? 为什么要研究非负项级数?

**14.** 什么是积分检验法? 它包含什么推论? 举出它的应用的一个例子.

**15.** $p$ 级数何时收敛和发散? 你是怎样知道的? 举出 $p$ 级数收敛和发散的一些例子.

**16.** 什么是直接比较检验法和极限比较检验法? 这两种检验法包含什么推论? 举出它们的应用的一些例子.

**17.** 什么是比率检验法和根检验法? 这两种检验法通常提供判别级数收敛或者发散所需的信息吗? 举出一些例子.

**18.** 什么是交错级数? 什么定理可以用于判定交错级数收敛?

**19.** 在用交错级数的部分和逼近级数的和时，你可能怎样估计涉及的误差? 这种估计包含什么推论?

**20.** 什么是绝对收敛和条件收敛? 这两种收敛有何关系?

**21.** 关于绝对收敛级数和条件收敛级数的项重排，你知道什么?

**22.** 什么是幂级数? 如何检验幂级数的收敛性，可能得到什么结果?

**23.** 关于(a)幂级数的逐项微分，(b)幂级数的逐项积分，以及(c)幂级数的乘法，存在的基本事实是什么? 举出一些例子.

**24.** 什么是由函数 $f(x)$ 在一点 $x=a$ 生成的泰勒级数? 建立泰勒级数需要关于 $f$ 的什么信息? 举

一个例子.

**25.** 什么是麦克劳林级数?

**26.** 泰勒级数总是收敛于它的生成函数吗? 作出解释.

**27.** 什么是泰勒多项式? 它们有什么用处?

**28.** 什么是泰勒公式? 它关于用泰勒多项式逼近函数包含的误差说明什么? 特别是, 泰勒公式关于线性化和二次逼近中的误差说明什么?

**29.** 什么是二项式级数? 它在什么区间上收敛? 如何应用二项式级数?

**30.** 有时怎样能够用幂级数估计非初等定积分的值?

**31.** $1/(1-x)$, $1/(1+x)$, $e^x$, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $\ln[(1+x)/(1-x)]$ 和 $\tan^{-1}x$ 的泰勒级数是什么? 在用这些级数的部分和代替级数时怎样估计包含的误差?

## 第 8 章实习习题

在习题 1 ~ 18 给出第 $n$ 项的序列中, 哪些序列收敛, 哪些序列发散? 求每个收敛序列的极限.

**1.** $a_n=1+\frac{(-1)^n}{n}$.　**2.** $a_n=\frac{1-(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

**3.** $a_n=\frac{1-2^n}{2^n}$.　**4.** $a_n=1+(0.9)^n$.

**5.** $a_n=\sin\frac{n\pi}{2}$.　**6.** $a_n=\sin n\pi$.

**7.** $a_n=\frac{\ln(n^2)}{n}$.　**8.** $a_n=\frac{\ln(2n+1)}{n}$.

**9.** $a_n=\frac{n+\ln n}{n}$.　**10.** $a_n=\frac{\ln(2n^3+1)}{n}$.

**11.** $a_n=\left(\frac{n-5}{n}\right)^n$.　**12.** $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$.

**13.** $a_n=\sqrt[n]{\frac{3^n}{n}}$.　**14.** $a_n=\left(\frac{3}{n}\right)^{1/n}$.

**15.** $a_n=n(2^{1/n}-1)$.　**16.** $a_n=\sqrt[n]{2n+1}$.

**17.** $a_n=\frac{(n+1)!}{n!}$.　**18.** $a_n=\frac{(-4)^n}{n!}$.

在习题 19 ~ 24 中, 求级数的和.

**19.** $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(2n-3)(2n-1)}$.

**20.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-2}{n(n+1)}$.

**21.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{(3n-1)(3n+2)}$.

**22.** $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{-8}{(4n-3)(4n+1)}$.

**23.** $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n}$.　**24.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3}{4^n}$.

在习题 25 ~ 40 中, 哪些级数绝对收敛, 哪些级数条件收敛, 以及哪些级数发散? 提出答案的理由.

**25.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.　**26.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-5}{n}$.

**27.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.　**28.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^3}$.

**29.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$.　**30.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$.

**31.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}$.　**32.** $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{\ln(\ln n)}$.

**33.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^2+1}}$.　**34.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3n^2}{n^3+1}$.

**35.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$.　**36.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2+1)}{2n^2+n-1}$.

**37.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n!}$.　**38.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n3^n}{n^n}$.

**39.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$.

**40.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$.

在习题 41 ~ 50 中, (**a**) 求级数的收敛半径和收敛区间. 然后确定令级数 (**b**) 绝对收敛和 (**c**) 条件收敛的 $x$ 值.

**41.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{n3^n}$.　**42.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n-2}}{(2n-1)!}$.

**43.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(3x-1)^n}{n^2}$.

**44.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(2x+1)^n}{(2n+1)2^n}$.

**45.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$.　**46.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

**47.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^{2n-1}}{3^n}$.　**48.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^{2n+1}}{2n+1}$.

**49.** $\sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{csch} n)x^n$.　**50.** $\sum_{n=1}^{\infty}(\coth n)x^n$.

在习题 51 ~ 56 中, 每个级数是某个函数 $f(x)$ 在一个特定点的泰勒级数在 $x=0$ 的值. 那是什么函数和什么点? 级数的和是什么?

**51.** $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{4^n}+\cdots$.

**52.** $\frac{2}{3}-\frac{4}{18}+\frac{8}{81}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2^n}{n3^n}+\cdots$.

**53.** $\pi-\frac{\pi^3}{3!}+\frac{\pi^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$.

**54.** $1-\frac{\pi^2}{9\cdot 2!}+\frac{\pi^4}{81\cdot 4!}-\cdots+(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{3^{2n}(2n)!}+\cdots$.

**55.** $1+\ln 2+\frac{(\ln 2)^2}{2!}+\cdots+\frac{(\ln 2)^n}{n!}+\cdots$.

**56.** $\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{9\sqrt{3}}+\frac{1}{45\sqrt{3}}-\cdots+$

$(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)(\sqrt{3})^{2n-1}}+\cdots$.

在习题57～64中，求函数在$x=0$的泰勒级数.

**57.** $\frac{1}{1-2x}$.

**58.** $\frac{1}{1+x^3}$.

**59.** $\sin \pi x$.

**60.** $\sin\frac{2x}{3}$.

**61.** $\cos(x^{5/2})$.

**62.** $\cos\sqrt{5x}$.

**63.** $e^{(\pi x/2)}$.

**64.** $e^{-x^2}$.

在习题65～68中，求由函数$f(x)$在$x=a$生成的泰勒级数的前面4个非零项.

**65.** $f(x)=\sqrt{3+x^2}$ 在 $x=-1$.

**66.** $f(x)=1/(1-x)$ 在 $x=2$.

**67.** $f(x)=1/(x+1)$ 在 $x=3$.

**68.** $f(x)=1/x$ 在 $x=a>0$.

在习题69～72中，用误差数值小于$10^{-8}$的级数逼近积分值.（本书习题解答给出舍入到10位小数的积分值.）

**69.** $\int_0^{1/2}e^{-x^3}dx$.

**70.** $\int_0^1 x\sin(x^3)dx$.

**71.** $\int_0^{1/2}\frac{\tan^{-1}x}{x}dx$.

**72.** $\int_0^{1/64}\frac{\tan^{-1}x}{\sqrt{x}}dx$.

在习题73～78中：

(a) 利用幂级数估计极限.

**T** (b) 然后用一种绘图器支持你的计算

**73.** $\lim_{x\to 0}\frac{7\sin x}{e^{2x}-1}$.

**74.** $\lim_{\theta\to 0}\frac{e^\theta-e^{-\theta}-2\theta}{\theta-\sin\theta}$.

**75.** $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{2-2\cos t}-\frac{1}{t^2}\right)$.

**76.** $\lim_{h\to 0}\frac{(\sin h)/h-\cos h}{h^2}$.

**77.** $\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos^2 z}{\ln(1-z)+\sin z}$.

**78.** $\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{\cos y-\cosh y}$.

**79.** 利用$\sin 3x$的级数表示，求使

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{r}{x^2}+s\right)=0$$

的$r$和$s$的值.

**T 80.** 通过对比$f(x)=\sin x-x$同$g(x)=\sin x-(6x/(6+x^2))$的图形，比较逼近$\sin x\approx x$和$\sin x\approx 6x/(6+x^2)$的精度. 描述得到的结果.

**81.** 求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\cdots\cdot(3n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}x^n$$

的收敛半径.

**82.** 求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}{4\cdot 9\cdot 14\cdot\cdots\cdot(5n-1)}(x-1)^n$$

的收敛半径.

**83.** 求级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln(1-(1/n^2))$$

的第$n$部分和的闭型公式，并且利用它判定级数收敛或者发散.

**84.** 通过求级数

$$\sum_{k=2}^{\infty}(1/(k^2-1))$$

的第$n$部分和当$n\to\infty$时的极限，计算级数的值.

**85.** (a) 求级数

$$y=1+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{180}x^6+\cdots+\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\cdots\cdot(3n-2)}{(3n)!}x^{3n}+\cdots$$

的收敛区间.

(b) 证明由这个级数定义的函数满足形式为

$$\frac{d^2y}{dx^2}=x^a y+b$$

的微分方程，并且求常数$a$和$b$的值.

**86.** (a) 求函数$x^2/(1+x)$的麦克劳林级数.

(b) 这个级数在$x=1$收敛吗？作出解释.

**87.** 如果$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$是非负数项的收敛级数，关于$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$能够得出任何论断吗?提出答案的理由.

**88.** 如果$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$是非负数项的发散级数，关于$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$能够得出任何论断吗?提出答案的理由.

**89.** 证明：序列$\{x_n\}$和级数$\sum_{k=1}^{\infty}(x_{k+1}-x_k)$同时收敛或者同时发散.

**90.** 证明：若对于所有$n$，$a_n>0$并且$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n/(1+a_n))$$

收敛.

**91.** 假设$a_1$，$a_2$，…，$a_n$，…是满足下列条件的正数：

(i) $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots$;

(ii) 级数 $a_2 + a_4 + a_8 + a_{16} + \cdots$发散.

证明级数

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots$$

发散.

**92.** 利用习题 91 中的结果，证明级数

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

发散.

## 第 8 章补充和提高习题

在习题 1 ~ 4 由和式定义的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中，哪些级数收敛，哪些级数发散？提出答案的理由.

**1.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)^{n+(1/2)}}$.　　**2.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tan^{-1} n)^2}{n^2+1}$.

**3.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tanh n$.　　**4.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log_n (n!)}{n^3}$.

在习题 5 ~ 8 由级数项公式定义的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中，哪些级数收敛，哪些级数发散？提出答案的理由.

**5.** $a_1 = 1$，$a_{n+1} = \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)} a_n$.

(提示：写出级数的若干项，考察消去哪些因式，然后推广.)

**6.** $a_1 = a_2 = 7$，$a_{n+1} = \frac{n}{(n-1)(n+1)} a_n (n \geqslant 2)$.

**7.** $a_1 = a_2 = 1$，$a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} (n \geqslant 2)$.

**8.** $a_n = 1/3^n$，若 $n$ 为奇数；$a_n = n/3^n$，若 $n$ 为偶数.

泰勒公式

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

用 $f$ 及其各阶导数在 $x = a$ 的值表示 $f$ 在 $x$ 的值. 因此，在数值计算中要求 $f$ 及其导数在点 $a$ 的值是已知的. 此外，要求 $a$ 同我们关注的 $f$ 求值点足够近，以便使 $(x-a)^{n+1}$ 是很小的值，以致可以忽略余式.

在习题 9 ~ 14 中，应选择什么泰勒级数表示给定 $x$ 值附近的函数？(可能有一种以上合适的答案.) 对选择的级数写出前面 4 个非零项.

**9.** $\cos x$ 在 $x = 1$ 附近.　　**10.** $\sin x$ 在 $x = 6.3$ 附近.

**11.** $e^x$ 在 $x = 0.4$ 附近.　　**12.** $\ln x$ 在 $x = 1.3$ 附近.

**13.** $\cos x$ 在 $x = 69$ 附近.　　**14.** $\tan^{-1} x$ 在 $x = 2$ 附近.

**15.** 令 $a$ 和 $b$ 是满足 $0 < a < b$ 的常数. 序列

$$\{(a^n + b^n)^{1/n}\}$$

是否收敛？它如果收敛，极限是什么？

**16.** 求无穷级数

$$1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \frac{7}{10^6} + \frac{2}{10^7} + \frac{3}{10^8} + \frac{7}{10^9} + \cdots$$

的和.

**17.** 计算

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{1+x^2} \, dx$$

的值.

**18.** 求使级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{(n+1)(2x+1)^n}$$

绝对收敛的所有 $x$ 值.

**T19.** (a) 极限

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\cos(a/n)}{n}\right)^n \quad (a \text{ 是常数})$$

的值显现依赖于 $a$ 的值吗？如果依赖，那么是怎样依赖的？

(b) 极限

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\cos(a/n)}{bn}\right)^n \quad (a \text{ 和 } b \text{ 是常数}, b \neq 0)$$

的值显现依赖于 $b$ 的值吗？如果依赖，那么是如何依赖的？

**20.** 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\sin(a_n)}{2}\right)^n$$

收敛.

**21.** 求幂级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^n x^n}{\ln n}$$

中使收敛半径等于 5 的常数 $b$ 的值.

**22.** 你怎样知道函数 $\sin x$，$\ln x$ 和 $e^x$ 不是多项式？提出答案的理由.

**23.** 求极限

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax) - \sin x - x}{x^3}$$

中使极限值是有限的常数 $a$ 的值，并且求极限值.

**24.** 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(ax)-b}{2x^2}$$

中使极限值等于 $-1$ 的常数 $a$ 和 $b$ 的值.

**25. 拉阿伯检验法(或高斯检验法)** 我们提出下述检验法而不予证明，它是比率检验法的推广.

拉阿伯检验法：若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是正常数项的级数，并且存在常数 $C$，$K$ 和 $N$，满足

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=1+\frac{C}{n}+\frac{f(n)}{n^2} \qquad (1)$$

其中对于 $n\geqslant N$，$|f(n)|<K$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 当 $C>1$ 时收敛而当 $C\leqslant 1$ 时发散.

证明：拉阿伯检验法的结果同你所知道的关于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$ 的结果一致.

**26.** (续习题25)假定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的项由公式

$$u_1=1,\quad u_{n+1}=\frac{(2n-1)^2}{(2n)(2n+1)}u_n$$

递归定义. 应用拉阿伯检验法判定级数是否收敛.

**27.** 假定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；并且对于所有 $n$，$a_n\neq 1$，$a_n>0$.

(a) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

(b) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n/(1-a_n)$ 收敛吗?作出解释.

**28.** (续习题27)假定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，并且对于所有 $n$，$1>a_n>0$. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1-a_n)$ 收敛. (提示：首先证明 $|\ln(1-a_n)|\leqslant a_n/(1-a_n)$.)

**29. 尼科尔·奥雷姆定理** 证明尼科尔·奥雷姆定理：

$$1+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 3+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}+\cdots=4$$

(提示：对公式

$$\frac{1}{1-x}=1+\sum_{n=1}^{\infty}x^n$$

两端微分.)

**30.** (a) 证明，对于 $|x|>1$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{x^n}=\frac{2x^2}{(x-1)^3}$$

(提示：对恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x^2}{1-x}$$

微分两次，用 $x$ 乘所得结果，然后用 $1/x$ 代换 $x$.)

(b) 利用(a)求方程

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{x^n}$$

大于1的实数解.

**31. 质量控制**

(a) 对级数

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

微分，获得 $1/(1-x^2)$ 的级数.

(b) 一次掷两颗骰子获得7点的概率是 $p=1/6$. 如果重复投掷，在第 $n$ 次首次出现7点的概率是 $q^{n-1}p$，其中 $q=1-p=5/6$. 直到首次出现7点为止的期望投掷次数为 $\sum_{n=1}^{\infty}nq^{n-1}p$. 求这个级数的和.

(c) 如果你是对工业生产实施统计控制的工程师，以随机方式从装配线抽检产品. 你把每件抽样产品归类为“合格”或者“不合格”. 如果一个样品合格的概率是 $p$，而不合格的概率是 $q=1-p$，那么在检验中首次不合格产品是在第 $n$ 次抽检的概率是 $p^{n-1}q$. 计算这个级数的和(假定 $0<p<1$).

**32. 期望值** 假设随机变量 $X$ 可以取值1，2，3，…的概率为 $p_1$，$p_2$，$p_3$，…，其中 $p_k$ 是 $X$ 等 $k(k=1,2,3,\cdots)$ 的概率. 此外，假设 $p_k\geqslant 0$，并且 $\sum_{k=1}^{\infty}p_k=1$. $X$ 的**期望值**为 $\sum_{n=1}^{\infty}kp_k$，用 $E(X)$ 表示，只要这个级数是收敛的. 在下列每一种情形，证明 $\sum_{k=1}^{\infty}p_k=1$，并且求 $E(X)$(如果存在).

(a) $p_k=2^{-k}$.

(b) $p_k=\dfrac{5^{k-1}}{6^k}$.

(c) $p_k=\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$.

# 第9章　极坐标与圆锥曲线

**概述**　这一章我们讨论极坐标中函数的曲线、导数和积分. 对于描述旋转运动，例如行星和人造卫星的运动，极坐标是很有用的工具，同时极坐标也能简化多重积分(第13章)的计算. 此外，本章要重温抛物线、椭圆和双曲线的几何定义，并且推导它们的标准方程. 这几种曲线称为**圆锥曲线**，它们被作为抛射体、行星以及在重力或电磁力单独作用下的任何其他运动物体运行路径的模型.

## 9.1　极坐标

本节讨论极坐标及它们同笛卡儿坐标的关系. 平面内的一点只有一个笛卡儿坐标偶，但是有无穷多个极坐标偶.

### 9.1.1　极坐标的定义

为了定义极坐标，我们首先固定一个**原点** $O$(称为**极点**)和从 $O$ 引出的一条**初始射线**(见图9.1). 然后，每一点 $P$ 可以通过对它指定**极坐标偶**$(r,\theta)$定位，其中 $r$ 给出从 $O$ 到 $P$ 的有向距离，$\theta$ 给出从初始射线到射线 $OP$ 的有向角.

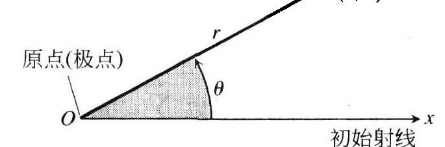



图9.1　为了定义平面的极坐标，从一个原点(称为极点)和一条初始射线着手

**极坐标**

$P(r,\ \theta)$

从 $O$ 到 $P$ 的有向距离　　从初始射线到 $OP$ 的有向角

像在三角学中那样，角 $\theta$ 在依反时针方向度量时取正值，依顺时针方向度量时取负值. 同一个给定点相联系的角不是唯一的. 例如，沿射线 $\theta=\pi/6$ 距离原点2单位的点具有极坐标 $r=2$，$\theta=\pi/6$. 它也有极坐标 $r=2$，$\theta=-11\pi/6$(见图9.2). 在某些情况下，允许 $r$ 取负值. 这是我们在定义$P(r,\theta)$时用有向距离的原因. 点 $P(2,7\pi/6)$可以由初始射线依反时针方向转动 $7\pi/6$ 弧度和前进2个单位达到(见图9.3). 它也可以由初始射线依反时针方向转动 $\pi/6$ 和后退2个单位达到. 所以这个点也有极坐标 $r=-2$，$\theta=\pi/6$.

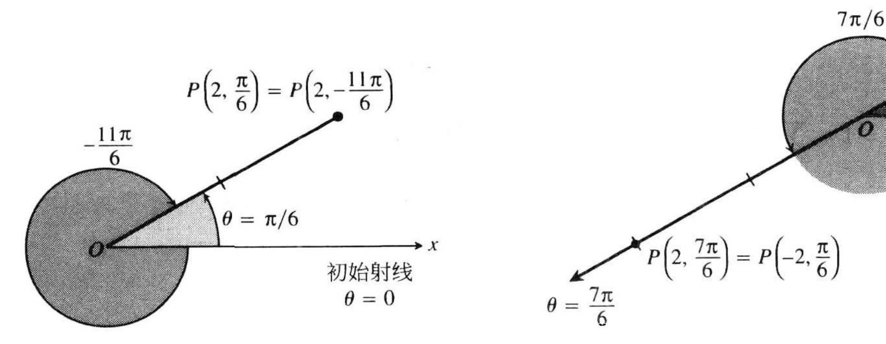



图9.2　极坐标不是唯一的

图9.3　极坐标可以有负 $r$ 值

**例 1** 求点 $P(2,\pi/6)$ 的所有极坐标.

**解** 我们绘制坐标系中初始射线的略图，画出从原点开始同初始射线构成 $\pi/6$ 弧度角的射线，并且标出点 $(2,\pi/6)$ (见图 9.4). 然后求 $P$ 的其他坐标偶的角，其中 $r=2$ 和 $r=-2$.

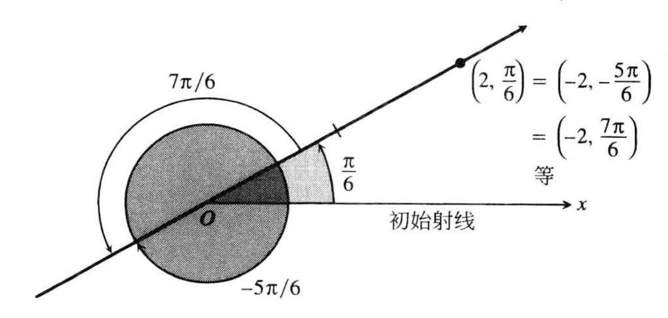



图 9.4 点 $P(2,\pi/6)$ 具有无穷多个极坐标偶(例 1)

对于 $r=2$，所有角的列表为

$$\frac{\pi}{6},\quad \frac{\pi}{6}\pm 2\pi,\quad \frac{\pi}{6}\pm 4\pi,\quad \frac{\pi}{6}\pm 6\pi,\cdots$$

对于 $r=-2$，所有角的列表为

$$-\frac{5\pi}{6},\quad -\frac{5\pi}{6}\pm 2\pi,\quad -\frac{5\pi}{6}\pm 4\pi,\quad -\frac{5\pi}{6}\pm 6\pi,\cdots$$

点 $P$ 的对应坐标偶是

$$\left(2,\ \frac{\pi}{6}+2n\pi\right),\quad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots$$

和

$$\left(-2,\ -\frac{5\pi}{6}+2n\pi\right),\quad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$$

当 $n=0$ 时，上面公式给出 $(2,\pi/6)$ 和 $(-2,-5\pi/6)$. 当 $n=1$ 时，公式给出 $(2,13\pi/6)$ 和 $(-2,7\pi/6)$，等等. ■

### 9.1.2 极方程与图形

如果保持 $r$ 为固定的常数值 $r=a\neq 0$，点 $P(r,\theta)$ 将位于同原点 $O$ 相距 $|a|$ 单位的位置. 当 $\theta$ 在长度为 $2\pi$ 的任意区间上变动时，$P$ 描绘一个中心在 $O$ 半径为 $|a|$ 的圆(见图 9.5).

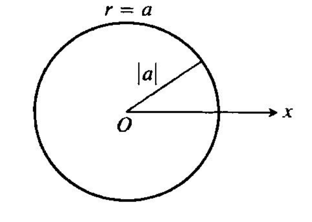



图 9.5 一个圆的极方程为 $r=a$

如果保持 $\theta$ 为固定的常数值 $\theta=\theta_0$，而让 $r$ 在 $-\infty$ 和 $\infty$ 之间变动，点 $P(r,\theta)$ 描绘一条通过原点 $O$ 的直线，它同初始射线构成度量为 $\theta_0$ 的角.

| 方程 | 图形 |
|---|---|
| $r=a$ | 中心在 $O$ 半径为 $\|a\|$ 的圆 |
| $\theta=\theta_0$ | 通过 $O$ 同初始射线构成角 $\theta_0$ 的圆 |

**例 2**

**(a)** $r=1$ 和 $r=-1$ 是中心在 $O$ 半径为 1 的圆的方程.

**(b)** $\theta=\pi/6$，$\theta=7\pi/6$ 和 $\theta=-5\pi/6$ 是图 9.4 中的直线的方程. ■

可以把形式为 $r=a$ 和 $\theta=\theta_0$ 的方程组合起定义区域、线段和射线.

**例 3** 画出点的极坐标满足下列条件的点集的图形:

(a) $1\leqslant r\leqslant 2$ 和 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$.

(b) $-3\leqslant r\leqslant 2$ 和 $\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$.

(c) $r\leqslant 0$ 和 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

(d) $\frac{2\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\frac{5\pi}{6}$（对 $r$ 无限制）.

**解** 这些图形显示在图 9.6 中. ■

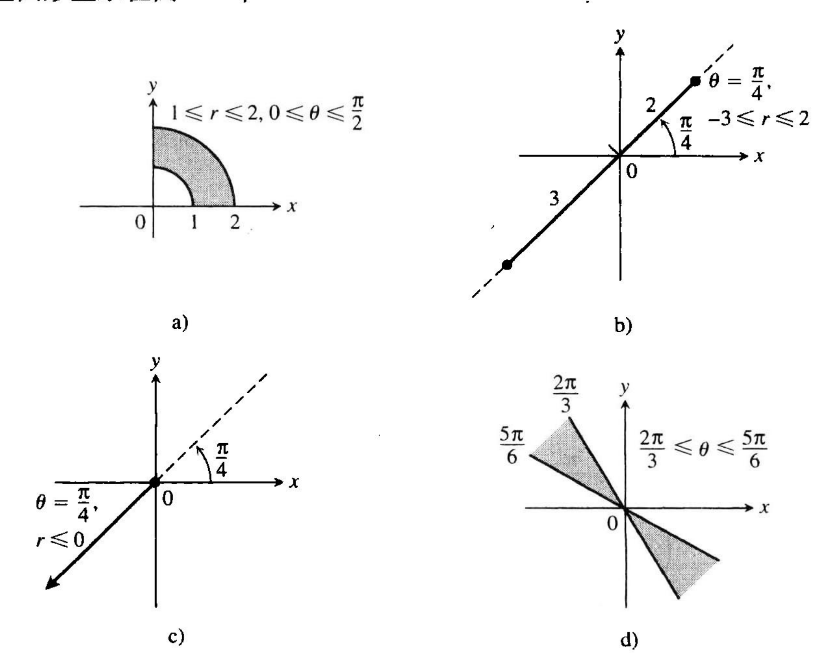



图 9.6 含 $r$ 和 $\theta$ 的典型不等式的图形(例 3)

### 9.1.3 极坐标同笛卡儿坐标的关系

当在平面内同时使用极坐标和笛卡儿坐标时，我们把两个坐标原点放在一起，并且以极坐标的初始射线作为笛卡儿坐标的正 $x$ 轴. 射线 $\theta=\pi/2$, $r>0$ 变成正 $y$ 轴(见图 9.7). 于是，两个坐标系的关系由下列方程表示：

> **联系极坐标与笛卡儿坐标的方程**
>
> $x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad x^2+y^2=r^2$

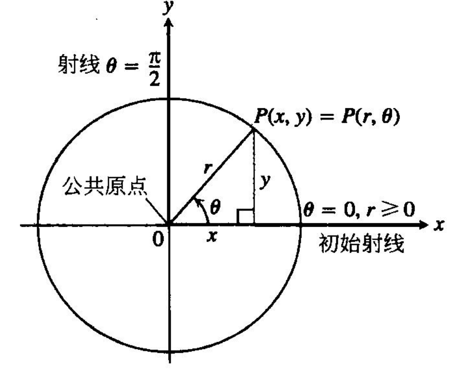



图 9.7 表示极坐标与笛卡儿坐标关系的常用方法

当已知极坐标 $r$ 和 $\theta$ 时，前面两个方程唯一地确定笛卡儿坐标 $x$ 和 $y$. 另一方面，如果已知笛卡儿坐标 $x$ 和 $y$，第三个方程对 $r$ 给出两种可能的选择(一个正值和一个负值). 对于每一种选择，存在唯一的 $\theta\in[0, 2\pi)$ 满足前面两个方程，每一种选择于是给出笛卡儿坐标点的一个极坐标表示. 笛卡儿坐标点的其他极坐标表示可

以由这两种表示确定，如例 1 所示.

**例 4** 下面是某些等价的方程.

| 极 方 程 | 等价的笛卡儿方程 | 极 方 程 | 等价的笛卡儿方程 |
|---|---|---|---|
| $r\cos\theta=2$ | $x=2$ | $r=1+2r\cos\theta$ | $y^2-3x^2-4x-1=0$ |
| $r^2\cos\theta\sin\theta=4$ | $xy=4$ | $r=1-\cos\theta$ | $x^4+y^4+2x^2y^2+2x^3+2xy^2-y^2=0$ |
| $r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta=1$ | $x^2-y^2=1$ | | |

就某些曲线而言，最好不采用极坐标；对于另外一些曲线则相反. ■

**例 5** 求圆 $x^2+(y-3)^2=9$（见图 9.8）的极方程.

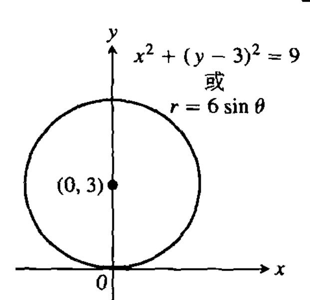



图 9.8 例 5 中的圆

**解**

$$x^2+y^2-6y+9=9 \quad (展开(y-3)^2)$$

$$x^2+y^2-6y=0 \quad (消去 9)$$

$$r^2-6r\sin\theta=0 \quad (x^2+y^2=r^2)$$

$$r=0 \text{ 或 } r-6\sin\theta=0$$

$$r=6\sin\theta \quad (包含两种可能性)$$ ■

**例 6** 用等价的笛卡儿方程代替下列极方程，并且确定它们的图形：

(a) $r\cos\theta=-4$. (b) $r^2=4r\cos\theta$. (c) $r=\dfrac{4}{2\cos\theta-\sin\theta}$.

**解** 我们利用代换 $r\cos\theta=x$，$r\sin\theta=y$，$r^2=x^2+y^2$.

(a) $r\cos\theta=-4$

笛卡儿方程： $r\cos\theta=-4$

$x=-4$

图形： 通过 $x$ 轴上 $x=-4$ 的垂直线

(b) $r^2=4r\cos\theta$

笛卡儿方程： $r^2=4r\cos\theta$

$x^2+y^2=4x$

$x^2-4x+y^2=0$

$x^2-4x+4+y^2=4$ （配方）

$(x-2)^2+y^2=4$

图形： 中心在 $(h,k)=(2,0)$ 半径为 2 的圆

(c) $r=\dfrac{4}{2\cos\theta-\sin\theta}$

笛卡儿方程： $r(2\cos\theta-\sin\theta)=4$

$2r\cos\theta-r\sin\theta=4$

$2x-y=4$

$y=2x-4$

图形： $y$ 截距 $b=-4$ 斜率 $m=2$ 的直线 ■

## 习题 9.1

1. 下列哪些极坐标偶标记同一个点？
   (a) $(3,0)$. (b) $(-3,0)$.
   (c) $(2,2\pi/3)$. (d) $(2,7\pi/3)$.
   (e) $(-3,\pi)$. (f) $(2,\pi/3)$.
   (g) $(-3,2\pi)$. (h) $(-2,-\pi/3)$.
2. 下列哪些极坐标偶标记同一个点？
   (a) $(-2,\pi/3)$. (b) $(2,-\pi/3)$.
   (c) $(r,\theta)$. (d) $(r,\theta+\pi)$.

(e) $(-r,\theta)$.　　(f) $(2,-2\pi/3)$.

(g) $(-r,\theta+\pi)$.　　(h) $(-2,2\pi/3)$.

3. 描绘下列点(以极坐标给出). 然后，求每个点的全部极坐标:

(a) $(2,\pi/2)$.　　(b) $(2,0)$.

(c) $(-2,\pi/2)$.　　(d) $(-2,0)$.

4. 描绘下列点(以极坐标给出). 然后，求每个点的全部极坐标:

(a) $(3,\pi/4)$.　　(b) $(-3,\pi/4)$.

(c) $(3,-\pi/4)$.　　(d) $(-3,-\pi/4)$.

5. 求习题1中各点的笛卡儿坐标.

6. 求下列点(以极坐标给出)的笛卡儿坐标:

(a) $(\sqrt{2},\pi/4)$.　　(b) $(1,0)$.

(c) $(0,\pi/2)$.　　(d) $(-\sqrt{2},\pi/4)$.

(e) $(-3,5\pi/6)$.　　(f) $(5,\ \tan^{-1}(4/3))$.

(g) $(-1,7\pi)$.　　(h) $(2\sqrt{3},2\pi/3)$.

在习题7~22中，画出满足方程和不等式的极坐标点集的图形.

7. $r=2$.　　8. $0\leqslant r\leqslant 2$.

9. $r\geqslant 1$.　　10. $1\leqslant r\leqslant 2$.

11. $0\leqslant\theta\leqslant\pi/6$，$r\geqslant 0$.　　12. $\theta=2\pi/3$，$r\leqslant -2$.

13. $\theta=\pi/3$，$-1\leqslant r\leqslant 3$.　　14. $\theta=11\pi/4$，$r\geqslant -1$.

15. $\theta=\pi/2$，$r\geqslant 0$.　　16. $\theta=\pi/2$，$r\leqslant 0$.

17. $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$r=1$.　　18. $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$r=-1$.

19. $\pi/4\leqslant\theta\leqslant 3\pi/4$，$0\leqslant r\leqslant 1$.

20. $-\pi/4\leqslant\theta\leqslant\pi/4$，$-1\leqslant r\leqslant 1$.

21. $-\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2$，$1\leqslant r\leqslant 2$.

22. $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$，$1\leqslant |r|\leqslant 2$.

在习题23~48中，用等价的笛卡儿方程代替极方程. 然后，描述或者确定图形.

23. $r\cos\theta=2$.　　24. $r\sin\theta=-1$.

25. $r\sin\theta=0$.　　26. $r\cos\theta=0$.

27. $r=4\csc\theta$.　　28. $r=-3\sec\theta$.

29. $r\cos\theta+r\sin\theta=1$.　　30. $r\sin\theta=r\cos\theta$.

31. $r^2=1$.　　32. $r^2=4r\sin\theta$.

33. $r=\dfrac{5}{\sin\theta-2\cos\theta}$.　　34. $r^2\sin 2\theta=2$.

35. $r=\cot\theta\csc\theta$.　　36. $r=4\tan\theta\sec\theta$.

37. $r=\csc\theta\, e^{r\cos\theta}$.　　38. $r\sin\theta=\ln r+\ln\cos\theta$.

39. $r^2+2r^2\cos\theta\sin\theta=1$.　　40. $\cos^2\theta=\sin^2\theta$.

41. $r^2=-4r\cos\theta$.　　42. $r^2=-6r\sin\theta$.

43. $r=8\sin\theta$.　　44. $r=3\cos\theta$.

45. $r=2\cos\theta+2\sin\theta$.　　46. $r=2\cos\theta-\sin\theta$.

47. $r\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=2$.　　48. $r\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)=5$.

在习题49~62中，用等价的极方程代替笛卡儿方程.

49. $x=7$.　　50. $y=1$.

51. $x=y$.　　52. $x-y=3$.

53. $x^2+y^2=4$.　　54. $x^2-y^2=1$.

55. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.　　56. $xy=2$.

57. $y^2=4x$.　　58. $x^2+xy+y^2=1$.

59. $x^2+(y-2)^2=4$.　　60. $(x-5)^2+y^2=25$.

61. $(x-3)^2+(y+1)^2=4$.

62. $(x+2)^2+(y-5)^2=16$.

63. 求原点的全部极坐标.

64. **垂直线与水平线**

(a) 证明 $xy$ 平面内的每条垂直线具有 $r=a\sec\theta$ 形式的极方程.

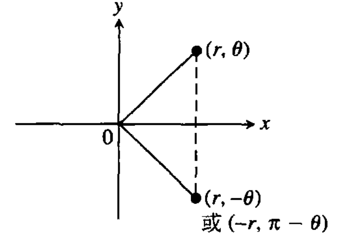
(b) 对于水平线求类似的极方程.

## 9.2 在极坐标中作图

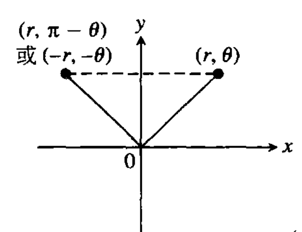
本节描述在极坐标中绘制方程图形的方法.

### 9.2.1 对称性

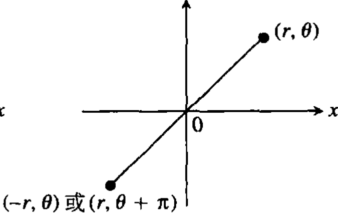
图9.9用图例说明对称性的标准极坐标检验法.




a) 对于x轴的对称性




b) 对于y轴的对称性




c) 对于原点的对称性

图9.9　极坐标中对称性的3种检验法

**极坐标图形的对称性检验法**

(1) 对于 $x$ 轴的对称性：如果点 $(r,\theta)$ 位于图形上，那么点 $(r,-\theta)$ 或者 $(-r,\pi-\theta)$ 位于图形上(见图 9.9a).

(2) 对于 $y$ 轴的对称性：如果点 $(r,\theta)$ 位于图形上，那么点 $(r,\pi-\theta)$ 或者 $(-r,-\theta)$ 位于图形上(见图 9.9b).

(3) 对于原点的对称性：如果点 $(r,\theta)$ 位于图形上，那么点 $(-r,\theta)$ 或者 $(r,\theta+\pi)$ 位于图形上(见图 9.9c).

### 9.2.2 斜率

极坐标曲线 $r=f(\theta)$ 的斜率由 $dy/dx$ 给出，而不是由 $r'=df/d\theta$ 给出. 为了明白原因，把 $f$ 的图形设想成参数方程

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta,\quad y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$$

的图形. 如果 $f$ 是 $\theta$ 的可微函数，那么 $x$ 和 $y$ 也是 $\theta$ 的可微函数，而且当 $dx/d\theta\neq 0$ 时可以从参数公式计算 $dy/dx$：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}\quad (3.5\text{ 节方程}(2),\text{取 } t=\theta)$$

$$=\frac{\dfrac{d}{d\theta}(f(\theta)\cdot\sin\theta)}{\dfrac{d}{d\theta}(f(\theta)\cdot\cos\theta)}$$

$$=\frac{\dfrac{df}{d\theta}\sin\theta+f(\theta)\cos\theta}{\dfrac{df}{d\theta}\cos\theta-f(\theta)\sin\theta}\quad (\text{导数的积法则})$$

**曲线 $r=f(\theta)$ 的斜率**

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(r,\theta)}=\frac{f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta}$$

假定在 $(r,\theta)$，$dx/d\theta\neq 0$.

如果曲线 $r=f(\theta)$ 在 $\theta=\theta_0$ 通过原点，那么 $f(\theta_0)=0$，而斜率公式给出

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,\theta_0)}=\frac{f'(\theta_0)\sin\theta_0}{f'(\theta_0)\cos\theta_0}=\tan\theta_0$$

如果 $r=f(\theta)$ 的图形在值 $\theta=\theta_0$ 通过原点，曲线在 $(0,\theta_0)$ 具有斜率 $\tan\theta_0$. 我们说“在 $(0,\theta_0)$ 的斜率”而不说“在原点的斜率”，原因在于极坐标曲线可能通过原点(或者任何点)一次以上，在不同的 $\theta$ 值通过原点有不同的斜率. 但是，下面第一个例子不是这种情况.

**例 1** 画曲线 $r=1-\cos\theta$ 的图形.

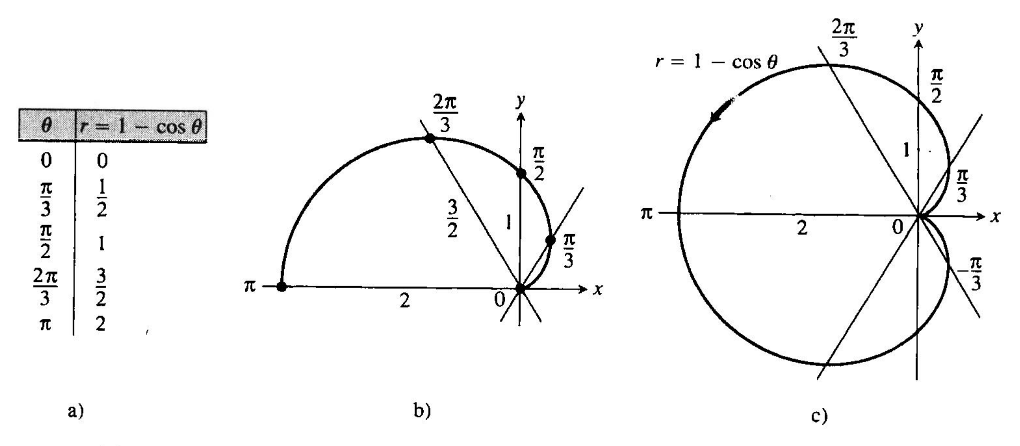
**解** 曲线对于 $x$ 轴对称，因为

$$\begin{aligned}(r,\theta)\text{ 在图形上} &\Rightarrow r=1-\cos\theta\\ &\Rightarrow r=1-\cos(-\theta)\quad(\cos\theta=\cos(-\theta))\\ &\Rightarrow (r,-\theta)\text{ 在图形上}\end{aligned}$$

当 $\theta$ 从 0 增加到 $\pi$ 时，$\cos\theta$ 从 1 减少到 $-1$，而 $r=1-\cos\theta$ 从最小值 0 增加到最大值 2. 当 $\theta$ 继续从 $\pi$ 增加到 $2\pi$ 时，$\cos\theta$ 从 $-1$ 增加再回到 1，而 $r$ 从 2 减少再回到 0. 曲线在 $\theta=2\pi$ 时开始重复，因为余弦函数以 $2\pi$ 为周期.

曲线以斜率 $\tan(0)=0$ 离开原点，又以斜率 $\tan(2\pi)=0$ 返回原点.

我们造一张函数从 $\theta=0$ 到 $\theta=\pi$ 的数值表，描绘函数的点，通过这些点画一条在原点带有水平切线的光滑曲线，并且经过 $x$ 轴反射曲线，完成图形的绘制(见图 9.10). 这条曲线称为心脏线，因为它的形状像心脏. ■




| $\theta$ | $r=1-\cos\theta$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | 1 |
| $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3}{2}$ |
| $\pi$ | 2 |

图 9.10 绘制心脏线 $r=1-\cos\theta$ 图形的步骤(例 1)，箭头表示 $\theta$ 增加的方向

**例 2** 画曲线 $r^2=4\cos\theta$ 的图形.

**解** 方程 $r^2=4\cos\theta$ 要求 $\cos\theta\geqslant 0$，所以让 $\theta$ 从 $-\frac{\pi}{2}$ 变化到 $\frac{\pi}{2}$ 得到完整的图形. 曲线对于 $x$ 轴对称，因为

$$
\begin{aligned}
(r,\theta)\text{ 在图形上} &\Rightarrow r^2=4\cos\theta\\
&\Rightarrow r^2=4\cos(-\theta)\quad(\cos\theta=\cos(-\theta))\\
&\Rightarrow (r,-\theta)\text{ 在图形上}
\end{aligned}
$$

曲线也对原点对称，因为

$$
\begin{aligned}
(r,\theta)\text{ 在图形上} &\Rightarrow r^2=4\cos\theta\\
&\Rightarrow (-r)^2=4\cos\theta\\
&\Rightarrow (-r,\theta)\text{ 在图形上}
\end{aligned}
$$

这两种对称性一起蕴涵曲线对于 $y$ 轴对称.

曲线在 $\theta=-\pi/2$ 和 $\theta=\pi/2$ 通过原点. 它在原点两次具有垂直切线，因为 $\tan\theta$ 为无穷大.

对于区间 $(-\pi/2,\pi/2)$ 内的每个 $\theta$ 值，方程 $r^2=4\cos\theta$ 给出两个 $r$ 值：

$$r=\pm 2\sqrt{\cos\theta}$$

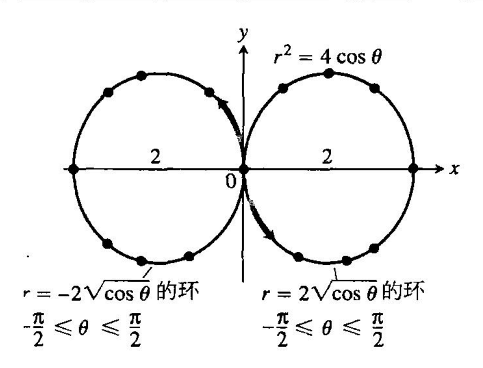
我们列出几个函数值的简表，描绘对应的点，并且利用关于对称性和切线的信息指导我们用光滑曲线连接各点(见图 9.11). ■

### 9.2.3 作图的方法

绘制极坐标方程 $r=f(\theta)$ 图形的一种方法是：造坐标值 $(r,\theta)$ 的表，描绘对应的点，然后按 $\theta$ 增加的顺序把它们连接起来. 如果画出了足以显现图中所有环形和浅凹形的点，这种方法可以绘制出满意的图形. 下面讨论另外一种方法，通常可以更快地画出更真实的图形：

| $\theta$ | $\cos\theta$ | $r=\pm2\sqrt{\cos\theta}$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | $\pm2$ |
| $\pm\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\approx\ \pm1.9$ |
| $\pm\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\approx\ \pm1.7$ |
| $\pm\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\approx\ \pm1.4$ |
| $\pm\frac{\pi}{2}$ | 0 | 0 |


a) $r$舍入后的值



b) 箭头指示$\theta$增加的方向

图9.11 $r^2=4\cos\theta$的图形(例2)

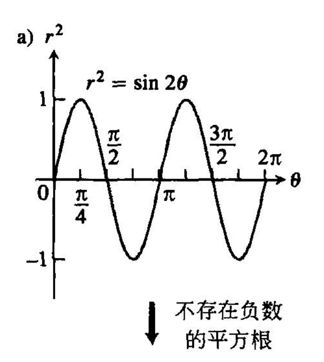
(1)首先在笛卡儿$r\theta$坐标平面画出$r=f(\theta)$的图形;

(2)然后,利用笛卡儿坐标图形作为一张“表”,指导绘制极坐标图形.

这种方法胜过简单的点描绘方法,因为最初的笛卡儿坐标图形即使是仓促画成的,也一看便知$r$在何处取正值、负值和不存在,以及$r$在何处增加和减少.请看下面的例子.

**例3** 画双纽线$r^2=\sin 2\theta$的图形.

**解** 这里,我们从笛卡儿$r^2\theta$坐标平面内绘制$r^2$(而不是$r$)作为$\theta$的函数图形开始,请见图9.12a.由这个图形转到$r\theta$平面内的$r=\pm\sqrt{\sin 2\theta}$图形(见图9.12b).然后画出极坐标中的图形(见图9.12c).图9.12b的图形“覆盖”图9.12c中最后的极坐标图形两次.我们可以用图9.12b中两个上半部分或者两个下半部分单独绘制图9.12c的两个环.但是,两次覆盖图形没有害处,这样做实际上使我们稍微多了解一些函数的特性. ■



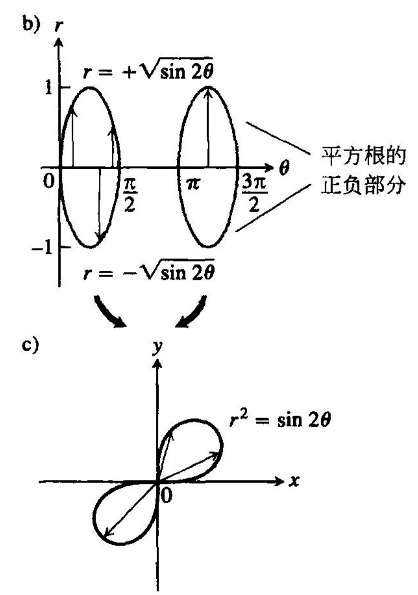




图9.12 为了在笛卡儿$r\theta$坐标平面绘制b中$r=f(\theta)$的图形,首先在$r^2\theta$平面绘制a中$r^2=\sin 2\theta$的图形,然后忽略$\sin 2\theta$为负的$\theta$值;b中草图的半径覆盖c中双纽线的极坐标图形两次(例3)

**利用技术设备(用参数方程绘制极坐标曲线图形)**

对于复杂的极坐标曲线,可能需要利用绘图计算器或者计算机绘制曲线图形.如果绘图设备不能直接绘制极坐标图形,我们可以用等式

$$x=r\cos\theta=f(\theta)\cos\theta,\quad y=r\sin\theta=f(\theta)\sin\theta$$

把$r=f(\theta)$转换成参数形式,然后利用绘图设备在笛卡儿$xy$坐标平面绘制参数化曲线的图形.对于绘图设备,可能需要用参数$t$而不是$\theta$.

## 习题 9.2

在习题 1 ~ 12 中，辨别曲线的对称性，然后画曲线草图.

1. $r=1+\cos\theta$.
2. $r=2-2\cos\theta$.
3. $r=1-\sin\theta$.
4. $r=1+\sin\theta$.
5. $r=2+\sin\theta$.
6. $r=1+2\sin\theta$.
7. $r=\sin(\theta/2)$.
8. $r=\cos(\theta/2)$.
9. $r^2=\cos\theta$.
10. $r^2=\sin\theta$.
11. $r^2=-\sin\theta$.
12. $r^2=-\cos\theta$.

在习题 13 ~ 16 中，画双纽线的图形. 习题中的曲线具有什么对称性?

13. $r^2=4\cos 2\theta$.
14. $r^2=4\sin 2\theta$.
15. $r^2=-\sin 2\theta$.
16. $r^2=-\cos 2\theta$.

在习题 17 ~ 20 中，求曲线在给定点的斜率. 画曲线以及它们在那些点的切线的草图.

17. **心脏线** $r=-1+\cos\theta$; $\theta=\pm\pi/2$.
18. **心脏线** $r=-1+\sin\theta$; $\theta=0,\pi$.
19. **四叶玫瑰线** $r=\sin 2\theta$; $\theta=\pm\pi/4,\pm 3\pi/4$.
20. **四叶玫瑰线** $r=\cos 2\theta$; $\theta=0,\pm\pi/2,\pi$.

在习题 21 ~ 24 中，画蚶线的图形. “蚶”(limaçon，读作“lee-ma-sahn”)是古法语对“蜗牛”(snail)的称呼. 当你画出习题 21 中的蚶线后，就能理解这个名称. 蚶线方程的形式为 $r=a\pm b\cos\theta$ 或 $r=a\pm b\sin\theta$，图形有 4 种基本形状.

21. **具有一个内环的蚶线**
    (a) $r=\frac{1}{2}+\cos\theta$.　(b) $r=\frac{1}{2}+\sin\theta$.
22. **心脏线**
    (a) $r=1-\cos\theta$.　(b) $r=-1+\sin\theta$.
23. **带浅凹的蚶线**
    (a) $r=\frac{3}{2}+\cos\theta$.　(b) $r=\frac{3}{2}-\sin\theta$.
24. **卵形蚶线**
    (a) $r=2+\cos\theta$.　(b) $r=-2+\sin\theta$.
25. 画由不等式 $-1\leqslant r\leqslant 2$ 和 $-\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2$ 定义的区域的草图.
26. 画由不等式 $0\leqslant r\leqslant 2\sec\theta$ 和 $-\pi/4\leqslant\theta\leqslant\pi/4$ 定义的区域的草图.

在习题 27 和 28 中，画由不等式定义的区域的草图.

27. $0\leqslant r\leqslant 2-2\cos\theta$.
28. $0\leqslant r^2\leqslant\cos\theta$.

T 29. 下面哪条曲线具有同 $r=1-\cos\theta$ 一样的图形?
    (a) $r=-1-\cos\theta$.　(b) $r=1+\cos\theta$.
    用代数方法验证你的答案.

T 30. 下面哪条曲线具有同 $r=\cos 2\theta$ 一样的图形?
    (a) $r=-\sin(2\theta+\pi/2)$.　(b) $r=-\cos(\theta/2)$.
    用代数方法验证你的答案.

T 31. **玫瑰线内的玫瑰线** 画方程 $r=1-2\sin 3\theta$ 的图形.

T 32. **费雷斯肾脏线** 画弗雷斯肾脏线
$$r=1+2\sin\frac{\theta}{2}$$
的图形.

T 33. **玫瑰线** 画玫瑰线 $r=\cos m\theta$ 对于 $m=1/3$, 2, 3, 7 的图形.

T 34. **螺线** 极坐标正适合用于定义螺线. 画下列螺线的图形:
    (a) $r=\theta$.　(b) $r=-\theta$.
    (c) 对数螺线 $r=e^{\theta/10}$.　(d) 双曲螺线 $r=8/\theta$.
    (e) 等轴双曲线 $r=\pm 10\sqrt{\theta}$.
    (对螺线的两支用不同颜色表示.)

## 9.3 极坐标中的面积和长度

本节讲述如何求极坐标中平面区域的面积和曲线的长度.

### 9.3.1 平面区域的面积

图 9.13 中的区域 $OTS$ 以射线 $\theta=\alpha$ 和 $\theta=\beta$ 以及曲线 $r=f(\theta)$ 为界. 我们用基于角 $TOS$ 的划分 $P$ 的 $n$ 个不重叠圆扇形区域逼近区域的面积. 典型扇形的半径为 $r_k=f(\theta_k)$，中心角为 $\Delta\theta_k$ 弧度. 它的面积等于 $\Delta\theta_k/2\pi$ 乘半径为 $r_k$ 的圆面积，或者说

$$A_k=\frac{1}{2}r_k^2\Delta\theta_k=\frac{1}{2}(f(\theta_k))^2\Delta\theta_k$$

区域 $OTS$ 的面积近似等于

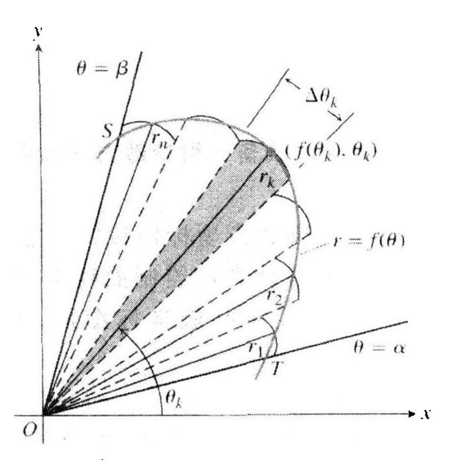


图 9.13　为了导出区域 OTS 的面积公式，用圆扇形逼近区域

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(f(\theta_k))^2 \Delta\theta_k$$

如果$f$是连续函数，我们预料当划分$P$的范数趋近零时逼近得到改进，其中$P$的范数为$\Delta\theta_k$的最大值. 于是导出区域面积的下述公式：

$$A = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(f(\theta_k))^2 \Delta\theta_k = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}(f(\theta))^2 d\theta$$

**在原点和曲线 $r=f(\theta)$，$\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ 之间的扇形区域的面积**

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

这是**面积微分**(见图9.14)

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2}(f(\theta))^2 d\theta$$

的积分.

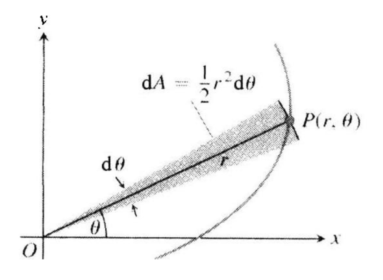



图 9.14 曲线 $r=f(\theta)$ 的面积微分

**例1** 求平面内由心脏线 $r=2(1+\cos\theta)$ 包围的区域的面积.

**解** 我们画出心脏线(见图9.15)，并且限定当$\theta$从0变到$2\pi$时半径$OP$恰好扫过区域一次. 因此，面积为

$$\begin{aligned}
\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot 4(1+\cos\theta)^2 d\theta = \int_0^{2\pi} 2(1+2\cos\theta+\cos^2\theta) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(2+4\cos\theta+2\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = \int_0^{2\pi}(3+4\cos\theta+\cos 2\theta)d\theta \\
&= \left[3\theta+4\sin\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 6\pi - 0 = 6\pi
\end{aligned}$$

■

图9.16的区域位于从$\theta=\alpha$到$\theta=\beta$的两条极曲线$r_1=r_1(\theta)$和$r_2=r_2(\theta)$之间，为了求这样区域的面积，我们用积分$\int_\alpha^\beta (1/2) r_2^2 d\theta$减去积分$\int_\alpha^\beta (1/2) r_1^2 d\theta$. 这就导出下面的公式：

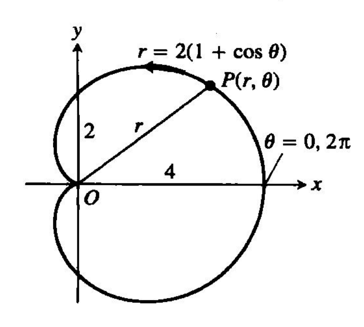



图9.15 例1中的心脏线

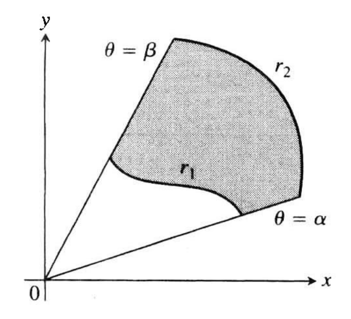



图9.16 阴影区域的面积通过从原点同$r_2$之间区域的面积减去原点同$r_1$之间区域的面积来计算

**区域 $0 \leqslant r_1(\theta) \leqslant r \leqslant r_2(\theta)$，$\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ 的面积**

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r_2^2 d\theta - \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r_1^2 d\theta = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2) d\theta \tag{1}$$

**例 2** 求位于圆 $r=1$ 内部和心脏线 $r=1-\cos\theta$ 外部的区域的面积.

**解** 我们绘制区域草图以便确定它的边界并且求出积分限(见图 9.17). 区域的外侧曲线是 $r_2=1$, 内侧曲线是 $r_1=1-\cos\theta$, 而 $\theta$ 从 $-\pi/2$ 变化到 $\pi/2$. 从公式(1)得到面积

$$A=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2}(r_2^2-r_1^2)\mathrm{d}\theta$$

$$=2\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{2}(r_2^2-r_1^2)\mathrm{d}\theta \quad (\text{对称性})$$

$$=\int_{0}^{\pi/2}(1-(1-2\cos\theta+\cos^2\theta))\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{0}^{\pi/2}(2\cos\theta-\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta=\int_{0}^{\pi/2}\left(2\cos\theta-\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=\left[2\sin\theta-\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2}=2-\frac{\pi}{4}$$ ■

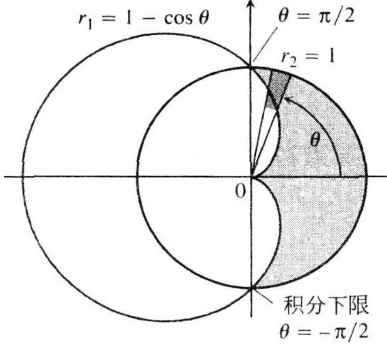



图 9.17 例 2 中的区域和积分限

在极坐标中, 可以用不同的方式表示一个点. 这个事实要求我们在判定某个点在极方程的图形上以及确定图形的交点时格外小心. (在例 2 中需要求图形的交点.)在笛卡儿坐标中, 经常可以通过解两条曲线的联立方程求它们的交点. 在极坐标中, 情况有所不同. 解联立方程可能展现某些交点而遗漏其他一些交点. 确定全部交点的一种方法是画出方程的图形.

### 9.3.2 极曲线的长度

通过把曲线

$$r=f(\theta),\quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$$

参数化为

$$x=r\cos\theta=f(\theta)\cos\theta,\quad y=r\sin\theta=f(\theta)\sin\theta,\quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta \tag{2}$$

可以得到曲线长度的极坐标公式. 这样, 由 6.3 节参数曲线长度公式(1)给出的长度为

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

当用方程(2)代换 $x$ 和 $y$ 时, 这个公式变成

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

(见习题 27).

**极曲线的长度**

若 $r=f(\theta)$ 对于 $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ 有连续的一阶导数, 并且 $P(r,\theta)$ 当 $\theta$ 从 $\alpha$ 变化到 $\beta$ 时恰好描绘曲线 $r=f(\theta)$ 一次, 则曲线的长度为

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\mathrm{d}\theta \tag{3}$$

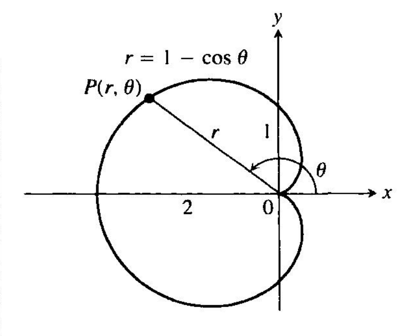



图 9.18 计算心脏线的长度(例 3)

**例 3** 求心脏线 $r=1-\cos\theta$ 的长度.

**解** 为了确定积分限, 我们画出心脏线的草图(见图 9.18). 当 $\theta$ 依反时针方向从 0 变化到 $2\pi$ 时, 点 $P(r,\theta)$ 描绘曲线一次, 所以 0 和 $2\pi$ 分别是 $\alpha$ 和 $\beta$ 的取值.

取

$$r = 1 - \cos\theta, \quad \frac{dr}{d\theta} = \sin\theta$$

得到

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = (1-\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1 - 2\cos\theta + \underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1} = 2 - 2\cos\theta$$

和

$$\begin{aligned}
L &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos\theta}\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta \qquad \left(1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \\
&= \int_0^{2\pi} 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right| d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{\theta}{2}\, d\theta \qquad \left(\sin\frac{\theta}{2} \geqslant 0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\right) \\
&= \left[-4\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 4 + 4 = 8
\end{aligned}$$

■

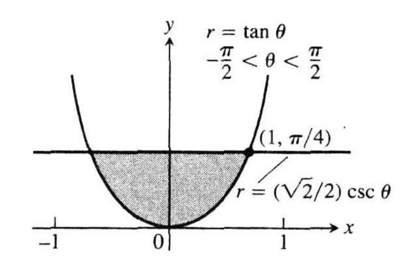
## 习题 9.3

在习题 1 ~ 6 中，求区域的面积.

1. 卵形蚶线 $r=4+2\cos\theta$ 的内部区域.
2. 心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$，$a>0$ 的内部区域.
3. 四叶玫瑰线 $r=\cos 2\theta$ 一叶的内部区域.
4. 双纽线 $r^2=2a^2\cos 2\theta$，$a>0$ 的内部区域.
5. 双纽线 $r^2=4\sin 2\theta$ 一个环的内部区域.
6. 六叶玫瑰线 $r^2=2\sin 3\theta$ 的内部区域.

在习题 7 ~ 16 中，求区域的面积.

7. 圆 $r=2\cos\theta$ 和 $r=2\sin\theta$ 的公共区域.
8. 圆 $r=1$ 和 $r=2\sin\theta$ 的公共区域.
9. 圆 $r=2$ 和心脏线 $r=2(1-\cos\theta)$ 的公共区域.
10. 心脏线 $r=2(1+\cos\theta)$ 和 $r=2(1-\cos\theta)$ 的公共区域.
11. 双纽线 $r^2=6\cos 2\theta$ 内部和圆 $r=\sqrt{3}$ 外部的区域.
12. 圆 $r=3a\cos\theta$ 内部和心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$，$a>0$ 外部的区域.
13. 圆 $r=-2\cos\theta$ 内部和圆 $r=1$ 外部的区域.
14. 圆 $r=6$ 内部在直线 $r=3\csc\theta$ 之上的区域.
15. (a) 求附图中阴影区域的面积.




(b) 从附图看出 $r=\tan\theta$，$-\pi/2<\theta<\pi/2$ 似乎以直线 $x=1$ 和 $x=-1$ 为渐近线. 是这样吗? 提出答案的理由.

16. 位于心脏线 $r=\cos\theta+1$ 内部和圆 $r=\cos\theta$ 外部的区域的面积不等于
$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[(\cos\theta+1)^2-\cos^2\theta]\,d\theta = \pi$$
为什么不等于? 区域的面积有多大? 提出答案的理由.

在习题 17 ~ 25 中，求曲线的长度.

17. 螺线 $r=\theta^2$，$0\leqslant\theta\leqslant\sqrt{5}$.
18. 螺线 $r=e^{\theta}/\sqrt{2}$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$.
19. 心脏线 $r=1+\cos\theta$.
20. 曲线 $r=a\sin^2(\theta/2)$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$a>0$.
21. 抛物线段 $r=6/(1+\cos\theta)$，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$.
22. 抛物线段 $r=2/(1-\cos\theta)$，$\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi$.
23. 曲线 $r=\cos^3(\theta/3)$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi/4$.
24. 曲线 $r=\sqrt{1+\sin 2\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi\sqrt{2}$.
25. 曲线 $r=\sqrt{1+\cos 2\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi\sqrt{2}$.
26. **圆的周长** 照例，在面对一个新公式时，一个好主意是把它试用于熟悉的对象上，它必定会给出同以往经验相符的结果. 利用曲线的长度公式(3)计算对于 $a>0$ 的下列圆的周长：
(a) $r=a$. (b) $r=a\cos\theta$. (c) $r=a\sin\theta$.
27. **曲线 $r=f(\theta)$，$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ 的长度** 假定需要用到的导数连续，说明代换
$$x=f(\theta)\cos\theta,\quad y=f(\theta)\sin\theta$$
(正文中的方程(2))如何把
$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

变换成

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^{2}+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^{2}}\,\mathrm{d}\theta$$

**28. 平均值** 如果 $f$ 是连续函数，曲线 $r=f(\theta)$，$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ 上相对于 $\theta$ 的极坐标 $r$ 的平均值由公式

$$r_{\mathrm{av}}=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}f(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

给出. 用这个公式求对于 $a>0$ 的下列曲线上 $r$ 关于 $\theta$ 的平均值：

(**a**) 心脏线 $r=a(1-\cos\theta)$；

(**b**) 圆 $r=a$；

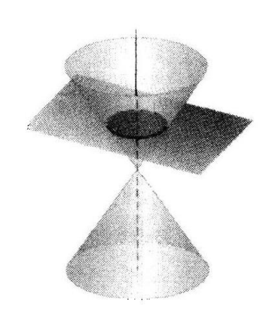
(**c**) 圆 $r=a\cos\theta$，$-\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2$.

**29. $r=f(\theta)$ 与 $r=2f(\theta)$** 关于曲线 $r=f(\theta)$，$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ 同曲线 $r=2f(\theta)$，$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ 的相对长度能够得出什么结论？提出答案的理由.

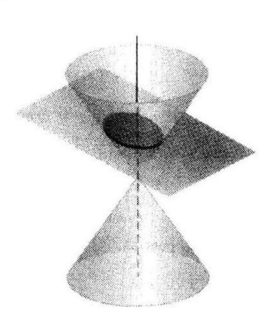
**30. $r=f(\theta)$ 与 $r=2f(\theta)$** 把曲线 $r=f(\theta)$，$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ 和曲线 $r=2f(\theta)$，$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ 绕 $x$ 轴旋转产生曲面. 关于两个曲面的相对面积能够得出什么结论？提出答案的理由.

## 9.4 圆锥曲线

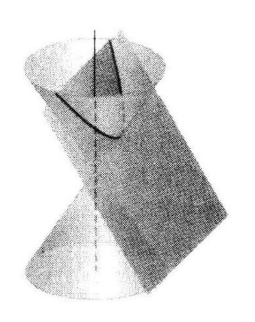
在这一节我们从几何上定义抛物线、椭圆和双曲线，并且导出它们的标准方程. 这 3 种曲线称为**圆锥曲线**，因为它们是用平面切割对顶锥产生的曲线（见图 9.19），这是古希腊数学家用来描述这些曲线的唯一方法，他们那时没有我们现在的笛卡儿坐标或者极坐标的工具.



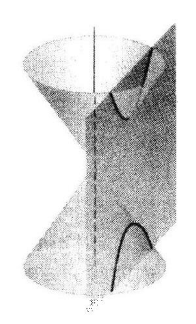
圆：平面对圆锥轴垂直



椭圆：平面对圆锥轴倾斜

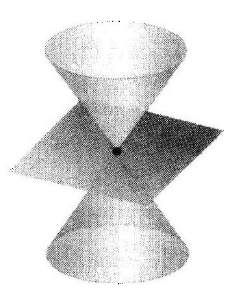


抛物线：平面对一个圆锥平行

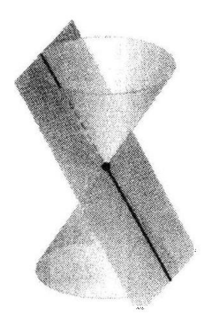


双曲线：平面切割圆锥面两半部分

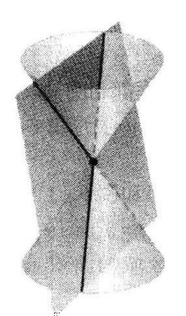
a) 标准圆锥曲线，它们是用平面切割对顶锥得到的曲线



点：平面仅通过圆锥顶点



单直线：平面同圆锥相切



两条相交直线

b) 退化圆锥曲线，它们是用通过锥顶的平面切割圆锥得到的点和直线

图 9.19 圆锥曲线

### 9.4.1 抛物线

> **定义** 同在平面内给出的固定点和固定直线等距离的全部点组成的集合是**抛物线**. 固定点是抛物线的**焦点**. 固定直线是抛物线的**准线**.

如果焦点 $F$ 位于准线 $L$ 上，抛物线成为通过 $F$ 同 $L$ 垂直的直线. 这被看成退化的抛物线，所以此后假定焦点 $F$ 不在准线 $L$ 上.

当抛物线的焦点和准线跨越一条坐标轴时，它具有最简单的方程. 例如，假定焦点位于正 $y$ 轴上的点 $F(0, p)$，而准线是直线 $y=-P$(见图 9.20). 按图中的表示法，点 $P(x, y)$ 位于抛物线上当且仅当 $PF=PQ$. 由距离公式，

$$PF = \sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = \sqrt{x^2+(y-p)^2}$$

$$PQ = \sqrt{(x-x)^2+(y-(-p))^2} = \sqrt{(y+p)^2}$$

令这两个表达式相等，两端自乘并且简化，得到

$$y = \frac{x^2}{4p} \quad 或 \quad x^2 = 4py \quad （标准型） \tag{1}$$

上面的方程显现抛物线对 $y$ 轴的对称性. 我们称 $y$ 轴为抛物线的**轴**(简称“对称轴”).

抛物线同它的轴相交的点是**顶点**. 抛物线 $x^2=4py$ 的顶点位于原点(见图 9.20). 正数 $p$ 是抛物线的**焦距**.

如果抛物线向下张开，以 $(0, -p)$ 为焦点和以直线 $y=p$ 为准线，方程(1)变成

$$y = -\frac{x^2}{4p} \quad 或 \quad x^2 = -4py$$

通过交换变量 $x$ 和 $y$，我们得到向右或者向左张开的抛物线的类似方程(见图 9.21).

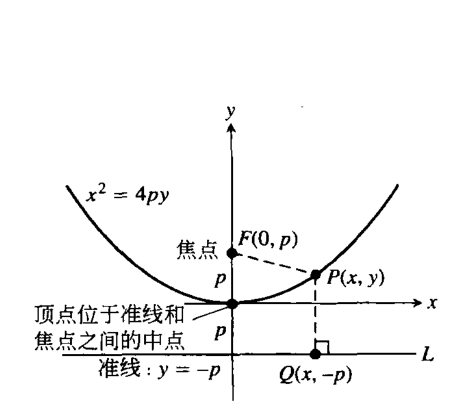



图 9.20　抛物线的标准型 $x^2=4py$，$p>0$

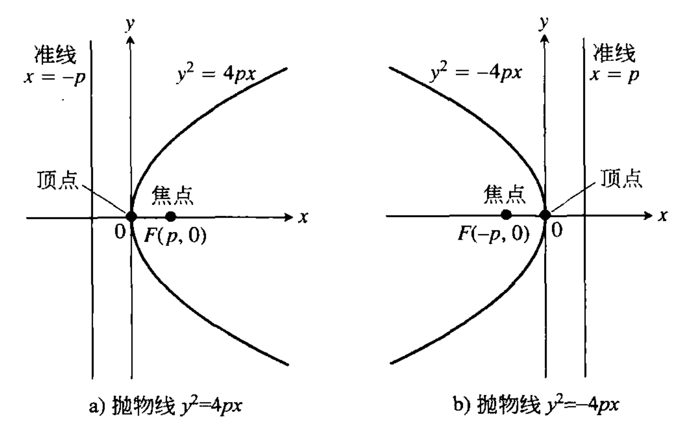



图　9.21

**例 1**　求抛物线 $y^2=10x$ 的焦点和准线.

**解**　先求标准方程 $y^2=4px$ 中的 $p$ 值：

$$4p = 10, \quad 所以 \quad p = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

然后求对于这个 $p$ 值的焦点和准线：

$$焦点： \quad (p, 0) = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$$

$$准线： \quad x = -p \quad 或 \quad x = -\frac{5}{2}$$

■

### 9.4.2 椭圆

> **定义** **椭圆**是平面内的点集合，其中的点同平面内两个固定点的距离之和为常数. 这两个固定点是椭圆的**焦点**.
>
> 通过椭圆焦点的直线是**焦轴**. 焦轴上两个焦点之间的中点是椭圆的**中心**. 焦轴同椭圆相交的点是椭圆的**顶点**(见图 9.22).

如果焦点是 $F_1(-c,0)$ 和 $F_2(c,0)$(见图 9.23)，并且 $PF_1+PF_2$ 用 $2a$ 表示，那么椭圆上点 $P$ 的坐标满足方程

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

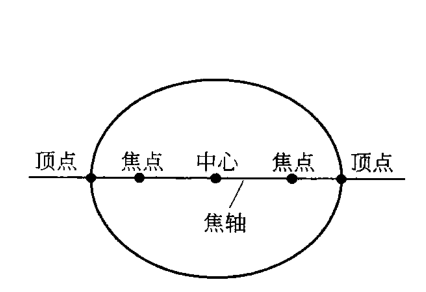



图 9.22 椭圆焦轴上的点

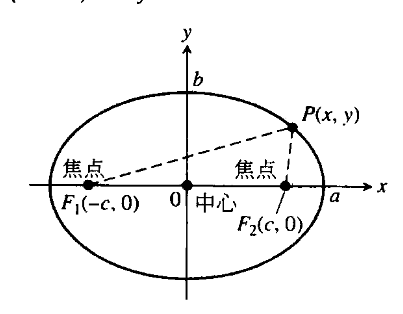



图 9.23 由等式 $PF_1+PF_2=2a$ 定义的椭圆是方程 $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1$ 的图形，其中 $b^2=a^2-c^2$

为了简化这个方程，把第二个根式移到方程的右端，两端自乘，分离剩余的根式，再自乘，得到

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \tag{2}$$

由于 $PF_1+PF_2$ 大于长度 $F_1F_2$(根据三角形 $PF_1F_2$ 的三角不等式)，数 $2a$ 大于 $2c$. 因此，$a>c$ 而方程(2)中的数 $a^2-c^2$ 是正数.

把导出方程(2)的代数运算步骤反过来，可以证明，如果每点 $P$ 的坐标满足以 $0<c<a$ 为条件的这种形式的方程，它也满足等式 $PF_1+PF_2=2a$. 因此，一点位于椭圆上当且仅当它的坐标满足方程(2).

如果

$$b=\sqrt{a^2-c^2} \tag{3}$$

那么 $a^2-c^2=b^2$ 并且方程(2)的形式为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{4}$$

方程(4)显现这个椭圆对于原点和两个坐标轴对称. 它位于以直线 $x=\pm a$ 和 $y=\pm b$ 为界的矩形内部. 它同坐标轴在点$(\pm a,0)$和$(0,\pm b)$相交. 在这四个点的切线垂直于坐标轴，因为

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y} \quad \text{(用隐式微分法从方程(4) 得到)}$$

在 $x=0$ 时为零和在 $y=0$ 时为无穷大.

在方程(4)中，椭圆的**长轴**是联结点$(\pm a,0)$的长度等于 $2a$ 的线段. **短轴**是联结点$(0,\pm b)$的长度等于 $2b$ 的线段. 数 $a$ 本身是**半长轴**，数 $b$ 是**半短轴**. 从式(3)求出

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

数 $c$ 是椭圆的**中心-焦点距离**. 如果 $a=b$，椭圆变成为圆.

**例 2** 椭圆

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 \tag{5}$$

(见图 9.24)具有

半长轴: $a = \sqrt{16} = 4$

半短轴: $b = \sqrt{9} = 3$

中心-焦点距离: $c = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$

焦点: $(\pm c,0) = (\pm\sqrt{7},0)$

顶点: $(\pm a,0) = (\pm 4,0)$

中心: $(0,0)$ ■

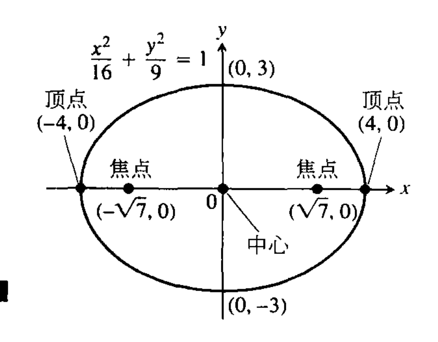



图 9.24 具有水平长轴的椭圆(例 2)

如果交换方程(5)中的 $x$ 和 $y$，得到方程

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1 \tag{6}$$

这时这个椭圆的焦点和顶点在 $y$ 轴上，长轴是垂直线段而不是水平线段. 在分析方程(5)和(6)时不要出现混乱. 如果我们求坐标轴上的截距，会知道长轴所在的位置，因为它是两个轴中较长的一个.

**中心在原点的椭圆的标准型方程**

焦点在 $x$ 轴上: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b)$

中心-焦点距离: $c=\sqrt{a^2-b^2}$

焦点: $(\pm c,0)$

顶点: $(\pm a,0)$

焦点在 $y$ 轴上: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad (a>b)$

中心-焦点距离: $c=\sqrt{a^2-b^2}$

焦点: $(0,\pm c)$

顶点: $(0,\pm a)$

在上面两种情形，$a$ 是半长轴，$b$ 是半短轴.

### 9.4.3 双曲线

**定义** **双曲线**是平面内的点集合，其中的点同平面内两个固定点的距离之差为常数. 两个固定点是双曲线的**焦点**.

通过双曲线焦点的直线是**焦轴**. 焦轴上两个焦点之间的中点是双曲线的**中心**. 焦轴同双曲线相交的点是**顶点**(见图 9.25).

如果焦点是 $F_1(-c,0)$ 和 $F_2(c,0)$(见图 9.26)，并且双曲线上的点到焦点的距离之差为常数 $2a$，那么点 $(x, y)$ 位于双曲线上当且仅当

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a \tag{7}$$

为了简化这个方程，把第二个根式移到右端，两端平方，分离剩余的根式，再平方，得到

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \tag{8}$$

至此，这个方程看起来同椭圆的方程完全一样. 但是 $a^2-c^2$ 现在为负数，因为 $2a$ 作为三角形 $PF_1F_2$ 两边之差小于第三边 $2c$.

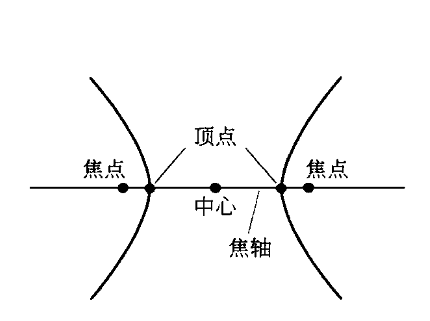



图 9.25 双曲线焦轴上的点

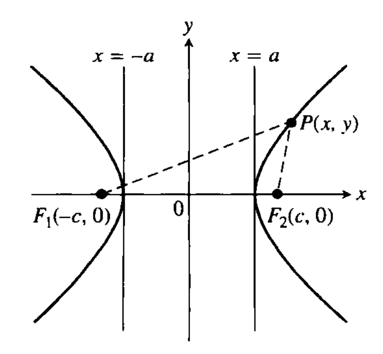



图 9.26 双曲线有两支，所示双曲线在右支上的点满足 $PF_1 - PF_2 = 2a$，在左支上的点满足 $PF_2 - PF_1 = 2a$

把导出方程(8)的代数运算步骤反过来，可以证明，如果每个点 $P$ 的坐标满足对于 $0 < a < c$ 的这种形式的方程，那么也满足方程(7). 因此，一点位于双曲线上当且仅当它的坐标满足方程(8).

如果用 $b$ 表示 $c^2 - a^2$ 的正方根，即

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \tag{9}$$

那么 $a^2 - c^2 = -b^2$，而方程(8)具有更紧凑的形式

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{10}$$

方程(10)同椭圆的方程(方程(4))之间的差别在于减号和新的关系式

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (\text{由等式}(9))$$

同椭圆一样，双曲线是对原点和坐标轴对称的. 它在点$(\pm a, 0)$同 $x$ 轴相交. 在这两个点的切线是垂直线，因为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y} \quad (\text{用隐式微分法从方程}(10)\text{得到})$$

当 $y = 0$ 时成为无穷大. 双曲线没有 $y$ 截距. 事实上，双曲线的任何部分不出现在直线 $x = -a$ 和 $x = a$ 之间.

直线

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

是由方程(10)定义的双曲线的两条**渐近线**. 求渐近线方程的最快方法是在方程(10)中用 0 代替 1，然后从新方程求解 $y$：

$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}_{\text{双曲线}} \rightarrow \underbrace{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0}_{\text{用0代替1}} \rightarrow \underbrace{y = \pm \frac{b}{a} x}_{\text{渐近线}}$$

**例 3** 方程

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 \tag{11}$$

是方程(10)取 $a^2 = 4$ 和 $b^2 = 5$ 的双曲线(见图 9.27). 它具有

焦点：$(\pm c, 0) = (\pm 3, 0)$

顶点：$(\pm a, 0) = (\pm 2, 0)$

中心：$(0, 0)$

中心–焦点距离：$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 5} = 3$

渐近线：$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 0$ 或 $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} x$ ■

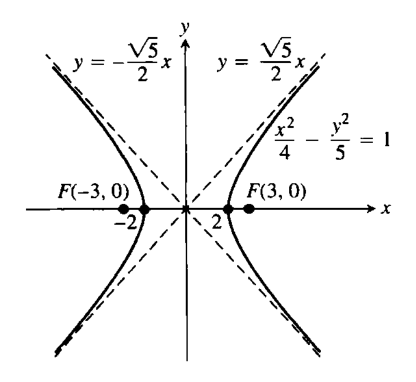



图 9.27 例 3 中的双曲线及其渐近线

如果在方程(11)中交换 $x$ 和 $y$，所得双曲线的焦点和顶点将位于 $y$ 轴上. 我们仍然用前面一样的方法求渐近线，但是它们现在的方程是 $y=\pm 2x/\sqrt{5}$.

**中心在原点的双曲线的标准型方程**

焦点在 $x$ 轴上：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

中心–焦点距离：$c=\sqrt{a^2+b^2}$

焦点：$(\pm c,0)$

顶点：$(\pm a,0)$

渐近线：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ 或 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$

焦点在 $y$ 轴上：$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$

中心–焦点距离：$c=\sqrt{a^2+b^2}$

焦点：$(0,\pm c)$

顶点：$(0,\pm a)$

渐近线：$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=0$ 或 $y=\pm\dfrac{a}{b}x$

请注意渐近线方程的差别(第一个方程用 $b/a$，第二个方程用 $a/b$).

下面我们利用 1.2 节中考察的原理，用 $x+h$ 代替 $x$ 和 $y+k$ 代替 $y$ 移动圆锥曲线.

**例 4** 证明方程 $x^2-4y^2+2x+8y-7=0$ 代表双曲线. 求它的中心、渐近线和焦点.

**解** 通过对 $x$ 和 $y$ 配方把方程化成标准型：

$$(x^2+2x)-4(y^2-2y)=7$$

$$(x^2+2x+1)-4(y^2-2y+1)=7+1-4$$

$$\frac{(x+1)^2}{4}-(y-1)^2=1$$

这是用 $x+1$ 代换 $x$ 和 $y-1$ 代换 $y$ 的双曲线标准型方程(10). 双曲线向左移动 1 个单位和向上移动 1 个单位，它具有 $x+1=0$ 和 $y-1=0$ 的中心或者说中心在 $x=-1$ 和 $y=1$. 此外，

$$a^2=4,\quad b^2=1,\quad c^2=a^2+b^2=5$$

所以两条渐近线是直线

$$\frac{x+1}{2}-(y-1)=0 \quad 和 \quad \frac{x+1}{2}+(y-1)=0$$

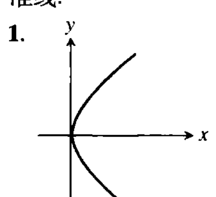
移动后的焦点坐标为$(-1\pm\sqrt{5},\ 1)$. ■

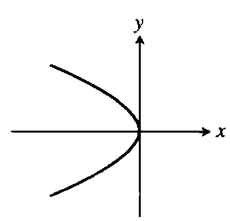
## 习题 9.4

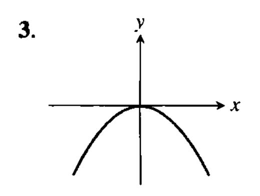
在习题 1 ~ 4 中，从方程

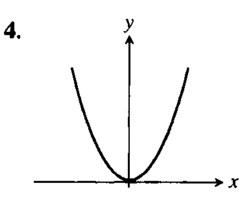
$$x^2=2y,\ x^2=-6y,\ y^2=8x,\ y^2=-4x$$

确定同双曲线对应的方程. 然后求双曲线的焦点和准线.

1. 

2. 

3. 

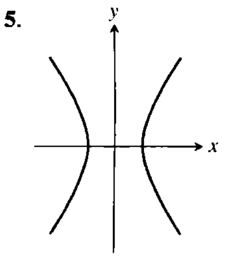
4. 

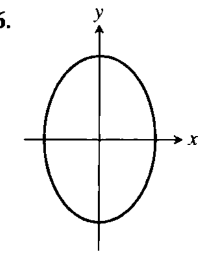
在习题 5 ~ 8 中，从方程

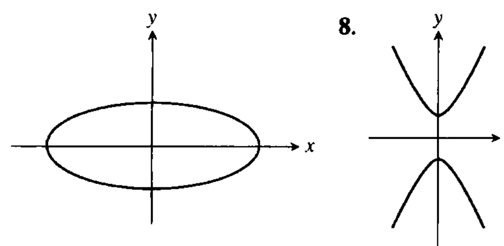
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,\ \frac{x^2}{2}+y^2=1$$

$$\frac{y^2}{4}-x^2=1,\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$$

确定同圆锥曲线对应的方程. 然后求圆锥曲线的焦点和顶点. 如果圆锥曲线是双曲线，再求它的渐近线.

5. 

6. 




习题 9 ~ 16 给出抛物线的方程. 求每条抛物线的焦点和渐近线. 然后画出抛物线草图. 在图中画出焦点和准线.

9. $y^2 = 12x$.　　10. $x^2 = 6y$.

11. $x^2 = -8y$.　　12. $y^2 = -2x$.

13. $y = 4x^2$.　　14. $y = -8x^2$.

15. $x = -3y^2$.　　16. $x = 2y^2$.

习题 17 ~ 24 给出椭圆的方程. 把每个方程化为标准型. 然后画出椭圆的草图. 在图中画出焦点.

17. $16x^2 + 25y^2 = 400$.　　18. $7x^2 + 16y^2 = 112$.

19. $2x^2 + y^2 = 2$.　　20. $2x^2 + y^2 = 4$.

21. $3x^2 + 2y^2 = 6$.　　22. $9x^2 + 10y^2 = 90$.

23. $6x^2 + 9y^2 = 54$.　　24. $169x^2 + 25y^2 = 4\,225$.

习题 25 和 26 给出 $xy$ 平面内中心在原点的椭圆的焦点和顶点的坐标. 在每种情形, 从给定条件求椭圆的标准型方程.

25. 焦点: $(\pm\sqrt{2}, 0)$; 顶点: $(\pm 2, 0)$.

26. 焦点: $(0, \pm 4)$; 顶点: $(0, \pm 5)$.

习题 27 ~ 34 给出双曲线的方程. 把每个方程化为标准型, 并且求双曲线的渐近线. 然后画出双曲线的草图. 在图中画出渐近线和焦点.

27. $x^2 - y^2 = 1$.　　28. $9x^2 - 16y^2 = 144$.

29. $y^2 - x^2 = 8$.　　30. $y^2 - x^2 = 4$.

31. $8x^2 - 2y^2 = 16$.　　32. $y^2 - 3x^2 = 3$.

33. $8y^2 - 2x^2 = 16$.　　34. $64x^2 - 36y^2 = 2\,304$.

习题 35 ~ 38 给出 $xy$ 平面内中心在原点的双曲线的焦点或者顶点坐标以及渐近线方程. 在每种情形, 从给定条件求双曲线的标准型方程.

35. 焦点: $(0, \pm\sqrt{2})$; 渐近线: $y = \pm x$.

36. 焦点: $(\pm 2, 0)$; 渐近线: $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} x$.

37. 顶点: $(\pm 3, 0)$; 渐近线: $y = \pm \frac{4}{3} x$.

38. 顶点: $(0, \pm 2)$; 渐近线: $y = \pm \frac{1}{2} x$.

在求解习题 39 ~ 56 之前, 或许你需要复习一下 1.2 节.

39. 把抛物线 $y^2 = 8x$ 向下移动 2 个单位和向右移动 1 个单位, 产生抛物线 $(y+2)^2 = 8(x-1)$.
   (a) 求新抛物线的顶点、焦点和准线.
   (b) 画出新的顶点、焦点和准线、并且画在新抛物线中.

40. 把抛物线 $x^2 = -4y$ 向左移动 1 个单位和向上移动 3 个单位, 产生抛物线 $(x+1)^2 = -4(y-3)$.
   (a) 求新抛物线的顶点、焦点和准线.
   (b) 画出新的顶点、焦点和准线, 并且画在新抛物线中.

41. 把椭圆 $(x^2/16) + (y^2/9) = 1$ 向右移动 4 个单位和向上移动 3 个单位, 产生椭圆

$$\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

   (a) 求新椭圆的焦点、顶点和中心.
   (b) 画出新的焦点、顶点和中心, 并且画在新椭圆中.

42. 把椭圆 $(x^2/9) + (y^2/25) = 1$ 向左移动 3 个单位和向下移动 2 个单位, 产生椭圆

$$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$$

   (a) 求新椭圆的焦点、顶点和中心.
   (b) 画出新的焦点、顶心和中心, 并且画在新椭圆中.

43. 把双曲线 $(x^2/16) - (y^2/9) = 1$ 向右移动 2 个单位, 产生双曲线

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

   (a) 求新双曲线的中心、焦点、顶点和渐近线.
   (b) 画出新的中心、焦点、顶点和渐近线, 并且画在新双曲线中.

44. 把双曲线 $(y^2/4) - (x^2/5) = 1$ 向下移动 2 个单位, 产生双曲线

$$\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$$

   (a) 求新双曲线的中心、焦点、顶点和渐近线.
   (b) 画出新的中心、焦点、顶点和渐近线, 并且画在新双曲线中.

习题 45 ~ 48 给出抛物线的方程, 并且说明每条抛物线向上或者向下以及向右或者向左移动多少个单位. 求新抛物线的方程, 并且求新的顶点、焦点和准线.

45. $y^2 = 4x$, 左移 2, 下移 3.

46. $y^2 = -12$, 右移 4, 上移 3.

47. $x^2 = 8y$, 右移 1, 下移 7.

48. $x^2=6y$，左移3，下移2.

习题49~52给出椭圆的方程，并且说明每个椭圆向上或者向下以及向右或者向左移动多少个单位. 求新椭圆的方程，并且求新的焦点、顶点和中心.

49. $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{9}=1$，左移2，下移1.

50. $\frac{x^2}{2}+y^2=1$，右移3，上移4.

51. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$，右移2，上移3.

52. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$，左移4，下移5.

习题53~56给出双曲线的方程，并且说明每对双曲线向上或者向下以及向右或者向左移动多少个单位. 求新双曲线的方程，并且求新的中心、焦点、顶点和渐近线.

53. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$，右移2，上移2.

54. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$，左移2，下移1.

55. $y^2-x^2=1$，左移1，下移1.

56. $\frac{y^2}{3}-x^2=1$，右移1，上移3.

在习题57~68中，求圆锥曲线的中心、焦点、顶点和渐近线，以及相应情况下的半径.

57. $x^2+4x+y^2=12$.

58. $2x^2+2y^2-28x+12y+114=0$.

59. $x^2+2x+4y-3=0$.

60. $y^2-4y-8x-12=0$.

61. $x^2+5y^2+4x=1$.

62. $9x^2+6y^2+36y=0$.

63. $x^2+2y^2-2x-4y=-1$.

64. $4x^2+y^2+8x-2y=-1$.

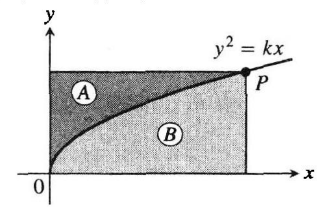
65. $x^2-y^2-2x+4y=4$.

66. $x^2-y^2+4x-6y=6$.

67. $2x^2-y^2+6y=3$.

68. $y^2-4x^2+16x=24$.

69. 如附图所示，如果经过抛物线 $y^2=kx$，$k>0$ 上一点 $P$ 作两条平行于坐标轴的直线，抛物线把以这两条直线和坐标轴为界的矩形区域分隔成两个较小的区域 $A$ 和 $B$.



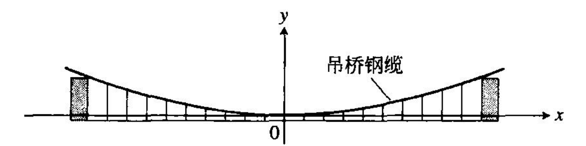

(a) 如果绕 $y$ 轴旋转这两个较小的区域，证明它们产生的旋转体体积之比为4:1.

(b) 当绕 $x$ 轴旋转这两个区域时，它们产生的旋转体体积之比是什么？

70. **吊桥钢缆按抛物线下垂** 附图所示吊桥钢缆在水平方向支撑每英尺 $w$ 磅的均匀负荷，可以证明，如果钢缆在原点的水平张力为 $H$，那么钢缆的曲线满足方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{w}{H}x$$

通过以 $x=0$ 时 $y=0$ 作为初始条件求解这个微分方程，证明钢缆按抛物线下垂.




71. **抛物线在焦点处的宽度** 通过证明直线 $y=p$ 同抛物线 $x^2=4py(p>0)$ 相交的两点相距 $4p$ 个单位，证明数 $4p$ 是抛物线在焦点处的宽度.

72. **$(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1$ 的渐近线** 通过证明

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right)=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)=0$$

证明，直线 $y=(b/a)x$ 同双曲线 $(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1$ 右支 $y=(b/a)\sqrt{x^2-a^2}$ 上半部分之间的垂直距离，当 $x\to\infty$ 时趋近零. 对于双曲线的其余部分同直线 $y=\pm(b/a)x$ 有类似的结果.

73. 在可以内接于椭圆 $x^2+4y^2=4$ 和边同坐标轴平行的矩形中，求具有最大面积的矩形的尺寸. 这个矩形的面积有多大？

74. 绕(a) $x$ 轴和(b) $y$ 轴旋转由椭圆 $9x^2+4y^2=36$ 包围的区域，求所产生的旋转体体积.

75. 绕 $x$ 轴旋转第一象限内以 $x$ 轴和直线 $x=4$ 以及双曲线 $9x^2-4y^2=36$ 为界的“三角形”区域，求所产生的旋转体体积.

76. 证明从直线 $x=-p$ 上任何点到曲线 $y^2=4px$ 的两条切线正交.

## 9.5 极坐标中的圆锥曲线

极坐标在天文学和宇航工程中是很重要的，因为人造卫星、月球、行星和彗星都是近似地沿椭圆、抛物线或双曲线的轨道运动，它们可以用一个相对简单的极坐标方程描述. 我们在下面推导极坐标方程时首先引入圆锥曲线离心率的概念. 离心率揭示圆锥曲线的类型(圆、椭圆、抛物

线或双曲线)，以及曲线“压扁”或者变扁的程度.

### 9.5.1 离心率

虽然对于椭圆而言，中心-焦点距离 $c$ 不出现在方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b)$$

中，我们依然可以从公式 $c=\sqrt{a^2-b^2}$ 确定 $c$. 如果固定 $a$ 而让 $c$ 在区间 $0\leqslant c\leqslant a$ 上变化，椭圆的形状将随之改变. 如果 $c=0$(所以 $a=b$)，椭圆成为圆，而当 $c$ 增加时，椭圆变扁. 如果 $c=a$，焦点同顶点重合，椭圆退化成线段. 于是引起我们对比率 $e=c/a$ 的考察. 对于双曲线也用这个比率，只不过这种情况的 $c$ 等于 $\sqrt{a^2+b^2}$ 而不是 $\sqrt{a^2-b^2}$. 我们用略微熟悉的术语*离心率*来定义这些比率.

**定义**

椭圆 $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1(a>b)$ 的**离心率**是

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

双曲线 $(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1$ 的**离心率**是

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

抛物线的**离心率**是

$$e=1$$

抛物线有一个焦点和一条准线，而椭圆有两个焦点和两条准线. 椭圆的准线在距离中心 $\pm a/e$ 处垂直于长轴. 抛物线具有这样一种几何性质：对于抛物线上的任何点 $P$，

$$PF=1\cdot PD \qquad (1)$$

其中 $F$ 是焦点，$D$ 是准线上最接近 $P$ 的点. 对于椭圆，可以证明等式(1)由两个等式

$$PF_1=e\cdot PD_1,\quad PF_2=e\cdot PD_2 \qquad (2)$$

代替，其中 $e$ 是离心率，$P$ 是椭圆上的任意点，$F_1$ 和 $F_2$ 是焦点，$D_1$ 和 $D_2$ 是准线上最接近 $P$ 的点(见图 9.28).

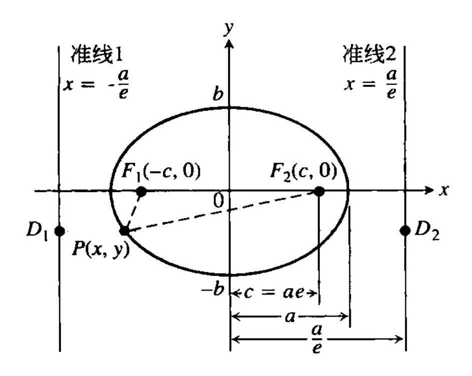



图 9.28 椭圆 $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1$ 的焦点和准线，准线 1 对应于焦点 $F_1$，准线 2 对应于焦点 $F_2$

在式(2)的两个等式中，准线和焦点必须对应；就是说，如果使用从 $P$ 到 $F_1$ 的距离，也必须使用从 $P$ 到椭圆同一端准线的距离. 准线 $x=-a/e$ 对应于 $F_1(-c,0)$，而准线 $x=a/e$ 对应于 $F_2(c,0)$.

正如椭圆的情况一样，可以证明，直线 $x=\pm a/e$ 充当双曲线的两条准线，并且

$$PF_1=e\cdot PD_1 \quad 和 \quad PF_2=e\cdot PD_2 \qquad (3)$$

其中 $P$ 是双曲线上的任意点，$F_1$ 和 $F_2$ 是焦点，$D_1$ 和 $D_2$ 是准线上最接近 $P$ 的点(见图 9.29).

在椭圆和双曲线这两种曲线中，离心率是焦点之间的距离同顶点之间的距离的比率(因为 $c/a=2c/2a$).

$$离心率 = \frac{焦点间的距离}{顶点间的距离}$$

在椭圆中，两个焦点比更两个顶点更靠近，这个比率小于1. 在双曲线中，两个焦点比两个顶点相距更远，这个比率大于1.

"焦点-准线"等式 $PF = e \cdot PD$ 以下面的方式把抛物线、椭圆和双曲线统一起来. 假设点 $P$ 到固定点 $F$(焦点)的距离 $PF$ 是 $P$ 到固定直线(准线)的距离 $PD$ 的常数倍. 就是说，假定

$$PF = e \cdot PD \tag{4}$$

其中 $D$ 是从 $P$ 到准线的垂足，$e$ 是比例常数. 这时

(a) 如果 $e = 1$，$P$ 经过的路径是抛物线；

(b) 如果 $e < 1$，$P$ 经过的路径是椭圆；

(c) 如果 $e > 1$，$P$ 经过的路径是双曲线.

在等式(4)中没有出现坐标，当我们试图把它转化成坐标形式时，要用不同的转化方法，这随 $e$ 的大小而定. 至少，在笛卡儿坐标是这样. 然而，我们将会看到，在极坐标中等式 $PF = e \cdot PD$ 转化成同 $e$ 的值无关的单一方程.

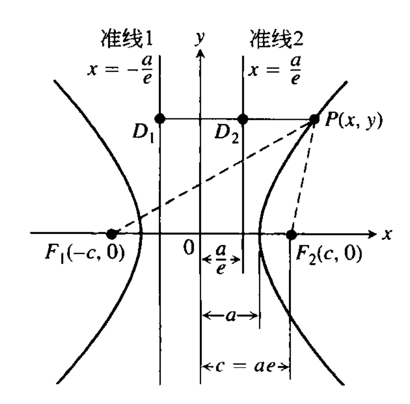



图 9.29 双曲线 $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ 的焦点和准线，无论 $P$ 位于双曲线上何处，都有 $PF_1 = e \cdot PD_1$ 和 $PF_2 = e \cdot PD_2$

对于中心在原点和焦点在 $x$ 轴上的双曲线，在给定焦点和对应的准线后，我们可用图 9.29 所示的尺寸求 $e$. 知道 $e$ 后，可以从等式 $PF = e \cdot PD$ 导出双曲线的笛卡儿方程，像在下面例子那样. 对于中心在原点和焦点在 $x$ 轴上的椭圆，可以用图 9.28 所示的尺寸以类似的方式求椭圆的方程.

**例 1** 求中心在原点的双曲线的笛卡儿方程，它的一个焦点在(3, 0)，并且以直线 $x = 1$ 为对应的准线.

**解** 首先用图 9.29 所示的尺寸求双曲线的离心率. 焦点是

$$(c,0) = (3,0), \quad 所以 \quad c = 3$$

准线是直线

$$x = \frac{a}{e} = 1, \quad 所以 \quad a = e$$

把所得结果同定义离心率的公式结合起来，给出

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{e}, \quad 所以 \quad e^2 = 3 \quad 而 \quad e = \sqrt{3}$$

知道 $e$ 后，现在可以从等式 $PF = e \cdot PD$ 导出我们所要的方程. 用图 9.30 的记号，有

$$\begin{aligned} PF &= e \cdot PD \quad (等式(4)) \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} &= \sqrt{3}\,|x-1| \quad (e = \sqrt{3}) \\ x^2 - 6x + 9 + y^2 &= 3(x^2 - 2x + 1) \\ 2x^2 - y^2 &= 6 \\ \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} &= 1 \end{aligned}$$

■

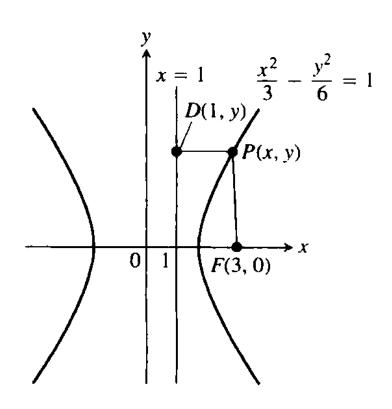



图 9.30 例 1 中的双曲线和准线

### 9.5.2 极方程

为了求椭圆、抛物线和双曲线的极方程，我们把一个焦点置于原点，而以原点右边的垂直线 $x=k$ 为对应的准线(见图 9.31)．这样使得

$$PF = r$$

和

$$PD = k - FB = k - r\cos\theta$$

圆锥曲线的焦点-距离等式 $PF = e \cdot PD$ 于是变成

$$r = e(k - r\cos\theta)$$

从其中求解 $r$，得到下述表达式.

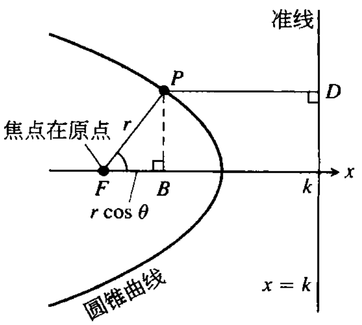



图 9.31 如果圆锥曲线所处位置是焦点在原点，一条准线垂直于初始射线并且在原点右边，那么可以从圆锥曲线的焦点-准线等式求它的极方程

**离心率为 $e$ 的圆锥曲线的极方程**

$$r = \frac{ke}{1 + e\cos\theta} \tag{5}$$

其中 $x=k>0$ 是垂直准线.

**例 2** 下面是三种圆锥曲线的极方程：

$e=\frac{1}{2}$： 椭圆 $r = \frac{k}{2+\cos\theta}$

$e=1$： 抛物线 $r = \frac{k}{1+\cos\theta}$

$e=2$： 双曲线 $r = \frac{2k}{1+2\cos\theta}$ ■

可以看出，方程(5)随准线的位置不同而改变．如果准线是在原点左边的直线 $x=-k$(原点仍然是一个焦点)，方程(5)变成

$$r = \frac{ke}{1 - e\cos\theta}$$

右端表达式中的分母取(－)号而不是(＋)号．如果准线是直线 $y=k$ 或者 $y=-k$，极方程中包含正弦而不是余弦，如图 9.32 所示.

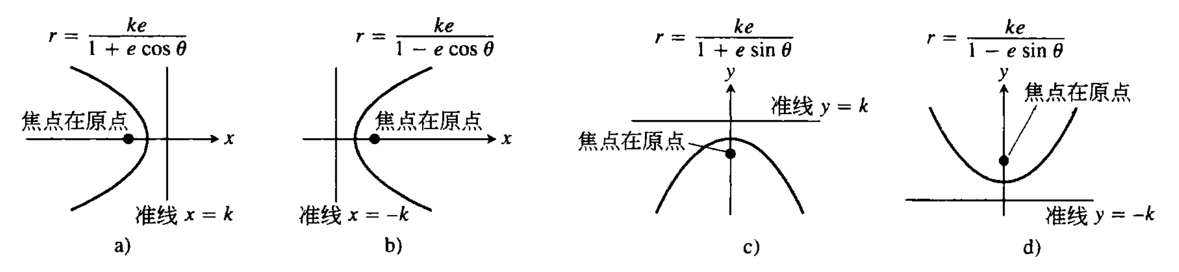



图 9.32 离心率 $e>0$ 而准线位置不同的圆锥曲线的极方程；图中显示的是抛物线，所以 $e=1$

**例 3** 求离心率等于 3/2 和准线为直线 $x=2$ 的双曲线方程.

**解** 利用方程(5)，取 $k=2$ 和 $e=3/2$：

$$r = \frac{2(3/2)}{1+(3/2)\cos\theta} \quad 或 \quad r = \frac{6}{2+3\cos\theta}$$ ■

**例 4** 求抛物线

$$r = \frac{25}{10+10\cos\theta}$$

的准线.

**解** 用10除右端表达式的分子和分母，把方程变成标准形式极方程：

$$r=\frac{5/2}{1+\cos\theta}$$

这是方程

$$r=\frac{ke}{1+e\cos\theta}$$

取 $k=5/2$ 和 $e=1$ 的结果. 方程的准线是直线 $x=5/2$. ■

从图9.33的椭圆图解中看出，$k$ 同离心率 $e$ 和半长轴 $a$ 的关系由方程

$$k=\frac{a}{e}-ea$$

表示. 由此求出 $ke=a(1-e^2)$. 在方程(5)中用 $a(1-e^2)$ 代换 $ke$ 给出椭圆的标准极方程.

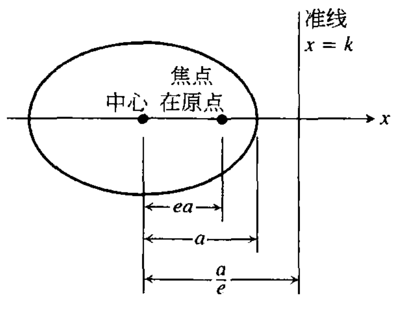
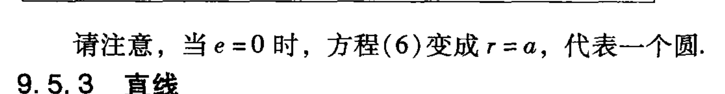



图9.33 在半长轴为 $a$ 的椭圆中，焦点-准线距离为 $k=(a/e)-ea$，所以 $ke=a(1-e^2)$



**离心率为 $e$ 和半长轴等于 $a$ 的椭圆的极方程**

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \qquad (6)$$

请注意，当 $e=0$ 时，方程(6)变成 $r=a$，代表一个圆.

### 9.5.3 直线

假定从原点到直线 $L$ 的垂线同 $L$ 在点 $P_0(r_0,\theta_0)$ 相交，其中 $r_0\geqslant 0$(见图9.34). 如果 $P(r,\theta)$ 是 $L$ 上任意的其他点，那么点 $P$，$P_0$ 和 $O$ 是一个直角三角形的顶点，由它可以确定关系式

$$r_0=r\cos(\theta-\theta_0)$$

图9.34 从由直角三角形 $OP_0P$ 得到的关系式 $r_0=r\cos(\theta-\theta_0)$ 可以求出直线 $L$ 的极方程

**直线的标准极方程**

若点 $P_0(r_0,\theta_0)$ 是从原点到直线 $L$ 的垂足，并且 $r_0\geqslant 0$，则 $L$ 的方程是

$$r\cos(\theta-\theta_0)=r_0 \qquad (7)$$

例如，如果 $\theta_0=\pi/3$，我们求出

$$r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=2$$

$$r\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)=2$$

$$\frac{1}{2}r\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}r\sin\theta=2 \quad 或 \quad x+\sqrt{3}y=4$$

### 9.5.4 圆

为了求圆心在 $P_0(r_0,\theta_0)$ 半径为 $a$ 的圆的极方程，令 $P(r,\theta)$ 是圆上的一点，并且对三角形 $OP_0P$(见图9.35)应用余弦定律. 这样给出

$$a^2 = r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos(\theta - \theta_0)$$

如果圆经过原点，那么 $r_0 = a$，上面的方程简化成

$$a^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - \theta_0)$$

$$r^2 = 2ar\cos(\theta - \theta_0)$$

$$r = 2a\cos(\theta - \theta_0)$$

如果圆心位于正 $x$ 轴上，这时 $\theta_0 = 0$，得到近一步简化的方程

$$r = 2a\cos\theta \qquad (8)$$

如果圆心位于正 $y$ 轴上，$\theta_0 = \pi/2$，$\cos(\theta - \theta_0) = \cos(\theta - \pi/2) = \sin\theta$，方程 $r = 2a\cos(\theta - \theta_0)$ 变成

$$r = 2a\sin\theta \qquad (9)$$

如果圆经过原点，圆心在负 $x$ 轴和负 $y$ 轴上，圆的方程可以从以上方程中用 $-r$ 代换 $r$ 得到.

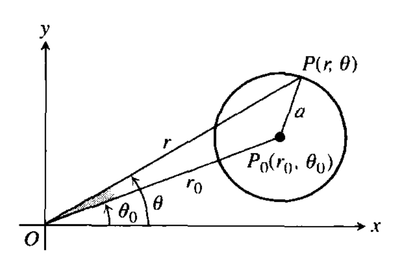



图 9.35 对三角形 $OP_0P$ 应用余弦定律可以得到这个圆的极方程

**例 5** 下面是几个经过原点的圆的极方程.

| 半径 | 圆心(极坐标) | 极方程 |
|---|---|---|
| 3 | $(3, 0)$ | $r = 6\cos\theta$ |
| 2 | $(2, \pi/2)$ | $r = 4\sin\theta$ |
| 1/2 | $(-1/2, 0)$ | $r = -\cos\theta$ |
| 1 | $(-1, \pi/2)$ | $r = -2\sin\theta$ |

■

## 习题 9.5

在习题 1 ~ 8 中，求椭圆的离心率. 然后求椭圆的焦点和准线，并且画出图形.

**1.** $16x^2 + 25y^2 = 400$. **2.** $7x^2 + 16y^2 = 112$.

**3.** $2x^2 + y^2 = 2$. **4.** $2x^2 + y^2 = 4$.

**5.** $3x^2 + 2y^2 = 6$. **6.** $9x^2 + 10y^2 = 90$.

**7.** $6x^2 + 9y^2 = 54$. **8.** $169x^2 + 25y^2 = 4\,225$.

习题 9 ~ 12 给出中心在 $xy$ 平面原点的椭圆的焦点和离心率或者顶点和离心率. 在每种情形，求椭圆在笛卡儿坐标中的标准形式方程.

**9.** 焦点：$(0, \pm 3)$；离心率：0.5.

**10.** 焦点：$(\pm 8, 0)$；离心率：0.2.

**11.** 顶点：$(0, \pm 70)$；离心率：0.1.

**12.** 顶点：$(\pm 10, 0)$；离心率：0.24.

习题 13 ~ 16 给出中心在 $xy$ 平面原点的椭圆的焦点和对应的准线. 在每种情形，用图 9.28 的尺度求椭圆的离心率. 然后求椭圆在笛卡儿坐标中的标准形式方程.

**13.** 焦点：$(\sqrt{5}, 0)$；准线：$x = \dfrac{9}{\sqrt{5}}$.

**14.** 焦点：$(4, 0)$；准线：$x = \dfrac{16}{3}$.

**15.** 焦点：$(-4, 0)$；准线：$x = -16$.

**16.** 焦点：$(-\sqrt{2}, 0)$；准线：$x = -2\sqrt{2}$.

在习题 17 ~ 24 中，求双曲线的离心率. 然后求双曲线的焦点和准线并且画出图形.

**17.** $x^2 - y^2 = 1$. **18.** $9x^2 - 16y^2 = 144$.

**19.** $y^2 - x^2 = 8$. **20.** $y^2 - x^2 = 4$.

**21.** $8x^2 - 2y^2 = 16$. **22.** $y^2 - 3x^2 = 3$.

**23.** $8y^2 - 2x^2 = 16$. **24.** $64x^2 - 36y^2 = 2\,304$.

习题 25 ~ 28 给出中心在 $xy$ 平面原点的离心率和顶点或者离心率和焦点. 在每种情形，求双曲线在笛卡儿坐标中的标准形式方程.

**25.** 离心率：3；顶点 $(0, \pm 1)$.

**26.** 离心率：2；顶点 $(\pm 2, 0)$.

**27.** 离心率：3；焦点 $(\pm 3, 0)$.

**28.** 离心率：1.25；焦点 $(0, \pm 5)$.

习题 29 ~ 36 给出一个焦点在原点的圆锥曲线的离心率，以及同这个焦点对应的准线. 求每条圆锥曲线的极方程.

**29.** $e = 1$，$x = 2$. **30.** $e = 1$，$y = 2$.

**31.** $e = 5$，$y = -6$. **32.** $e = 2$，$x = 4$.

**33.** $e = 1/2$，$x = 1$. **34.** $e = 1/4$，$x = -2$.

**35.** $e = 1/5$，$y = -10$. **36.** $e = 1/3$，$y = 6$.

在习题 37 ~ 44 中，画出抛物线和椭圆的草图，包括同在原点的焦点对应的准线. 用相应的极坐标标出顶点，也标出椭圆的中心.

**37.** $r = \dfrac{1}{1 + \cos\theta}$. **38.** $r = \dfrac{6}{2 + \cos\theta}$.

39. $r=\frac{25}{10-5\cos\theta}$.

40. $r=\frac{4}{2-2\cos\theta}$.

41. $r=\frac{400}{16+8\sin\theta}$.

42. $r=\frac{12}{3+3\sin\theta}$.

43. $r=\frac{8}{2-2\sin\theta}$.

44. $r=\frac{4}{2-\sin\theta}$.

在习题 45 ~ 48 中，画出直线的草图，并且求它们的笛卡儿方程.

45. $r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$.

46. $r\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{4}\right)=1$.

47. $r\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)=3$.

48. $r\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=2$.

在习题 49 ~ 52 中，求每条直线取 $r\cos(\theta-\theta_0)=r_0$ 形式的极方程.

49. $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=6$.

50. $\sqrt{3}x-y=1$.

51. $y=-5$.

52. $x=-4$.

在习题 53 ~ 56 中，画出圆的草图. 给出圆心的极坐标，并且确定圆的半径.

53. $r=4\cos\theta$.

54. $r=6\sin\theta$.

55. $r=-2\cos\theta$.

56. $r=-8\sin\theta$.

在习题 57 ~ 64 中，求圆的极方程. 在坐标平面内画出圆的草图，并且标出圆的笛卡儿方程和极方程.

57. $(x-6)^2+y^2=36$.

58. $(x+2)^2+y^2=4$.

59. $x^2+(y-5)^2=25$.

60. $x^2+(y+7)^2=49$.

61. $x^2+2x+y^2=0$.

62. $x^2-16x+y^2=0$.

63. $x^2+y^2+y=0$.

64. $x^2+y^2-\frac{4}{3}y=0$.

**T** 在习题 65 ~ 74 中，画出直线和圆锥曲线的图形.

65. $r=3\sec(\theta-\pi/3)$.

66. $r=4\sec(\theta+\pi/6)$.

67. $r=4\sin\theta$.

68. $r=-2\cos\theta$.

69. $r=8/(4+\cos\theta)$.

70. $r=8/(4+\sin\theta)$.

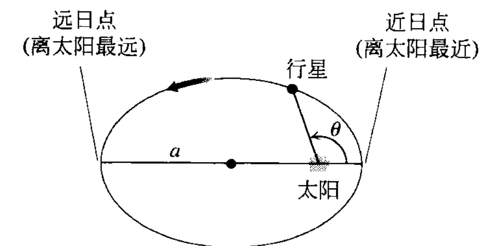
71. $r=1/(1-\sin\theta)$.

72. $r=1/(1+\cos\theta)$.

73. $r=1/(1+2\sin\theta)$.

74. $r=1/(1+2\cos\theta)$.

75. **近日点和远日点** 一颗行星以椭圆轨道绕太阳运行，轨道半长轴的长度为 $a$(参见附图).




(a) 证明，当行星靠太阳最近时 $r=a(1-e)$，当行星靠太阳最远时 $r=a(1+e)$.

(b) 利用习题 76 附表中的数据，求太阳系每颗行星离太阳的最近距离和最远距离.

76. **行星轨道** 利用下表中的数据和方程(6)求各个行星轨道的极方程.

| 行星 | 半长轴(天文单位) | 离心率 |
|---|---|---|
| 水星 | 0.3871 | 0.2056 |
| 金星 | 0.7233 | 0.0068 |
| 地球 | 1.000 | 0.0167 |
| 火星 | 1.524 | 0.0934 |
| 木星 | 5.203 | 0.0484 |
| 土星 | 9.539 | 0.0543 |
| 天王星 | 19.18 | 0.0460 |
| 海王星 | 30.06 | 0.0082 |
| 冥王星 | 39.44 | 0.2481 |

例如，冥王星的轨道是

$$r=\frac{39.44(1-(0.25)^2)}{1+0.25\cos\theta}=\frac{147.9}{4+\cos\theta}$$

在习题 77 ~ 80 中，求给定曲线的极方程. 在每种情形，画一条代表性曲线的草图.

77. $x^2+y^2-2ay=0$.

78. $y^2=4ax+4a^2$.

79. $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ ($\alpha$, $p$ 是常数).

80. $(x^2+y^2)^2+2ax(x^2+y^2)-a^2y^2=0$.

**计算机探究**

81. 用一种 CAS(计算机代数系统)绘制极方程

$$r=\frac{ke}{1+e\cos\theta}$$

在区间 $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$ 上对于不同 $k$ 值和 $e$ 值的图形. 回答下列问题:

(a) 取 $k=-2$. 描述当取 $e$ 为 3/4，1 和 5/4 时图形中出现什么. 对于 $k=2$ 重复一遍.

(b) 取 $k=-1$. 描述当取 $e$ 为 7/6，5/4，4/3，3/2，2，3，5，10 和 20 时图形中出现什么. 对于 $e=1/2$，1/3，1/4，1/10 和 1/20 重复一遍.

(c) 现在保持 $e>0$ 为固定值，描述当取 $k$ 为 $-1$，$-2$，$-3$，$-4$ 和 $-5$ 时图形中出现什么. 务必注意抛物线、椭圆和双曲线的图形.

82. 用一种 CAS 绘制椭圆的极方程

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

在区间 $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$ 上对于 $a>0$ 和 $0<e<1$ 的不同值的图形.

(a) 取 $e=9/10$. 描述当令 $a$ 等于 1，3/2，2，3，5 和 10 时图形中出现什么. 用 $e=1/4$ 重复一遍.

(b) 取 $a=2$. 描述当取 $e$ 为 9/10，8/10，7/10，…，1/10，1/20 和 1/50 时图形中出现什么.

## 9.6 圆锥曲线与参数方程，摆线

在3.5节介绍过在笛卡儿平面内由参数方程定义的曲线，以及如何求它们的导数. 那时曾经讨论直线、圆和椭圆的参数表示. 在这一节我们讨论其他平面曲线的参数表示，其中包括抛物线、双曲线、摆线、捷线和等时曲线.

### 9.6.1 抛物线与双曲线

在3.5节曾用参数表示

$$x=\sqrt{t},\quad y=t,\quad t\geqslant 0$$

描述质点沿抛物线右支的运动. 在下面的例子中，我们获得整个抛物线的参数表示而不限于它的右支.

**例1** $xy$ 平面内运动质点的位置 $P(x,y)$ 由方程和参数区间

$$x=t,\quad y=t^2,\quad -\infty<t<\infty$$

给出. 确定质点的路径并且描述其运动.

**解** 在方程 $x=t$ 和 $y=t^2$ 之间消去 $t$ 确定路径，得到

$$y=(t)^2=x^2$$

质点的位置坐标满足方程 $y=x^2$，所以质点沿这条曲线运动.

同3.5节例10不同，质点现在遍历整个抛物线. 当 $t$ 由 $-\infty$ 增加到 $\infty$ 时，质点沿左支向下运动，通过原点，再沿右支向上运动(见图9.36). ■

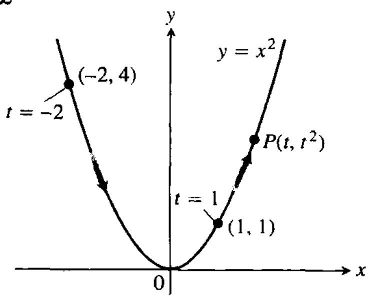



图9.36 由 $x=t$，$y=t^2$，$-\infty<t<\infty$ 定义的路径是整个抛物线 $y=x^2$(例1)

如例1说明的那样，任何曲线 $y=f(x)$ 都有参数表示 $x=t$，$y=f(t)$. 这种表示如此简单，以致通常不去用它. 但是，这种观点有时对我们是有帮助的.

**例2** 质点在时间 $t$ 的位置 $P(x,y)$ 由

$$x=\sec t,\quad y=\tan t,\quad -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$$

给出，描述它的运动.

**解** 从方程

$$\sec t=x,\quad \tan t=y$$

消去 $t$，求 $P$ 的坐标满足的笛卡儿方程. 我们利用恒等式 $\sec^2 t-\tan^2 t=1$ 完成这件事，由它产生

$$x^2-y^2=1$$

由于质点的坐标 $(x,y)$ 满足方程 $x^2-y^2=1$，质点运动出现在这条双曲线上某些地方. 当 $t$ 从 $-\pi/2$ 变化到 $\pi/2$ 时，$x=\sec t$ 保持正值，而 $y=\tan t$ 由 $-\infty$ 变化到 $\infty$，所以 $P$ 遍历双曲线的右支. 当 $t\to 0^-$ 时它沿右下半支运动，在 $t=0$ 时达到点(1, 0)，而当 $t$ 向 $\pi/2$ 增加时 $P$ 运动进入第一象限(见图9.37). ■

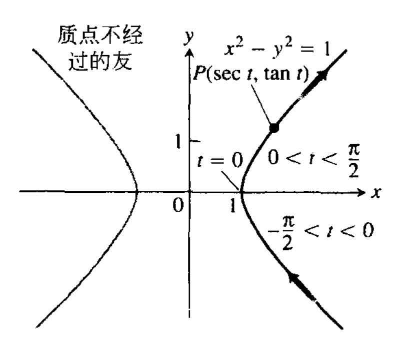



图9.37 方程 $x=\sec t$，$y=\tan t$ 和区间 $-\pi/2<t<\pi/2$ 描述双曲线 $x^2-y^2=1$ 的右支(例2)

### 9.6.2 摆线

人物传记

克里斯琴·惠更斯

(Christiaan Huygens, 1629—1695)

当摆钟的摆锤按圆弧摆动时，它牵涉的问题是摆动的频率依赖于摆动的幅度. 摆动幅度越宽，摆锤返回中心(它的最低位置)所需时间越长.

如果可能使摆锤按一条摆线摆动，那么就不会出现这

种情况. 克里斯琴·惠更斯于1673年设计了一座摆钟. 其摆锤就是按摆线摆动，这种摆线是我们在下面例3定义的一种曲线. 他把摆锤悬挂在一条带防护限制的细线上，使它在摆离中心时受到牵制(见图9.38).

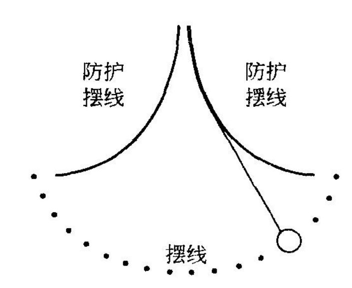



图9.38 在惠更斯的摆钟中，摆锤按摆线摆动，所以摆动频率不依赖于摆动幅度

**例3** 一个半径为 $a$ 的轮子沿一条水平直线滚动. 求轮子圆周上一点 $P$ 经过路径的参数方程. 这种路径称为**摆线**.

**解** 我们取这条水平直线为 $x$ 轴，在轮子上标出一点 $P$，从 $P$ 在原点时开始向右滚动轮子. 用轮子转动的角 $t$ 作为参数，$t$ 以弧度为单位. 图9.39显示轮子在一小段时间后处于基线上离原点 $at$ 单位的位置. 轮子的中心 $C$ 位于 $(at, a)$ 而 $P$ 的坐标为

$$x = at + a\cos\theta, \quad y = a + a\sin\theta$$

为了用 $t$ 表示 $\theta$，从图中观察到 $t+\theta = 3\pi/2$，所以

$$\theta = \frac{3\pi}{2} - t$$

这使得

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\sin t, \quad \sin\theta = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\cos t$$

我们所求方程是

$$x = at - a\sin t, \quad y = a - a\cos t$$

通常这两个方程在提出因子 $a$ 后写成

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \tag{1}$$

图9.40显示摆线的第一个拱形和第二个拱形的一部分. ■

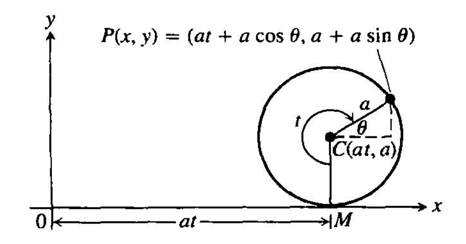



图9.39 滚动轮子上点 $P(x, y)$ 在角 $t$ 时的位置(例3)

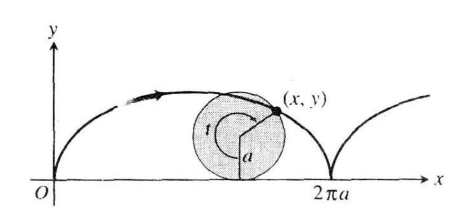



图9.40 摆线 $x = a(t - \sin t)$，$y = a(1 - \cos t)$，$t \geqslant 0$

### 9.6.3 捷线与等时线

如果把图形9.40倒转过来，方程(1)依然适用，而所得曲线(见图9.41)存在两个有趣的物理特性. 第一个特性同原点 $O$ 和第一个拱形底端的点 $B$ 有关：在联结这两点的所有光滑曲线中，摆线将使一个只受重力作用而无摩擦的小珠沿曲线从 $O$ 向 $B$ 滑动时是最快的. 这使摆线成为一条**捷线**，或者这两点间的最短时间曲线. 第二个特性是：即使小珠从中途开始沿曲线向点 $B$ 下滑，它依然将以相同的时间到达点

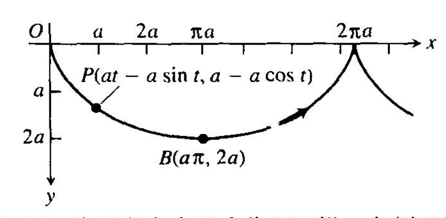



图9.41 为了研究在重力作用下沿一条倒置摆线的运动，把图9.40倒转过来，这使 $y$ 轴指向重力的方向，并且使朝下的 $y$ 坐标为正；摆线的方程和参数区间仍然是 $x = a(t - \sin t)$，$y = a(1 - \cos t)$，$t \geqslant 0$ 曲线上的箭头指向 $t$ 增加的方向

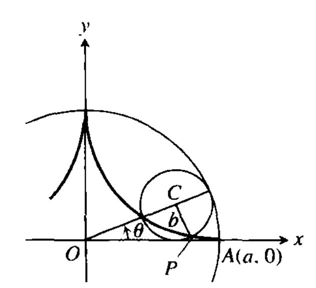
$B$. 这使摆线成为一条**等时曲线**，或者由 $O$ 到 $B$ 的**相同时间曲线**. 可以证明，从 $O$ 到 $B$ 的摆线是 $O$ 和 $B$ 之间的唯一一条捷线. 证明从略.

## 习题 9.6

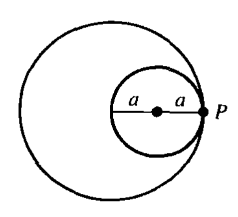
习题 1～12 给出 $xy$ 平面内质点运动的参数方程和参数区间. 通过求质点运动的笛卡儿方程确定质点经过的路径. 画出笛卡儿方程的图形(图形将随所用的方程而改变). 指出图形中质点经过的部分及其运动方向.

1. $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0\leqslant t\leqslant\pi$.
2. $x=\sin(2\pi(1-t))$, $y=\cos(2\pi(1-t))$; $0\leqslant t\leqslant 1$.
3. $x=4\cos t$, $y=5\sin t$; $0\leqslant t\leqslant\pi$.
4. $x=4\sin t$, $y=5\cos t$; $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.
5. $x=t$, $y=\sqrt{t}$; $t\geqslant 0$.
6. $x=\sec^2 t-1$, $y=\tan t$; $-\pi/2<t<\pi/2$.
7. $x=-\sec t$, $y=\tan t$; $-\pi/2<t<\pi/2$.
8. $x=\csc t$, $y=\cot t$; $0<t<\pi$.
9. $x=t$, $y=\sqrt{4-t^2}$; $0\leqslant t\leqslant 2$.
10. $x=t^2$, $y=\sqrt{t^4+1}$; $t\geqslant 0$.
11. $x=-\cosh t$, $y=\sinh t$; $-\infty<t<\infty$.
12. $x=2\sinh t$, $y=2\cosh t$; $-\infty<t<\infty$.
13. **内摆线** 当一个圆在另外一个固定圆内部滚动时，滚动圆的周界上任意点 $P$ 描绘一条*内摆线*. 设固定圆为 $x^2+y^2=a^2$，滚动圆的半径为 $b$，而描绘点 $P$ 的初始位置为 $A(a, 0)$. 求内摆线的参数方程，以正 $x$ 轴到两个圆心联线的角 $\theta$ 作为参数. 特别是，如果 $b=a/4$(如附图所示)，证明内摆线是星状线

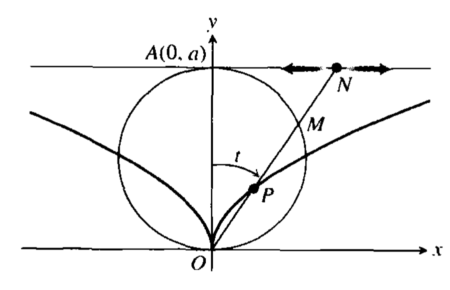
$$x=a\cos^3\theta,\quad y=a\sin^3\theta$$




14. **关于内摆线的其他问题** 后面附图显示半径为 $a$ 的圆同半径为 $2a$ 的圆在内部相切. 图中所示的切点 $P$ 附着在小圆上. 当小圆绕大圆内部滚动时，$P$ 经过的路径是什么?




15. 在本题附图中当点 $N$ 沿直线 $y=a$ 移动时，点 $P$ 依照 $OP=MN$ 的方式运动. 求 $P$ 的坐标作为角 $t$ 的函数的参数方程，其中 $t$ 是直线 $ON$ 同正 $y$ 轴的夹角.




16. **次摆线** 一个半径为 $a$ 的轮子沿一条水平直线无滑动地滚动. 求一条轮辐上离中心 $b$ 单位的点 $P$ 经过的曲线的参数方程. 用轮子转动的角 $\theta$ 作为参数. 这种曲线称为*次摆线*，是取 $b=a$ 时的摆线.
17. 求抛物线 $x=t$, $y=t^2$, $-\infty<t<\infty$ 上离点$(2, 1/2)$最近的点. (提示：使距离作为 $t$ 的函数的平方达到最小.)
18. 求椭圆 $x=2\cos t$, $y=\sin t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 上离点$(3/4, 0)$最近的点. (提示：使距离作为 $t$ 的函数的平方达到最小.)

**T** 如果你有参数方程绘图器，用它绘制习题 19～26 中的方程在给定区间上的图形.

19. **椭圆** $x=4\cos t$, $y=2\sin t$，在下列区间上：
    (a) $0\leqslant t\leqslant 2\pi$; (b) $0\leqslant t\leqslant\pi$;
    (c) $-\pi/2\leqslant t\leqslant\pi/2$.
20. **双曲线分支** $x=\sec t$(输入为 1/cos (t))，$y=\tan t$(输入为 sin (t)/cos (t))，在下列区间上：
    (a) $-1.5\leqslant t\leqslant 1.5$; (b) $-0.5\leqslant t\leqslant 0.5$;
    (c) $-0.1\leqslant t\leqslant 0.1$.
21. **抛物线** $x=2t+3$, $y=t^2-1$, $-2\leqslant t\leqslant 2$.
22. **摆线** $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$，在下列区间上：
    (a) $0\leqslant t\leqslant 2\pi$; (b) $0\leqslant t\leqslant 4\pi$;
    (c) $\pi\leqslant t\leqslant 3\pi$.
23. **一条精致的曲线(三角形曲线)**
    $x=2\cos t+\cos 2t$, $y=2\sin t-\sin 2t$;

$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

如果在 $x$ 和 $y$ 的方程中用 $-2$ 代换 2，会出现什么？画出新方程的图形并且求出方程.

**24. 一条更精致的曲线**

$x = 3\cos t + \cos 3t,\quad y = 3\sin t - \sin 3t;$

$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

如果在 $x$ 和 $y$ 的方程中用 $-3$ 代换 3，会出现什么？画出新方程的图形并且求出方程.

**25. 三条优美的曲线**

(a) 外摆线

$x = 9\cos t - \cos 9t,\quad y = 9\sin t - \sin 9t;$

$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

(b) 内摆线

$x = 8\cos t + 2\cos 4t,\quad y = 8\sin t - 2\sin 4t;$

$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

(c) 长短辐圆内摆线

$x = \cos t + 5\cos 3t,\quad y = 6\cos t - 5\sin 3t;$

$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

**26. 更优美的曲线**

(a) $x = 6\cos t + 5\cos 3t$，$y = 6\sin t - 5\sin 3t$；

$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

(b) $x = 6\cos 2t + 5\cos 6t$，$y = 6\sin 2t - 5\sin 6t$；

$0 \leqslant t \leqslant \pi$.

(c) $x = 6\cos t + 5\cos 3t$，$y = 6\sin 2t - 5\sin 3t$；

$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

(d) $x = 6\cos 2t + 5\cos 6t$，$y = 6\sin 4t - 5\sin 6t$；

$0 \leqslant t \leqslant \pi$.

## 第 9 章复习指导问题

1. 什么是极坐标？什么方程表示极坐标同笛卡儿坐标之间的关系？为什么可能需要从一个坐标系改变到其他坐标系？
2. 对于作图而言，极坐标不具备唯一性带来什么后果？举一个例子.
3. 如何在极坐标中绘制方程的图形？包含关于图形的对称性、斜率和在原点的特性以及利用笛卡儿图形的讨论. 举出一些例子.
4. 如何在极坐标平面内求区域 $0 \leqslant r_1(\theta) \leqslant r \leqslant r_2(\theta)$，$\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ 的面积？举出一些例子.
5. 在什么条件下可以在极坐标平面内求曲线 $r = f(\theta)$，$\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ 的长度？举出一个典型计算的例子.
6. 什么是抛物线？对于顶点在原点和焦点位于坐标轴上的抛物线，它们的笛卡儿方程是什么？对于这样一种抛物线，如何从它们的方程求焦点和准线？
7. 什么是椭圆？对于中心在原点和焦点在一条坐标轴上的椭圆，它们的笛卡儿方程是什么？对于这样一种椭圆，如何从它们的方程求焦点、顶点和准线？
8. 什么是双曲线？对于中心在原点和焦点在一条坐标轴上的双曲线，它们的笛卡儿方程是什么？对于这样一种双曲线，如何从它们的方程求焦点、顶点和准线？
9. 什么是圆锥曲线的离心率？怎样通过离心率对圆锥曲线分类？椭圆的形状同离心率有何关系？
10. 解释等式 $PF = e \cdot PD$ 的几何性质.
11. 什么是极坐标中的直线和圆锥曲线的标准方程？举出一些例子.
12. 圆锥曲线的某些典型参数表示是什么？
13. 什么是摆线？摆线的典型参数方程是什么？什么物理特性使摆线成为重要的曲线？

## 第 9 章实习习题

在习题 1 ~ 6 中画出直线的草图. 此外，求每条直线的笛卡儿方程.

1. $r\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}$.
2. $r\cos\left(\theta - \dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
3. $r = 2\sec\theta$.
4. $r = -\sqrt{2}\sec\theta$.
5. $r = -(3/2)\csc\theta$.
6. $r = (3\sqrt{3})\csc\theta$.

在习题 7 ~ 10 中，求圆的笛卡儿方程. 在坐标平面内画出每个圆的草图，并且标出它们的笛卡儿方程和极方程.

7. $r = -4\sin\theta$.
8. $r = 3\sqrt{3}\sin\theta$.
9. $r = 2\sqrt{2}\cos\theta$.
10. $r = -6\cos\theta$.

在习题 11 ~ 14 中，求圆的极方程. 在坐标平面内画出每个圆的草图，并且标出它们的笛卡儿方程和极方程.

**11.** $x^2+y^2+5y=0$.　　**12.** $x^2+y^2-2y=0$.

**13.** $x^2+y^2-3x=0$.　　**14.** $x^2+y^2+4x=0$.

在习题 15 和 16 中，画出由极坐标不等式定义的区域的图形.

**15.** $0\leqslant r\leqslant 6\cos\theta$.　　**16.** $-4\sin\theta\leqslant r\leqslant 0$.

在习题 17 ~ 24 中，确定同方程(a) ~ (l)对应的图形. 由于方程的数目多于图形数目，所以有些方程没有相匹配的图形.

(a) $r=\cos 2\theta$;　　(b) $r\cos\theta=1$;

(c) $r=\dfrac{6}{1-2\cos\theta}$;　　(d) $r=\sin 2\theta$;

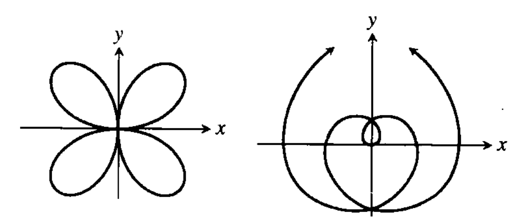
(e) $r=\theta$;　　(f) $r^2=\cos 2\theta$;

(g) $r=1+\cos\theta$;　　(h) $r=1-\sin\theta$;

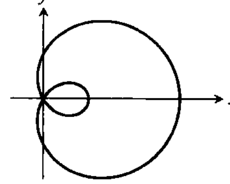
(i) $r=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$;　　(j) $r^2=\sin 2\theta$;

(k) $r=-\sin\theta$;　　(l) $r=2\cos\theta+1$.

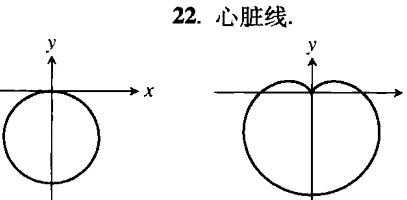
**17.** 四叶玫瑰线.　　**18.** 螺线.



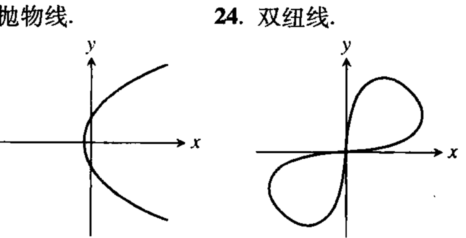

**19.** 蚶线.　　**20.** 双纽线.




**21.** 圆.　　**22.** 心脏线.




**23.** 抛物线.　　**24.** 双纽线.




在习题 25 ~ 28 中，求所描述的极坐标平面内的区域的面积.

**25.** 由蚶线 $r=2-\cos\theta$ 包围的区域.

**26.** 由三叶玫瑰线 $r=\sin 3\theta$ 的一叶包围的区域.

**27.** 在"8 字图"$r=1+\cos 2\theta$ 之内和圆 $r=1$ 之外的区域.

**28.** 在心脏线 $r=2(1+\sin\theta)$ 之内和圆 $r=\sin 2\theta$ 之外的区域.

在习题 29 ~ 32 中，求由极坐标方程给出的曲线的长度.

**29.** $r=-1+\cos\theta$.

**30.** $r=2\sin\theta+2\cos\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$.

**31.** $r=8\sin^3(\theta/3)$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi/4$.

**32.** $r=\sqrt{1+\cos 2\theta}$，$-\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2$.

在习题 33 ~ 36 中，画出抛物线的草图. 在图中画上焦点和准线.

**33.** $x^2=-4y$.　　**34.** $x^2=2y$.

**35.** $y^2=3x$.　　**36.** $y^2=-(8/3)x$.

在习题 37 ~ 40 中，求椭圆和双曲线的离心率. 画出每条圆锥曲线的草图. 在图中画上焦点、顶点和渐近线(对有渐近线的曲线).

**37.** $16x^2+7y^2=112$.　　**38.** $x^2+2y^2=4$.

**39.** $3x^2-y^2=3$.　　**40.** $5y^2-4x^2=20$.

习题 41 ~ 46 给出圆锥曲线的方程，并且说明向右和向上或者向左和向下移动多少个单位. 求新圆锥曲线的方程. 并且求新的焦点、顶点以及中心和渐近线(对有中心和渐近线的曲线). 对于抛物线，同时求新的准线.

**41.** $x^2=-12y$，右移 2，上移 3.

**42.** $y^2=10x$，左移 1/2，下移 1.

**43.** $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$，左移 3，下移 5.

**44.** $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$，右移 5，上移 12.

**45.** $\dfrac{y^2}{8}-\dfrac{x^2}{2}=1$，右移 2，上移 $2\sqrt{2}$.

**46.** $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{64}=1$，左移 10，下移 3.

在习题 47 ~ 54 中，对方程配方，识别圆锥曲线. 求曲线的焦点、顶点和中心以及渐近线(对有中心和渐近线的曲线). 对于抛物线，同时求它的准线.

**47.** $x^2-4x-4y^2=0$.　　**48.** $4x^2-y^2+4y=8$.

**49.** $y^2-2y+16x=-49$.　　**50.** $x^2-2x+8y=-17$.

**51.** $9x^2+16y^2+54x-64y=-1$.

**52.** $25x^2+9y^2-100x+54y=44$.

**53.** $x^2+y^2-2x-2y=0$.

**54.** $x^2+y^2+4x+2y=1$.

在习题55～58中给出圆锥曲线的极坐标方程，画出它们的草图. 给出顶点的极坐标，对于椭圆也给出中心的极坐标.

**55.** $r=\dfrac{2}{1+\cos\theta}$.　　**56.** $r=\dfrac{8}{2+\cos\theta}$.

**57.** $r=\dfrac{6}{1-2\cos\theta}$.　　**58.** $r=\dfrac{12}{3+\sin\theta}$.

习题59～62给出一个焦点在极坐标平面的原点的圆锥曲线的离心率，以及对于那个焦点的准线. 求每条圆锥曲线的极方程.

**59.** $e=2$，$r\cos\theta=2$.　　**60.** $e=1$，$r\cos\theta=-4$.

**61.** $e=1/2$，$r\sin\theta=2$.　　**62.** $e=1/3$，$r\sin\theta=-6$.

习题63～66给出$xy$平面内质点运动的参数方程和参数区间. 通过求质点运动的笛卡儿方程确定质点的路径. 画出笛卡儿方程的图形，并且指出质点运动的方向和质点经过的部分.

**63.** $x=(1/2)\tan t$，$y=(1/2)\sec t$；$-\pi/2<t<\pi/2$.

**64.** $x=-2\cos t$，$y=2\sin t$；$0\leqslant t\leqslant\pi$.

**65.** $x=-\cos t$，$y=\cos^2 t$；$0\leqslant t\leqslant\pi$.

**66.** $x=4\cos t$，$y=9\sin t$；$0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

**67.** 求绕(**a**)$x$轴和(**b**)绕$y$轴旋转由椭圆$9x^2+4y^2=36$包围的区域所产生的旋转体体积.

**68.** 绕$x$轴旋转第一象限内以$x$轴和直线$x=4$以及双曲线$9x^2-4y^2=36$为界的“三角形”区域产生旋转体，求旋转体的体积.

**69.** 证明：方程$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$把极方程

$$r=\frac{k}{1+e\cos\theta}$$

变换成笛卡儿方程

$$(1-e^2)x^2+y^2+2kex-k^2=0$$

**70.** **阿基米德螺线**　形式为$r=a\theta$的方程的图形称为*阿基米德螺线*，其中$a$是非零常数. 关于这样一种螺线的相继两圈之间的宽度有什么特点？

## 第9章补充和提高习题

**1.** 求焦点在(4,0)和准线为$x=3$的抛物线的方程. 画出抛物线及其顶点、焦点和准线的图形.

**2.** 求抛物线

$$x^2-6x-12y+9=0$$

的顶点、焦点和准线.

**3.** 如果从点$P(x,y)$到抛物线$x^2=4y$顶点的距离是从$P$到焦点的距离的两倍，求由点$P$描绘的曲线方程. 识别这条曲线.

**4.** 长度为$a+b$的线段从$x$轴延伸到$y$轴. 线段上的点$P$离一端$a$单位而离另一端$b$单位. 证明：当线段两端沿两条坐标轴滑动时$P$描绘一个椭圆.

**5.** 离心率为0.5的椭圆的顶点位于点(0, ±2). 椭圆的焦点在什么位置？

**6.** 离心率为2/3的椭圆的一条准线是直线$x=2$，对应的焦点是(4,0). 求椭圆的方程.

**7.** 双曲线的一个焦点位于点(0, −7)，对应的准线是直线$y=-1$. 如果双曲线的离心率是(**a**)2和(**b**)5，求双曲线的方程.

**8.** 求焦点是(0, −2)和(0,2)并且经过点(12,7)的双曲线的方程.

**9.** 证明：直线

$$b^2xx_1+a^2yy_1-a^2b^2=0$$

是对椭圆$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$上的点$(x_1,y_1)$的切线.

**10.** 证明：直线

$$b^2xx_1-a^2yy_1-a^2b^2=0$$

是对双曲线$b^2x^2-a^2y^2-a^2b^2=0$上的点$(x_1,y_1)$的切线.

在习题11～16中，$xy$平面内什么点满足方程或者不等式？画出每题的图形.

**11.** $(x^2-y^2-1)(x^2+y^2-25)(x^2+4y^2-4)=0$.

**12.** $(x+y)(x^2+y^2-1)=0$.

**13.** $(x^2/9)+(y^2/16)\leqslant 1$.

**14.** $(x^2/9)-(y^2/16)\leqslant 1$.

**15.** $(9x^2+4y^2-36)(4x^2+9y^2-16)\leqslant 0$.

**16.** $(9x^2+4y^2-36)(4x^2+9y^2-16)>0$.

**17.** (**a**)求曲线

$$x=e^{2t}\cos t,\quad y=e^{2t}\sin t,\quad -\infty<t<\infty$$

在极坐标中的方程.

(**b**)求这条曲线从$t=0$到$t=2\pi$的长度.

**18.** 求极坐标平面内曲线$r=2\sin^3(\theta/3)$，$0\leqslant\theta\leqslant 3\pi$的长度.

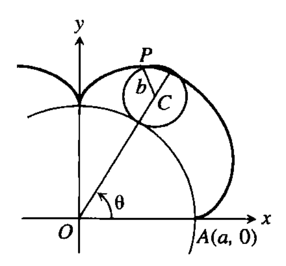
习题19～22给出一个焦点在极坐标平面原点的圆锥曲线的离心率，以及和那个焦点对应的准线. 求每条圆锥曲线的极方程.

**19.** $e=2$，$r\cos\theta=2$.　　**20.** $e=1$，$r\cos\theta=-4$.

**21.** $e=1/2$，$r\sin\theta=2$.　　**22.** $e=1/3$，$r\sin\theta=-6$.

**23.** **外摆线**　如附图所示，当一个圆沿另一个固定圆的圆周外部滚动时，滚动圆圆周上任意一点$P$描绘一条*外摆线*. 令固定圆的中心在原点和

半径为 $a$. 令滚动圆的半径为 $b$，并且描绘点 $P$ 的初始位置在 $A(a,0)$. 求外摆线的参数方程，利用从正 $x$ 轴到通过圆心的直线的角 $\theta$ 为参数.




**24.** 求由 $x$ 轴和摆线拱形

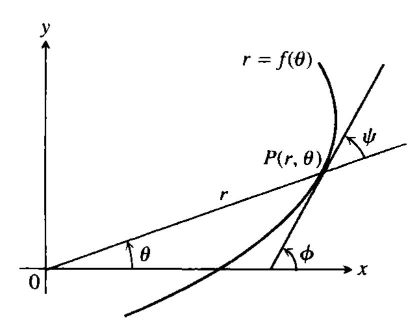
$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

包围的区域的形心.

**极坐标曲线的径向量同切线之间的夹角**　在笛卡儿坐标中，当需要讨论曲线在一点的方向时，我们利用从正 $x$ 轴依反时针方向到切线度量的角 $\phi$. 在极坐标中，计算从径向量到切线的角 $\psi$ 更为方便(参见附图). 这样，可以由关系式

$$\phi = \theta + \psi \tag{1}$$

计算角 $\phi$，式(1)是对附图中的三角形应用外角定理得到的.




假定用 $r=f(\theta)$ 的形式给出曲线的方程，其中 $f(\theta)$ 是 $\theta$ 的可微函数. 于是

$$x = r\cos\theta \quad 和 \quad y = r\sin\theta \tag{2}$$

是 $\theta$ 的可微函数，具有导数

$$\frac{dx}{d\theta} = -r\sin\theta + \cos\theta\frac{dr}{d\theta}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = r\cos\theta + \sin\theta\frac{dr}{d\theta} \tag{3}$$

由式(1)，$\psi = \phi - \theta$，所以

$$\tan\psi = \tan(\phi - \theta) = \frac{\tan\phi - \tan\theta}{1 + \tan\phi\tan\theta}$$

而且

$$\tan\phi = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$$

因为 $\tan\phi$ 是曲线在 $P$ 的斜率. 此外，

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

因此

$$\tan\psi = \frac{\dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta} - \dfrac{y}{x}}{1 + \dfrac{y}{x}\dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta}} = \frac{x\dfrac{dy}{d\theta} - y\dfrac{dx}{d\theta}}{x\dfrac{dx}{d\theta} + y\dfrac{dy}{d\theta}} \tag{4}$$

由式(2)和式(3)求出式(4)中最后表达式的分子是

$$x\frac{dy}{d\theta} - y\frac{dx}{d\theta} = r^2$$

同样，分母是

$$x\frac{dx}{d\theta} + y\frac{dy}{d\theta} = r\frac{dr}{d\theta}$$

把它们带入式(4)，得到

$$\tan\psi = \frac{r}{dr/d\theta} \tag{5}$$

这是习题 25 ~ 30 中用于求 $\psi$ 作为 $\theta$ 的函数的方程.

**25.** 参考一个图形，证明两条曲线在一个交点的切线之间的夹角 $\beta$ 可以从公式

$$\tan\beta = \frac{\tan\psi_2 - \tan\psi_1}{1 + \tan\psi_2\tan\psi_1} \tag{6}$$

求出. 两条曲线在什么条件下将以直角相交?

**26.** 对于曲线 $r = \sin^4(\theta/4)$ 求 $\tan\psi$ 的值.

**27.** 求曲线 $r = 2a\sin 3\theta$ 在 $\theta = \pi/6$ 时的径向量同其切线之间的角 $\psi$.

**T28.** (a) 画出双曲螺线 $r\theta = 1$ 的图形. 当螺线绕原点盘旋时 $\psi$ 显现出什么变化?

(b) 通过分析证实你在(a)中的发现.

**29.** 圆 $r = \sqrt{3}\cos\theta$ 和 $r = \sin\theta$ 在点 $(\sqrt{3}/2, \pi/3)$ 相交. 证明它们在那里的切线正交.

**30.** 求心脏线 $r = a(1 - \cos\theta)$ 同射线 $\theta = \pi/2$ 相交处的角 $\psi$.

# 第10章　向量与空间几何学

**概述**　为了在客观世界的许多现实环境和高等数学中应用微积分，需要一种对三维空间的数学描述. 我们在这一章引入三维坐标系与向量. 以我们已经了解的 $xy$ 平面内的坐标为基础，通过增加度量 $xy$ 平面上下的距离的第三个坐标轴，建立空间中的坐标. 向量被用于研究空间解析几何学，它们给出描述空间中的直线、平面、曲线和曲面的简单方法. 我们利用这些几何概念在本书后面几章研究空间中的运动和多元函数的微积分，以及它们在自然科学、工程技术、经济学和高等数学中的许多重要应用.

## 10.1　三维坐标系

### 10.1.1　空间中的笛卡儿坐标系

为了对空间中的一点定位，我们利用三条相互垂直的坐标轴，其布局如图 10.1 所示. 图中显示的坐标轴构成*右手坐标架*. 当握住右手使四个手指从正 $x$ 轴转向正 $y$ 轴时，拇指指向正 $z$ 轴. 所以，如果从正 $z$ 轴方向俯视 $xy$ 平面，平面内的正角是依反时针方向从正 $x$ 轴绕正 $z$ 轴旋转度量的. （在*左手坐标架*中，$z$ 轴指向图 10.1 中的下方，$xy$ 平面中的角当从正 $x$ 轴依顺时针方向度量时为正. 右手坐标架同左手坐标架是不等价的. ）

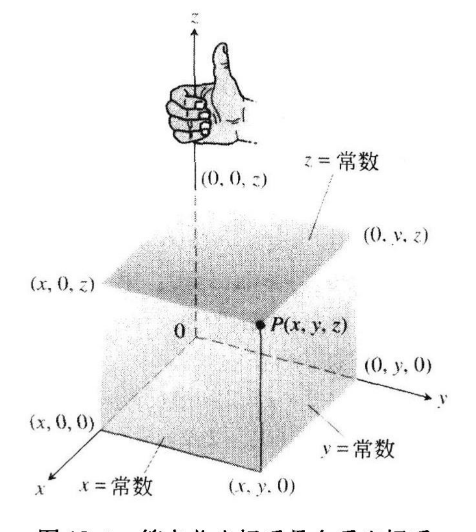



图 10.1　笛卡儿坐标系是右手坐标系

空间中一点 $P$ 的笛卡儿坐标 $(x,y,z)$ 是通过 $P$ 和坐标轴垂直的平面同坐标轴的交点的值. 空间的笛卡儿坐标也称为**直角坐标**，因为定义坐标的坐标轴呈直角相交. $x$ 轴上的点的 $y$ 坐标和 $z$ 坐标为零. 就是说，它们具有 $(x,0,0)$ 形式的坐标. 同样，$y$ 轴上的点具有 $(0,y,0)$ 形式的坐标，$z$ 轴上的点具有 $(0,0,z)$ 形式的坐标.

由坐标轴决定的平面是 ***xy* 平面**（标准方程为 $z=0$）、***yz* 平面**（标准方程为 $x=0$）和 ***xz* 平面**（标准方程为 $y=0$）. 这三个平面在**原点** $(0,0,0)$ 相交（见图 10.2）. 原点也简单地用 0 标识，或者有时用字母 $O$ 标识.

三个**坐标平面** $x=0$，$y=0$ 和 $z=0$ 把空间分成称为**卦限**的 8 个区域. 点坐标全部为正的卦限区域称为**第一卦限**；对于其他 7 个卦限的编号没有约定.

在同 $x$ 轴垂直的平面内，所有点具有相同的 $x$ 坐标，这个数是平面同 $x$ 轴相交处的 $x$ 坐标值，而 $y$ 坐标和 $z$ 坐标可以取任何数. 同样，在同 $y$ 轴垂直的平面内的点具有共同的 $y$ 坐标，在同 $z$ 轴垂直的平面内的点具有共同的 $z$ 坐标. 为了写出这些平面的方程，我们指定它们的共同坐标值. 平面 $x=2$ 是在 $x=2$ 垂直于 $x$ 轴的平面. 平面 $y=3$ 是在 $y=3$ 垂直于 $y$ 轴的平面. 平面 $z=5$ 是在 $z=5$ 垂直于 $z$ 轴的平面. 图 10.3 显示平面 $x=2$，$y=3$ 和 $z=5$ 以及它们的交点 $(2,3,5)$.

在图 10.3 中平面 $x=2$ 和 $y=3$ 的交线是一条平行于 $z$ 轴的直线. 这条直线由一对方程 $x=2$，$y=3$ 描述. 一点 $(x,y,z)$ 位于这条直线上，当且仅当 $x=2$ 和 $y=3$. 同样，平面 $y=3$ 和 $z=5$ 的交线由一对方程 $y=3$，$z=5$ 描述. 这条直线平行于 $x$ 轴延伸. 平面 $x=2$ 和 $y=5$ 的交线平行于 $y$ 轴，由一对方程 $x=2$，$z=5$ 描述.

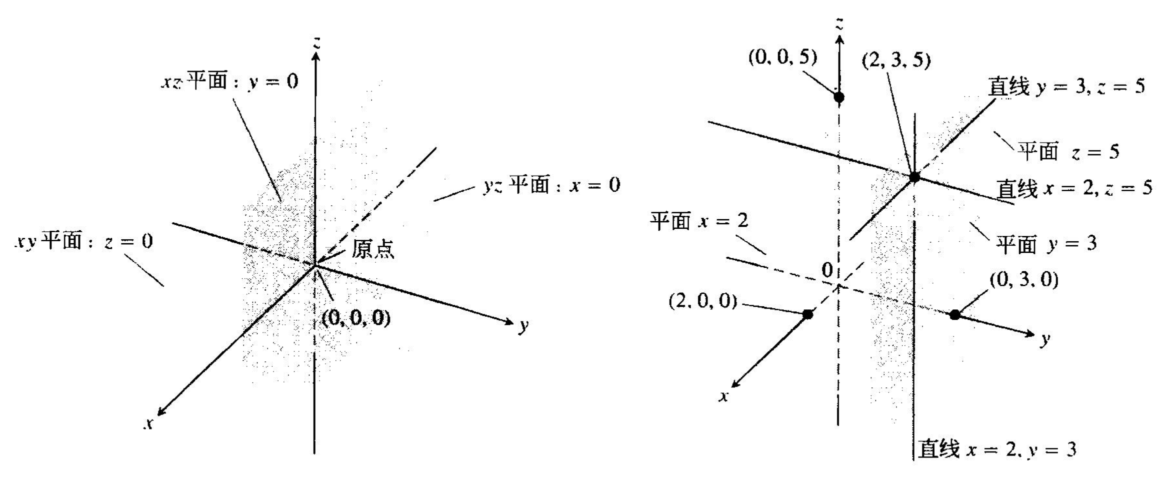



图 10.2　平面 $x=0$，$y=0$ 和 $z=0$ 把空间分成 8 个封限

图 10.3　平面 $x=2$，$y=3$ 和 $z=5$ 决定通过点(2，3，5)的三条直线

在下面的例子中，指出坐标方程或者不等式同它们在空间中定义的点集之间的对应关系.

**例 1**　对下列方程和不等式作出几何解释：

(**a**)$z \geqslant 0$：由 $xy$ 平面内以及 $xy$ 平面上方的点组成的半空间.

(**b**)$x = -3$：在 $x = -3$ 垂直于 $x$ 轴的平面. 这个平面平行于 $yz$ 平面，并且位于它后面 3 个单位的地方.

(**c**)$z=0$，$x \leqslant 0$，$y \geqslant 0$：$xy$ 平面的第二象限.

(**d**)$x \geqslant 0$，$y \geqslant 0$，$z \geqslant 0$：第一卦限.

(**e**)$-1 \leqslant y \leqslant 1$：平面 $y=-1$ 和 $y=1$ 之间的空间层(包括两个平面在内).

(**f**)$y=-2$，$z=2$：平面 $y=-2$ 和 $z=2$ 的交线. 或者说，通过点$(0,-2,2)$同 $x$ 轴平行的直线. ■

**例 2**　什么点 $P(x,y,z)$满足下面的方程？

$$x^2+y^2=4,\quad z=3$$

**解**　满足方程的点位于水平面 $z=3$ 上，并且构成这个平面内的圆 $x^2+y^2=4$. 这个点集称为"平面 $z=3$ 内的圆 $x^2+y^2=4$"，或者更简单地称为"圆 $x^2+y^2=4$，$z=3$"(见图 10.4). ■

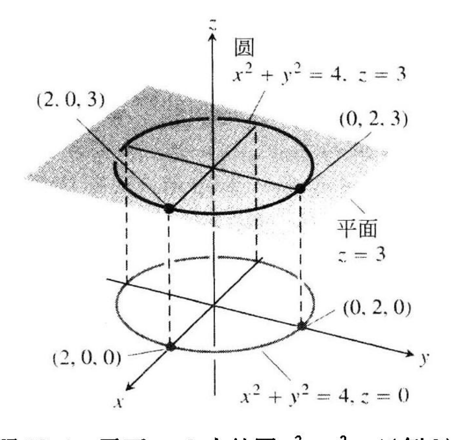



图 10.4　平面 $z=3$ 内的圆 $x^2+y^2=4$(例 2)

## 10.1.2　空间中的距离和球面

把 $xy$ 平面内两点之间的距离公式扩展到空间中的点.

> **$P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 之间的距离公式**
>
> $$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

**证明**　我们构造一个长方形盒子，盒面平行于坐标平面，点 $P_1$ 和 $P_2$ 在盒子的对顶角(见图 10.5). 如果 $A(x_2,y_1,z_1)$和 $B(x_2,y_2,z_1)$是图中指出的盒子的顶点，那么三条盒边 $P_1A$，$AB$ 和 $BP_2$ 的长度为

$$|P_1A|=|x_2-x_1|,\quad |AB|=|y_2-y_1|,\quad |BP_2|=|z_2-z_1|$$

因为三角形 $P_1BP_2$ 和 $P_1AB$ 都是直角三角形，两次应用勾股定理给出

$$|P_1P_2|^2=|P_1B|^2+|BP_2|^2,\quad |P_1B|^2=|P_1A|^2+|AB|^2$$

(见图 10.5). 所以

$$\begin{aligned}|P_1P_2|^2&=|P_1B|^2+|BP_2|^2\\&=|P_1A|^2+|AB|^2+|BP_2|^2\quad(\text{代入 }|P_1B|^2=|P_1A|^2+|AB|^2)\\&=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2+|z_2-z_1|^2\\&=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2\end{aligned}$$

因此

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

■

**例 3** $P_1(2,1,5)$ 和 $P_2(-2,3,0)$ 之间的距离为

$$\begin{aligned}|P_1P_2|&=\sqrt{(-2-2)^2+(3-1)^2+(0-5)^2}\\&=\sqrt{16+4+25}\\&=\sqrt{45}\approx 6.708\end{aligned}$$

■

利用距离公式可以写出空间中球面(见图 10.6)的方程. 对于中心在点 $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 半径为 $a$ 的球面，点 $P(x,y,z)$ 恰好当 $|P_0P|=a$ 或者

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2$$

时落在球面上.

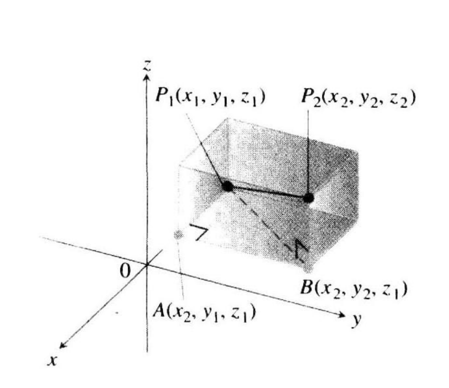



图 10.5 对于直角三角形 $P_1AB$ 和 $P_1BP_2$ 应用勾股定理求 $P_1$ 和 $P_2$ 之间的距离

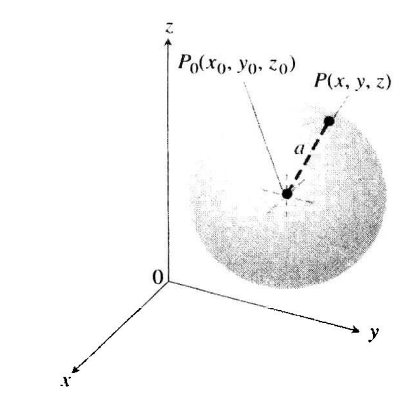



图 10.6 中心在点 $(x_0,y_0,z_0)$ 半径为 $a$ 的球面

**中心在点 $(x_0,y_0,z_0)$ 半径为 $a$ 的球面的标准方程**

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2$$

**例 4** 求球面 $x^2+y^2+z^2+3x-4z+1=0$ 的中心和半径.

**解** 我们用求圆心和半径的方法求球面的中心和半径：在需要时对球面方程中的 $x$, $y$, $z$ 项

配方，并且把每个二次式写成线性表达式的平方. 然后从标准型方程确定中心坐标和半径. 对于本例的球面有

$$x^2+y^2+z^2+3x-4z+1=0$$
$$(x^2+3x)+y^2+(z^2-4z)=-1$$
$$\left(x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)+y^2+\left(z^2-4z+\left(\frac{-4}{2}\right)^2\right)=-1+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{-4}{2}\right)^2$$
$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2+(z-2)^2=-1+\frac{9}{4}+4=\frac{21}{4}$$

从上面的标准型方程看出，$x_0=-3/2$，$y_0=0$，$z_0=2$ 和 $a=\sqrt{21}/2$. 球面中心在$(-3/2,0,2)$，半径为 $\sqrt{21}/2$. ■

**例 5** 下面是对几个关系式的几何解释.

**(a)** $x^2+y^2+z^2<4$：球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的内部区域.

**(b)** $x^2+y^2+z^2\leqslant4$：以球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 为界的球体，或者说球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 及其内部区域.

**(c)** $x^2+y^2+z^2>4$：球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的外部区域.

**(d)** $x^2+y^2+z^2=4$，$z\leqslant0$：由 $xy$ 平面(平面 $z=0$)从球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 切出的下半球面. ■

正如极坐标给出在 $xy$ 平面内定位点的另外一种方法(9.1 节)，在三维空间存在不同于笛卡儿坐标系的其他坐标系. 在 13.7 节我们考察两种这样的坐标系.

## 习题 10.1

在习题 1 ~ 12 中，对空间中的点集给出几何描述，它们的坐标满足给定的一对方程.

**1.** $x=2$，$y=3$.
**2.** $x=-1$，$z=0$.
**3.** $y=0$，$z=0$.
**4.** $x=1$，$y=0$.
**5.** $x^2+y^2=4$，$z=0$.
**6.** $x^2+y^2=4$，$z=-2$.
**7.** $x^2+z^2=4$，$y=0$.
**8.** $y^2+z^2=1$，$x=0$.
**9.** $x^2+y^2+z^2=1$，$x=0$.
**10.** $x^2+y^2+z^2=25$，$y=-4$.
**11.** $x^2+y^2+(z+3)^2=25$，$z=0$.
**12.** $x^2+(y-1)^2+z^2=4$，$y=0$.

在习题 13 ~ 18 中，描述空间中的点集，它们的坐标满足给定的不等式或者方程和不等式的组合.

**13.** **(a)** $x\geqslant0$，$y\geqslant0$，$z=0$.
**(b)** $x\geqslant0$，$y\leqslant0$，$z=0$.

**14.** **(a)** $0\leqslant x\leqslant1$.
**(b)** $0\leqslant x\leqslant1$，$0\leqslant y\leqslant1$.
**(c)** $0\leqslant x\leqslant1$，$0\leqslant y\leqslant1$，$0\leqslant z\leqslant1$.

**15.** **(a)** $x^2+y^2+z^2\leqslant1$.
**(b)** $x^2+y^2+z^2>1$.

**16.** **(a)** $x^2+y^2\leqslant1$，$z=0$.
**(b)** $x^2+y^2\leqslant1$，$z=3$.
**(c)** $x^2+y^2\leqslant1$，不限制 $z$.

**17.** **(a)** $x^2+y^2+z^2=1$，$z\geqslant0$.
**(b)** $x^2+y^2+z^2\leqslant1$，$z\geqslant0$.

**18.** **(a)** $x=y$，$z=0$.
**(b)** $x=y$，不限制 $z$.

在习题 19 ~ 28 中，用单个方程或者一对方程描述给出的点集.

**19.** 在给定点垂直于坐标轴的平面：
**(a)** 点$(3,0,0)$，$x$ 轴；
**(b)** 点$(0,-1,0)$，$y$ 轴；
**(c)** 点$(0,0,-2)$，$z$ 轴.

**20.** 经过点$(3,-1,2)$垂直于坐标轴的平面：
**(a)** $x$ 轴；
**(b)** $y$ 轴；
**(c)** $z$ 轴.

**21.** 经过点$(3,-1,1)$平行于坐标平面的平面：
**(a)** $xy$ 平面；
**(b)** $yz$ 平面；
**(c)** $xz$ 平面.

**22.** 位于坐标平面内圆心在点$(0,0,0)$半径为 2 的圆：
**(a)** $xy$ 平面；
**(b)** $yz$ 平面；
**(c)** $xz$ 平面.

**23.** 位于给定平面内圆心在点$(0,2,0)$半径为 2 的圆：
**(a)** $xy$ 平面；
**(b)** $yz$ 平面；

(c)平面 $y=2$.

24. 位于同坐标平面平行的平面内，圆心在点 $(-3,4,1)$ 半径为 1 的圆：
(a) $xy$ 平面；
(b) $yz$ 平面；
(c) $xz$ 平面.

25. 经过点 $(1,3,-1)$ 平行于给定坐标轴的直线：
(a) $x$ 轴；
(b) $y$ 轴；
(c) $z$ 轴.

26. 空间中同原点和点 $(0,2,0)$ 等距的点集.

27. 经过点 $(1,1,3)$ 垂直于 $z$ 轴的平面同中心在原点半径为 5 的球面相交的圆.

28. 空间中的点集，其中的点距离点 $(0,0,1)$ 2 个单位，同时距离点 $(0,0,-1)$ 2 个单位.

在习题 29 ~ 34 中，写出描述点集的不等式.

29. 以平面 $z=0$ 和 $z=1$ 为界(包含这两个平面)的空间层.

30. 第一卦限内以坐标平面以及平面 $x=2$，$y=2$ 和 $z=2$ 为界的立方体.

31. $xy$ 平面上和 $xy$ 平面下方的点构成的半空间.

32. 中心在原点半径为 1 的球面的上半球面.

33. 中心在点 $(1,1,1)$ 半径为 1 的球面的下列空间区域：(a)内部区域，(b)外部区域.

34. 以中心在原点半径为 1 及半径为 2 的球面为界的闭区域.（闭区域是指包含两个球面在内. 如果要把球面排除在外，就说以球面为界的开区域. 这一点同用闭区间和开区间描述区间的方法相似：闭区间是指包含端点在内，开区间是指排除端点. 同样，闭集合包含边界，开集合把边界排除在外.）

在习题 35 ~ 40 中，求点 $P_1$ 和 $P_2$ 之间的距离.

35. $P_1(1,1,1)$，$P_2(3,3,0)$.

36. $P_1(-1,1,5)$，$P_2(2,5,0)$.

37. $P_1(1,4,5)$，$P_2(4,-2,7)$.

38. $P_1(3,4,5)$，$P_2(2,3,4)$.

39. $P_1(0,0,0)$，$P_2(2,-2,-2)$.

40. $P_1(5,3,-2)$，$P_2(0,0,0)$.

在习题 41 ~ 44 中，求球面的中心和半径.

41. $(x+2)^2+y^2+(z-2)^2=8$.

42. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{21}{4}$.

43. $(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2+(z+\sqrt{2})^2=2$.

44. $x^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2+\left(z-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{29}{9}$.

在习题 45 ~ 48 中，求给出中心和半径的球面方程.

45. 中心 $(1,2,3)$；半径 $\sqrt{14}$.

46. 中心 $(0,-1,5)$；半径 2.

47. 中心 $(-2,0,0)$；半径 $\sqrt{3}$.

48. 中心 $(0,-7,0)$；半径 7.

在习题 49 ~ 52 中，求球面的中心和半径.

49. $x^2+y^2+z^2+4x-4z=0$.

50. $x^2+y^2+z^2-6y+8z=0$.

51. $2x^2+2y^2+2z^2+x+y+z=9$.

52. $3x^2+3y^2+3z^2+2y-2z=9$.

53. 求从点 $P(x,y,z)$ 到下列坐标轴的距离公式：
(a) $x$ 轴；　(b) $y$ 轴；　(c) $z$ 轴.

54. 求从点 $P(x,y,z)$ 到下列坐标平面的距离公式：
(a) $xy$ 平面；　(b) $yz$ 平面；　(c) $xz$ 平面.

55. 求以点 $A(-1,2,1)$，$B(1,-1,3)$ 和 $C(3,4,5)$ 为顶点的三角形的周长.

56. 证明点 $P(3,1,2)$ 同点 $A(2,-1,3)$ 和 $B(4,3,1)$ 等距.

## 10.2 向量

我们要度量的某些对象仅由它们的大小决定. 例如，为了记录质量、长度或者时间，只需记下数字和指出相应的度量单位. 而描述力、位移或者速度这样一些量时，则需要更多的信息. 在描述力时，需要记录力的作用方向以及它的大小. 为了描述物体的位移，必须指出它的移动方向以及移动的距离. 为了描述物体的速度，必须知道物体运动的朝向以及行进的快慢. 在这一节我们说明如何表示平面内或者空间中同时具有大小和方向的对象.

### 10.2.1 分量形式

像力、位移或者速度这样一些量称为向量，并且用**有向线段**表示(见图 10.7). 有向线段的箭头指向作用方向，它的长度给出在适当单位选择下作用的大小. 例如，力向量指出力的作用方向，它的长度是力强度的度量；速度向量指出物体运动的方向，它的长度是运动物体的速率. 图 10.8 显示质点沿平面或空间路径运动时在特定位置的速度向量 $\mathbf{v}$.（向量的这种应用在第 11 章讨论.）

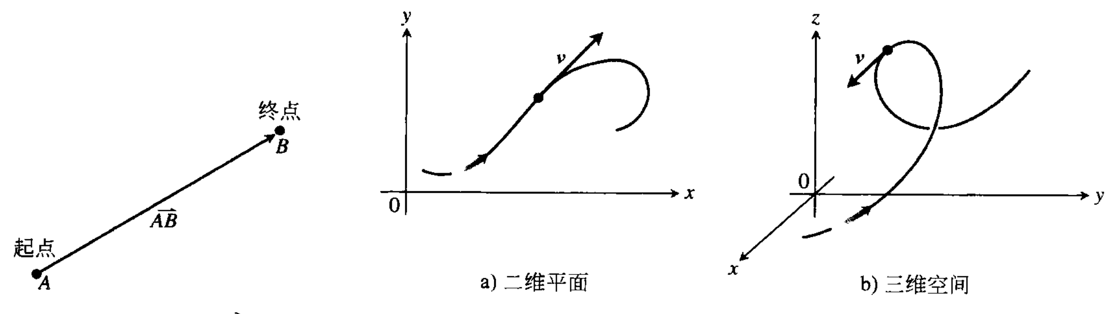



图 10.7 有向线段$\overrightarrow{AB}$

图 10.8 运动质点沿 a) 平面路径和 b) 空间路径的速度向量，路径上的箭头指示质点的运动方向

> **定义** 一个**向量**是一条有向线段. 有向线段$\overrightarrow{AB}$以 $A$ 为**起点**，以 $B$ 为**终点**，它的长度用 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示. 如果两个向量有相同的长度和方向，它们是**相等的**向量.

当画向量时，如果是具有相同长度的平行向量，并且指向同一方向，我们把所用的箭头理解为代表同一向量(见图 10.9)，而不管它们的起点在哪里.

在教科书中，通常用小写粗斜体字母表示向量，例如 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$. 有时我们用大写粗斜体字母表示力向量，如 $\boldsymbol{F}$. 在手写形式中，习惯上在字母上面画上小箭头，例如$\vec{u}$，$\vec{v}$，$\vec{w}$和 $\vec{F}$.

我们需要一种表示向量的代数方法，以便能够更精确地描述向量的方向. 令 $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{PQ}$. 存在一条等于$\overrightarrow{PQ}$的有向线段，它的起点在原点(见图 10.10). 它是 $\boldsymbol{v}$ 在**标准位置**的代表，在正常情况下是我们用来代表 $\boldsymbol{v}$ 的向量. 当 $\boldsymbol{v}$ 处在标准位置时，可以通过写出终点$(v_1,v_2,v_3)$的坐标来指定 $\boldsymbol{v}$. 如果 $\boldsymbol{v}$ 是平面内的向量. 它的终点$(v_1,v_2)$有两个坐标.

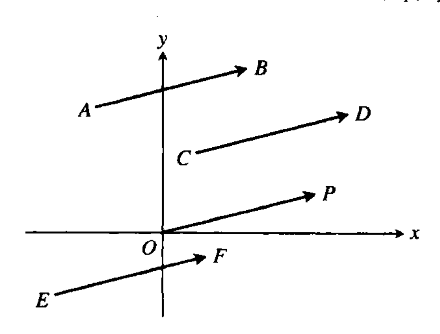



图 10.9 图中显示的平面内的 4 个箭头(有向线段)具有相同的长度和方向. 因此，它们代表同一向量，我们写成$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{EF}$

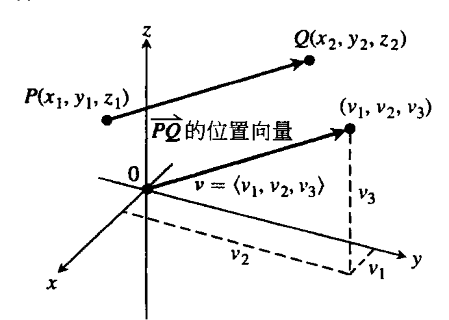



图 10.10 处在标准位置的向量$\overrightarrow{PQ}$以原点为起点，有向线段$\overrightarrow{PQ}$和 $\boldsymbol{v}$ 平行且有相同的长度

> **定义** 如果 $\boldsymbol{v}$ 是平面内的一个**二维**向量，同起点在原点和终点为$(v_1,v_2)$的向量相等，那么 $\boldsymbol{v}$ 的**分量形式**是
>
> $$\boldsymbol{v}=\langle v_1,v_2\rangle$$
>
> 如果 $\boldsymbol{v}$ 是一个**三维向量**，同起点在原点和终点为$(v_1,v_2,v_3)$的向量相等，那么 $\boldsymbol{v}$ 的**分量形式**是
>
> $$\boldsymbol{v}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$$

所以二维向量是实数的一个序偶 $\boldsymbol{v}=\langle v_1,v_2\rangle$，而三维向量是实数的有序三元组 $\boldsymbol{v}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$. 数 $v_1$，$v_2$ 和 $v_3$ 是 $\boldsymbol{v}$ 的**分量**.

如果 $\boldsymbol{v}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$ 是用有向线段 $\overrightarrow{PQ}$ 表示的，$\overrightarrow{PQ}$ 的起点是 $P(x_1, y_1, z_1)$，终点是 $Q(x_2,y_2,z_2)$，那么 $x_1+v_1=x_2, y_1+v_2=y_2$，$z_1+v_3=z_2$（见图 10.10）. 因此，$v_1=x_2-x_1$，$v_2=y_2-y_1$，$v_3=z_2-z_1$ 是 $\overrightarrow{PQ}$ 的分量.

总之，当给定点 $P(x_1,y_1,z_1)$ 和 $Q(x_2,y_2,z_2)$ 后，等于 $\overrightarrow{PQ}$ 的标准位置向量 $\boldsymbol{v}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$ 是

$$\boldsymbol{v}=\langle x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\rangle$$

如果 $\boldsymbol{v}$ 是平面内以 $P(x_1,y_1)$ 和 $Q(x_2,y_2)$ 为起点和终点的向量，那么 $\boldsymbol{v}=\langle x_2-x_1,\ y_2-y_1\rangle$. 平面向量没有第三分量. 我们将基于这种理解推导三维向量的代数运算，而当向量是二维（平面向量）时，只需略去第三维.

两个向量是相等的，当且仅当它们的标准位置向量是全等的. 这样，$\langle u_1,u_2,u_3\rangle$ 和 $\langle v_1,v_2,v_3\rangle$ 是相等的，当且仅当 $u_1=v_1$，$u_2=v_2$ 和 $u_3=v_3$.

向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的**大小**或者**长度**是它的任何等价的有向线段代表的长度. 特别是，如果 $\boldsymbol{v}=\langle x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\rangle$ 是 $\overrightarrow{PQ}$ 的标准位置向量，那么距离公式给出 $\boldsymbol{v}$ 的大小或者长度，用记号 $|\boldsymbol{v}|$ 或 $\|\boldsymbol{v}\|$ 表示.

> 向量 $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{PQ}$ 的**大小**或者**长度**是非负数
>
> $$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
>
> （参见图 10.10.）

长度为 0 的仅有向量是**零向量** $\mathbf{0}=\langle 0,0\rangle$ 或者 $\mathbf{0}=\langle 0,0,0\rangle$. 这也是仅有的无明确方向的向量.

**例 1** 向量 $\overrightarrow{PQ}$ 以 $P(-3,4,1)$ 为起点和 $Q(-5,2,2)$ 为终点. (**a**) 求向量的分量形式；(**b**) 求向量的长度.

**解**

(**a**) 代表 $\overrightarrow{PQ}$ 的标准位置向量 $\boldsymbol{v}$ 具有分量：

$$v_1=x_2-x_1=-5-(-3)=-2,\quad v_2=y_2-y_1=2-4=-2,\quad v_3=z_2-z_1=2-1=1$$

$\overrightarrow{PQ}$ 的分量形式为

$$\boldsymbol{v}=\langle -2,-2,1\rangle$$

(**b**) $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{PQ}$ 的长度或大小是

$$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(1)^2}=\sqrt{9}=3$$ ■

**例 2** 在光滑的水平地板上用同地板成 45° 角的 20 磅力 $\boldsymbol{F}$ 拖一辆小车（见图 10.11）. 使小车向前移动的有效力有多大？

**解** 有效力是 $\boldsymbol{F}=\langle a,b\rangle$ 的水平分量，由

$$a=|\boldsymbol{F}|\cos 45^\circ=20\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx 14.14\ \text{lb}$$

给出. 注意 $\boldsymbol{F}$ 是二维向量. ■

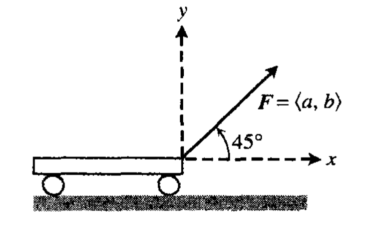



图 10.11 拖小车向前移动的力是由向量 $\boldsymbol{F}$ 表示的同地平面（正 $x$ 轴）成 45° 角和大小为 20（磅）的力

### 10.2.2 向量的代数运算

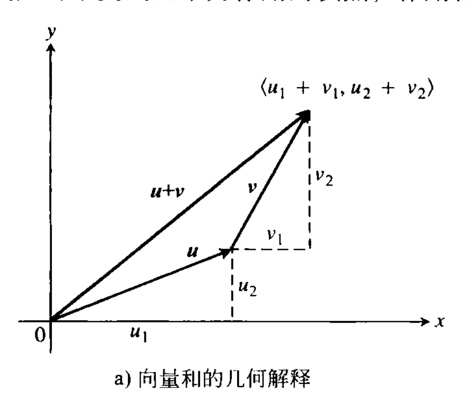
牵涉向量的主要运算是向量加法和标量乘法. 一个**标量**

就是一个实数，当我们打算把注意力转向数同向量的差别时这样称呼它. 标量可以取正负值或者为零，而且用于以乘法"标度"一个向量.

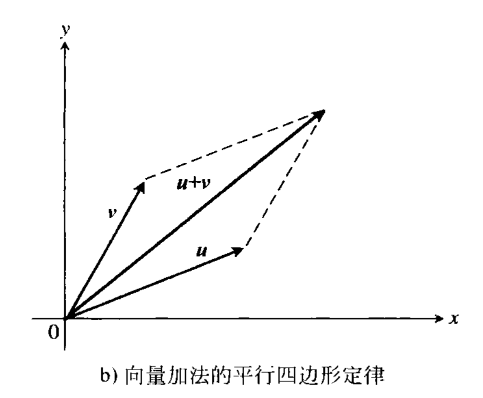
> **定义** 令 $\boldsymbol{u}=\langle u_1, u_2, u_3\rangle$ 和 $\boldsymbol{v}=\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ 是向量，$k$ 是标量.
>
> **加法:** $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\langle u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3\rangle$
>
> **标量乘法:** $k\boldsymbol{u}=\langle ku_1, ku_2, ku_3\rangle$

向量的加法是把向量的对应分量相加. 向量同标量的乘法是把标量乘向量的每个分量. 这两个定义适用于只有两个分量 $\langle u_1,u_2\rangle$ 和 $\langle v_1,v_2\rangle$ 的平面向量.

对于平面向量，向量加法的几何解释见图 10.12a，其中一个向量的起点是另外一个向量的终点. 另外一种解释显示在图 10.12b 中，称为向量加法的**平行四边形定律**，其中的和是平行四边形的对角线，称为**合成向量**. 在物理学中，力按向量相加，如同速度、加速度等的加法一样. 所以，例如对于受到两个力作用的质点，作用在质点上的力由两个力向量相加得到.



a) 向量和的几何解释



b) 向量加法的平行四边形定律

图 10.12 向量加法

图 10.13 显示标量 $k$ 和向量 $\boldsymbol{u}$ 的乘积 $k\boldsymbol{u}$ 的一种几何解释. 如果 $k>0$，那么 $k\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 具有相同方向；如果 $k<0$，$k\boldsymbol{u}$ 同 $\boldsymbol{u}$ 的方向相反. 比较 $\boldsymbol{u}$ 和 $k\boldsymbol{u}$ 的长度，看出

$$
\begin{aligned}
|k\boldsymbol{u}| &= \sqrt{(ku_1)^2+(ku_2)^2+(ku_3)^2} \\
&= \sqrt{k^2(u_1^2+u_2^2+u_3^2)} \\
&= \sqrt{k^2}\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2} = |k||\boldsymbol{u}|
\end{aligned}
$$

图 10.13 向量 $\boldsymbol{u}$ 的标量乘法

$k\boldsymbol{u}$ 的长度等于标量 $k$ 的绝对值乘 $\boldsymbol{u}$ 的长度. 向量 $(-1)\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{u}$ 具有同 $\boldsymbol{u}$ 一样的长度，但是指向相反的方向.

两个向量的**差** $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ 由

$$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{v})$$

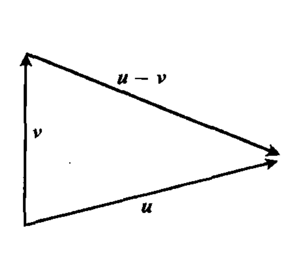
定义. 若 $\boldsymbol{u}=\langle u_1, u_2, u_3\rangle$，$\boldsymbol{v}=\langle v_1, v_2, v_3\rangle$，则

$$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=\langle u_1-v_1, u_2-v_2, u_3-v_3\rangle$$

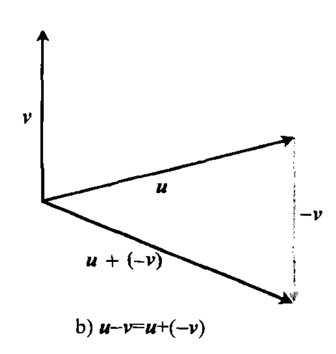
请注意，$(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$，所以向量 $(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})$ 加 $\boldsymbol{v}$ 得到 $\boldsymbol{u}$（见图 10.14a）. 图 10.14b 显示向量的差 $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ 为向量的和 $\boldsymbol{u}+(-v)$.

**例 3** 令 $\boldsymbol{u}=\langle -1,3,1\rangle$，$\boldsymbol{v}=\langle 4,7,0\rangle$. 求

(a) $2\boldsymbol{u}+3\boldsymbol{v}$; (b) $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$; (c) $\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\right|$.




a) 向量(u−v)加v给出u




b) u−v=u+(−v)

图 10.14　向量的差 $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$

**解**

(a) $2\boldsymbol{u}+3\boldsymbol{v}=2\langle -1,3,1\rangle+3\langle 4,7,0\rangle=\langle -2,6,2\rangle+\langle 12,21,0\rangle=\langle 10,27,2\rangle$;

(b) $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=\langle -1,3,1\rangle-\langle 4,7,0\rangle=\langle -1-4,3-7,1-0\rangle=\langle -5,-4,1\rangle$;

(c) $\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\right|=\left|\left\langle -\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{11}$. ■

向量运算具有许多普通的算术性质. 这些性质很容易利用向量加法和向量同标量的乘法定义证实.

**向量运算的性质**

令 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ 是向量, $a$ 和 $b$ 是标量.

| | | |
|---|---|---|
| (1) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$. | (2) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$. | (3) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{u}$. |
| (4) $\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=\boldsymbol{0}$. | (5) $0\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$. | (6) $1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$. |
| (7) $a(b\boldsymbol{u})=(ab)\boldsymbol{u}$. | (8) $a(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=a\boldsymbol{u}+a\boldsymbol{v}$. | (9) $(a+b)\boldsymbol{u}=a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{u}$. |

向量的一个重要应用出现在航行中.

**例 4**　一架喷气式客机向正东以 500 mph 的速度飞行, 在飞行途中遇到一股从机尾吹来的东北方向 60°的风, 风速为 70 mph. 飞机罗盘方位保持正东方向, 但是由于风力而获得新的地面速度和航向. 这个航速和航向是什么?

**解**　如果 $\boldsymbol{u}$ = 飞机本身单独飞行的速度, $\boldsymbol{v}$ = 尾风的速度, 那么 $|\boldsymbol{u}|=500$, $|\boldsymbol{v}|=70$(见图 10.15). 飞机对地面的速度由合成向量 $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ 的大小和方向给出. 如果用正 $x$ 轴表示东, 正 $y$ 轴表示北, 那么 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的分量形式为

$$\boldsymbol{u}=\langle 500,0\rangle \quad 和 \quad \boldsymbol{v}=\langle 70\cos 60°,70\sin 60°\rangle=\langle 35,35\sqrt{3}\rangle$$

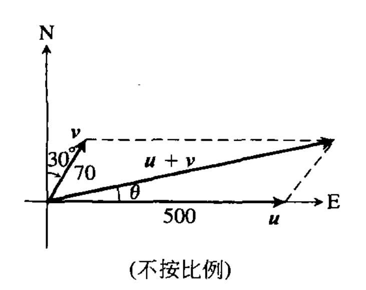
因此,

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\langle 535,35\sqrt{3}\rangle$$

$$|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|=\sqrt{535^2+(35\sqrt{3})^2}\approx 538.4$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{35\sqrt{3}}{535}\approx 6.5° \quad (图 10.15)$$

飞机新的地面速度约为 538.4 mph, 新的航向约为东北 6.5°. ■




(不按比例)

图 10.15　例 4 中表示飞机速度的向量 $\boldsymbol{u}$ 和尾风速度的向量 $\boldsymbol{v}$

### 10.2.3 单位向量

长度为 1 的向量称为一个**单位向量**. **标准单位向量**是

$$\boldsymbol{i}=\langle 1,0,0\rangle,\quad \boldsymbol{j}=\langle 0,1,0\rangle,\quad \boldsymbol{k}=\langle 0,0.1\rangle$$

任何向量 $\boldsymbol{v}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$ 可以表成为如下的标准单位向量的线性组合:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=\langle v_1,v_2,v_3\rangle=\langle v_1,0,0\rangle+\langle 0,v_2,0\rangle+\langle 0,0,v_3\rangle\\&=v_1\langle 1,0,0\rangle+v_2\langle 0,1,0\rangle+v_3\langle 0,0,1\rangle=v_1\boldsymbol{i}+v_2\boldsymbol{j}+v_3\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

我们把标量(或数) $v_1$ 称为向量 $\boldsymbol{v}$ 的 **$\boldsymbol{i}$ 分量**, $v_2$ 称为 **$\boldsymbol{j}$ 分量**, $v_3$ 称为 **$\boldsymbol{k}$ 分量**. 用分量形式, 从 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 到 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 的向量是

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$$

(见图 10.16).

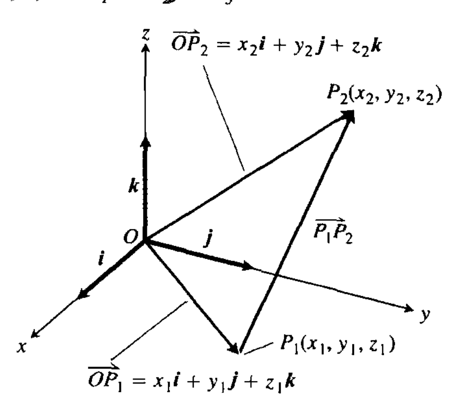



图 10.16 从 $P_1$ 到 $P_2$ 的向量是 $\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$

只要 $\boldsymbol{v}\neq 0$, 它的长度 $|\boldsymbol{v}|$ 就不为零, 并且

$$\left|\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\boldsymbol{v}\right|=\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}|\boldsymbol{v}|=1$$

就是说, $\boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|$ 是向量 $\boldsymbol{v}$ 的方向上的单位向量, 称为非零向量 $\boldsymbol{v}$ 的**方向**.

**例 5** 在从 $P_1(1,0,1)$ 到 $P_2(3,2,0)$ 的向量的方向求单位向量 $\boldsymbol{u}$.

**解** 用 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的长度除 $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(3-1)\boldsymbol{i}+(2-0)\boldsymbol{j}+(0-1)\boldsymbol{k}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$$

$$|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(2)^2+(2)^2+(-1)^2}=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3$$

$$\boldsymbol{u}=\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{|\overrightarrow{P_1P_2}|}=\frac{2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}}{3}=\frac{2}{3}\boldsymbol{i}+\frac{2}{3}\boldsymbol{j}-\frac{1}{3}\boldsymbol{k}$$

单位向量 $\boldsymbol{u}$ 是 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向. ■

**例 6** 如果 $\boldsymbol{v}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$ 是一个速度向量, 把 $\boldsymbol{v}$ 表示成它在运动方向的速度乘一个单位向量.

**解** 速度是向量 $\boldsymbol{v}$ 的大小(长度):

$$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{(3)^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=5$$

单位向量 $\boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的方向相同:

$$\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}=\frac{3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}}{5}=\frac{3}{5}\boldsymbol{i}-\frac{4}{5}\boldsymbol{j}$$

所以

$$\boldsymbol{v}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}=\underset{\text{长度(速度)}}{5}\underbrace{\left(\frac{3}{5}\boldsymbol{i}-\frac{4}{5}\boldsymbol{j}\right)}_{\text{运动的方向}}$$

■

人物传记

赫尔曼·格拉斯曼

(Hermann Grassmann, 1809—1877)

总之, 可以把任何非零向量 $\boldsymbol{v}$ 用它的长度和方向这两个重要特征表示成 $\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{v}|\dfrac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$.

> 若 $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$，则
>
> (1) $\dfrac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$是在 $\boldsymbol{v}$ 的方向的单位向量；
>
> (2) 等式 $\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{v}|\dfrac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$把 $\boldsymbol{v}$ 表示成它的长度和方向的乘积.

**例 7** 一个 6 牛顿力 $\boldsymbol{F}$ 作用在向量 $\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 的方向上. 把力 $\boldsymbol{F}$ 表示成它的大小同方向的乘积.

**解** 力向量 $\boldsymbol{F}$ 的大小为 6，方向为$\dfrac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$，所以

$$\boldsymbol{F}=6\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}=6\frac{2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=6\frac{2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}}{3}=6\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{i}+\frac{2}{3}\boldsymbol{j}-\frac{1}{3}\boldsymbol{k}\right)$$ ■

### 10.2.4 线段的中点

在几何学中，向量经常是很有用的. 例如，用平均方法求线段中点的坐标.

> 联结点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$的线段的**中点**是点
>
> $$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

为了明白原因，从图 10.17 看出

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}&=\overrightarrow{OP}_1+\frac{1}{2}(\overrightarrow{P_1P_2})\\&=\overrightarrow{OP}_1+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OP}_2-\overrightarrow{OP}_1)\\&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OP}_1+\overrightarrow{OP}_2)\\&=\frac{x_1+x_2}{2}\boldsymbol{i}+\frac{y_1+y_2}{2}\boldsymbol{j}+\frac{z_1+z_2}{2}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

图 10.17 线段 $P_1P_2$ 中点的坐标是 $P_1$ 和 $P_2$ 坐标的平均值

**例 8** 联结点 $P_1(3,-2,0)$和 $P_2(7,4,4)$的线段的中点是

$$\left(\frac{3+7}{2},\frac{-2+4}{2},\frac{0+4}{2}\right)=(5,1,2)$$ ■

### 习题 10.2

在习题 1 ~ 8 中，令 $\boldsymbol{u}=\langle 3,-2\rangle$，$\boldsymbol{v}=\langle -2,5\rangle$. 求(a)向量的分量形式，(b)向量的大小(长度).

**1.** $3\boldsymbol{u}$.
**2.** $-2\boldsymbol{v}$.
**3.** $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$.
**4.** $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$.
**5.** $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.
**6.** $-2\boldsymbol{u}+5\boldsymbol{v}$.
**7.** $\dfrac{3}{5}\boldsymbol{u}+\dfrac{4}{5}\boldsymbol{v}$.
**8.** $-\dfrac{5}{13}\boldsymbol{u}+\dfrac{12}{13}\boldsymbol{v}$.

在习题 9 ~ 16 中，求向量的分量形式.

**9.** 联结点 $P=(1,3)$和 $Q=(2,-1)$的向量$\overrightarrow{PQ}$.

**10.** 联结原点 $O$ 和线段 $RS$ 中点 $P$ 的向量$\overrightarrow{OP}$，其中 $R=(2,-1)$，$S=(-4,3)$.

**11.** 从点 $A=(2,3)$到原点的向量.

**12.** 向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CD}$的和，其中 $A=(1,-1)$，$B=(2,0)$，$C=(-1,3)$，$D=(-2,2)$.

**13.** 同正 $x$ 轴构成夹角 $\theta=-2\pi/3$ 的单位向量.

**14.** 同正 $x$ 轴构成夹角 $\theta=-3\pi/4$ 的单位向量.

**15.** 绕原点依反时针方向旋转向量$\langle 0, 1\rangle$ 120°得到的单位向量.

**16.** 绕原点依反时针方向旋转向量$\langle 1, 0\rangle$ 135°得到的单位向量.

在习题 17 ~ 22 中，把每个向量表示成 $\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{i}+v_2\boldsymbol{j}+v_3\boldsymbol{k}$ 的形式.

**17.** 联结点 $P_1(5,7,-1)$ 和 $P_2(2,9,-2)$ 的向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$.

**18.** 联结点 $P_1(1,2,0)$ 和 $P_2(-3,0,5)$ 的向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$.

**19.** 联结点 $A(-7,-8,1)$ 和 $B(-10,8,1)$ 的向量 $\overrightarrow{AB}$.

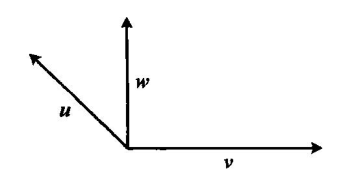
**20.** 联结点 $A(1,0,3)$ 和 $B(-1,4,5)$ 的向量 $\overrightarrow{AB}$.

**21.** 向量 $5\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$，其中 $\boldsymbol{u}=\langle 1,1,-1\rangle$，$\boldsymbol{v}=\langle 2,0,3\rangle$.

**22.** 向量 $-2\boldsymbol{u}+3\boldsymbol{v}$，其中 $\boldsymbol{u}=\langle -1,0,2\rangle$，$\boldsymbol{v}=\langle 1,1,1\rangle$.

在习题 23 和 24 中，当需要画出指示向量的草图时，复制首尾相连的向量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$.

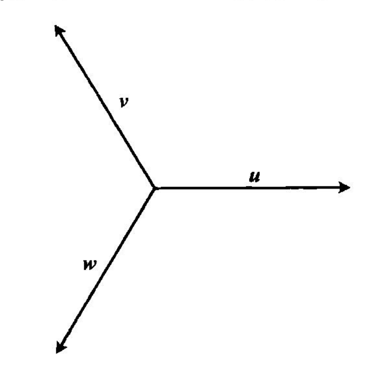
**23.**




(a) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$. (b) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$.

(c) $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$. (d) $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}$.

**24.**




(a) $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$. (b) $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$.

(c) $2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$. (d) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$.

在习题 25 ~ 30 中，把每个向量表示成它的长度和方向的乘积.

**25.** $2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$. **26.** $9\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$.

**27.** $5\boldsymbol{k}$. **28.** $\frac{3}{5}\boldsymbol{i}+\frac{4}{5}\boldsymbol{k}$.

**29.** $\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{j}-\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k}$. **30.** $\frac{\boldsymbol{i}}{\sqrt{3}}+\frac{\boldsymbol{j}}{\sqrt{3}}+\frac{\boldsymbol{k}}{\sqrt{3}}$.

**31.** 求下列给出长度和方向的向量，不书写算式：

(a) 长度 2，方向 $\boldsymbol{i}$；

(b) 长度 $\sqrt{3}$，方向 $-\boldsymbol{k}$；

(c) 长度 $\frac{1}{2}$，方向 $\frac{3}{5}\boldsymbol{j}+\frac{4}{5}\boldsymbol{k}$；

(d) 长度 7，方向 $\frac{6}{7}\boldsymbol{i}-\frac{2}{7}\boldsymbol{j}+\frac{3}{7}\boldsymbol{k}$.

**32.** 求下列给出长度和方向的向量，不书写算式：

(a) 长度 7，方向 $-\boldsymbol{j}$；

(b) 长度 $\sqrt{2}$，方向 $-\frac{3}{5}\boldsymbol{i}-\frac{4}{5}\boldsymbol{k}$；

(c) 长度 $\frac{13}{12}$，方向 $\frac{3}{13}\boldsymbol{i}-\frac{4}{13}\boldsymbol{j}-\frac{12}{13}\boldsymbol{k}$；

(d) 长度 $a>0$，方向 $\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}-\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k}$.

**33.** 求大小为 7 方向为 $\boldsymbol{v}=12\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{k}$ 的向量.

**34.** 求大小为 3 方向同 $\boldsymbol{v}=(1/2)\boldsymbol{i}-(1/2)\boldsymbol{j}-(1/2)\boldsymbol{k}$ 的方向相反的向量.

在习题 35 ~ 38 中，求 (a) 向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向，(b) 线段 $P_1P_2$ 的中点.

**35.** $P_1(-1,1,5)$，$P_2(2,5,0)$.

**36.** $P_1(1,4,5)$，$P_2(4,-2,7)$.

**37.** $P_1(3,4,5)$，$P_2(2,3,4)$.

**38.** $P_1(0,0,0)$，$P_2(2,-2,-2)$.

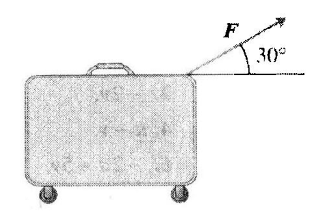
**39.** 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$B$ 是点 $(5,1,3)$，求点 $A$.

**40.** 设 $\overrightarrow{AB}=-7\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$，$A$ 是点 $(-2,-3,6)$，求点 $B$.

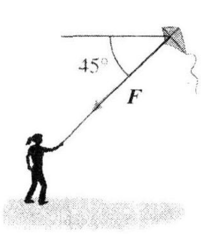
**41. 线性组合** 令 $\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$. 求满足 $\boldsymbol{u}=a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{w}$ 的标量 $a$ 和 $b$.

**42. 线性组合** 令 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$. 求 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2$，其中 $\boldsymbol{u}_1$ 平行于 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{u}_2$ 平行于 $\boldsymbol{w}$（参见习题 41）.

**43. 力向量** 如附图所示，用力 $\boldsymbol{F}$ 拖手提箱，力的大小 $|\boldsymbol{F}|=10$ 磅. 求 $\boldsymbol{F}$ 的 $\boldsymbol{i}$ 分量和 $\boldsymbol{j}$ 分量.




**44. 力向量** 如附图所示，风筝线以 12 磅拖力 $\boldsymbol{F}$ ($|\boldsymbol{F}|=12$) 拉住风筝，并且同水平方向成 45°角. 求 $\boldsymbol{F}$ 的水平分量和垂直分量.




**45. 速度** 一架飞机朝西北方向 25°以 800 km/h 的航速飞行. 求飞机速度的分量形式，假定正 $x$ 轴表示正东，正 $y$ 轴表示正北.

**46. 速度** 一架飞机朝东南方向 10°以 600 km/h 的航速飞行. 求飞机速度的分量形式，假定正 $x$ 轴表示正东，正 $y$ 轴表示正北.

**47. 位置** 一只鸟从它的巢朝东北方向 60°飞 5 km，停留一棵树上休息. 然后朝正东南方向飞 10 km，降落在一根电话线杆顶端，把 $xy$ 坐标系的原点设置在鸟巢处，$x$ 轴指向东，$y$ 轴指向北.

(a) 树位于什么点？ (b) 电话线杆在什么点？

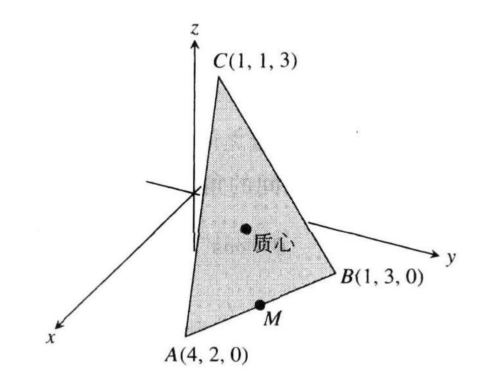
**48.** 点 $Q$ 把从点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 到 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 的线段分成长度比为 $p/q = r$ 的两段，利用相似三角形求点 $Q$ 的坐标.

**49. 三角形的中线** 假定 $A$，$B$，$C$ 是后面附图所示的常密度三角形薄板的角点.

(a) 求从 $C$ 到边 $AB$ 中点 $M$ 的向量；

(b) 求中线 $CM$ 上从 $C$ 到位于由 $C$ 至 $M$ 的三分之二点处的向量；

(c) 求 $\Delta ABC$ 三条中线交点的坐标. 按照 6.7 节习题 21，这个点是三角形薄板的质心.




**50.** 求从原点到三角形中线交点的向量，三角形的顶点为

$A(1, -1, 2)$， $B(2, 1, 3)$， $C(-1, 2, -1)$

**51.** 令 $ABCD$ 是空间中的一般四边形，不必在平面内. 证明联结 $ABCD$ 两个对边中点的两条线段互相等分.（提示：证明这两条线段有相同的中点.）

**52.** 从平面内正 $n$ 边形的中心引出到各个顶点的向量. 证明这些向量的和为零.（提示：如果绕中心旋转多边形，向量和会出现什么结果?）

**53.** 假定 $A$，$B$，$C$ 是三角形的顶点，$a$，$b$，$c$ 分别是相对边的中点. 证明 $\overrightarrow{Aa} + \overrightarrow{Bb} + \overrightarrow{Cc} = \mathbf{0}$.

**54. 平面内的单位向量** 证明：平面内的单位向量可以表示成 $\boldsymbol{u} = (\cos\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j}$，由对 $\boldsymbol{i}$ 依反时针方向转动一个角 $\theta$ 得到. 解释这种表示形式为什么给出平面内的每个单位向量.

## 10.3 点积

如果力 $\boldsymbol{F}$ 作用于沿一条路径运动的质点上，我们时常需要知道力在运动方向的大小. 如果 $\boldsymbol{v}$ 是平行于路径上 $\boldsymbol{F}$ 作用点的切线的，那么需要知道 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 方向的大小. 图 10.18 显示，我们求的纯量是长度 $|\boldsymbol{F}|\cos\theta$，其中 $\theta$ 是两个向量 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 之间的夹角.

在这一节，我们阐明从两个向量的分量直接计算它们之间的角是很容易的. 计算的关键部分是称为*点积*的表达式. 点积也称为*内积*或者*纯量积*，因为乘积的结果是纯量而不是向量. 在考察点积后，我们把它用于求一个向量在另一个向量上的投影(如图 10.18 显示的那样)，以及求恒力作用通过一段位移所作的功.

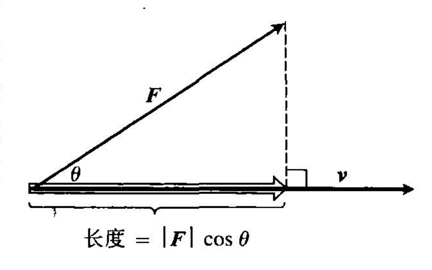



图 10.18 力 $\boldsymbol{F}$ 在向量 $\boldsymbol{v}$ 的方向的大小是 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 上投影的长度 $|\boldsymbol{F}|\cos\theta$

### 10.3.1 向量之间的角

使两个非零向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的起点重合，它们构成一个角 $\theta$，其度量范围是区间 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$(见图 10.19). 如果两个向量不位于同一直线上，那么角 $\theta$ 在包含它们的平面内度量.

如果两个向量位于同一直线，那么两个向量之间的角在它们指向同一方向时为零，而在它们指向相反方向时为 $\pi$. 角 $\theta$ 是 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 之间的角. 定理 1 给出确定这个角的公式.

**定理 1（两个向量之间的角）** 两个非零向量 $\boldsymbol{u}=\langle u_1,u_2,u_3\rangle$ 和 $\boldsymbol{v}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$ 之间的角 $\theta$ 由公式

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}\right)$$

确定.

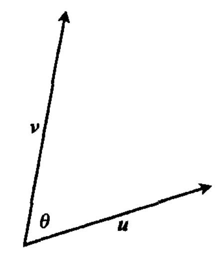


图 10.19 向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 之间的角

在证明定理 1 之前，我们把注意力集中到计算 $\theta$ 的表达式 $u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$ 上面.

**定义** 向量 $\boldsymbol{u}=\langle u_1,u_2,u_3\rangle$ 和 $\boldsymbol{v}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$ 的**点积** $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$（“$\boldsymbol{u}$ 点 $\boldsymbol{v}$”）是

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$$

**例 1**

(a) $\langle 1,-2,-1\rangle\cdot\langle -6,2,-3\rangle=(1)(-6)+(-2)(2)+(-1)(-3)=-6-4+3=-7.$

(b) $\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\right)\cdot(4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})=\left(\frac{1}{2}\right)(4)+(3)(-1)+(1)(2)=1.$ ■

一对二维向量的点积用同样的方式定义：

$$\langle u_1,u_2\rangle\cdot\langle v_1,v_2\rangle=u_1v_1+u_2v_2$$

**定理 1 的证明** 对图 10.20 的三角形应用余弦定律（1.3 节公式(8)），求出

$$|\boldsymbol{w}|^2=|\boldsymbol{u}|^2+|\boldsymbol{v}|^2-2|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta\quad\text{（余弦定律）}$$

$$2|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta=|\boldsymbol{u}|^2+|\boldsymbol{v}|^2-|\boldsymbol{w}|^2$$

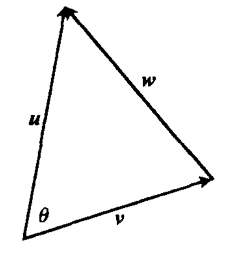


图 10.20 向量加法的平行四边形定律给出 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$

由于 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 的分量形式是 $\langle u_1-v_1,u_2-v_2,u_3-v_3\rangle$. 所以，

$$|\boldsymbol{u}|^2=\left(\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\right)^2=u_1^2+u_2^2+u_3^2$$

$$|\boldsymbol{v}|^2=\left(\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}\right)^2=v_1^2+v_2^2+v_3^2$$

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{w}|^2&=\left(\sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+(u_3-v_3)^2}\right)^2\\&=(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+(u_3-v_3)^2\\&=u_1^2-2u_1v_1+v_1^2+u_2^2-2u_2v_2+v_2^2+u_3^2-2u_3v_3+v_3^2\end{aligned}$$

和

$$|\boldsymbol{u}|^2+|\boldsymbol{v}|^2-|\boldsymbol{w}|^2=2(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)$$

因此，

$$2|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta=|\boldsymbol{u}|^2+|\boldsymbol{v}|^2-|\boldsymbol{w}|^2=2(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)$$

$$|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$$

$$\cos\theta=\frac{u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

因为 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，我们有

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}\right)$$ ■

用点积记号，两个向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 之间的角可以写成

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}\right)$$

**例 2** 求向量 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{v} = 6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ 之间的角.

**解** 利用上述公式:

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = (1)(6) + (-2)(3) + (-2)(2) = 6 - 6 - 4 = -4$$

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{(6)^2 + (3)^2 + (2)^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-4}{(3)(7)}\right) \approx 1.76 \text{ 弧度}$$ ■

夹角公式也适用于二维向量.

**例 3** 求由顶点 $A(0,0)$，$B(3,5)$ 和 $C(5,2)$ 确定的三角形 $ABC$ 中的角 $\theta$(见图 10.21).



图 10.21 例 3 中的三角形

**解** 角 $\theta$ 是向量 $\overrightarrow{CA}$ 和 $\overrightarrow{CB}$ 之间的角，这两个向量的分量形式是

$$\overrightarrow{CA} = \langle -5, -2\rangle \quad \text{和} \quad \overrightarrow{CB} = \langle -2, 3\rangle$$

首先计算这两个向量的点积和大小:

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = (-5)(-2) + (-2)(3) = 4$$

$$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

$$|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$$

然后利用夹角公式，得到

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{4}{(\sqrt{29})(\sqrt{13})}\right) \approx 78.1° \text{ 或 } 1.36 \text{ 弧度}$$ ■

### 10.3.2 垂直(正交)向量

如果两个非零向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 之间的角是 $\pi/2$，那么它们是垂直的或者**正交的**. 对于这样两个向量，有 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 0$，因为 $\cos(\pi/2) = 0$. 反过来的结论也成立：如果 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是满足 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta = 0$ 的非零向量，那么 $\cos\theta = 0$，而 $\theta = \cos^{-1}0 = \pi/2$.

> **定义** 向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是**正交的**(或者**垂直的**)，当且仅当 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 0$.

**例 4**

(**a**) 向量 $\boldsymbol{u} = \langle 3, -2\rangle$ 和 $\boldsymbol{v} = \langle 4, 6\rangle$ 是正交的，因为 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = (3)(4) + (-2)(6) = 0$.

(**b**) 向量 $\boldsymbol{u} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ 是正交的，因为 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = (3)(0) + (-2)(2) + (1)(4) = 0$.

(**c**) 向量 $\boldsymbol{0}$ 是同任何向量 $\boldsymbol{u}$ 正交的，因为

$$\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{u} = \langle 0,0,0\rangle\cdot\langle u_1, u_2, u_3\rangle = (0)(u_1) + (0)(u_2) + (0)(u_3) = 0$$ ■

### 10.3.3 点积性质与向量投影

点积服从一般实数(纯量)积保持的许多法则.

> **点积的性质**
> 若 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 是任意向量，$c$ 是纯量，则有
> (1) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}$.　(2) $(c\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\cdot(c\boldsymbol{v})=c(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})$.　(3) $\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}$.
> (4) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=|\boldsymbol{u}|^2$.　(5) $\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{u}=0$.

人物传记

卡尔·弗里德里希·高斯
(Carl Friedrich Gauss, 1777—1855)

**性质(1)和(3)的证明** 点积的性质容易利用定义证明. 例如，下面给出性质(1)和(3)的证明：

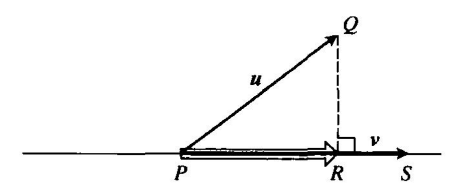
(1) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=v_1u_1+v_2u_2+v_3u_3=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}$.

(3)
$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})&=\langle u_1,u_2,u_3\rangle\cdot\langle v_1+w_1,v_2+w_2,v_3+w_3\rangle\\&=u_1(v_1+w_1)+u_2(v_2+w_2)+u_3(v_3+w_3)\\&=u_1v_1+u_1w_1+u_2v_2+u_2w_2+u_3v_3+u_3w_3\\&=(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)+(u_1w_1+u_2w_2+u_3w_3)\\&=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}.\end{aligned}$$
■

现在我们转向本节开始时提出的一个向量在另一个向量上的投影问题. 向量 $\boldsymbol{u}=\overrightarrow{PQ}$ 在一个非零向量 $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{PS}$ 上的**向量投影**(见图 10.22)是由从 $Q$ 对直线 $PS$ 作下垂线确定的向量 $\overrightarrow{PR}$. 这个向量用记号

$$\text{proj}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}\quad(\text{“}\boldsymbol{u}\text{ 在 }\boldsymbol{v}\text{ 上的向量投影”})$$

表示. 如果 $\boldsymbol{u}$ 代表力，那么 $\text{proj}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ 代表在 $\boldsymbol{v}$ 方向的有效力(见图 10.23).



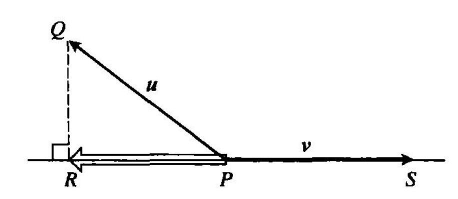




图 10.22　向量 $\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 上的向量投影

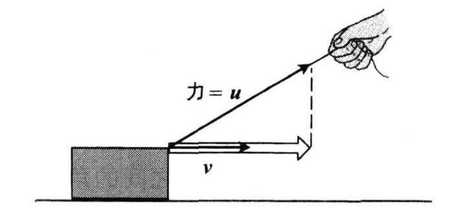



图 10.23　如果用力 $\boldsymbol{u}$ 拖盒子，使盒子在 $\boldsymbol{v}$ 方向向前移动的有效力是 $\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 方向上的投影

如果向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 之间的角 $\theta$ 是锐角，$\text{proj}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ 具有长度 $|\boldsymbol{u}|\cos\theta$ 和方向 $\boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|$ (见图 10.24). 如果 $\theta$ 是钝角，$\cos\theta<0$ 而 $\text{proj}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ 具有长度 $-|\boldsymbol{u}|\cos\theta$ 和方向 $-\boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|$. 在两种情况下，

$$\begin{aligned}\text{proj}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}&=(|\boldsymbol{u}|\cos\theta)\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\\&=\left(\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right)\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\quad\left(|\boldsymbol{u}|\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta}{|\boldsymbol{v}|}=\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right)\\&=\left(\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}\right)\boldsymbol{v}\end{aligned}$$

数 $|\boldsymbol{u}|\cos\theta$ 称为 **$\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 方向的纯量分量**. 总之有

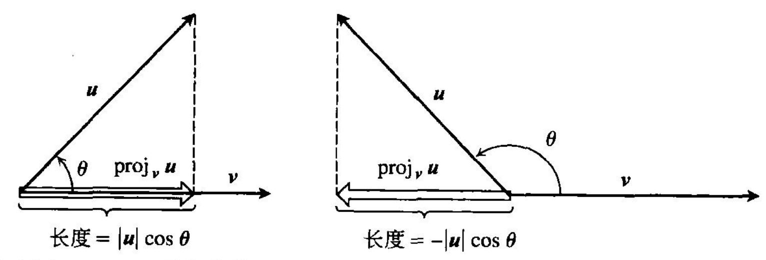



图 10.24　$\boldsymbol{u}$ 的向量投影的长度

> $\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 上的向量投影：
> $$\text{proj}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u} = \left(\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}\right)\boldsymbol{v} \tag{1}$$
> $\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 的方向的纯量分量：
> $$|\boldsymbol{u}|\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \boldsymbol{u}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} \tag{2}$$

请注意，$\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 上的向量投影和 $\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 方向的纯量分量都仅依赖于向量 $\boldsymbol{v}$ 的方向，而同它的长度无关(因为我们用 $\boldsymbol{u}$ 同 $\boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|$ 的点积，$\boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|$ 是 $\boldsymbol{v}$ 的方向).

**例 5**　求 $\boldsymbol{u}=6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 在 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 上的向量投影，以及 $\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 方向的纯量分量.

**解**　由公式(1)求 $\text{proj}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$：

$$\text{proj}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} = \frac{6-6-4}{1+4+4}(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}) = -\frac{4}{9}(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}) = -\frac{4}{9}\boldsymbol{i}+\frac{8}{9}\boldsymbol{j}+\frac{8}{9}\boldsymbol{k}$$

由公式(2)求 $\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 方向的纯量分量：

$$|\boldsymbol{u}|\cos\theta = \boldsymbol{u}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = (6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})\cdot\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{i}-\frac{2}{3}\boldsymbol{j}-\frac{2}{3}\boldsymbol{k}\right) = 2-2-\frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$$ ■

公式(1)和(2)也适用于二维向量.

**例 6**　求力 $\boldsymbol{F}=5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$ 在 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$ 上的向量投影，以及 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 方向的纯量分量.

**解**　向量投影是

$$\text{proj}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{F} = \left(\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}\right)\boldsymbol{v} = \frac{5-6}{1+9}(\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}) = -\frac{1}{10}(\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}) = -\frac{1}{10}\boldsymbol{i}+\frac{3}{10}\boldsymbol{j}$$

$\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 方向的纯量分量是

$$|\boldsymbol{F}|\cos\theta = \frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{5-6}{\sqrt{1+9}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$ ■

### 10.3.4　功

我们在第 6 章，曾经用 $W=Fd$ 计算大小为 $F$ 的恒力移动物体经过一段距离 $d$ 所作的功. 那个公式仅当力 $F$ 指向运动直线的方向时成立. 如果移动物体经过位移 $\boldsymbol{D}=\overrightarrow{PQ}$ 的力 $\boldsymbol{F}$ 具有其他方向，那么所作的功是由 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{D}$ 方向的分量实现的. 如果 $\boldsymbol{F}$ 同 $\boldsymbol{D}$ 之间的角为 $\theta$(见图 10.25)，那么

$$\begin{aligned}\text{功} &= \begin{pmatrix}\boldsymbol{F}\text{ 在 }\boldsymbol{D}\text{ 方向}\\ \text{的纯量分量}\end{pmatrix}(\boldsymbol{D}\text{ 的长度})\\ &= (|\boldsymbol{F}|\cos\theta)|\boldsymbol{D}|\\ &= \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{D}\end{aligned}$$

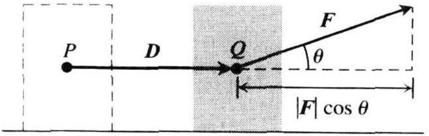



图 10.25　恒力 $\boldsymbol{F}$ 使物体位移 $\boldsymbol{D}$ 所作的功为$(|\boldsymbol{F}|\cos\theta)|\boldsymbol{D}|$

> **定义** 恒力 $\boldsymbol{F}$ 作用于物体经过位移 $\boldsymbol{D}=\overrightarrow{PQ}$ 所作的功为
> $$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{D}=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{D}|\cos\theta$$
> 其中 $\theta$ 是 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 之间的角.

**例 7** 如果 $|\boldsymbol{F}|=40$ N(牛顿)，$|\boldsymbol{D}|=3$ m，$\theta=60°$，力 $\boldsymbol{F}$ 使物体从 $P$ 移动到 $Q$ 所作的功为

$$\begin{aligned}功&=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{D}|\cos\theta \quad (定义)\\&=(40)(3)\cos 60° \quad (给定值)\\&=(120)(1/2)=60\text{ J}\ (焦耳)\end{aligned}$$ ■

当我们在第 14 章学习求可变力沿空间中的路径所作的功时，将面对功的更具挑战性的问题.

## 习题 10.3

在习题 1 ~ 8 中，求

(a) $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}$，$|\boldsymbol{v}|$，$|\boldsymbol{u}|$；

(b) $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 之间的角的余弦；

(c) $\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 方向的纯量分量；

(d) 向量 $\text{proj}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$.

**1.** $\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\sqrt{5}\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{u}=-2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-\sqrt{5}\boldsymbol{k}$.

**2.** $\boldsymbol{v}=(3/5)\boldsymbol{i}+(4/5)\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{u}=5\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}$.

**3.** $\boldsymbol{v}=10\boldsymbol{i}+11\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{u}=3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$.

**4.** $\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}-11\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

**5.** $\boldsymbol{v}=5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

**6.** $\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{u}=\sqrt{2}\boldsymbol{i}+\sqrt{3}\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$.

**7.** $\boldsymbol{v}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{i}+\sqrt{17}\boldsymbol{j}$.

**8.** $\boldsymbol{v}=\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\rangle,\boldsymbol{u}=\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\rangle$.

**T** 在习题 9 ~ 12 中，求向量之间的角，准确到百分之一弧度.

**9.** $\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$.

**10.** $\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{v}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{k}$.

**11.** $\boldsymbol{u}=\sqrt{3}\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{v}=\sqrt{3}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$.

**12.** $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}+\sqrt{2}\boldsymbol{j}-\sqrt{2}\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

**13. 三角形** 求以 $A=(-1,0)$，$B=(2,1)$ 和 $C(1,-2)$ 为顶点的三角形的 3 个角.

**14. 矩形** 求以 $A=(1,0)$，$B=(0,3)$，$C=(3,4)$ 和 $D=(4,1)$ 为顶点的矩形的对角线之间的角.

**15. 方向角与方向余弦** 向量 $\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$ 的方向角 $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ 定义如下：$\alpha$ 是 $\boldsymbol{v}$ 同正 $x$ 轴之间的角 $(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$，$B$ 是 $\boldsymbol{v}$ 同正 $y$ 轴之间的角 $(0\leqslant\beta\leqslant\pi)$，$\gamma$ 是 $\boldsymbol{v}$ 同正 $z$ 轴之间的角 $(0\leqslant\gamma\leqslant\pi)$.

(a) 证明

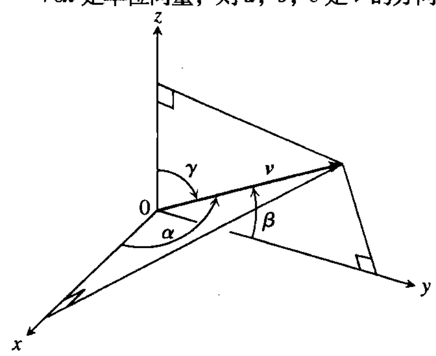
$$\cos\alpha=\frac{a}{|\boldsymbol{v}|},\ \cos\beta=\frac{b}{|\boldsymbol{v}|},\ \cos\gamma=\frac{c}{|\boldsymbol{v}|}$$

和

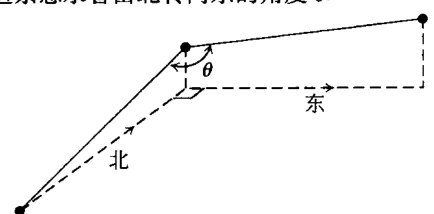
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

这三个余弦称为 $\boldsymbol{v}$ 的方向余弦.

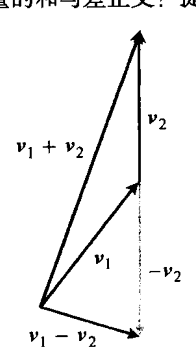
(b) **由方向余弦构成单位向量** 证明：若 $\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$ 是单位向量，则 $a$，$b$，$c$ 是 $\boldsymbol{v}$ 的方向余弦.



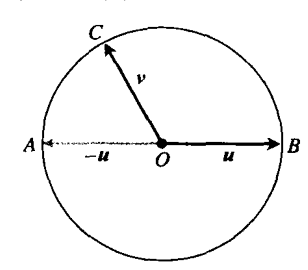

**16. 总水管设计** 设计一条总水管，朝北的坡度为 20%，朝东的坡度为 10%，如附图所示。确定这条总水管由北转向东的角度 $\theta$.




**17. 向量的和与差** 在附图中，向量 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 的和 $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$ 与差 $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$ 看起来是正交的. 这是纯属巧合，还是存在的一个事实，在这种情况下可以预期两个向量的和与差正交？提出答案的理由.



**18. 圆上的正交性** 假定 $AB$ 是以 $O$ 为圆心的圆的直径，$C$ 是联结 $A$ 和 $B$ 的两段弧之一上的点. 证明 $\overrightarrow{CA}$ 同 $\overrightarrow{CB}$ 正交.

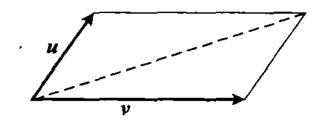



**19. 菱形的对角线** 证明菱形(边长相等的平行四边形)的对角线垂直.

**20. 垂直对角线** 证明正方形是对角线垂直的仅有矩形.

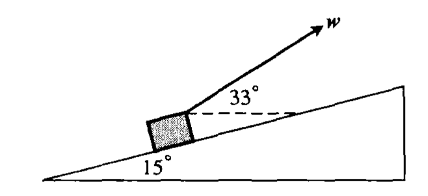
**21. 平行四边形为矩形的条件** 证明：平行四边形是矩形当且仅当它的对角线长度相等. (木匠经常利用这个事实.)

**22. 平行四边形的对角线** 附图显示由向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 确定的平行四边形. 证明，如果 $|\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{v}|$，对角线等分 $\boldsymbol{u}$ 同 $\boldsymbol{v}$ 之间的角.




**23. 弹射运动** 一支枪在水平方向之上 8°射击，子弹出膛速度为 1 200 ft/s. 求子弹速度的水平分量和垂直分量.

**24. 斜面** 假设在附图所示的斜面向上拖一口箱子. 求使平行于斜面的分力达到 2.5 lb 的拖力 $\boldsymbol{w}$.

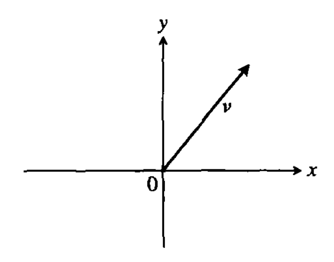



**25.** (a) **柯西-施瓦茨不等式**

利用 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|\cos\theta$ 这个事实，证明不等式 $|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}| \leqslant |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$ 对于任何向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 成立.

(b) 在什么条件下 $|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$ (如果成立)? 提出答案的理由.

**26.** 复制附图的坐标轴和向量. 然后描绘满足不等式 $(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{v}\leqslant 0$ 的点 $(x, y)$ 的阴影区. 说明答案是正确的理由.




**27. 正交单位向量** 如果 $\boldsymbol{u}_1$ 和 $\boldsymbol{u}_2$ 是正交单位向量，并且 $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2$，求 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}_1$.

**28. 消去点积中的因子** 在实数乘法中，如果 $uv_1 = uv_2$，并且 $u\neq 0$，那么可以消去 $u$，得到 $v_1 = v_2$. 在点积中是否存在同样的法则：如果 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}_2$，并且 $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$，能否得到 $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$ 的结论? 提出答案的理由.

**29. 同向量垂直的直线** 证明：若代表向量 $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ 的线段的斜率是直线 $ax + by = c$ 的斜率的负倒数，则向量同直线垂直.

**30. 同向量平行的直线** 证明：若代表向量 $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ 的线段的斜率同直线 $bx - ay = c$ 的斜率相等，则向量同直线平行.

在习题 31 ~ 34 中，利用习题 29 的结果，求经过点 $P$ 同向量 $\boldsymbol{v}$ 垂直的直线的方程. 然后画出直线的草图. 在图中画上以原点为向量起点的向量 $\boldsymbol{v}$.

**31.** $P(2,1)$，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$.

**32.** $P(-1,2)$，$\boldsymbol{v} = -2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$.

**33.** $P(-2,-7)$，$\boldsymbol{v} = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$.

**34.** $P(11,10)$，$\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$.

在习题 35 ~ 38 中，利用习题 30 的结果，求经过点 $P$ 同向量 $\boldsymbol{v}$ 平行的直线的方程. 然后画出直线的单图. 在图中画上以原点为向量起点的向量 $\boldsymbol{v}$.

**35.** $P(-2,1)$，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$.

**36.** $P(0,-2)$，$\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$.

**37.** $P(1,2)$，$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$.

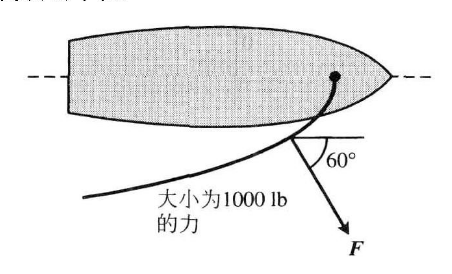
**38.** $P(1,3)$，$\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$.

**39. 力沿直线作的功** 求由力 $\boldsymbol{F} = 5\boldsymbol{i}$(大小为 5 N)把物体从原点沿直线移动到点(1,1)(以 m 为距离单位)所作的功.

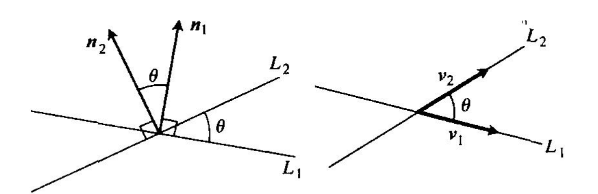
**40.** 联合太平洋公司的 Big Boy(大小子)机车可以用 602 148 N(合 135 375 lb)的牵引力拉 6000 吨的火车. 以这个牵引力，Big Boy 在从旧金山到洛杉矶接近直线的 605 km 行程中大约作多少功?

**41. 斜面** 在装货码头同水平方向成30°的斜面上，用 200 N 拖力使货箱滑动 20 m，所作的功是多少?

**42. 帆船** 如附图所示，通过帆船风帆的风产生大小为 1000 lb 的力 $\boldsymbol{F}$. 风力使帆船向前航行 1 海里所作的功是多少？答案以英尺-磅(ft-1b)作为功的单位.




不按直角相交的**两条直线之间的锐角**，同由正交于两条直线的向量或者平行于两条直线的向量之间的角相等.




利用这个事实以及习题 29 或 30 中的结果，求习题 43 ~ 48 中两条直线之间的锐角.

**43.** $3x+y=5$，$2x-y=4$.

**44.** $y=\sqrt{3}x-1$，$y=-\sqrt{3}x+2$.

**45.** $\sqrt{3}x-y=-2$，$x-\sqrt{3}y=1$.

**46.** $x+\sqrt{3}y=1$，$(1-\sqrt{3})x+(1+\sqrt{3})y=8$.

**47.** $3x-4y=3$，$x-y=7$.

**48.** $12x+5y=1$，$2x-2y=3$.

## 10.4 向量积

在研究平面内的直线中，当需要描述一条直线如何倾斜时，我们用斜率和斜角的概念. 在空间中，需要一种描述平面如何倾斜的方法. 采用的方法是把平面内的两个向量相乘，得到垂直于平面的第三向量. 这个第三向量的方向给出平面的“倾角”. 我们所用把向量相乘的积是*向量积*或者*叉积*. 向量积是两个向量的第二种乘法. 在这一节讨论向量积.

### 10.4.1 空间中两个向量的向量积

我们从空间中的两个非零向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 开始. 如果 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 不是平行的，它们就决定了一个平面. 用**右手法则**选择垂直于平面的单位向量 $\boldsymbol{n}$. 这是指用这样一种方法选择单位(法)向量 $\boldsymbol{n}$：当右手四个手指旋转从 $\boldsymbol{u}$ 经过角 $\theta$ 转向 $\boldsymbol{v}$ 时，姆指的指向就是 $\boldsymbol{n}$ 的方向(见图 10.26). 然后，把**向量积** $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$(“$\boldsymbol{u}$ 叉 $\boldsymbol{v}$”)定义为如下的向量：

**定义**

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=(|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\theta)\boldsymbol{n}$$

同点积不一样，向量积是一个向量. 由于这个原因，它也称为 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的**叉积**，并且仅适用于空间中的向量. 向量 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ 同时垂直于 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，因为它是 $\boldsymbol{n}$ 的纯量倍数.

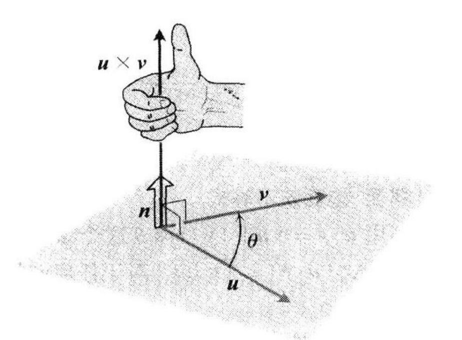



图 10.26 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ 的结构

有一种直接从两个向量的分量计算它们的叉积的方法. 这个方法无需知道两个向量之间的角(像定义暗示的那样)，不过，我们暂且搁置那种计算方法，以便首先来关注叉积的性质.

由于 0 和 $\pi$ 的正弦均为零，所以把两个非零的平行向量的叉积定义为 $\boldsymbol{0}$ 是合理的. 如果 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 二者之一为零向量或者都是零向量，我们也把 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ 定义为 $\boldsymbol{0}$. 由此，两个向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的叉积为 $\boldsymbol{0}$ 当且仅当 $\boldsymbol{u}$ 同 $\boldsymbol{v}$ 平行，或它们之中的一个为 $\boldsymbol{0}$ 或者都为 $\boldsymbol{0}$.

**平行向量**

非零向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 平行当且仅当 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$.

向量积服从下列代数运算法则:

**向量积的性质**

若 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 是任意向量, $r$ 和 $s$ 是纯量, 则有

(1) $(r\boldsymbol{u})\times(s\boldsymbol{v})=(rs)(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$.

(2) $\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w}$.

(3) $(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})\times\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}$.

(4) $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}=-(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$.

(5) $\mathbf{0}\times\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$.

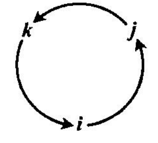
例如, 为了观察性质(4), 注意当右手四个手指旋转从 $\boldsymbol{v}$ 经过角 $\theta$ 转向 $\boldsymbol{u}$ 时, 姆指指向从 $\boldsymbol{u}$ 转向 $\boldsymbol{v}$ 的反方向, 并且在结构 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}$ 中选择的单位向量是在结构 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ 中选择的单位向量的负向量(见图 10.27).

性质(1)可以在公式两端应用向量积的定义并且比较结果证实. 性质(2)在附录 A.8 中证明. 性质(3)由性质(2)的公式两端乘(-1)并且利用性质(4)颠倒向量积的顺序得到. 性质(5)是一个定义. 一般说来, 向量积乘法是非结合的, 所以 $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}$ 通常不等于 $\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$. (参见补充和提高习题 15.)

当我们应用定义逐对计算 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 的向量积时, 求出

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=-(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})=\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=-(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})=\boldsymbol{i}$$
$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=-(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})=\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\mathbf{0}$$

(见图 10.28.)



记忆左边向量积的图示

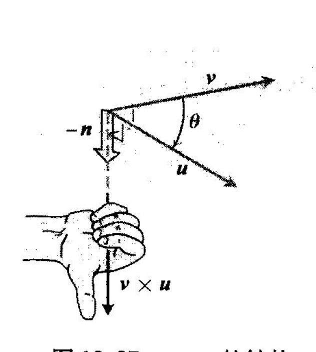


图 10.27 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}$ 的结构

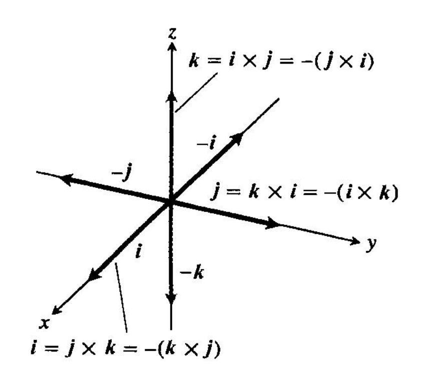


图 10.28 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 的逐对向量积

## 10.4.2 $|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|$ 是一个平行四边形的面积

由于 $\boldsymbol{n}$ 是单位向量, 因此 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ 的大小为

$$|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}||\sin\theta||\boldsymbol{n}|=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\theta$$

这是由 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 决定的平行四边形的面积(见图 10.29). $|\boldsymbol{u}|$ 是平行四边形的底, $|\boldsymbol{v}||\sin\theta|$ 是平行四边形的高.

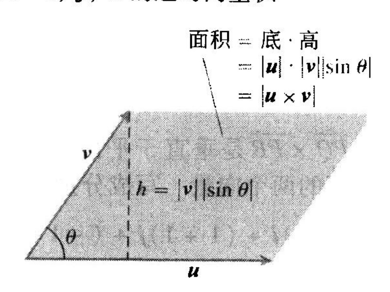


图 10.29 由向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 决定的平行四边形

### 10.4.3 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ 的行列式公式

我们讨论的下一个目标是在笛卡儿坐标系中由 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的分量计算向量积 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$.

假定

$$\boldsymbol{u}=u_1\boldsymbol{i}+u_2\boldsymbol{j}+u_3\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{i}+v_2\boldsymbol{j}+v_3\boldsymbol{k}$$

那么，由 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 相乘的分配律和法则得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}&=(u_1\boldsymbol{i}+u_2\boldsymbol{j}+u_3\boldsymbol{k})\times(v_1\boldsymbol{i}+v_2\boldsymbol{j}+v_3\boldsymbol{k})\\&=u_1v_1\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+u_1v_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+u_1v_3\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}\\&\quad+u_2v_1\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+u_2v_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+u_2v_3\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}\\&\quad+u_3v_1\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+u_3v_2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+u_3v_3\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}\\&=(u_2v_3-u_3v_2)\boldsymbol{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\boldsymbol{j}\\&\quad+(u_1v_2-u_2v_1)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

上面最后一行中的项与用符号

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}$$

表示的行列式的展开式中的项相同. 因此我们有下述法则：

**利用行列式计算向量积**

若 $\boldsymbol{u}=u_1\boldsymbol{i}+u_2\boldsymbol{j}+u_3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{i}+v_2\boldsymbol{j}+v_3\boldsymbol{k}$，则

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}$$

**附注：行列式的计算**

$2\times2$ 和 $3\times3$ 行列式的计算如下：

$$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$$

**例子**

$$\begin{vmatrix}2&1\\-4&3\end{vmatrix}=(2)(3)-(1)(-4)=6+4=10$$

$$\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix}b_2&b_3\\c_2&c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}b_1&b_3\\c_1&c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1&b_2\\c_1&c_2\end{vmatrix}$$

**例子**

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}-5&3&1\\2&1&1\\-4&3&1\end{vmatrix}&=(-5)\begin{vmatrix}1&1\\3&1\end{vmatrix}-(3)\begin{vmatrix}2&1\\-4&1\end{vmatrix}+(1)\begin{vmatrix}2&1\\-4&3\end{vmatrix}\\&=-5(1-3)-3(2+4)+1(6+4)\\&=10-18+10=2\end{aligned}$$

（为了获得行列式计算的其他资料，请登录网站 wps. aw. com/aw_ thomas_ calculus_ 11.）

**例 1** 如果 $\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{v}=-4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}$.

**解**

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&1&1\\-4&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\3&1\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}2&1\\-4&1\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}2&1\\-4&3\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$=-2\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}=-(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-10\boldsymbol{k}$$ ■

**例 2** 求一个垂直于由点 $P(1,-1,0)$，$Q(2,1,-1)$ 和 $R(-1,1,2)$ 决定的平面的向量(见图 10.30).

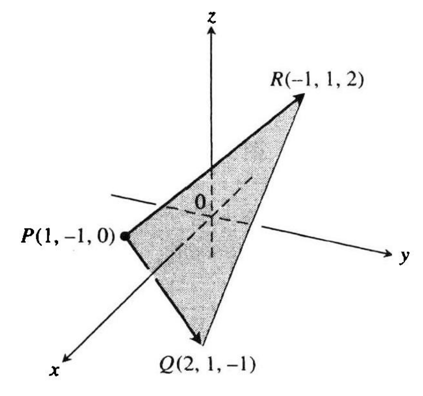



图 10.30 $\Delta PQR$ 的面积等于 $|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|/2$(例 2)

**解** $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$ 是垂直于平面的向量，因为它同时垂直于决定平面的两个向量. 写成分量形式，

$$\overrightarrow{PQ}=(2-1)\boldsymbol{i}+(1+1)\boldsymbol{j}+(-1-0)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$$

$$\overrightarrow{PR}=(-1-1)\boldsymbol{i}+(1+1)\boldsymbol{j}+(2-0)\boldsymbol{k}=-2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$$

于是

$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}i-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}j+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}k$$
$$=6i+6k$$
■

**例 3** 求以 $P(1,-1,0)$，$Q(2,1,-1)$ 和 $R(-1,1,2)$ 为顶点的三角形的面积(见图 10.30).

**解** 由 $P$，$Q$ 和 $R$ 决定的平行四边形的面积为

$$|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|=|6i+6k| \quad (\text{从例 2 得到的值})$$
$$=\sqrt{(6)^2+(6)^2}=\sqrt{2\cdot 36}=6\sqrt{2}$$

三角形的面积是这个值的一半，即 $3\sqrt{2}$. ■

**例 4** 求垂直于 $P(1,-1,0)$，$Q(2,1,-1)$ 和 $R(-1,1,2)$ 的平面的单位向量.

**解** 由于$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$垂直于平面，它的方向 $\boldsymbol{n}$ 是垂直于平面的单位向量. 从例 2 和例 3 取值，得到

$$\boldsymbol{n}=\frac{\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|}=\frac{6i+6k}{6\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}i+\frac{1}{\sqrt{2}}k$$
■

由于用行列式计算向量积比较容易，因此我们常把向量写成 $\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{i}+v_2\boldsymbol{j}+v_3\boldsymbol{k}$ 而不是有序三元组 $\boldsymbol{v}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$ 的形式.

### 10.4.4 转矩

在我们对扳钳施加力 $\boldsymbol{F}$ 转动螺栓时(见图 10.31)，产生作用于螺栓的轴的转矩驱动螺栓前进. 转矩的大小取决于力作用在扳钳上多远的地方，以及在作用点垂直于扳钳的力有多大. 用来度量转矩大小的数字，是扳钳杠杆臂 $\boldsymbol{r}$ 的长度同 $\boldsymbol{F}$ 垂直于 $\boldsymbol{r}$ 的纯量分量的乘积. 按照图 10.31 的表示法，

$$\text{转矩向量的大小}=|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{F}|\sin\theta$$

或者等于 $|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}|$. 如果令 $\boldsymbol{n}$ 是沿螺栓轴在转矩方向的单位向量，那么，转矩向量由 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ 完全描述，或者说

$$\text{转矩向量}=(|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{F}|\sin\theta)\boldsymbol{n}$$

回忆一下，当 $\boldsymbol{u}$ 同 $\boldsymbol{v}$ 平行时，我们曾把 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ 定义为 $\boldsymbol{0}$. 这样定义同转矩的解释也是一致的. 如果图 10.31 中的力 $\boldsymbol{F}$ 同扳钳平行，表明我们试图用沿扳钳把手的直线上的推力或者拉力转动螺栓，产生的转矩为零.

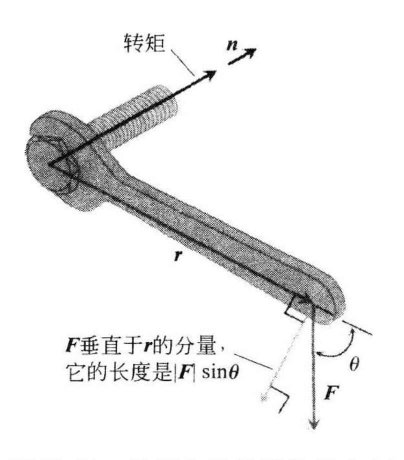



图 10.31 转矩向量描述作用力 $\boldsymbol{F}$ 驱动螺栓前进的趋势

**例 5** 在图 10.32 中，由力 $\boldsymbol{F}$ 在支点 $P$ 产生的转矩的大小为

$$|\overrightarrow{PQ}\times\boldsymbol{F}|=|\overrightarrow{PQ}||\boldsymbol{F}|\sin 70^\circ$$
$$\approx(3)(20)(0.94)\approx 56.4\ \text{ft-1b}$$
■

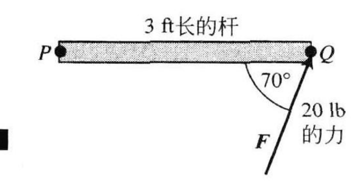



图 10.32 由 $\boldsymbol{F}$ 在点 $P$ 产生的转矩的大小约为 56.4 ft-1b(例 5)

### 10.4.5 三重纯量积或框积

乘积 $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}$ 称为 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$(按此顺序)的**三重纯量积**. 从公式

$$|(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}|=|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}||\cos\theta|$$

可以看出，三重纯量积的绝对值是由 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 决定的平行六面体(以平行四边形为边的框体)的体积(见图 10.33). 数 $|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|$ 是底面平行四边形的面积. 数 $|\boldsymbol{w}||\cos\theta|$ 是平行六面体的高. 由于这个几何形状，$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}$ 也称为 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 的**框积**.

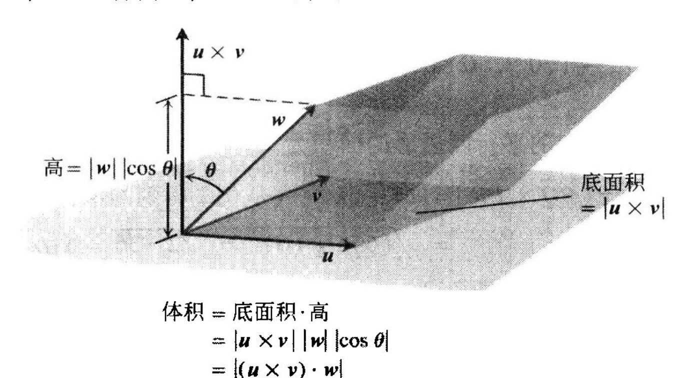



图 10.33 数 $|(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}|$ 是平行六面体的体积

通过把 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 的平面和 $\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 的平面作为由 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 决定的平行六面体的底平面，看出

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v}$$

由于点积是可交换的，又有

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$$

**附注**

在三重纯量积中可以交换点(·)和叉(×)而不改变结果的值.

三重纯量积可以作为行列式计算：

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=\left[\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}\right]\cdot\boldsymbol{w}$$

$$=w_1\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}-w_2\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix}+w_3\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}$$

**计算三重纯量积**

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}$$

**例 6** 求由 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{v}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{w}=7\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$ 决定的框体(平行六面体)的体积.

**解** 利用计算行列式的法则，求出

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & 0 & 3\\ 0 & 7 & -4\end{vmatrix}=-23$$

框体体积为 $|(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}|=23$ 立方单位. ■

## 习题 10.4

在习题 1 ~ 8 中，求 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}$(定义时)的长度和方向.

1. $\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$.
2. $\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$.

3. $u = 2i - 2j + 4k$，$v = -i + j - 2k$.

4. $u = i + j - k$，$v = 0$.

5. $u = 2i$，$v = -3j$.　　6. $u = i \times j$，$v = j \times k$.

7. $u = -8i - 2j - 4k$，$v = 2i + 2j + k$.

8. $u = \frac{3}{2}i - \frac{1}{2}j + k$，$v = i + j + 2k$.

在习题 9 ~ 14 中，画出坐标轴，然后加进以原点为起点的向量 $u$，$v$ 和 $u \times v$.

9. $u = i$，$v = j$.　　10. $u = i - k$，$v = j$.

11. $u = i - k$，$v = j + k$.　　12. $u = 2i - j$，$v = i + 2j$.

13. $u = i + j$，$v = i - j$.　　14. $u = j + 2k$，$v = i$.

在习题 15 ~ 18 中：

(a) 求由点 $P$, $Q$ 和 $R$ 决定的三角形的面积；

(b) 求垂直于平面 $PQR$ 的一个单位向量.

15. $P(1,-1,2)$，$Q(2,0,-1)$，$R(0,2,1)$.

16. $P(1,1,1)$，$Q(2,1,3)$，$R(3,-1,1)$.

17. $P(2,-2,1)$，$Q(3,-1,2)$，$R(3,-1,1)$.

18. $P(-2,2,0)$，$Q(0,1,-1)$，$R(-1,2,-2)$.

在习题 19 ~ 22 中，证实 $(u \times v) \cdot w = (v \times w) \cdot u = (w \times u) \cdot v$，并且求由 $u$, $v$ 和 $w$ 决定的平行六面体（框体）的体积.

19. $u = 2i$，$v = 2j$，$w = 2k$.

20. $u = i - j + k$，$v = 2i + j - 2k$，$w = -i + 2j - k$.

21. $u = 2i + j$，$v = 2i - j + k$，$w = i + 2k$.

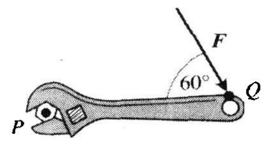
22. $u = i + j - 2k$，$v = -i - k$，$w = 2i + 4j - 2k$.

23. **平行向量与垂直向量**　令 $u = 5i - j + k$，$v = j - 5k$，$w = -15i + 3j - 3k$. (a) 哪些向量（如果存在）是垂直的？(b) 哪些向量（如果存在）是平行的？提出答案的理由.

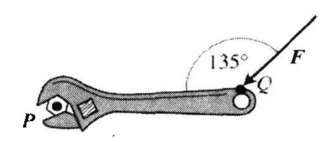
24. **平行向量与垂直向量**　令 $u = i + 2j - k$，$v = -i + j + k$，$w = i + k$，$r = -(\pi/2)i - \pi j + (\pi/2)k$. (a) 哪些向量（如果存在）是垂直的？(b) 哪些向量（如果存在）是平行的？提出答案的理由.

在习题 25 和 26 中，求力 $F$ 对点 $P$ 的螺栓产生的转矩，假设 $|\overrightarrow{PQ}| = 8$ in，$|F| = 30$ lb. 答案以英尺-磅 (ft-lb) 为单位.

25.




26.




27. 在下列等式中，哪些是始终成立的，哪些是不能成立的？提出答案的理由.

(a) $|u| = \sqrt{u \cdot u}$；　(b) $u \cdot u = |u|$；

(c) $u \times 0 = 0 \times u = 0$；　(d) $u \times (-u) = 0$；

(e) $u \times v = v \times u$；

(f) $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$；

(g) $(u \times v) \cdot v = 0$；

(h) $(u \times v) \cdot w = u \cdot (v \times w)$.

28. 在下列等式中，哪些是始终成立的，哪些是不能成立的？提出答案的理由.

(a) $u \cdot v = v \cdot u$；　(b) $u \times v = -(v \times u)$；

(c) $(-u) \times v = -(u \times v)$；

(d) $(cu) \cdot v = u \cdot (cv) = c(u \cdot v)$（$c$ 是任意实数）；

(e) $c(u \times v) = (cu) \times v = u \times (cv)$（$c$ 是任意实数）；

(f) $u \cdot u = |u|^2$；　(g) $(u \times u) \cdot u = 0$；

(h) $(u \times v) \cdot u = v \cdot (u \times v)$.

29. 给定非零向量 $u$, $v$ 和 $w$，用适合的点积和向量积记号描述下列结果：

(a) $u$ 在 $v$ 上的投影向量；

(b) 同 $u$ 和 $v$ 正交的向量；

(c) 同 $u \times v$ 和 $w$ 正交的向量；

(d) 由 $u$, $v$ 和 $w$ 决定的平行六面体的体积.

30. 给定非零向量 $u$，$v$ 和 $w$，用点积和向量积记号描述下列结果：

(a) 同 $u \times v$ 和 $u \times w$ 正交的向量；

(b) 同 $u + v$ 和 $u - v$ 正交的向量；

(c) 在 $v$ 方向上长度为 $|u|$ 的向量；

(d) 由 $u$ 和 $w$ 决定的平行四边形的面积.

31. 令 $u$, $v$ 和 $w$ 为向量. 在下列表达式中，哪些是有意义的，哪些是无意义的？提出答案的理由.

(a) $(u \times v) \cdot w$；　(b) $u \times (v \cdot w)$；

(c) $u \times (v \times w)$；　(d) $u \cdot (v \cdot w)$.

32. **三个向量的向量积**　证明：除开退化情形之外，$(u \times v) \times w$ 位于 $u$ 和 $v$ 所在的平面内，而 $u \times (v \times w)$ 位于 $v$ 和 $w$ 所在的平面内. 什么是退化情形？

33. **向量积中的消去**　如果 $u \times v = u \times w$，并且 $u \neq 0$，那么是否有 $v = w$？提出答案的理由.

34. **双重消去**　如果 $u \neq 0$，并且 $u \times v = u \times w$ 和 $u \cdot v = u \cdot w$，那么有 $v = w$ 吗？提出答案的理由.

在习题 35 ~ 38 中，求给定顶点的平行四边形的面积.

35. $A(1,0)$，$B(0,1)$，$C(-1,0)$，$D(0,-1)$.

**36.** $A(0,0)$, $B(7,3)$, $C(9,8)$, $D(2,5)$.
**37.** $A(-1,2)$, $B(2,0)$, $C(7,1)$, $D(4,3)$.
**38.** $A(-6,0)$, $B(1,-4)$, $C(3,1)$, $D(-4,5)$.

在习题 39 ~ 42 中，求给定顶点的三角形的面积.

**39.** $A(0,0)$, $B(-2,3)$, $C(3,1)$.
**40.** $A(-1,-1)$, $B(3,3)$, $C(2,1)$.
**41.** $A(-5,3)$, $B(1,-2)$, $C(6,-2)$.
**42.** $A(-6,0)$, $B(10,-5)$, $C(-2,4)$.
**43.** **三角形面积** 求 $xy$ 平面内以$(0,0)$，$(a_1,a_2)$和$(b_1,b_2)$为顶点的三角形面积的公式. 对你得到的公式作出解释.
**44.** **三角形面积** 求 $xy$ 平面内以$(a_1,a_2)$，$(b_1,b_2)$和$(c_1,c_2)$为顶点的三角形面积的简单公式.

## 10.5 空间中的直线和平面

这一节讲述如何用纯量积和向量积表示空间中的直线、线段和平面的方程. 本书其余部分将要利用这些表示式.

### 10.5.1 空间中的直线和线段

在平面内，一条直线是由一点和一个给出直线斜率的实数决定的. 在空间中，一条直线是由一点和给出直线方向的向量决定的.

假定 $L$ 是空间中一条通过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 并且同向量 $\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{i}+v_2\boldsymbol{j}+v_3\boldsymbol{k}$ 平行的直线. 那么，$L$ 是使$\overrightarrow{P_0P}$平行于 $\boldsymbol{v}$ 的所有点 $P(x,y,z)$（见图 10.34）的集合. 因此，对于某个纯量参数 $t$，$\overrightarrow{P_0P}=t\boldsymbol{v}$. $t$ 的值依赖于点 $P$ 在直线上的位置，而 $t$ 的定义域是$(-\infty,\infty)$. 方程$\overrightarrow{P_0P}=t\boldsymbol{v}$ 的展开形式是

$$(x-x_0)\boldsymbol{i}+(y-y_0)\boldsymbol{j}+(z-z_0)\boldsymbol{k}=t(v_1\boldsymbol{i}+v_2\boldsymbol{j}+v_3\boldsymbol{k})$$

这个方程可以改写成

$$x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=x_0\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}+z_0\boldsymbol{k}+t(v_1\boldsymbol{i}+v_2\boldsymbol{j}+v_3\boldsymbol{k}) \quad (1)$$

如果 $\boldsymbol{r}(t)$ 是点 $P(x,y,z)$ 在直线上的位置向量，$\boldsymbol{r}_0$ 是点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的位置向量，那么方程(1)给出空间中直线方程的下述向量形式.

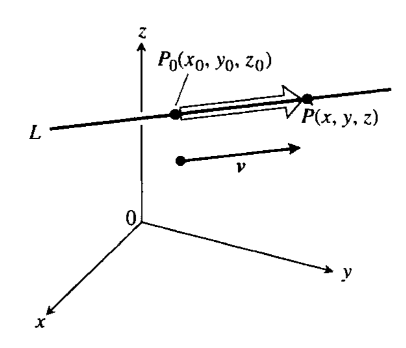



图 10.34 点 $P$ 位于通过点 $P_0$ 并且同 $\boldsymbol{v}$ 平行的直线 $L$ 上，当且仅当$\overrightarrow{P_0P}$等于 $\boldsymbol{v}$ 的一个纯量倍数

> **直线的向量方程**
>
> 通过 $P_0(x_0,y_0,z_0)$平行于 $\boldsymbol{v}$ 的直线 $L$ 的向量方程是
>
> $$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{v},\qquad -\infty<t<\infty \quad (2)$$
>
> 其中 $\boldsymbol{r}$ 是点 $P(x,y,z)$在 $L$ 上的位置向量，$\boldsymbol{r}_0$ 是点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$的位置向量.

令方程(1)中两端的对应分量相等，得到包含参数 $t$ 的三个纯量方程：

$$x=x_0+tv_1,\quad y=y_0+tv_2,\quad z=z_0+tv_3$$

这三个方程给出直线的标准参数表示，参数区间为 $-\infty<t<\infty$.

> **直线的参数方程**
>
> 通过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$平行于向量 $\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{i}+v_2\boldsymbol{j}+v_3\boldsymbol{k}$ 的直线的标准参数表示是
>
> $$x=x_0+tv_1,\quad y=y_0+tv_2,\quad z=z_0+tv_3,\qquad -\infty<t<\infty \quad (3)$$

**例 1** 求通过点$(-2,0,4)$平行于向量 $\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 的直线（见图 10.35）的参数方程.

**解** 选取点$(-2,0,4)$作为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$和向量 $2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 作为 $v_1\boldsymbol{i}+v_2\boldsymbol{j}+v_3\boldsymbol{k}$，方程(3)变成

$$x=-2+2t,\quad y=4t,\quad z=4-2t$$ ■

**例 2** 求通过点 $P(-3,2,-3)$ 和 $Q(1,-1,4)$ 的直线的参数方程.

**解** 向量

$$\overrightarrow{PQ}=(1-(-3))\boldsymbol{i}+(-1-2)\boldsymbol{j}+(4-(-3))\boldsymbol{k}=4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$$

同直线平行，在方程(3)中取$(x_0,y_0,z_0)=(-3,2,-3)$给出

$$x=-3+4t,\quad y=2-3t,\quad z=-3+7t$$

我们可以选择 $Q(1,-1,4)$ 作为“基点”而写出参数方程

$$x=1+4t,\quad y=-1-3t,\quad z=4+7t$$

这组方程像前面一组方程一样，只不过对于一个给定的 $t$ 值在直线上位于一个不同的点. ■

请注意，参数表示不是唯一的. 不仅是“基点”可以改变，参数也可以改变. 方程 $x=-3+4t^3$，$y=2-3t^3$ 和 $z=-3+7t^3$ 也是例 2 中直线的参数表示.

为了用参数表示联结两点的线段，首先用参数表示通过这两点的直线. 然后求线段端点的 $t$ 值并且限制 $t$ 位于以这些值为界的闭区间内. 直线的方程同附加的这种限制就是线段的参数表示.

**例 3** 用参数表示联结点 $P(-3,2,-3)$ 和 $Q(1,-1,4)$ 的线段(见图 10.36).

**解** 我们从求经过 $P$ 和 $Q$ 的直线方程开始. 在这种情况下，从例 2 得到参数方程：

$$x=-3+4t,\quad y=2-3t,\quad z=-3+7t$$

我们注意到直线上的点

$$(x,y,z)=(-3+4t,2-3t,-3+7t)$$

在 $t=0$ 时通过 $P(-3,2,-3)$，而在 $t=1$ 时通过 $Q(1,-1,4)$. 加进限制条件 $0\leqslant t\leqslant 1$ 就得到线段的参数表示：

$$x=-3+4t,\quad y=2-3t,\quad z=-3+7t,\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$ ■

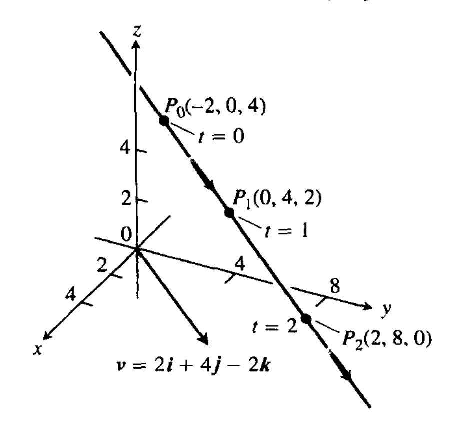



图 10.35 在例 1 中的直线上选取的点和参数值，箭头表示 $t$ 增加的方向

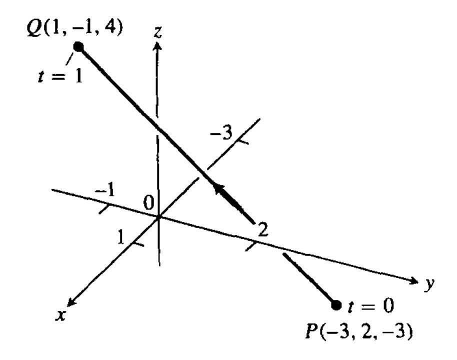



图 10.36 例 3 导出线段 $PQ$ 的参数表示，箭头显示 $t$ 增加的方向

如果我们把空间中一条直线想象成质点从位置 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 开始沿向量 $\boldsymbol{v}$ 的方向运动的路径，那么直线的向量形式(方程(2))更具有启示性. 把方程(2)改写成

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}_0+t|\boldsymbol{v}|\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\tag{4}$$

初始位置 时间 速度 方向

换句话说，质点在时间 $t$ 的位置是它的初始位置加上它在直线运动方向 $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ 上移动的距离(速度×时间).

**例 4** 一架直升机直接从在坐标原点的停机坪朝点(1,1,1)的方向以 60 ft/s 的速度飞行. 在 10 s 后直升机的位置是什么地方?

**解** 我们把坐标原点置于直升机的起飞点(停机坪). 那么，单位向量

$$\mathbf{u}=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$$

给出直升机的飞行方向. 由方程(4)，直升机在任意时间 $t$ 的位置是

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_0+t(\text{速度})\mathbf{u}=\mathbf{0}+t(60)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}\right)=20\sqrt{3}t(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

当 $t=10$ s 时，

$$\mathbf{r}(10)=200\sqrt{3}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})=\langle 200\sqrt{3},200\sqrt{3},200\sqrt{3}\rangle$$

在 10 s 后，从原点朝点(1,1,1)飞行的直升机位于空间中的点$(200\sqrt{3},\ 200\sqrt{3},\ 200\sqrt{3})$. 它飞越的距离是(60 ft/s)(10 s) = 600 ft，这个距离是向量 $\mathbf{r}(10)$ 的长度. ■

### 10.5.2 空间中从点到直线的距离

为了求从点 $S$ 到通过点 $P$ 平行于向量 $\mathbf{v}$ 的直线的距离，我们求$\overrightarrow{PS}$在同直线正交的向量方向的纯量分量的绝对值(见图 10.37). 按照图形中的记号，这个纯量分量的绝对值是 $|\overrightarrow{PS}|\sin\theta$，等于$\dfrac{|\overrightarrow{PS}\times\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$.

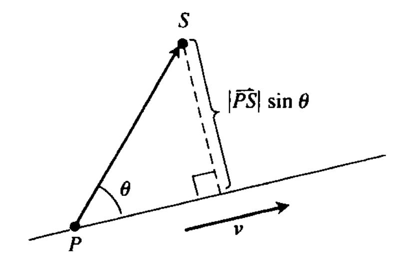



图 10.37 从点 $S$ 到通过点 $P$ 平行于向量 $\mathbf{v}$ 的直线的距离是 $|\overrightarrow{PS}|\sin\theta$，其中 $\theta$ 是$\overrightarrow{PS}$同 $\mathbf{v}$ 之间的角

> **从点 $S$ 到通过点 $P$ 平行于向量 $\mathbf{v}$ 的直线的距离**
>
> $$d=\frac{|\overrightarrow{PS}\times\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} \qquad (5)$$

**例 5** 求从点 $S(1,1,5)$ 到直线

$$L:\quad x=1+t,\quad y=3-t,\quad z=2t$$

的距离.

**解** 从直线 $L$ 的方程看出，$L$ 通过点 $P(1,3,0)$ 平行于向量 $\mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$. 由于

$$\overrightarrow{PS}=(1-1)\mathbf{i}+(1-3)\mathbf{j}+(5-0)\mathbf{k}=-2\mathbf{j}+5\mathbf{k}$$

和

$$\overrightarrow{PS}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & -2 & 5\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=\mathbf{i}+5\mathbf{j}+2\mathbf{k}$$

方程(5)给出距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{PS}\times\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}=\frac{\sqrt{1+25+4}}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}}=\sqrt{5}$$ ■

### 10.5.3 空间中平面的方程

空间中的平面由平面上一个已知点和它的“斜度”或者方向决定. 这个“斜度”由指定同平面垂直或者正交的向量定义.

假定平面 $M$ 通过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，并且同非零向量 $\mathbf{n}=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$ 正交. 那么 $M$ 是所有这样的点

$P(x,y,z)$的集合，对于这些点$\overrightarrow{P_0P}$同 $\boldsymbol{n}$ 正交(见图 10.38). 因此，点积 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$. 这个方程等价于

$$(A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k})\cdot[(x-x_0)\boldsymbol{i}+(y-y_0)\boldsymbol{j}+(z-z_0)\boldsymbol{k}]=0$$

或

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

**平面的方程**

通过 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 同 $\boldsymbol{n}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}$ 正交的平面具有下列形式的方程：

向量方程

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$$

分量方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

简化的分量方程

$$Ax+By+Cz=D,\quad 其中\quad D=Ax_0+By_0+Cz_0$$

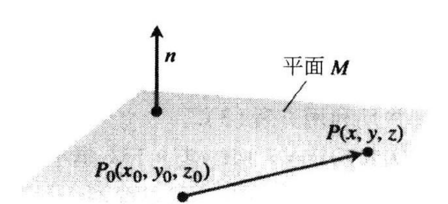



图 10.38 空间中的平面的标准方程由同平面正交的一个向量定义：点 $P$ 位于通过 $P_0$ 同向量 $\boldsymbol{n}$ 正交的平面内，当且仅当 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$

**例 6** 求通过点 $P_0(-3,0,7)$ 垂直于向量 $\boldsymbol{n}=5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 的平面的方程.

**解** 平面的分量方程是

$$5(x-(-3))+2(y-0)+(-1)(z-7)=0$$

简化后得到

$$5x+15+2y-z+7=0$$

$$5x+2y-z=-22$$ ■

注意在例 6 中 $\boldsymbol{n}=5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 的分量是如何变成方程 $5x+2y-z=-22$ 中 $x$，$y$ 和 $z$ 的系数的. 向量 $\boldsymbol{n}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}$ 是同平面 $Ax+By+Cz=D$ 正交的.

**例 7** 求通过点 $A(0,0,1)$，$B(2,0,0)$ 和 $C(0,3,0)$ 的平面的方程.

**解** 我们求出同平面正交的一个向量，并且用它和一个点(取哪个点无关紧要)写出平面的方程.

向量积

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & 3 & -1\end{vmatrix}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$$

同平面正交. 把这个向量的分量和点 $A(0,0,1)$ 的坐标代入平面方程的分量形式，得到

$$3(x-0)+2(y-0)+6(z-1)=0$$

$$3x+2y+6z=6$$ ■

### 10.5.4 平面的交线

直线是平行的，当且仅当它们有相同的方向. 正如直线的情形一样，两个平面是**平行**的，当且仅当它们的法线是平行的，或者对于某个纯量 $k$ 有 $\boldsymbol{n}_1=k\boldsymbol{n}_2$($\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 是两个平面的法向量). 两个不平行的平面相交于一条直线.

**例 8** 求同平面 $3x-6y-2z=15$ 和 $2x+y-2z=5$ 的交线平行的一个向量.

**解** 两个平面的交线同两个平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 垂直(见图 10.39)，因此平行于 $\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$.

换一种说法，$\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$ 是平行于平面的交线的向量. 在本例中，

$$\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & -6 & -2\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=14\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k}$$

任何非零纯量倍数的 $\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$ 也是这样的向量. ■

**例 9** 求平面 $3x-6y-2z=15$ 和 $2x+y-2z=5$ 的交线的参数方程.

**解** 我们求平行于交线的一个向量和这条直线上的一点，并且利用方程(3).

例 8 确定 $\boldsymbol{v}=14\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k}$ 是平行于平面交线的向量. 为了求直线上的一点，可以取两个平面的任何公共点. 在两个平面方程中代入 $z=0$，并且解 $x$ 和 $y$ 的联立方程，确定其中一点为$(3,-1,0)$. 平面交线的参数方程是

$$x=3+14t,\quad y=-1+2t,\quad z=15t$$

选取 $z=0$ 是随意的，同样也可以选取 $z=1$ 或者 $z=-1$. 或者，可以令 $x=0$ 而求解 $y$ 和 $z$ 的联立方程. 不同的选择，只不过给出同一条直线的不同参数表示而已. ■

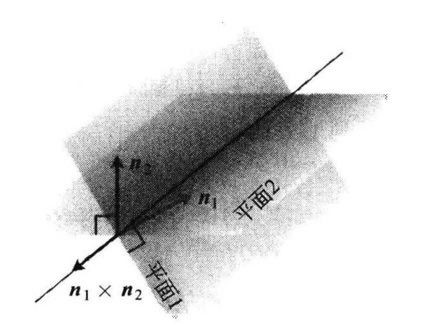



图 10.39 两个平面的交线同平面的法向量的关系(例 8)

有时我们想知道一条直线和一个平面在何处相交. 例如在观察一块平板和穿过它的一条线段时，我们或许有兴趣知道平板档住了我们对线段哪一部分的视线. 这种应用经常出现在计算机图形学中(见习题 74).

**例 10** 求直线 $x=\dfrac{8}{3}+2t,\ y=-2t,\ z=1+t$ 同平面 $3x+2y+6z=6$ 的交点.

**解** 如果点

$$\left(\frac{8}{3}+2t,\ -2t,1+t\right)$$

的坐标满足平面的方程，也就是说，如果

$$3\left(\frac{8}{3}+2t\right)+2(-2t)+6(1+t)=6$$
$$8+6t-4t+6+6t=6$$
$$8t=-8$$
$$t=-1$$

那么点位于平面内. 所以，交点坐标是

$$(x,y,z)\big|_{t=-1}=\left(\frac{8}{3}-2,2,1-1\right)=\left(\frac{8}{3},2,0\right)$$ ■

## 10.5.5 从点到平面的距离

如果 $P$ 是具有法线 $\boldsymbol{n}$ 的平面上的一点，那么从任意点 $S$ 到平面的距离是 $\overrightarrow{PS}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 上的向量投影的长度. 就是说，从 $S$ 到平面的距离等于

$$d=\left|\overrightarrow{PS}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right| \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{n}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}$ 是同平面正交的.

**例 11** 求从点 $S(1,1,3)$ 到平面 $3x+2y+6z=6$ 的距离.

**解** 求平面内一点 $P$，并且计算 $\overrightarrow{PS}$ 在同平面正交的向量 $\boldsymbol{n}$ 上的向量投影的长度(见图 10.40)．方程 $3x+2y+6z=6$ 的系数给出

$$\boldsymbol{n}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$$

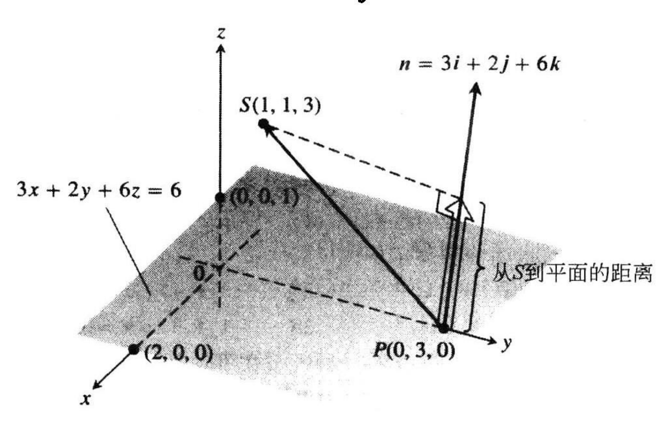



图 10.40 从 $S$ 到平面的距离是 $\overrightarrow{PS}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 上的向量投影的长度(例 11)

在平面上由平面方程最容易求出的点是截距．如果取 $P$ 为 $y$ 截距(0，3，0)，那么，

$$\overrightarrow{PS}=(1-0)\boldsymbol{i}+(1-3)\boldsymbol{j}+(3-0)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$$

$$|\boldsymbol{n}|=\sqrt{(3)^2+(2)^2+(6)^2}=\sqrt{49}=7$$

从 $S$ 到平面的距离为

$$d=\left|\overrightarrow{PS}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right| \quad (\text{proj}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{PS}\text{ 的长度})$$

$$=\left|(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})\cdot\left(\frac{3}{7}\boldsymbol{i}+\frac{2}{7}\boldsymbol{j}+\frac{6}{7}\boldsymbol{k}\right)\right|=\left|\frac{3}{7}-\frac{4}{7}+\frac{18}{7}\right|=\frac{17}{7}$$

■

### 10.5.6 平面之间的角

两个相交平面之间的角定义为它们的法向量之间的(锐)角(见图 10.41)．

**例 12** 求平面 $3x-6y-2z=15$ 和 $2x+y-2z=5$ 之间的角．

**解** 两个平面的法向量是

$$\boldsymbol{n}_1=3\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{n}_2=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$$

它们之间的角为

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}\right)$$

$$=\cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right)$$

$$\approx 1.38 \text{ 弧度} \quad (\text{约 } 79 \text{ 度})$$

■

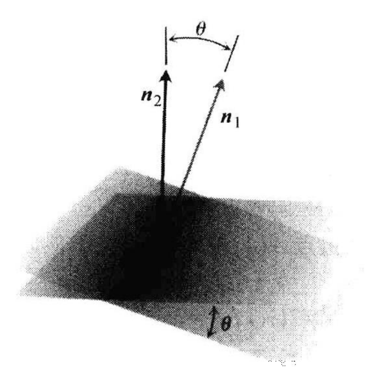



图 10.41 两个平面之间的角由它们的法线之间的角获得

### 习题 10.5

在习题 1 ~ 12 中，求直线的参数方程．

1. 直线通过点 $P(3,-4,-1)$ 平行于向量 $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.
2. 直线通过点 $P(1,2,-1)$ 和 $Q(-1,0,1)$.
3. 直线通过点 $P(-2,0,3)$ 和 $Q(3,5,-2)$.
4. 直线通过点 $P(1,2,0)$ 和 $Q(1,1,-1)$.
5. 直线通过原点平行于向量 $2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

6. 直线通过点(3,-2,1)平行于直线 $x=1+2t,\ y=2-t,\ z=3t$.
7. 直线通过点(1,1,1)平行于 $z$ 轴.
8. 直线通过点(2,4,5)垂直于平面 $3x+7y-5z=21$.
9. 直线通过点(0,-7,0)垂直于平面 $x+2y+2z=13$.
10. 直线通过点(2,3,0)垂直于向量 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{v}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$.
11. $x$ 轴.
12. $z$ 轴.

在习题 13~20 中，求联结两点的线段的参数表示. 画出坐标轴和线段的草图，指明参数表示中参数 $t$ 增加的方向.

13. (0,0,0)，(1,1,3/2).
14. (0,0,0)，(1,0,0).
15. (1,0,0)，(1,1,0).
16. (1,1,0)，(1,1,1).
17. (0,1,1)，(0,-1,1).
18. (0,2,0)，(3,0,0).
19. (2,0,2)，(0,2,0).
20. (1,0,-1)，(0,3,0).

在习题 21~26 中，求平面的方程.

21. 平面通过点 $P_0(0,2,-1)$ 同向量 $\boldsymbol{n}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 正交.
22. 平面通过点 $P_0(1,-1,3)$ 同平面
$$3x+y+z=7$$
平行.
23. 平面通过点 $P(1,1,-1)$，$Q(2,0,2)$ 和 $R(0,-2,1)$.
24. 平面通过点 $P(2,4,5)$，$Q(1,5,7)$ 和 $R(-1,6,8)$.
25. 平面通过点 $P_0(2,4,5)$ 同直线
$$x=5+t,\quad y=1+3t,\quad z=4t$$
垂直.
26. 平面通过点 $A(1,-2,1)$ 垂直于从原点到 $A$ 的向量.
27. 求直线 $x=2t+1,\ y=3t+2,\ z=4t+3$ 和 $x=s+2,\ y=2s+4,\ z=-4s-1$ 的交点，然后求由这两条直线决定的平面.
28. 求直线 $x=t,\ y=-t+2,\ z=t+1$ 和 $x=2s+2,\ y=s+3,\ z=5s+6$ 的交点，然后求由这两条直线决定的平面.

在习题 29 和 30 中，求由相交直线决定的平面.

29. $L1$: $x=-1+t,\ y=2+t,\ z=1-t;\ -\infty<t<\infty$.
$L2$: $x=1-4s,\ y=1+2s,\ z=2-2s;\ -\infty<s<\infty$.
30. $L1$: $x=t,\ y=3-3t,\ z=-2-t;\ -\infty<t<\infty$.
$L2$: $x=1+s,\ y=4+s,\ z=-1+s;\ -\infty<s<\infty$.
31. 求通过点 $P_0(2,1,-1)$ 并且同平面 $2x+y-z=3$ 和 $x+2y+z=2$ 的交线垂直的平面.
32. 求通过点 $P_1(1,2,3)$ 和 $P_2(3,2,1)$ 并且同平面 $4x-y+2z=7$ 垂直的平面.

在习题 33~38 中，求从点到直线的距离.

33. (0,0,12); $x=4t,\ y=-2t,\ z=2t$.
34. (0,0,0); $x=5+3t,\ y=5+4t,\ z=-3-5t$.
35. (2,1,3); $x=2+2t,\ y=1+6t,\ z=3$.
36. (2,1,-1); $x=2t,\ y=1+2t,\ z=2t$.
37. (3,-1,4); $x=4-t,\ y=3+2t,\ z=-5+3t$.
38. (-1,4,3); $x=10+4t,\ y=-3,\ z=4t$.

在习题 39~44，求从点到平面的距离.

39. (2,-3,4); $x+2y+2z=13$.
40. (0,0,0); $3x+2y+6z=6$.
41. (0,1,1); $4y+3z=-12$.
42. (2,2,3); $2x+y+2z=4$.
43. (0,-1,0); $2x+y+2z=4$.
44. (1,0,-1); $-4x+y+z=4$.
45. 求从平面 $x+2y+6z=1$ 到平面 $x+2y+6z=10$ 的距离.
46. 求从直线 $x=2+t,\ y=1+t,\ z=-(1/2)-(1/2)t$ 到平面 $x+2y+6z=10$ 的距离.

在习题 47 和 48 中，求两个平面之间的角.

47. $x+y=1,\ 2x+y-2z=2$.
48. $5x+y-z=10,\ x-2y+3z=-1$.

**T** 在习题 49~52 中，用一种计算器求两个平面之间的锐角，准确到 1% 弧度.

49. $2x+2y+2z=3,\ 2x-2y-z=5$.
50. $x+y+z=1,\ z=0$ ($xy$ 平面).
51. $2x+2y-z=3,\ x+2y+z=2$.
52. $4y+3z=-12,\ 3x+2y+6z=6$.

在习题 53~56 中，求直线同平面的交点.

53. $x=1-t,\ y=3t,\ z=1+t;\ 2x-y+3z=6$.
54. $x=2,\ y=3+2t,\ z=-2-2t;\ 6x+3y-4z=-12$.
55. $x=1+2t,\ y=1+5t,\ z=3t;\ x+y+z=2$.
56. $x=-1+3t,\ y=-2,\ z=5t;\ 2x-3z=7$.

在习题 57~60 中，求两个平面的交线的参数表示.

57. $x+y+z=1,\ x+y=2$.
58. $3x-6y-2z=3,\ 2x+y-2z=2$.
59. $x-2y+4z=2,\ x+y-2z=5$.
60. $5x-2y=11,\ 4y-5z=-17$.

给定空间中的两条直线，它们可能是平行的或

者相交的，也可能是相错的(例如，想象两架飞机在空中的飞行路线). 在习题 61 和 62 中给出三条直线. 在每道题中，每次取出两条直线，确定它们是平行的或者是相交的还是相错的. 如果直线相交，求出它们的交点.

**61.** $L1$: $x=3+2t$, $y=-1+4t$, $z=2-t$; $-\infty<t<\infty$.

$L2$: $x=1+4s$, $y=1+2s$, $z=-3+4s$; $-\infty<s<\infty$.

$L3$: $x=3+2r$, $y=2+r$, $z=-2+2r$; $-\infty<r<\infty$.

**62.** $L1$: $x=1+2t$, $y=-1-t$, $z=3t$; $-\infty<t<\infty$.

$L2$: $x=2-s$, $y=3s$, $z=1+s$; $-\infty<s<\infty$.

$L3$: $x=5+2r$, $y=1-r$, $z=8+3r$; $-\infty<r<\infty$.

**63.** 利用方程(3)产生通过点 $P(2,-4,7)$ 平行于向量 $\boldsymbol{v}_1=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 的直线的参数表示. 然后产生用点 $P_2(-2,-2,1)$ 和向量 $\boldsymbol{v}_2=-\boldsymbol{i}+(1/2)\boldsymbol{j}-(3/2)\boldsymbol{k}$ 的另一条直线的参数表示.

**64.** 利用平面方程的分量形式产生通过点 $P_1(4,1,5)$ 同向量 $\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 正交的平面的方程. 然后用点 $P_2(3,-2,0)$ 和法向量 $\boldsymbol{n}_2=-\sqrt{2}\boldsymbol{i}+2\sqrt{2}\boldsymbol{j}-\sqrt{2}\boldsymbol{k}$ 产生同一平面的另外一个方程.

**65.** 求直线 $x=1+2t$, $y=-1-t$, $z=3t$ 同坐标平面的交点. 描述你的答案包含的推理.

**66.** 求在平面 $z=3$ 内同 $\boldsymbol{i}$ 构成 $\pi/6$ 弧度角和 $\boldsymbol{j}$ 构成 $\pi/3$ 弧度角的直线的方程. 描述你的答案包含的推理.

**67.** 直线 $x=1-2t$, $y=2+5t$, $z=-3t$ 同平面 $2x+y-z=8$ 是否平行? 提出答案的理由.

**68.** 你能断定两个平面 $A_1x+B_1y+C_1z=D_1$ 和 $A_2x+B_2y+C_2z=D_2$ 在什么条件下平行，在什么条件下垂直? 提出答案的理由.

**69.** 求两个不同的平面，它们以直线 $x=1+t$, $y=2-t$, $z=3+2t$ 为交线. 用 $Ax+By+Cz=D$ 的形式写出每个平面的方程.

**70.** 求通过原点同平面 $M$: $2x+3y+z=12$ 以直角相交的平面. 怎样知道你的平面同平面 $M$ 垂直?

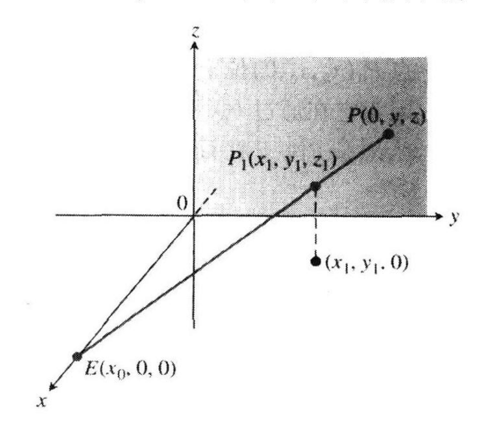
**71.** 对于任何非零的数 $a,b,c$，方程 $(x/a)+(y/b)+(z/c)=1$ 的图形是一个平面. 哪些平面具有这种形式的方程?

**72.** 假定 $L_1$ 和 $L_2$ 是不连接(不相交)的非平行直线. 是否可能存在一个非零向量同时垂直于 $L_1$ 和 $L_2$? 提出答案的理由.

**73. 计算机图形学中的透视** 在计算机图形学和透视画法中，需要把空间中目视的物体表示成二维平面的图像. 假定视点置于附图所示的点 $E(x_0,0,0)$，而我们要把点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 表示成 $yz$ 平面上的一点. 做法是从 $E$ 引一条射线把 $P_1$ 投影到 $yz$ 平面上. 点 $P_1$ 将被描绘成点 $P(0,y,z)$. 对于作为图形学设计者而言，问题是从给出的 $E$ 和 $P_1$ 求 $y$ 和 $z$.

(a) 写出在 $\overrightarrow{EP}$ 和 $\overrightarrow{EP_1}$ 之间成立的向量方程. 利用这个方程以 $x_0,x_1,y_1$ 和 $z_1$ 表示 $y$ 和 $z$.

(b) 研究从(a)中得到的 $y,z$ 在 $x_1=0$ 和 $x_1=x_0$ 的特性，并且观察当 $x_0\to\infty$ 时发生的情况来检验 $y$ 和 $z$ 的公式. 得到的结果是什么?




**74. 隐线** 这里提出计算机图形学中另外一个典型的问题：把视点置于点(4,0,0)，观察一块顶点为(1,0,1)，(1,1,0)和(-2,2,2)的三角形板. 从点(1,0,0)到(0,2,2)的线段穿过这块板. 在视线中线段的什么部分被板隐藏?(这是一道求直线同平面交点的习题.)

## 10.6 柱面与二次曲面

迄今我们已研究了两种特殊类型的曲面：球面与平面. 在这一节，我们要把研究范围扩大到各种各样的柱面和二次曲面. 二次曲面是由 $x,y,z$ 的二次方程定义的曲面. 球面是二次曲面，但是还有值得同样关注的其他曲面.

### 10.6.1 柱面

**柱面**是沿给定的平面曲线移动一条直线产生的曲面，在移动直线时保持同一条固定直线平

行. 给定的曲线称为柱面的**母曲线**(见图 10.42). 在立体几何中, 柱面是指圆柱面, 其母曲线是圆, 但当前我们允许用任何类型的曲线作为母曲线. 在下面第一个例子中用抛物线作母曲线.

**例 1** 求通过抛物线 $y=x^2$, $z=0$ 移动平行于 $z$ 轴的直线生成的柱面(见图 10.43)的方程.

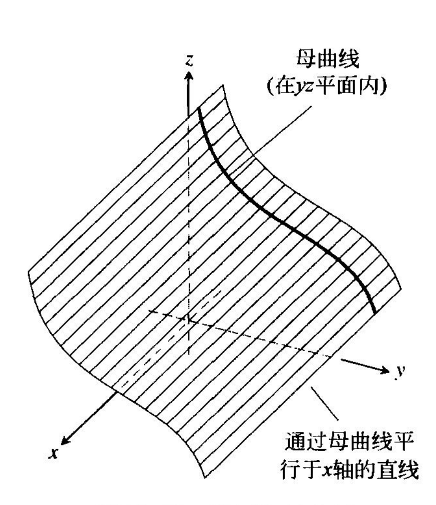



图 10.42 柱面和母曲线

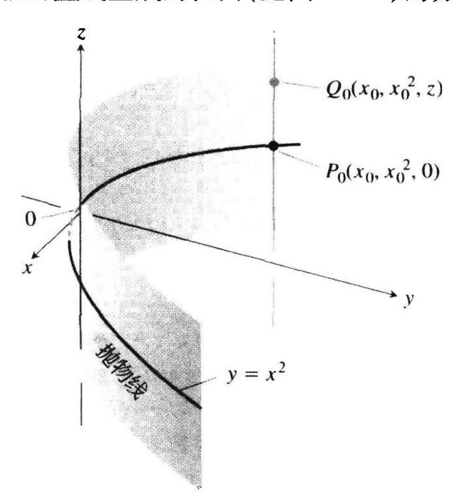



图 10.43 例 1 中柱面上每个点具有$(x_0,x_0^2,z)$形式的坐标, 把它称为"柱面 $y=x^2$"

**解** 点 $P_0(x_0,x_0^2,0)$位于 $xy$ 平面内的抛物线 $y=x^2$ 上. 于是, 对于任何 $z$ 值, 点 $Q(x_0,x_0^2,z)$位于柱面上, 因为它在通过 $P_0$ 平行于 $z$ 轴的直线 $x=x_0$, $y=x_0^2$ 上. 反之, 任何 $y$ 坐标为 $x$ 坐标的平方的点 $Q(x_0,x_0^2,z)$ 位于柱面上, 因为它位于通过 $P_0$ 平行于 $z$ 轴的直线 $x=x_0$, $y=x_0^2$ 上(见图 10.43).

因此, 无论 $z$ 取什么值, 曲面上的点是其坐标满足方程 $y=x^2$ 的点. 这使 $y=x^2$ 成为柱面的方程. 由于这个原因, 我们称这个柱面为"柱面 $y=x^2$". ■

正如例 1 所暗示的那样, $xy$ 平面内的任何曲线 $f(x,y)=c$ 定义一个平行于 $z$ 轴的柱面, 它的方程也是 $f(x,y)=c$. 例如, 方程 $x^2+y^2=1$ 定义由平行于 $z$ 轴的通过 $xy$ 平面内的圆 $x^2+y^2=1$ 的直线构成的圆柱面.

按同样方式, 在 $xz$ 平面内的任何曲线 $g(x,z)=c$, 定义一个平行于 $y$ 轴的柱面, 它的空间方程也是 $g(x,z)=c$. 任何曲线 $h(y,z)=c$ 定义一个平行于 $x$ 轴的柱面, 它的空间方程同样是 $h(y,z)=c$. 然而, 柱面无需是平行于坐标轴的.

### 10.6.2 二次曲面

**二次曲面**是 $x,y,z$ 的二次方程在空间中的图形. 我们把注意力集中到特殊的二次方程

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dz=E$$

上, 其中 $A,B,C,D,E$ 为常数. 基本的二次曲面是**椭球面**、**抛物面**、**椭圆锥面**和**双曲面**. 球面是椭球面的特例. 下面我们举出说明如何画二次曲面草图的几个例子, 然后给出基本类型的二次曲面图形的简表.

**例 2** **椭球面**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

(见图 10.44)在点$(\pm a,0,0)$, $(0,\pm b,0)$和$(0,0,\pm c)$同坐标轴相交. 它位于由不等式 $|x|\leqslant a$, $|y|\leqslant b$ 和 $|z|\leqslant c$ 定义的长方形框体内. 这个曲面对于每个坐标平面对称, 因为在定义曲面

的方程中每个变量带有平方.

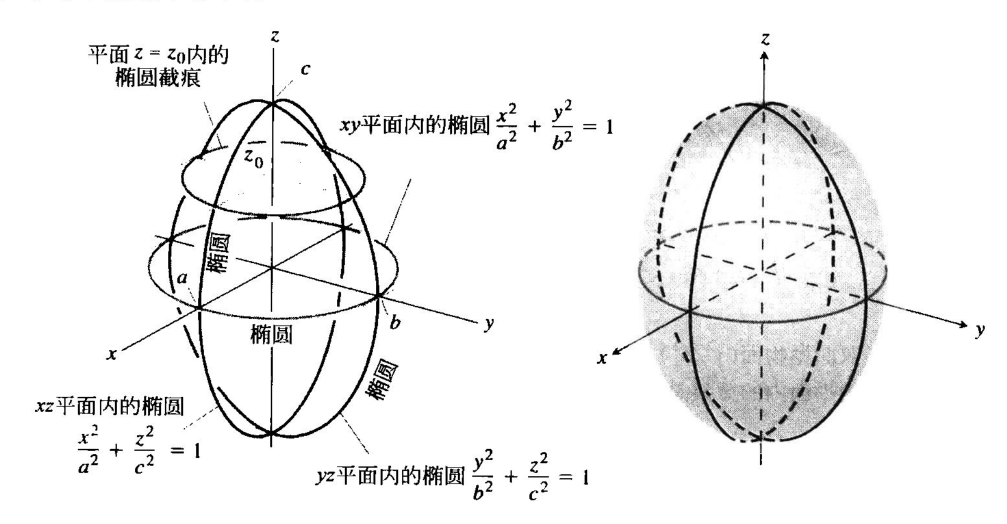



图 10.44 例 2 的椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

在三个坐标平面的每个平面内具有椭圆截痕

三个坐标平面对椭球面的截痕是椭圆. 例如，当 $z=0$ 时，

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

平面 $z=z_0$, $|z_0|<c$ 对椭球面的截痕是椭圆

$$\frac{x^2}{a^2(1-(z_0/c)^2)}+\frac{y^2}{b^2(1-(z_0/c)^2)}=1$$

如果椭球面的半轴 $a,b,c$ 中任何两个相等，曲面成为**旋转椭球面**. 如果三个半轴都相等，曲面变成球面. ■

**例 3　双曲抛物面**

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{z}{c},\quad c>0$$

具有对平面 $x=0$ 和 $y=0$ 的对称性(见图 10.45). 曲面在这两个平面内的截痕是

$$x=0:\quad \text{抛物线 } z=\frac{c}{b^2}y^2 \tag{1}$$

$$y=0:\quad \text{抛物线 } z=-\frac{c}{a^2}x^2 \tag{2}$$

在平面 $x=0$ 内，抛物线自原点向上张开. 在平面 $y=0$ 内，抛物线向下张开.

如果用平面 $z=z_0>0$ 切曲面，截痕是双曲线

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{z_0}{c}$$

它的焦轴平行于 $y$ 轴，而其顶点在方程(1)的抛物线上. 如果 $z_0$ 是负数，焦轴平行于 $x$ 轴，顶点在方程(2)的抛物线上.

在原点附近，曲面的形状像一座马鞍或者山隘. 对于在 $yz$ 平面内沿曲面的旅行者来说，原

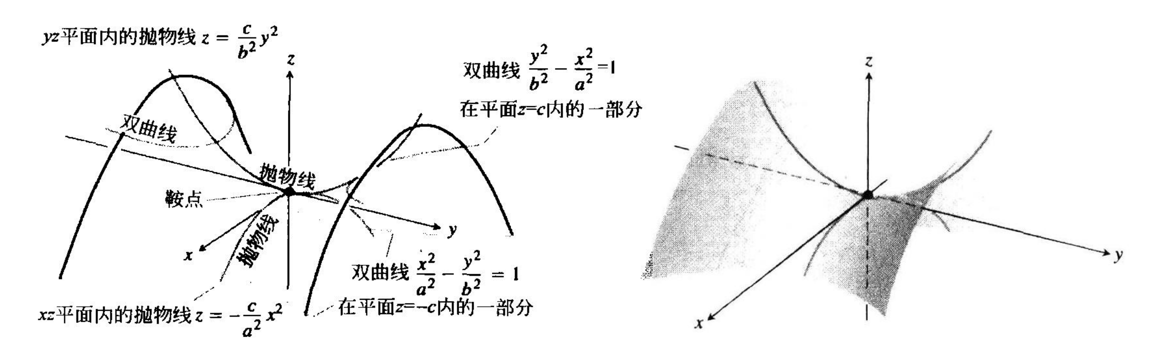



图 10.45 双曲抛物面$(y^2/b^2)-(x^2/a^2)=z/c$，$c>0$：在 $xy$ 平面上方和下方垂直于 $z$ 轴的平面内的截痕是双曲线；在垂直于其他轴的平面内的截痕是抛物线

点像是最低点．对于在 $xz$ 平面内沿曲面旅行者来说，原点像是最高点．这样一点称为曲面的**鞍点**．在 12.7 节将对鞍点作进一步讨论． ■

表 10.1 显示二次曲面 6 种基本类型的图形．所示每种曲面对 $z$ 轴对称，但是其他坐标轴也可以作为对称轴(对曲面方程作相应改变)．

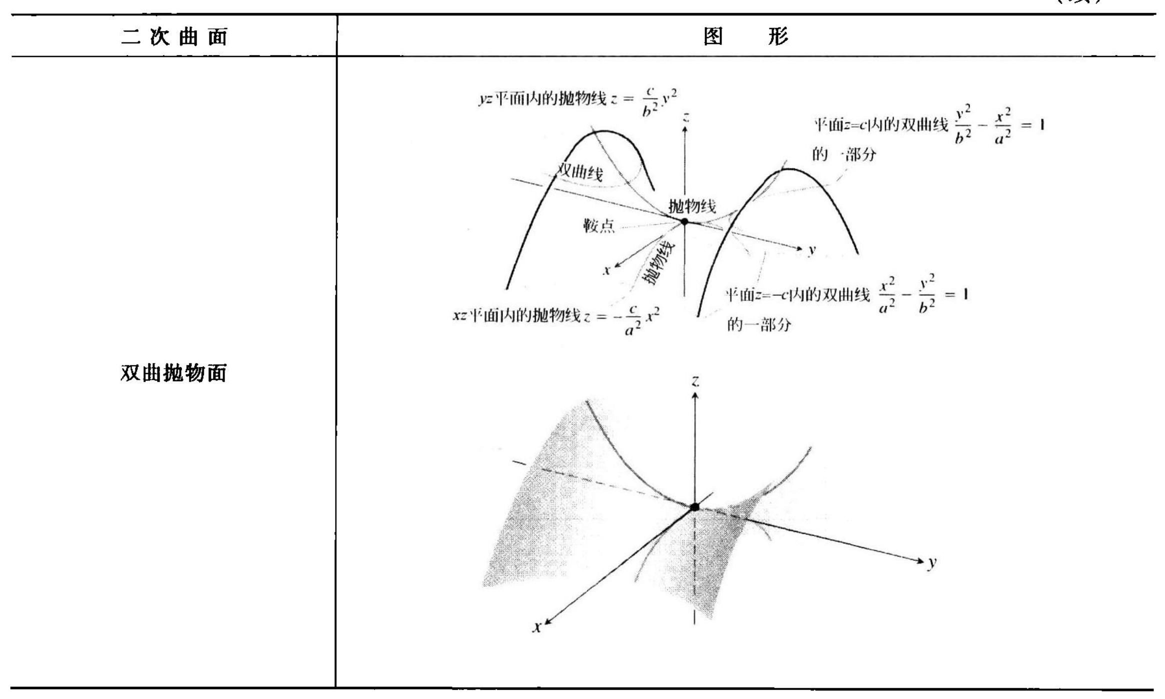
**表 10.1 二次曲面的图形**

| 二次曲面 | 图形 |
|---|---|
| 椭球面 | 平面$z=z_0$内的椭圆截痕；xy平面内的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$；xz平面内的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$；yz平面内的椭圆 $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ |
| 椭圆抛物面 | xz平面内的抛物线 $z=\frac{c}{a^2}x^2$；平面z=c内的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$；yz平面内的抛物线 $z=\frac{c}{b^2}y^2$ |

（续）

| 二次曲面 | 图　形 |
| --- | --- |
| 椭圆锥面 | |
| 单叶双曲面 | |
| 双叶双曲面 | |

（续）

| 二次曲面 | 图　　形 |
| --- | --- |
| 双曲抛物面 |  |

## 习题 10.6

在习题 1 ~ 12 中，匹配方程和它定义的曲面，此外，认定每个曲面的类型（抛物面、椭球面等）．曲面用(a) ~ (l)标识．

**1.** $x^2+y^2+4z^2=10$.　**2.** $z^2+4y^2-4x^2=4$.

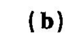
**3.** $9y^2+z^2=16$.　**4.** $y^2+z^2=x^2$.

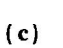
**5.** $x=y^2-z^2$.　**6.** $x=-y^2-z^2$.

**7.** $x^2+2z^2=8$.　**8.** $z^2+x^2-y^2=1$.

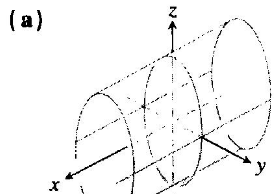
**9.** $x=z^2-y^2$.　**10.** $z=-4x^2-y^2$.

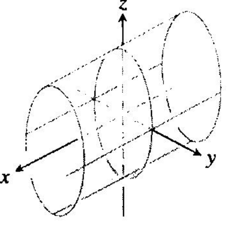
**11.** $x^2+4z^2=y^2$.　**12.** $9x^2+4y^2+2z^2=36$.



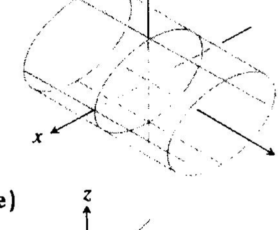


(a)

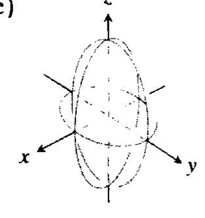




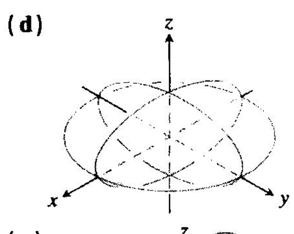
(b)



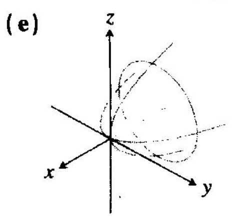
(c)



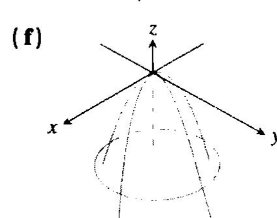
(d)



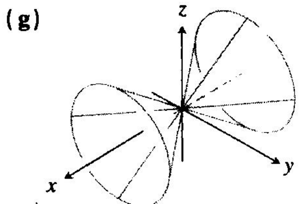
(e)



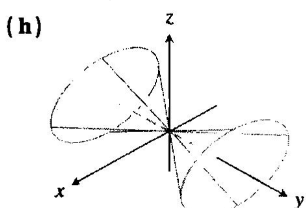
(f)



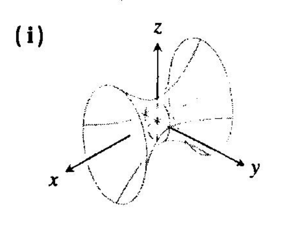
(g)



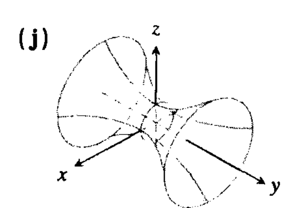
(h)



(i)



(j)




(k)

(l)

在习题 13 ~ 44 中，画出曲面的草图.

**柱面**

**13.** $x^2+y^2=4$.　　**14.** $z=y^2-1$.

**15.** $x^2+4z^2=16$.　　**16.** $4x^2+y^2=36$.

**椭球面**

**17.** $9x^2+y^2+z^2=9$.　　**18.** $4x^2+4y^2+z^2=16$.

**19.** $4x^2+9y^2+4z^2=36$.　　**20.** $9x^2+4y^2+36z^2=36$.

**抛物面与锥面**

**21.** $z=x^2+4y^2$.　　**22.** $z=8-x^2-y^2$.

**23.** $x=4-4y^2-z^2$.　　**24.** $y=1-x^2-z^2$.

**25.** $x^2+y^2=z^2$.　　**26.** $4x^2+9z^2=9y^2$.

**双曲面**

**27.** $x^2+y^2-z^2=1$.　　**28.** $y^2+z^2-x^2=1$.

**29.** $z^2-x^2-y^2=1$.　　**30.** $(y^2/4)-(x^2/4)-z^2=1$.

**双曲抛物面**

**31.** $y^2-x^2=z$.　　**32.** $x^2-y^2=z$.

**混合型曲面**

**33.** $z=1+y^2-x^2$.　　**34.** $4x^2+4y^2=z^2$.

**35.** $y=-(x^2+z^2)$.　　**36.** $16x^2+4y^2=1$.

**37.** $x^2+y^2-z^2=4$.　　**38.** $x^2+z^2=y$.

**39.** $x^2+z^2=1$.　　**40.** $16y^2+9z^2=4x^2$.

**41.** $z=-(x^2+y^2)$.　　**42.** $y^2-x^2-z^2=1$.

**43.** $4y^2+z^2-4x^2=4$.　　**44.** $x^2+y^2=z$.

**45.** (a) 把由平面 $z=c$ 从椭球面

$$x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$$

切出截痕的面积 $A$ 表示成 $c$ 的函数.（半轴为 $a$ 和 $b$ 的椭圆的面积为 $\pi ab$.）

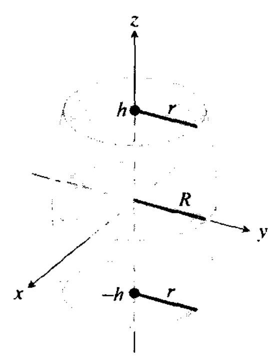
(b) 对于(a)中的椭球面利用垂直于 $z$ 轴的切片求体积.

(c) 现在求椭球

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的体积. 你得到的公式在 $a=b=c$ 时能给出半径为 $a$ 的球的体积吗？

**46.** 附图所示圆桶像椭球两端用垂直于 $z$ 轴的平面切去后的形状. 垂直于 $z$ 轴的截痕是圆. 圆桶高 $2h$ 单位，正中截痕的半径为 $R$，两端的半径为 $r$. 求圆桶的体积公式. 然后检验两件事情. 第一，假定把桶壁变直，使圆桶变成半径为 $R$ 和高为 $2h$ 的圆柱面. 你的公式能给出圆柱面的体积吗？第二，假设 $r=0$ 和 $h=R$，圆桶成为一个球面. 你的公式能给出球的体积吗？




**47.** 证明，用平面 $z=h$ 从抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$$

切出区域的体积，等于区域底部面积乘它的高度的一半.

**48.** (a) 求以双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

和平面 $z=0$ 及 $z=h$，$h>0$ 为界的立体的体积.

(b) 把(a)中的体积公式用 $h$ 以及以平面 $z=0$ 和 $z=h$ 从双曲面切出区域的面积 $A_0$ 和 $A_h$ 表示.

(c) 证明(a)中的体积也由公式

$$V=\frac{h}{6}(A_0+4A_m+A_h)$$

给出，其中 $A_m$ 是用平面 $z=h/2$ 从双曲面切出区域的面积.

**T** 在习题 49 ~ 52 中，画出曲面在指定定义域上的图形. 如果可能，把曲面旋转到不同的观察位置.

**49.** $z=y^2$，$-2\leqslant x\leqslant 2$，$-0.5\leqslant y\leqslant 2$.

**50.** $z=1-y^2$，$-2\leqslant x\leqslant 2$，$-2\leqslant y\leqslant 2$.

**51.** $z=x^2+y^2$，$-3\leqslant x\leqslant 3$，$-3\leqslant y\leqslant 3$.

**52.** $z=x^2+2y^2$ 在下列定义域上：

(a) $-3\leqslant x\leqslant 3$, $-3\leqslant y\leqslant 3$;
(b) $-1\leqslant x\leqslant 1$, $-2\leqslant y\leqslant 3$;
(c) $-2\leqslant x\leqslant 2$, $-2\leqslant y\leqslant 2$;
(d) $-2\leqslant x\leqslant 2$, $-1\leqslant y\leqslant 1$.

**计算机探究**

在习题 53 ~ 58 中，用一种 CAS(计算机代数系统)绘制曲面的图形. 从图形确定二次曲面的类型.

**53.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1-\frac{z^2}{25}$. **54.** $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{9}=1-\frac{y^2}{16}$.

**55.** $5x^2=z^2-3y^2$. **56.** $\frac{y^2}{16}=1-\frac{x^2}{9}+z$.

**57.** $\frac{x^2}{9}-1=\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{2}$. **58.** $y-\sqrt{4-z^2}=0$.

## 第 10 章复习指导问题

1. 平面内的有向线段在何种情况下代表同一向量?
2. 几何上如何作向量的加法和减法? 代数上如何作向量的这两种运算?
3. 如何求向量的长度和方向?
4. 如果用正的纯量乘向量，结果同原向量有何关系? 如果纯量是零或者负数，结果同原向量有何关系?
5. 定义两个向量的*点积*(*纯量积*). 点积满足哪些代数法则? 举出一些例子. 两个向量的点积在什么情况下等于零?
6. 点积有什么几何解释? 举出一些例子.
7. 向量 $\boldsymbol{u}$ 在向量 $\boldsymbol{v}$ 上的向量投影是什么? 举一个有用的向量投影应用的实例.
8. 定义两个向量的*向量积*(*叉积*). 向量积满足哪些代数定律，不满足哪些代数定律? 举出一些例子. 两个向量的向量积在什么情况下等于零?
9. 向量积有什么几何解释或者物理解释? 举出一些例子.
10. 在笛卡儿 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 坐标系中，计算两个向量的向量积的行列式公式是什么? 举一个用行列式公式的例子.
11. 如何求空间中的直线、段段和平面的方程? 举出一些例子. 你能只用一个方程表示空间中的直线和平面吗?
12. 如何求空间中从一点到一条线以及从一点到一个平面的距离? 举出一些例子.
13. 什么是框积? 框积有何意义? 如何计算框积? 举一个例子.
14. 如何求空间中球面的方程? 举出一些例子.
15. 如何求空间中两条直线的交点? 如何求一条直线同一个平面的交点? 如何求两个平面的交线? 举出一些例子.
16. 什么是柱面? 举出在笛卡儿坐标中定义柱面的方程的一些例子.
17. 什么是二次曲面? 举出不同类型的椭球面、抛物面、锥面和双曲面(方程和图形)的例子.

## 第 10 章实习习题

在习题 1 ~ 4 中，令 $\boldsymbol{u}=\langle -3,4\rangle$, $\boldsymbol{v}=\langle 2,-5\rangle$. 求(a)向量的分量形式，(b)它的长度.

**1.** $3\boldsymbol{u}-4\boldsymbol{v}$. **2.** $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$.

**3.** $-2\boldsymbol{u}$. **4.** $5\boldsymbol{v}$.

在习题 5 ~ 8 中，求向量的分量形式.

**5.** 向量由转动 $\langle 0,1\rangle$ 经过 $2\pi/3$ 弧度角得到.

**6.** 同正 $x$ 轴构成 $\pi/6$ 弧度角的单位向量.

**7.** 在 $4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$ 的方向上长度为 2 单位的向量.

**8.** 在向量 $(3/5)\boldsymbol{i}+(4/5)\boldsymbol{j}$ 的反方向上长度为 5 单位的向量.

在习题 9 ~ 12 中，用向量的长度和方向表示向量.

**9.** $\sqrt{2}\boldsymbol{i}+\sqrt{2}\boldsymbol{j}$. **10.** $-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$.

**11.** 当 $t=\pi/2$ 时的速度向量 $\boldsymbol{v}=(-2\sin t)\boldsymbol{i}+(2\cos t)\boldsymbol{j}$.

**12.** 当 $t=\ln 2$ 时的速度向量 $\boldsymbol{v}=(e^t\cos t-e^t\sin t)\boldsymbol{i}+(e^t\sin t+e^t\cos t)\boldsymbol{j}$.

在习题 13 和 14 中，用向量的长度和方向表示向量.

**13.** $2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$. **14.** $\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$.

**15.** 求在 $\boldsymbol{v}=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ 的方向上长度为 2 单位的向量.

**16.** 求在向量 $\boldsymbol{v}=(3/5)\boldsymbol{i}+(4/5)\boldsymbol{k}$ 的反方向上长度为 5 单位的向量.

在习题 17 和 18 中，求 $|\boldsymbol{v}|$, $|\boldsymbol{u}|$, $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$, $|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}|$, $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 之间的角，$\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 的方向上的纯量分量，以及 $\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 上的向量投影.

**17.** $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$;
$\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$.

**18.** $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$;
$\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$.

在习题 19 和 20 中，求 $\text{proj}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$.

**19.** $\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$;
$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$.

**20.** $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$;
$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

在习题 21 和 22 中，画出坐标轴，然后画出

$u$，$v$ 和 $u\times v$ 作为在原点的向量.

**21.** $u=i$，$v=i+j$. **22.** $u=i-j$，$v=i+j$.

**23.** 设 $|v|=2$，$|w|=3$，并且 $v$ 和 $w$ 之间的角为 $\pi/3$. 求 $|v-2w|$.

**24.** 向量 $u=2i+4j-5k$ 和 $v=-4i-8j+ak$ 对于 $a$ 的哪个值或者哪些值是平行的？

在习题 25 和 26 中，求(a)由 $u$ 和 $v$ 决定的平行四边形的面积，(b)由 $u$，$v$ 和 $w$ 决定的平行六面体的体积.

**25.** $u=i+j-k$，$v=2i+j+k$，$w=-i-2j+3k$.

**26.** $u=i+j$，$v=j$，$w=i+j+k$.

**27.** 假定 $n$ 是同一个平面正交的向量，而 $v$ 是同这个平面平行的向量. 描述如何求一个向量 $n$，它既垂直于 $v$ 又平行于这个平面.

**28.** 求平面内一个同直线 $ax+by=c$ 平行的向量.

在 29 和 30 中，求从点到直线的距离.

**29.** $(2,2,0)$；$x=-t$，$y=t$，$z=-1+t$.

**30.** $(0,4,1)$；$x=2+t$，$y=2+t$，$z=t$.

**31.** 用参数化法表示通过点 $(1,2,3)$ 平行于向量 $v=-3i+7k$ 的直线.

**32.** 用参数方式表示联结点 $P(1,2,0)$ 和 $Q(1,3,-1)$ 的线段.

在习题 33 和 34 中，求从点到平面的距离.

**33.** $(6,0,-6)$；$x-y=4$.

**34.** $(3,0,10)$；$2x+3y+z=2$.

**35.** 求通过点 $(3,-2,1)$ 同向量 $n=2i+j+k$ 正交的平面的方程.

**36.** 求通过点 $(-1,6,0)$ 垂直于直线 $x=-1+t$，$y=6-2t$，$z=3t$ 的平面的方程.

在习题 37 和 38 中，求经过点 $P,Q,R$ 的平面的方程.

**37.** $P(1,-1,2)$，$Q(2,1,3)$，$R(-1,2,-1)$.

**38.** $P(1,0,0)$，$Q(0,1,0)$，$R(0,0,1)$.

**39.** 求直线 $x=1+2t$，$y=-1-t$，$z=3t$ 同三个坐标平面的交点.

**40.** 求通过原点垂直于平面 $2x-y-z=4$ 的直线同平面 $3x-5y+2z=6$ 的交点.

**41.** 求平面 $x=7$ 和 $x+y+\sqrt{2}z=-3$ 之间的锐角.

**42.** 求平面 $x+y=1$ 和 $y+z=1$ 之间的锐角.

**43.** 求平面 $x+2y+z=1$ 和 $x-y+2z=-8$ 的交线的参数方程.

**44.** 证明，平面

$$x+2y-2z=5 \text{ 和 } 5x-2y-z=0$$

的交线平行于直线

$$x=-3+3t, y=3t, z=1+4t$$

**45.** 平面 $3x+6z=1$ 同 $2x+2y-z=3$ 相交于一条直线.

(a) 证明这两个平面是正交的.

(b) 求这两个平面交线的方程.

**46.** 求通过点 $(1,2,3)$ 平行于向量 $u=2i+3j+k$ 和 $v=i-j+2k$ 的平面的方程.

**47.** 在向量 $v=2i-4j+k$ 同平面 $2x+y=5$ 之间存在任何特殊关系吗？提出答案的理由.

**48.** 方程 $n\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$ 表示通过点 $P_0$ 同 $n$ 正交的平面. 不等式 $n\cdot\overrightarrow{P_0P}>0$ 的点集表示什么？

**49.** 求从点 $P(1,4,0)$ 到通过点 $A(0,0,0)$，$B(2,0,-1)$ 和 $C(2,-1,0)$ 的平面的距离.

**50.** 求从点 $(2,2,3)$ 到平面 $2x+3y+5z=0$ 的距离.

**51.** 求一个平行于平面 $2x-y-z=4$ 和同向量 $i+j+k$ 正交的向量.

**52.** 设 $A=2i-j+k$，$B=i+2j+k$，$C=i+j-2k$. 求一个在 $B$ 和 $C$ 的平面内同 $A$ 正交的单位向量.

**53.** 求一个长度为 2 同平面 $x+2y+z-1=0$ 和 $x-y+2z+7=0$ 的交线平行的向量.

**54.** 求通过原点垂直于平面 $2x-y-z=4$ 的直线同平面 $3x-5y+2z=6$ 的交点.

**55.** 求通过点 $P(3,2,1)$ 正交于平面 $2x-y+2z=-2$ 的直线同这个平面的交点.

**56.** 平面 $2x+y-z=0$ 和 $x+y+2z=0$ 的交线同正 $x$ 轴构成的夹角是什么？

**57.** 直线

$$L:\quad x=3+2t, y=2t, z=t$$

同平面 $x+3y-z=-4$ 在点 $P$ 相交. 求 $P$ 的坐标，并且求这个平面内通过 $P$ 垂直于 $L$ 的直线的方程.

**58.** 证明：对于每个实数 $k$，平面

$$x-2y+z+3+k(2x-y-z+1)=0$$

包含平面

$$x-2y+z+3=0 \text{ 和 } 2x-y-z+1=0$$

的交线.

**59.** 求通过点 $A(-2,0,-3)$ 和 $B(1,-2,1)$ 的直线以及同经过点 $C(-2,-13/5,26/5)$ 和 $D(16/5,-13/5,0)$ 的直线平行的平面的方程.

**60.** 直线 $x=1+2t$，$y=-2+3t$，$z=-5t$ 同平面 $-4x-6y+10z=9$ 存在任何关系吗？提出答案的理由.

**61.** 下面哪些平面方程是通过点 $P(1,1,-1)$，$Q(3,0,2)$ 和 $R(-2,1,0)$ 的方程？

(a) $(2i-3j+3k)\cdot((x+2)i+(y-1)j+zk)=0$;

(b) $x=3-t$，$y=-11t$，$z=2-3t$;

(c) $(x+2)+11(y-1)=3z$;

(d) $(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})\times((x+2)\boldsymbol{i}+(y-1)\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})=\boldsymbol{0}$;

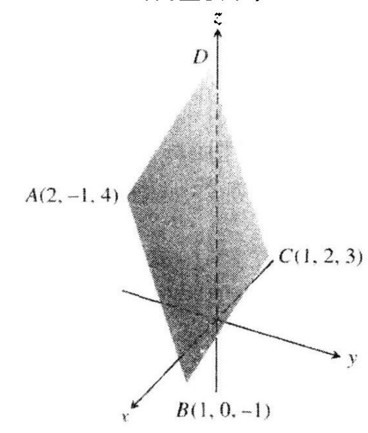
(e) $(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})\times(-3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})\cdot((x+2)\boldsymbol{i}+(y-1)\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})=0$.

**62.** 附图所示的平行四边形的顶点在 $A(2,-1,4)$，$B(1,0,-1)$，$C(1,2,3)$ 和 $D$. 求

(a) $D$ 的坐标；

(b) 在 $B$ 的内角的余弦；

(c) $\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的向量投影；




(d) 平行四边形的面积；

(e) 平行四边形所在平面的方程；

(f) 平行四边形在三个坐标平面上的正交投影的面积.

**63. 直线之间的距离** 求通过点 $A(1,0,-1)$ 和 $B(-1,1,0)$ 的直线 $L_1$ 同通过点 $C(3,1,-1)$ 和 $D(4,5,-2)$ 的直线 $L_2$ 之间的距离. 这个距离是沿两条直线之间的垂线度量的. 首先求一个垂直于两条垂直线向量 $\boldsymbol{n}$. 然后求 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 上的投影.

**64.** (续习题 63) 求通过 $A(4,0,2)$ 和 $B(2,4,1)$ 的直线同通过点 $C(1,3,2)$ 和 $D(2,2,4)$ 的直线之间的距离.

在习题 65 ~ 76 中确定曲面的类型，并且画出曲面的草图.

**65.** $x^2+y^2+z^2=4$.

**66.** $x^2+(y-1)^2+z^2=1$.

**67.** $4x^2+4y^2+z^2=4$.

**68.** $36x^2+9y^2+4z^2=36$.

**69.** $z=-(x^2+y^2)$.

**70.** $y=-(x^2+z^2)$.

**71.** $x^2+y^2=z^2$.

**72.** $x^2+z^2=y^2$.

**73.** $x^2+y^2-z^2=4$.

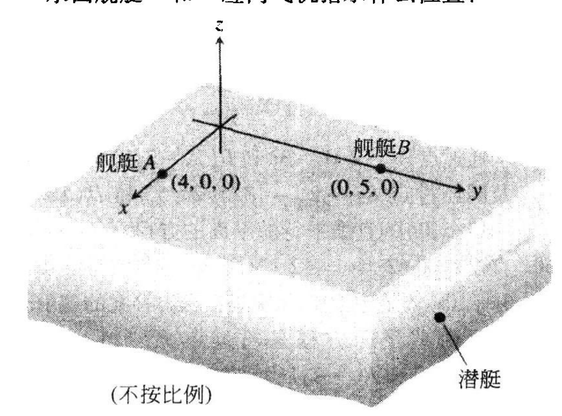
**74.** $4y^2+z^2-4x^2=4$.

**75.** $y^2-x^2-z^2=1$.

**76.** $z^2-x^2-y^2=1$.

## 第 10 章补充和提高习题

**1. 截击潜艇** 两艘演习中的水面舰艇试图确定一艘潜艇的航线和速度，以便实施飞机截击. 如附图所示，舰艇 $A$ 位于点 $(4,0,0)$，而舰艇 $B$ 位于点 $(0,5,0)$. 全部坐标以千英尺为单位. 舰艇 $A$ 定位潜艇在向量 $2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-(1/3)\boldsymbol{k}$ 的方向，舰艇 $B$ 定位潜艇在向量 $18\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 的方向. 4 分钟以前，潜艇位于点 $(2,-1,-1/3)$. 飞机正好在 20 分钟内到达. 假定潜艇按直线航线以常速航行. 水面舰艇 $A$ 和 $B$ 应向飞机指示什么位置？



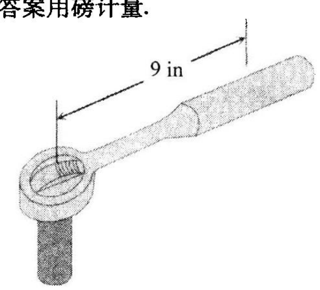

**2. 直升机救援** 两架直升机 $H_1$ 和 $H_2$ 一起飞行：在时间 $t$，它们分别飞行在由

$H_1$：$x=6+40t$，$y=-3+10t$，$z=-3+2t$

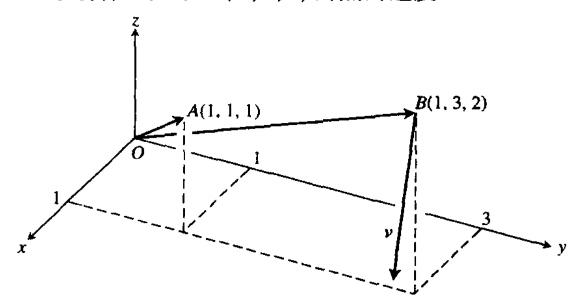
$H_2$：$x=6+110t$，$y=-3+4t$，$z=-3+t$

给出的不同直线航线上. 时间 $t$ 以小时为度量单位，全部坐标以英里为度量单位. 由于系统故障，$H_2$ 在点 $(446,13,1)$ 处停止飞行，并且在可以忽略的时间内着陆到点 $(446,13,0)$. 两小时后，$H_1$ 得到这个事件的消息并且以 150 mph 的航速朝 $H_2$ 飞去. $H_1$ 到达 $H_2$ 的着陆点需要多少时间？

**3. 转矩** Toro 牌 21 英寸割草机操作手册上载明"拧紧火花塞到 15 ft-lb(合 20.4 N · m)". 如果你正在用一把 10.5 英寸孔径扳钳安装火花塞，掌心放在离火花塞的轴 9 英寸处，大约需要用多大的扳力？答案用磅计量.



4. **旋转物体** 通过原点和点 $A(1,1,1)$ 的直线是以常角速率 3/2 弧度/秒(rad/s)旋转一个刚体的旋转轴. 从 $A$ 向原点看去旋转取顺时针方向. 求物体上处于 $B(1,3,2)$ 的点的速度 $\mathbf{v}$.




5. **行列式与平面**

(a) 证明

$$\begin{vmatrix} x_1-x & y_1-y & z_1-z \\ x_2-x & y_2-y & z_2-z \\ x_3-x & y_3-y & z_3-z \end{vmatrix}=0$$

是通过三个不共线点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 和 $P_3(x_3,y_3,z_3)$ 的平面的方程.

(b) 由方程

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

描述的是空间中的什么点集?

6. **行列式与直线** 证明: 直线

$x=a_1s+b_1,\ y=a_2s+b_2,\ z=a_3s+b_3,\ -\infty<s<\infty$

和

$x=c_1t+d_1,\ y=c_2t+d_2,\ z=c_3t+d_3,\ -\infty<t<\infty$

相交或者平行, 当且仅当

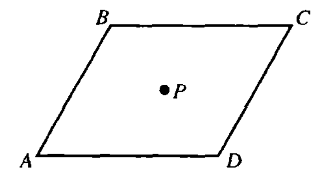
$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1-d_1 \\ a_2 & c_2 & b_2-d_2 \\ a_3 & c_3 & b_3-d_3 \end{vmatrix}=0$$

7. **平行四边形** 附图显示平行四边形 $ABCD$ 和对角线 $BD$ 的中点 $P$.

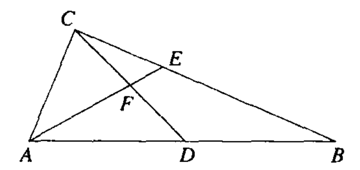
(a) 用 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AD}$ 表示 $\overrightarrow{BD}$.

(b) 用 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AD}$ 表示 $\overrightarrow{AP}$.

(c) 证明 $P$ 也是对角线 $\overrightarrow{AC}$ 的中点.




8. 在附图中, $D$ 是三角形 $ABC$ 的 $AB$ 边的中点, $E$ 是 $C$ 和 $B$ 之间三分之一处的点. 利用向量证明, $F$ 是线段 $CD$ 的中点.




9. 利用向量证明, 从 $P_1(x_1,y_1)$ 到直线 $ax+by=c$ 的距离为

$$d=\frac{|ax_1+by_1-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

10. (a) 利用向量证明, 从 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 到平面 $Ax+By+Cz=D$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(b) 求一个球面的方程, 这个球面同平面 $x+y+z=3$ 和 $x+y+z=9$ 相切, 并且平面 $2x-y=0$ 和 $3x-z=0$ 通过球心.

11. (a) 证明, 两个平行平面 $Ax+By+Cz=D_1$ 和 $Ax+By+Cz=D_2$ 之间的距离为

$$d=\frac{|D_1-D_2|}{|A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}|}$$

(b) 求平面 $2x+3y-z=6$ 和 $2x+3y-z=12$ 之间的距离.

(c) 求一个平面的方程, 这个平面同平面 $2x-y+2z=-4$ 平行, 并且从点 $(3,2,-1)$ 到两个平面的距离相等.

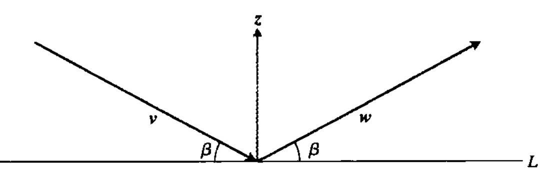
(d) 写出同平面 $x-2y+z=3$ 平行并且距离这个平面 5 单位的平面的方程.

12. 证明: 四点 $A$, $B$, $C$, $D$ 共面(位于一个共同的平面内), 当且仅当 $\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC})=0$.

13. **向量在平面上的投影** 设 $P$ 是空间中的平面, $\mathbf{v}$ 是向量. $\mathbf{v}$ 在平面 $P$ 上的向量投影 $\mathrm{proj}_P\mathbf{v}$ 可以非形式地定义如下: 假定太阳照耀平面时它的射线同 $P$ 正交。那么 $\mathrm{proj}_P\mathbf{v}$ 是 $\mathbf{v}$ 在 $P$ 上的"影子". 如果 $P$ 是平面 $x+2y+6z=6$, $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, 求 $\mathrm{proj}_P\mathbf{v}$.

14. 附图显示非零向量 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 和 $\mathbf{z}$, 其中 $\mathbf{z}$ 同直线 $L$ 正交, $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 同 $L$ 构成等角 $\beta$. 假设 $|\mathbf{v}|=|\mathbf{w}|$, 求用 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{z}$ 表示的 $\mathbf{w}$.

15. **三重向量积** 三重向量积 $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}$ 同 $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ 通常是不相等的, 虽然用分量计算它们的公式是相似的:




$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$$

对于下列向量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$，通过计算公式两端并且比较结果证实每个公式：

(a) $\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{w}=2\boldsymbol{k}$；

(b) $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$；

(c) $\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}$；

(d) $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{w}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$.

**16. 向量积与点积** 证明：若 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 是任意向量，则有

(a) $\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})+\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u})+\boldsymbol{w}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}$；

(b) $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{i})\boldsymbol{i}+(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{j})\boldsymbol{j}+(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}$；

(c) $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}\\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}\end{vmatrix}$.

**17. 向量积与点积** 证明公式

$$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}))\cdot\boldsymbol{w}=-|\boldsymbol{u}|^2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}$$

成立或者不成立.

**18.** 通过构成两个相应向量的向量积，推导三角恒等式

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

**19.** 利用向量证明

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$$

其中 $a$，$b$，$c$，$d$ 是任意实数.（提示：令 $\boldsymbol{u}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{v}=c\boldsymbol{i}+d\boldsymbol{j}$.）

**20.** 证明：向量 $\boldsymbol{u}-\mathrm{proj}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ 同投影向量 $\mathrm{proj}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$ 正交，采用证明它们的点积为零的方法.

**21.** 对于任意向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，证明 $|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|\leqslant|\boldsymbol{u}|+|\boldsymbol{v}|$.

**22.** 证明 $\boldsymbol{w}=|\boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}+|\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}$ 等分 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 之间的角.

**23.** 证明 $|\boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}+|\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}$ 同 $|\boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}-|\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}$ 正交.

**24. 点乘是正定的** 证明向量的点乘是正定的；就是说，证明 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\geqslant 0$ 对于每个向量 $\boldsymbol{u}$ 成立，并且 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$.

# 第 11 章　空间中的向量值函数和物体的运动

**概述**　这一章介绍向量值函数的微积分，包括这种函数的导数和积分. 我们在本章利用向量微积分研究运动物体的路径、速度和加速度. 从讨论过程中可以了解如何解答关于平面内或者空间中的抛射体和其他运动物体的路径和运动的问题.

## 11.1　向量函数及其导数

当质点在整个时间区间 $I$ 内经过空间移动时，我们把质点的坐标看成定义在 $I$ 上的函数：

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad t \in I \tag{1}$$

点集 $\{(x,y,z) \mid x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t);\ t \in I\}$ 构成空间中的**曲线**，称为质点的**路径**. 式(1)中的方程和区间给出曲线的**参数表示**.

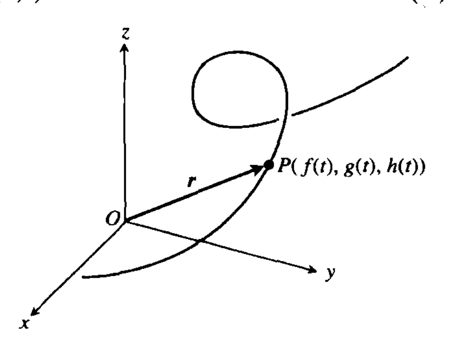


图 11.1　经过空间运动的质点的位置向量 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP}$ 是时间的函数

空间中的曲线也可以用向量形式表示. 从原点到质点在时间 $t$ 的**位置** $P(f(t), g(t), h(t))$ 的向量

$$\boldsymbol{r}(t) = \overrightarrow{OP} = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k} \tag{2}$$

是质点的**位置向量**(见图 11.1). 函数 $f$, $g$ 和 $h$ 是位置向量的**分量函数**(**分量**). 我们把质点的路径想象成在时间区间 $I$ 内**由 $\boldsymbol{r}$ 描绘的曲线**. 图 11.2 显示由计算机绘图程序产生的几条空间曲线. 这些曲线难于用手工方法绘制.

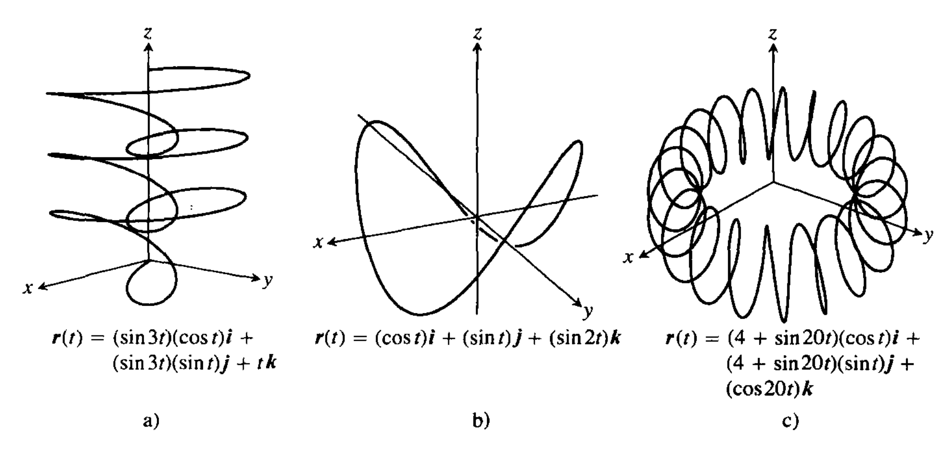


图 11.2　计算机产生的由位置向量 $\boldsymbol{r}(t)$ 定义的空间曲线

方程(2)把 $\boldsymbol{r}$ 定义为区间 $I$ 上实变量 $t$ 的向量函数. 在更一般的情况下，定义域集合 $D$ 上的**向量值函数**或者**向量函数**是一种赋值规划，对 $D$ 中的每个元素赋予空间中的一个向量. 至于当前，我们把定义域限制为产生空间曲线的实数区间. 在后面第 14 章，将以平面内的区域作为定义域. 在那时，向量函数将表示空间中的曲面. 平面内或者空间中的定义域上的向量函数也导致“向量场”，这种场在研究流体流动、引力场和电磁现象中是很重要的. 我们将在第 14 章考察向

量场及其应用.

实值函数称为纯量函数，以便把它们同向量函数区别开来. $\boldsymbol{r}$ 的分量是 $t$ 的纯量函数. 向量值函数的定义域是其分量的公共定义域.

**例 1** 绘制向量函数

$$\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$$

的图形.

**解** 向量函数

$$\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$$

是对所有实数值 $t$ 定义的. 由 $\boldsymbol{r}$ 描绘的曲线绕圆柱面 $x^2+y^2=1$ 盘旋(见图 11.3). 曲线位于圆柱面上，因为 $\boldsymbol{r}$ 的 $\boldsymbol{i}$ 分量和 $\boldsymbol{j}$ 分量是 $\boldsymbol{r}$ 顶端的 $x$ 坐标和 $y$ 坐标，满足圆柱面方程

$$x^2+y^2=(\cos t)^2+(\sin t)^2=1$$

曲线当 $\boldsymbol{k}$ 分量 $z=t$ 增加时上升. 每当 $t$ 增加 $2\pi$，曲线围绕柱面转动一圈. 此曲线称为**螺旋线**(helix)(来源于古希腊字"spiral"(螺旋体)). 方程

$$x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad z=t$$

是螺旋线的参数表示形式，参数 $t$ 的区间被看成 $-\infty<t<\infty$. 在图 11.4 中可见到其他几种螺旋线. ■

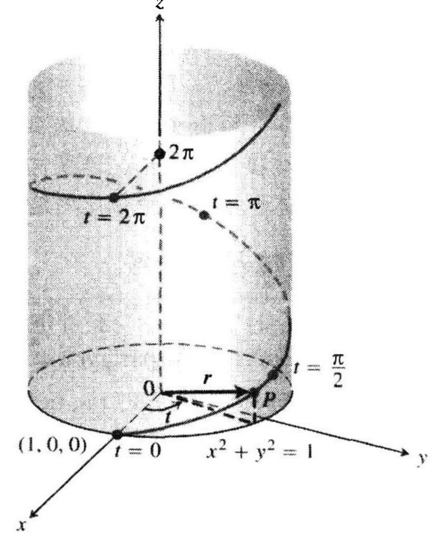
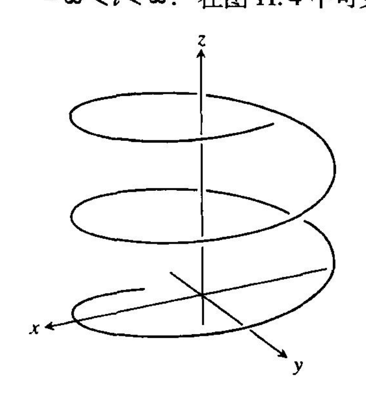
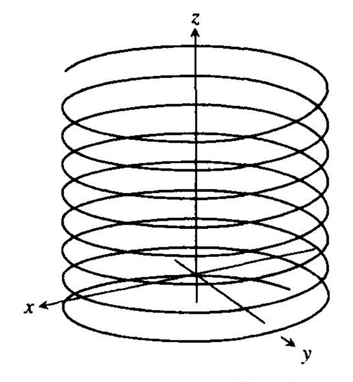


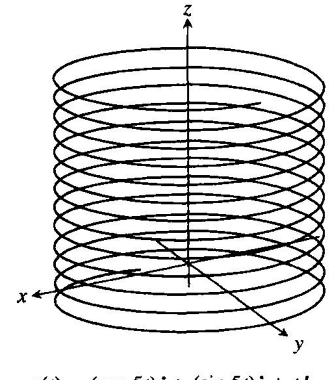

图 11.3 螺旋线 $\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$ 的上半部分(例 1)




$\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$




$\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j}+0.3t\boldsymbol{k}$




$\boldsymbol{r}(t)=(\cos 5t)\boldsymbol{i}+(\sin 5t)\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$

图 11.4 由计算机绘制的螺旋线

### 11.1.1 极限与连续性

定义向量值函数的极限的方法，同定义实数值函数的极限的方法相似.

> **定义** 令 $\boldsymbol{r}(t)=f(t)\boldsymbol{i}+g(t)\boldsymbol{j}+h(t)\boldsymbol{k}$ 是向量函数，$\boldsymbol{L}$ 是向量. 如果对于每个数 $\varepsilon>0$，存在一个对应的数 $\delta>0$，使得对于所有 $t$ 有
>
> $$0<|t-t_0|<\delta \Rightarrow |\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{L}|<\varepsilon$$
>
> 就说 $\boldsymbol{r}$ 当 $t$ 趋近 $t_0$ 时有**极限** $\boldsymbol{L}$，并且记为
>
> $$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{L}$$

如果 $\boldsymbol{L}=L_1\boldsymbol{i}+L_2\boldsymbol{j}+L_3\boldsymbol{k}$，那么当

$$\lim_{t\to t_0}f(t)=L_1,\quad \lim_{t\to t_0}g(t)=L_2,\quad \lim_{t\to t_0}h(t)=L_3$$

时，恰好可以证明 $\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{L}$. 证明从略. 公式

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\left(\lim_{t\to t_0}f(t)\right)\boldsymbol{i}+\left(\lim_{t\to t_0}g(t)\right)\boldsymbol{j}+\left(\lim_{t\to t_0}h(t)\right)\boldsymbol{k}\tag{3}$$

提供一种计算向量函数极限的实际方法.

**例 2** 若 $\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$，则有

$$\lim_{t\to\pi/4}\boldsymbol{r}(t)=\left(\lim_{t\to\pi/4}\cos t\right)\boldsymbol{i}+\left(\lim_{t\to\pi/4}\sin t\right)\boldsymbol{j}+\left(\lim_{t\to\pi/4}t\right)\boldsymbol{k}=\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}+\frac{\pi}{4}\boldsymbol{k}$$ ■

定义向量函数的连续性同定义纯量函数的连续性的方法一样.

> **定义** 向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 在其定义域的一点 $t=t_0$ 是**连续的**，是指 $\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(t_0)$. 如果函数在其定义域的每个点是连续的，那么函数是**连续的**.

从公式(3)看出，$\boldsymbol{r}(t)$ 在 $t=t_0$ 是连续的，当且仅当每个分量函数在这个点是连续的(见习题31).

**例 3**

**(a)** 显示在图 11.2 和图 11.4 中的所有空间曲线是连续的，因为它们的分量函数在 $t\in(-\infty,\infty)$ 的每个值是连续的.

**(b)** 函数

$$\boldsymbol{g}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j}+\lfloor t\rfloor\boldsymbol{k}$$

在每个整数点是不连续的，其中最大整数函数 $\lfloor t\rfloor$ 是不连续的. ■

### 11.1.2 导数与运动

假定 $\boldsymbol{r}(t)=f(t)\boldsymbol{i}+g(t)\boldsymbol{j}+h(t)\boldsymbol{k}$ 是沿一条空间曲线移动的质点的位置向量，其中 $f$, $g$ 和 $h$ 是 $t$ 的可微函数. 于是质点位置在时间 $t$ 和 $t+\Delta t$ 之间的差为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$$

(见图 11.5a). 用分量形式表示，

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)&=[f(t+\Delta t)\boldsymbol{i}+g(t+\Delta t)\boldsymbol{j}+h(t+\Delta t)\boldsymbol{k}]-[f(t)\boldsymbol{i}+g(t)\boldsymbol{j}+h(t)\boldsymbol{k}]\\&=[f(t+\Delta t)-f(t)]\boldsymbol{i}+[g(t+\Delta t)-g(t)]\boldsymbol{j}+[h(t+\Delta t)-h(t)]\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

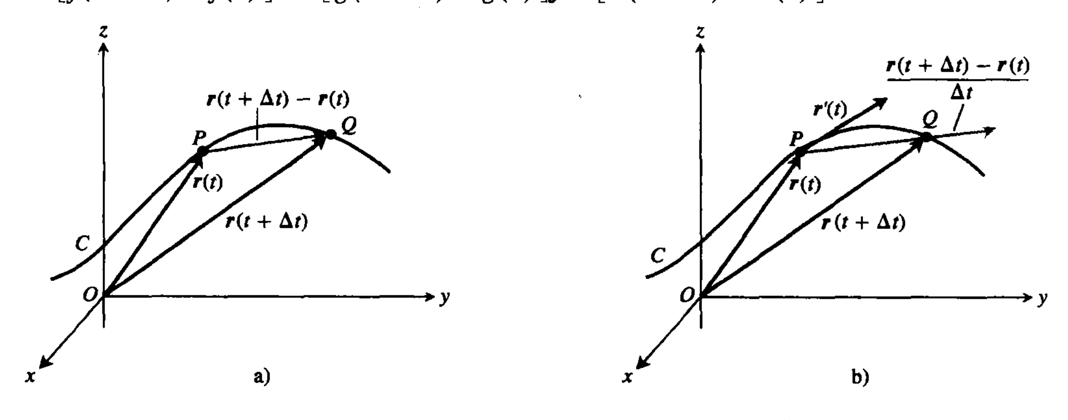



图 11.5 当 $\Delta t\to 0$ 时，点 $Q$ 沿曲线 $C$ 趋近点 $P$；在取极限时，向量 $\overrightarrow{PQ}/\Delta t$ 变成切向量 $\boldsymbol{r}'(t)$

当 $\Delta t$ 趋近零时，有三件事看来会同时发生. 第一，$Q$ 沿曲线趋近 $P$. 第二，割线 $PQ$ 似乎趋近同曲线在 $P$ 相切的极限位置. 第三，商 $\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$(见图 11.5b)趋近极限

$$\lim_{\Delta t\to t_0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}\right]\boldsymbol{i}+\left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}\right]\boldsymbol{j}+\left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t}\right]\boldsymbol{k}$$

$$=\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right]\boldsymbol{i}+\left[\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right]\boldsymbol{j}+\left[\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right]\boldsymbol{k}$$

因此，我们按照以往经验引出下述定义.

> **定义** 如果$f(t)$，$g(t)$和$h(t)$在$t$有导数，向量函数$\boldsymbol{r}(t)=f(t)\boldsymbol{i}+g(t)\boldsymbol{j}+h(t)\boldsymbol{k}$在$t$存在**导数**(是**可微的**). 这个导数是向量函数
>
> $$\boldsymbol{r}'(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

如果向量函数$\boldsymbol{r}$在其定义域的每个点是可微的，那么它是**可微的**. 如果$\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$是连续的并且不会为0，就是说$f$，$g$，$h$有连续的不同时为零的一阶导数，那么由$\boldsymbol{r}$描绘的曲线是**光滑的**.

导数定义的几何意义显示在图 11.5 中. 点$P$和$Q$具有位置向量$\boldsymbol{r}(t)$和$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$，而向量$\overrightarrow{PQ}$由$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$表示. 对于$\Delta t>0$，向量$\overrightarrow{PQ}$的纯量倍数$(1/\Delta t)(\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t))$指向$\overrightarrow{PQ}$的同一方向. 当$\Delta t\to 0$时，这个向量趋近在$P$同曲线相切的向量(见图 11.5b). 向量$\boldsymbol{r}'(t)$在其不等于$\boldsymbol{0}$时定义为在$P$同曲线**相切**的向量. 曲线在一点$(f(t_0),g(t_0),h(t_0))$的**切线**定义为通过这一点同$\boldsymbol{r}'(t_0)$平行的直线. 对于光滑曲线要求$\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t\neq\boldsymbol{0}$，这是为了保证曲线在每点具有连续转向的切线. 在光滑曲线上没有尖角或者尖点.

由有限数目的光滑曲线段以连续方式拼接的曲线称为**分段光滑的**(见图 11.6).

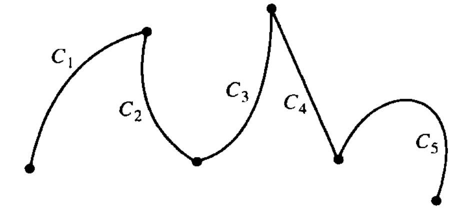



图 11.6 由五段光滑曲线以连续方式按首尾相连构成的分段光滑曲线；这条曲线在五段光滑曲线的连接点不是光滑的

请再次观察图 11.5. 我们是对$\Delta t$的正值画出的图形，所以$\Delta\boldsymbol{r}$向前指向质点运动的方向. 向量$\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$具有同$\Delta\boldsymbol{r}$一样的方向，也指向向前的方向. 如果$\Delta t$取负值，$\Delta\boldsymbol{r}$将向后指向质点运动的相反方向. 但是商$\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$是$\Delta\boldsymbol{r}$的负值纯量倍数，将再次指向向前的方向. 无论$\Delta\boldsymbol{r}$指向如何，$\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$都指向质点运动向前的方向，并且预计向量$\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$在其不为$\boldsymbol{0}$时具有同样方向. 这表明，导数$\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$作为同时间相关的位置的变化率，总是指向质点运动的方向. 对于光滑曲线，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$不会为$\boldsymbol{0}$；质点运动不会停止或者朝相反的方向运动.

> **定义** 如果$\boldsymbol{r}$是质点沿空间中的光滑曲线运动的位置向量，那么
>
> $$\boldsymbol{v}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$
>
> 是质点的**速度向量**，同曲线相切. 在任何时间$t$，$\boldsymbol{v}$的方向量是质点**运动的方向**，$\boldsymbol{v}$的长度是质点的**速率**，而导数$\boldsymbol{a}=\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$在其存在时是质点的**加速度向量**. 总起来说，
>
> (1) 位置向量的导数是速度向量$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$； (2) 速度向量的长度是速率$|\boldsymbol{v}|$；
>
> (3) 速度向量的导数是加速度向量$\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$；
>
> (4) 单位向量$\boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|$是在时间$t$的运动方向.

我们可以把运动质点的速度表示成质点的速率和方向的乘积

$$\text{速度} = |\boldsymbol{v}|\left(\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right) = (\text{速率})(\text{方向})$$

### 11.1.3 微分法则

由于向量函数的导数可以按分量逐个计算，向量函数的微分法则和纯量函数的微分法则具有同样形式.

**向量函数的微分法则**

设 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是 $t$ 的可微向量函数，$\boldsymbol{C}$ 是常向量，$c$ 是任意纯量，$f$ 是任意可微纯量函数. 向量函数的微分法则如下：

(1) 常向量函数法则 $\quad \frac{d}{dt}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$

(2) 纯量倍数法则 $\quad \frac{d}{dt}[c\boldsymbol{u}(t)] = c\boldsymbol{u}'(t)$

$\quad \frac{d}{dt}[f(t)\boldsymbol{u}(t)] = f'(t)\boldsymbol{u}(t) + f(t)\boldsymbol{u}'(t)$

(3) 和法则 $\quad \frac{d}{dt}[\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{v}(t)] = \boldsymbol{u}'(t) + \boldsymbol{v}'(t)$

(4) 差法则 $\quad \frac{d}{dt}[\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{v}(t)] = \boldsymbol{u}'(t) - \boldsymbol{v}'(t)$

(5) 点积法则 $\quad \frac{d}{dt}[\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)] = \boldsymbol{u}'(t)\cdot\boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}'(t)$

(6) 向量积法则 $\quad \frac{d}{dt}[\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t)] = \boldsymbol{u}'(t)\times\boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}'(t)$

(7) 链式法则 $\quad \frac{d}{dt}[\boldsymbol{u}(f(t))] = f'(t)\boldsymbol{u}'(f(t))$

我们将证明点积法则和向量积法则及链式法则，但是把常向量函数法则、纯量倍数法则、和法则及差法则留作习题.

> **附注**
> 使用向量积法则时，记住保持向量因式的顺序. 如果 $\boldsymbol{u}$ 处于等式左端第一的位置，它也必须出现在右端第一的位置，否则将出现符号错误.

**点积法则的证明** 假设

$$\boldsymbol{u} = u_1(t)\boldsymbol{i} + u_2(t)\boldsymbol{j} + u_3(t)\boldsymbol{k}$$

和

$$\boldsymbol{v} = v_1(t)\boldsymbol{i} + v_2(t)\boldsymbol{j} + v_3(t)\boldsymbol{k}$$

那么

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) = \frac{d}{dt}(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)$$
$$= \underbrace{u_1'v_1 + u_2'v_2 + u_3'v_3}_{\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v}} + \underbrace{u_1v_1' + u_2v_2' + u_3v_3'}_{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}'}$$ ■

**向量积法则的证明** 我们依照纯量函数乘积法则的证明. 按照导数的定义，

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \lim_{h\to0}\frac{\boldsymbol{u}(t+h)\times\boldsymbol{v}(t+h) - \boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t)}{h}$$

为了把这个公式改变成含有 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的导数的差商的等价形式，在分于中先减后加 $\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t+h)$. 于是

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \lim_{h\to0}\frac{\boldsymbol{u}(t+h)\times\boldsymbol{v}(t+h) - \boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t+h) + \boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t+h) - \boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\boldsymbol{u}(t+h)-\boldsymbol{u}(t)}{h}\times \boldsymbol{v}(t+h)+\boldsymbol{u}(t)\times\frac{\boldsymbol{v}(t+h)-\boldsymbol{v}(t)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+h)-\boldsymbol{u}(t)}{h}\times \lim_{h\to 0}\boldsymbol{v}(t+h)+\lim_{h\to 0}\boldsymbol{u}(t)\times\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{v}(t+h)-\boldsymbol{v}(t)}{h}$$

最后一个等式成立，乃是因为两个向量函数的向量积的极限等于它们的极限(如果存在)的向量积(见习题32). 当 $h$ 趋近零时，$\boldsymbol{v}(t+h)$ 趋近 $\boldsymbol{v}(t)$，这是由于 $\boldsymbol{v}$ 在 $t$ 是可微的，所以它在 $t$ 是连续的(见习题33). 两个分式趋近 $\mathrm{d}\boldsymbol{u}/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ 在 $t$ 的值. 总之，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$ ■

**链式法则的证明** 假设 $\boldsymbol{u}(s)=a(s)\boldsymbol{i}+b(s)\boldsymbol{j}+c(s)\boldsymbol{k}$ 是 $s$ 的可微向量函数，$s=f(t)$ 是 $t$ 的可微纯量函数. 于是 $a$，$b$，$c$ 是 $t$ 的可微函数，而可微实值函数的链式法则给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(s)] = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

$$= \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{k}\right) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}s}$$

$$= f'(t)\boldsymbol{u}'(f(t)) \quad (s=f(t))$$ ■

> **附注**
>
> 为了代数计算的方便，有时把纯量 $c$ 同向量 $\boldsymbol{v}$ 的乘积写成 $\boldsymbol{v}c$ 而不是 $c\boldsymbol{v}$. 这样使我们可以把链式法则写成例如熟悉的形式：
>
> $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$
>
> 其中 $s=f(t)$.

### 11.1.4 定长向量的向量函数

当我们跟踪在以原点为中心的球面上移动的质点时(见图11.7)，位置向量具有等于球半径的固定长度. 同运动路径相切的速度向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ 和球面相切，因此垂直于 $\boldsymbol{r}$. 这是可微定长向量函数的通常情况：向量同它的一阶导数向量正交. 通过直接计算，

$$\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}(t)=c^2 \quad (|\boldsymbol{r}(t)|=c \text{ 是常数})$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}(t)]=0 \quad (\text{两端微分})$$

$$\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{r}(t)+\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)=0$$

$$(\text{对 } \boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{v}(t) \text{ 用法则}(5))$$

$$2\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{r}(t)=0$$

向量 $\boldsymbol{r}'(t)$ 同 $\boldsymbol{r}(t)$ 是正交的，因为它们的点积为零. 总起来说，

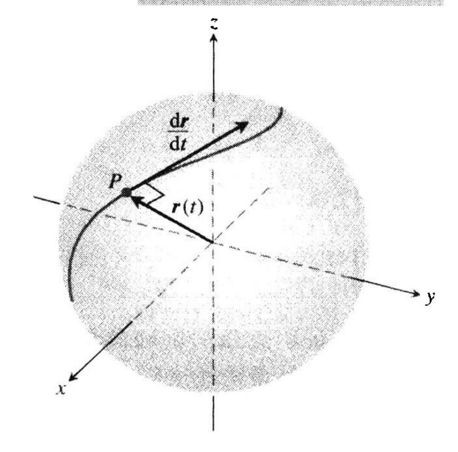



图 11.7 如果质点在球面上运动的位置向量 $\boldsymbol{r}$ 是时间 $t$ 的可微函数，那么 $\boldsymbol{r}\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t)=0$

> 若 $\boldsymbol{r}$ 是定长的 $t$ 的可微向量函数，则有
>
> $$\boldsymbol{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=0 \qquad (4)$$

在11.4节将要反复使用这个结果.

### 习题 11.1

在习题1～4中，$\boldsymbol{r}(t)$ 是 $xy$ 平面内的质点在时间 $t$ 的位置向量. 求质点路径图形的 $x$ 和 $y$ 的方程. 然后求质点在给定 $t$ 值的速度向量和加速度向量.

1. $\boldsymbol{r}(t)=(t+1)\boldsymbol{i}+(t^2-1)\boldsymbol{j}$； $t=1$.
2. $\boldsymbol{r}(t)=(t^2+1)\boldsymbol{i}+(2t-1)\boldsymbol{j}$； $t=1/2$.
3. $\boldsymbol{r}(t)=\mathrm{e}^t\boldsymbol{i}+\frac{2}{9}\mathrm{e}^{2t}\boldsymbol{j}$； $t=\ln 3$.
4. $\boldsymbol{r}(t)=(\cos 2t)\boldsymbol{i}+(3\sin 2t)\boldsymbol{j}$； $t=0$.

在习题5～8给出质点沿 $xy$ 平面内不同曲线运动的位置向量. 在每种情况下，求质点在指定时刻

的速度向量和加速度向量，并且画出它们作为曲线上的向量的草图.

**5. 在圆 $x^2+y^2=1$ 上的运动**

$\boldsymbol{r}(t)=(\sin t)\boldsymbol{i}+(\cos t)\boldsymbol{j};\ t=\pi/4,\ \pi/2.$

**6. 在圆 $x^2+y^2=16$ 上的运动**

$\boldsymbol{r}(t)=\left(4\cos\frac{t}{2}\right)\boldsymbol{i}+\left(4\sin\frac{t}{2}\right)\boldsymbol{j};\ t=\pi,\ 3\pi/2.$

**7. 在摆线 $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t$ 上的运动**

$\boldsymbol{r}(t)=(t-\sin t)\boldsymbol{i}+(1-\cos t)\boldsymbol{j};t=\pi,\ 3\pi/2.$

**8. 在抛物线 $y=x^2+1$ 上的运动**

$\boldsymbol{r}(t)=t\,\boldsymbol{i}+(t^2+1)\boldsymbol{j};\ t=-1,0,1.$

在习题 9 ~ 14 中，$\boldsymbol{r}(t)$ 是空间中的质点在时间 $t$ 的位置向量，求质点的速度向量和加速度向量. 然后求质点在给定 $t$ 值的运动速率和方向. 把质点在那个时间的速度表示成它的速率和方向的乘积.

9. $\boldsymbol{r}(t)=(t+1)\boldsymbol{i}+(t^2-1)\boldsymbol{j}+2t\,\boldsymbol{k};\ t=1.$

10. $\boldsymbol{r}(t)=(1+t)\boldsymbol{i}+\frac{t^2}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}+\frac{t^3}{3}\boldsymbol{k};\ t=1.$

11. $\boldsymbol{r}(t)=(2\cos t)\boldsymbol{i}+(3\sin t)\boldsymbol{j}+4t\boldsymbol{k};\ t=\pi/2.$

12. $\boldsymbol{r}(t)=(\sec t)\boldsymbol{i}+(\tan t)\boldsymbol{j}+\frac{4}{3}t\boldsymbol{k};\ t=\pi/6.$

13. $\boldsymbol{r}(t)=(2\ln(t+1))\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+\frac{t^2}{2}\boldsymbol{k};\ t=1.$

14. $\boldsymbol{r}(t)=(e^{-t})\boldsymbol{i}+(2\cos 3t)\boldsymbol{j}+(2\sin 3t)\boldsymbol{k};\ t=0.$

在习题 15 ~ 18 中，$\boldsymbol{r}(t)$ 是空间中的质点在时间 $t$ 的位置向量. 求 $t=0$ 时的速度向量同加速度向量之间的角.

15. $\boldsymbol{r}(t)=(3t+1)\boldsymbol{i}+\sqrt{3}\,t\,\boldsymbol{j}+t^2\boldsymbol{k}.$

16. $\boldsymbol{r}(t)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t-16t^2\right)\boldsymbol{j}.$

17. $\boldsymbol{r}(t)=(\ln(t^2+1))\boldsymbol{i}+(\tan^{-1}t)\boldsymbol{j}+\sqrt{t^2+1}\boldsymbol{k}.$

18. $\boldsymbol{r}(t)=\frac{4}{9}(1+t)^{3/2}\boldsymbol{i}+\frac{4}{9}(1-t)^{3/2}\boldsymbol{j}+\frac{1}{3}t\boldsymbol{k}.$

如正文所述，光滑曲线 $\boldsymbol{r}(t)=f(t)\boldsymbol{i}+g(t)\boldsymbol{j}+h(t)\boldsymbol{k}$ 在 $t=t_0$ 的**切线**是通过点 $(f(t_0),g(t_0),h(t_0))$ 平行于曲线在 $t_0$ 的速度向量 $\boldsymbol{v}(t_0)$ 的直线. 在习题 19 ~ 22 中，求同给定曲线在给定参数值 $t=t_0$ 相切的直线的参数方程.

19. $\boldsymbol{r}(t)=(\sin t)\boldsymbol{i}+(t^2-\cos t)\boldsymbol{j}+e^t\boldsymbol{k};\ t_0=0.$

20. $\boldsymbol{r}(t)=(2\sin t)\boldsymbol{i}+(2\cos t)\boldsymbol{j}+5t\boldsymbol{k};\ t_0=4\pi.$

21. $\boldsymbol{r}(t)=(a\sin t)\boldsymbol{i}+(a\cos t)\boldsymbol{j}+bt\boldsymbol{k};\ t_0=2\pi.$

22. $\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j}+(\sin 2t)\boldsymbol{i};\ t_0=\frac{\pi}{2}.$

23. 下面(a) ~ (e)中的每个方程，描述质点在具有相同的单位圆路径 $x^2+y^2=1$ 上的运动. 虽然在(a) ~ (e)中的每个质点有同样的路径，但是它们的特性或者"动态特性"是不同的. 对于每个质点回答下列问题：

(i) 质点具有常速率吗？如果有，这个速率是什么？

(ii) 质点的加速度向量总是同它的速度向量正交吗？

(iii) 质点绕单位圆作顺时针还是反时针运动？

(iv) 质点运动是从点(1，0)开始吗？

(a) $\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j};\ t\geqslant 0.$

(b) $\boldsymbol{r}(t)=\cos(2t)\boldsymbol{i}+\sin(2t)\boldsymbol{j};\ t\geqslant 0.$

(c) $\boldsymbol{r}(t)=\cos(t-\pi/2)\boldsymbol{i}+\sin(t-\pi/2)\boldsymbol{j};\ t\geqslant 0.$

(d) $\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}-(\sin t)\boldsymbol{j};\ t\geqslant 0.$

(e) $\boldsymbol{r}(t)=\cos(t^2)\boldsymbol{i}+\sin(t^2)\boldsymbol{j};\ t\geqslant 0.$

24. 证明：向量值函数

$$\boldsymbol{r}(t)=(2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})+\cos t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}\right)+\sin t\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}\right)$$

描述质点在以点(2,2,1)为中心半径为 1 的圆上的运动，并且是在平面 $x+y-2z=2$ 内的运动.

25. **沿抛物线的运动** 设质点沿抛物线 $y^2=2x$ 的顶部从左至右以 5 单位每秒的常速率运动. 求质点通过点(2,2)时的速度.

26. **沿摆线的运动** 设质点在 $xy$ 平面内运动，它在时间 $t$ 的位置向量为

$$\boldsymbol{r}(t)=(t-\sin t)\boldsymbol{i}+(1-\cos t)\boldsymbol{j}$$

**T** (a) 画出 $\boldsymbol{r}(t)$ 的图形. 获得的曲线是一条摆线.

(b) 求速度向量和加速度向量的长度 $|\boldsymbol{v}|$ 和 $|\boldsymbol{a}|$ 的最大值和最小值. (提示：首先求 $|\boldsymbol{v}|^2$ 和 $|\boldsymbol{a}|^2$ 的极大值和极小值，然后求平方根.)

27. 令 $\boldsymbol{v}$ 是 $t$ 的可微向量函数. 证明：若对于所有 $t$ 有 $\boldsymbol{v}\cdot(d\boldsymbol{v}/dt)=0$，则 $|\boldsymbol{v}|$ 是常数.

28. **三重纯量积的导数**

(a) 证明：若 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 是 $t$ 的可微向量函数，则

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\cdot\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\times\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\times\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}$$

(b)证明

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)=\boldsymbol{r}\cdot\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}\right)$$

(提示：对左端微分然后求乘积为零的向量.)

**29. 纯量倍数法则**

(a)证明：若 $\boldsymbol{u}$ 是 $t$ 的可微向量函数，$c$ 是任意实数，则

$$\frac{d(c\boldsymbol{u})}{dt}=c\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$$

(b)证明：若 $\boldsymbol{u}$ 是 $t$ 的可微向量函数，$f$ 是 $t$ 的可微纯量函数，则

$$\frac{d}{dt}(f\boldsymbol{u})=\frac{df}{dt}\boldsymbol{u}+f\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$$

**30. 和法则与差法则** 证明：若 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是 $t$ 的可微向量函数，则

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

和

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}-\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

**31. 向量函数在一点连续的分量检验法** 证明：由 $\boldsymbol{r}(t)=f(t)\boldsymbol{i}+g(t)\boldsymbol{j}+h(t)\boldsymbol{k}$ 定义的向量函数 $\boldsymbol{r}$ 在$t=t_0$是连续的，当且仅当$f$，$g$ 和 $h$ 在 $t_0$ 是连续的.

**32. 向量函数向量积的极限** 假设 $\boldsymbol{r}_1(t)=f_1(t)\boldsymbol{i}+f_2(t)\boldsymbol{j}+f_3(t)\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}_2(t)=g_1(t)\boldsymbol{i}+g_2(t)\boldsymbol{j}+g_3(t)\boldsymbol{k}$,并且$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)=\boldsymbol{A}$，$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t)=\boldsymbol{B}$. 利用向量积的行列式公式和纯量函数极限的积法则，证明

$$\lim_{t\to t_0}(\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t))=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$$

**33. 可微向量函数的连续性** 证明：若

$$\boldsymbol{r}(t)=f(t)\boldsymbol{i}+g(t)\boldsymbol{j}+h(t)\boldsymbol{k}$$

在 $t=t_0$ 是可微的，则它在 $t=t_0$ 也是连续的.

**34. 常向量函数法则** 证明：若 $\boldsymbol{u}$ 是取常向量值 $\boldsymbol{C}$ 的向量函数，则 $d\boldsymbol{u}/dt=\boldsymbol{0}$.

**计算机探究**

在习题35~38中，用一种CAS(计算机代数系统)执行下列处理步骤：

(a)绘制由位置向量 $\boldsymbol{r}$ 描绘的空间曲线；

(b)求速度向量 $d\boldsymbol{r}/dt$ 的分量；

(c)计算 $d\boldsymbol{r}/dt$ 在给定点 $t_0$ 的值，并且确定曲线在$\boldsymbol{r}(t_0)$的切线方程；

(d)绘制切线同曲线在给定区间上的图形.

**35.** $\boldsymbol{r}(t)=(\sin t-t\cos t)\boldsymbol{i}+(\cos t+t\sin t)\boldsymbol{j}+t^2\boldsymbol{k}$，$0\leqslant t\leqslant 6\pi$，$t_0=3\pi/2$.

**36.** $\boldsymbol{r}(t)=\sqrt{2}t\,\boldsymbol{i}+e^t\boldsymbol{j}+e^{-t}\boldsymbol{k}$，$-2\leqslant t\leqslant 3$，$t_0=1$.

**37.** $\boldsymbol{r}(t)=(\sin 2t)\boldsymbol{i}+(\ln(1+t))\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$，$0\leqslant t\leqslant 4\pi$，$t_0=\pi/4$.

**38.** $\boldsymbol{r}(t)=(\ln(t^2+2))\boldsymbol{i}+(\tan^{-1}3t)\boldsymbol{j}+\sqrt{t^2+1}\,\boldsymbol{k}$，$-3\leqslant t\leqslant 5$，$t_0=3$.

在习题39和40中，当对螺旋线

$$\boldsymbol{r}(t)=(\cos at)\boldsymbol{i}+(\sin at)\boldsymbol{j}+bt\,\boldsymbol{k}$$

改变常数 $a$ 和 $b$ 的值时，从图形上考察曲线的特性. 用一种CAS执行每题中的处理步骤.

**39.** 设 $b=1$. 对于 $a=1,2,4,6$，在区间 $0\leqslant t\leqslant 4\pi$ 上绘制螺旋线 $\boldsymbol{r}(t)$ 和这条曲线在 $t=3\pi/2$ 的切线的图形. 用你自己的说法描述当 $a$ 经由这些正数值增加时，螺旋线的图形及切线的位置发生的变化.

**40.** 设 $a=1$. 对于 $b=1/4,1/2,2,4$，在区间 $0\leqslant t\leqslant 4\pi$ 上绘制螺旋线 $\boldsymbol{r}(t)$ 和这条曲线在 $t=3\pi/2$ 的图形. 用你自己的说法描述当 $b$ 经由这些正数值增加时，螺旋线的图形及切线的位置发生的变化.

## 11.2 向量函数的积分

我们在这一节研究向量函数的积分，以及它们在物体沿平面或者空间路径运动中的应用.

### 11.2.1 向量函数的积分

可微向量函数 $\boldsymbol{R}(t)$ 称为向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 在区间 $I$ 上的**反导数**，如果在 $I$ 上每个点有 $d\boldsymbol{R}/dt=\boldsymbol{r}$. 如果 $\boldsymbol{R}$ 是 $\boldsymbol{r}$ 在 $I$ 上的反导数，那么通过一次处理一个分量，可以证明 $\boldsymbol{r}$ 在 $I$ 上的每个反导数具有 $\boldsymbol{R}+\boldsymbol{C}$ 的形式，其中 $\boldsymbol{C}$ 是某个常向量(见习题29). $\boldsymbol{r}$ 在 $I$ 上的所有反导数的集合是 $\boldsymbol{r}$ 在 $I$ 上的**不定积分**.

**定义** 向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 关于 $t$ 的**不定积分**是 $\boldsymbol{r}$ 的所有反导数的集合，用 $\int \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t$ 表示. 如果 $\boldsymbol{R}(t)$ 是 $\boldsymbol{r}(t)$ 的任意反导数，那么

$$\int \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{C}$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 是常向量.

常用的算术规则适用于不定积分.

**例 1**

$$\int ((\cos t)\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2t\,\boldsymbol{k})\,\mathrm{d}t = \left(\int \cos t\,\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{i} + \left(\int \mathrm{d}t\right)\boldsymbol{j} - \left(\int 2t\,\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{k} \quad (1)$$

$$= (\sin t + C_1)\boldsymbol{i} + (t + C_2)\boldsymbol{j} - (t^2 + C_3)\boldsymbol{k} \quad (2)$$

$$= (\sin t)\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} - t^2\boldsymbol{k} + \boldsymbol{C} \quad (\boldsymbol{C} = C_1\boldsymbol{i} + C_2\boldsymbol{j} - C_3\boldsymbol{k})$$

像在纯量函数的积分中一样，我们建议读者跳过式(1)和(2)中的步骤，直接取得最后形式. 求每个分量的反导数，并且在最后加一个常向量.

向量函数的定积分最好用分量的形式定义. ■

**定义** 如果 $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ 的分量在 $[a, b]$ 上是可微的，那么 $\boldsymbol{r}$ 在 $[a, b]$ 上是可微的，并且 $\boldsymbol{r}$ 从 $a$ 到 $b$ 的**定积分**为

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t = \left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{i} + \left(\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{j} + \left(\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{k}$$

**例 2**

$$\int_0^\pi ((\cos t)\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2t\,\boldsymbol{k})\,\mathrm{d}t = \left(\int_0^\pi \cos t\,\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{i} + \left(\int_0^\pi \mathrm{d}t\right)\boldsymbol{j} - \left(\int_0^\pi 2t\,\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{k}$$

$$= [\sin t]_0^\pi \boldsymbol{i} + [t]_0^\pi \boldsymbol{j} - [t^2]_0^\pi \boldsymbol{k}$$

$$= [0 - 0]\boldsymbol{i} + [\pi - 0]\boldsymbol{j} - [\pi^2 - 0^2]\boldsymbol{k} = \pi\boldsymbol{j} - \pi^2\boldsymbol{k}$$ ■

连续向量函数的微积分基本定理指出

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{R}(t)\Big]_a^b = \boldsymbol{R}(b) - \boldsymbol{R}(a)$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 是 $\boldsymbol{r}$ 的任意反导数，所以 $\boldsymbol{R}'(t) = \boldsymbol{r}(t)$（见习题 30）.

**例 3** 假定一架悬挂式滑翔机的路径是未知的，但是它的加速度向量为 $\boldsymbol{a}(t) = -(3\cos t)\boldsymbol{i} - (3\sin t)\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$. 同时，我们知道最初(在时间 $t = 0$)滑翔机从点$(3, 0, 0)$以速度向量 $\boldsymbol{v}(0) = 3\boldsymbol{j}$ 起飞. 求滑翔机的位置向量作为 $t$ 的函数.

**解** 我们的目标是求 $\boldsymbol{r}(t)$，已知

微分方程：$\boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -(3\cos t)\boldsymbol{i} - (3\sin t)\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

初始条件：$\boldsymbol{v}(0) = 3\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{r}(0) = 3\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$

在微分方程两端对 $t$ 积分，得到

$$\boldsymbol{v}(t) = -(3\sin t)\boldsymbol{i} + (3\cos t)\boldsymbol{j} + 2t\,\boldsymbol{k} + \boldsymbol{C}_1$$

利用 $\boldsymbol{v}(0) = 3\boldsymbol{j}$ 求 $\boldsymbol{C}_1$：

$$3\boldsymbol{j} = -(3\sin 0)\boldsymbol{i} + (3\cos 0)\boldsymbol{j} + (0)\boldsymbol{k} + \boldsymbol{C}_1$$

$$3\boldsymbol{j} = 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{C}_1$$

$$\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{0}$$

滑翔机的速度向量作为时间 $t$ 的函数是

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}(t)=-(3\sin t)\boldsymbol{i}+(3\cos t)\boldsymbol{j}+2t\,\boldsymbol{k}$$

对这个微分方程两端积分，得到

$$\boldsymbol{r}(t)=(3\cos t)\boldsymbol{i}+(3\sin t)\boldsymbol{j}+t^2\boldsymbol{k}+\boldsymbol{C}_2$$

然后利用初值条件 $\boldsymbol{r}(0)=3\boldsymbol{i}$ 求 $\boldsymbol{C}_2$：

$$3\boldsymbol{i}=(3\cos 0)\boldsymbol{i}+(3\sin 0)\boldsymbol{j}+(0^2)\boldsymbol{k}+\boldsymbol{C}_2$$

$$3\boldsymbol{i}=3\boldsymbol{i}+(0)\boldsymbol{j}+(0)\boldsymbol{k}+\boldsymbol{C}_2$$

$$\boldsymbol{C}_2=\boldsymbol{0}$$

滑翔机的位置向量作为 $t$ 的函数是

$$\boldsymbol{r}(t)=(3\cos t)\boldsymbol{i}+(3\sin t)\boldsymbol{j}+t^2\boldsymbol{k}$$

这是图 11.8 中所示的滑翔机路径.

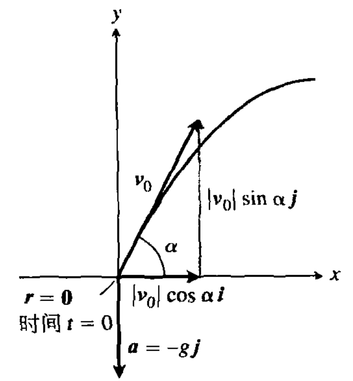
**注**：这个例子中积分的两个常向量 $\boldsymbol{C}_1$ 和 $\boldsymbol{C}_2$ 都是 $\boldsymbol{0}$. 习题 11 和 12 给出积分的常向量不为 $\boldsymbol{0}$ 的例子. ■

图 11.8 位置向量为 $\boldsymbol{r}(t)=(3\cos t)\boldsymbol{i}+(3\sin t)\boldsymbol{j}+t^2\boldsymbol{k}$ 的悬挂式滑翔机的路径(例 3)

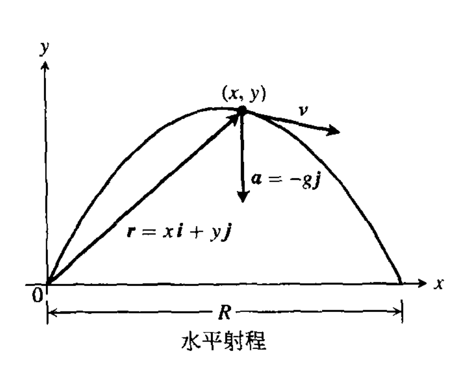
### 11.2.2 理想抛体运动的向量方程和参数方程

为了推导抛体运动的方程，我们假定抛射体的运动像在纵坐标平面内质点的运动一样，在抛射体飞行过程中，作于它的力只有恒定的重力，总是直指下方.（实际上，这些假定是不成立的. 当地球转动时，地面在抛射体下面移动，空气产生随抛射体的速度和高度而变化的摩擦力，并且重力在抛射体运动时也在变化.）

我们假定在时间 $t=0$ 从原点以初始速度 $\boldsymbol{v}_0$ 把抛射体发射到第一象限(见图 11.9). 如果 $\boldsymbol{v}_0$ 同横坐标轴构成 $\alpha$ 角，那么，



a) 在$t$=0的位置向量、速度向量、加速度向量和发射角



b) 随后在时间$t$的位置向量、速度向量和加速度向量

图 11.9 抛体运动

$$\boldsymbol{v}_0=(|\boldsymbol{v}_0|\cos\alpha)\boldsymbol{i}+(|\boldsymbol{v}_0|\sin\alpha)\boldsymbol{j}$$

如果用更简单的记号 $v_0$ 表示初始速率 $|\boldsymbol{v}_0|$，上式变成

$$\boldsymbol{v}_0=(v_0\cos\alpha)\boldsymbol{i}+(v_0\sin\alpha)\boldsymbol{j} \tag{3}$$

抛射体的初始位置是

$$\boldsymbol{r}_0=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0} \tag{4}$$

牛顿运动第二定律说明，作用在抛射体上的力等于抛射体的质量 $m$ 乘它的加速度，或者说等于 $m(\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t^2)$，其中 $\boldsymbol{r}$ 是抛射体的位置向量，$t$ 是时间. 如果作用力仅限于重力 $-mg\boldsymbol{j}$，那么，

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=-mg\boldsymbol{j},\quad \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=-g\boldsymbol{j}$$

通过求解下述初值问题求出作为 $t$ 的函数的 $\boldsymbol{r}$:

$$\text{微分方程}:\ \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=-g\boldsymbol{j}$$

$$\text{初值条件}:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0,\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}_0\quad (t=0)$$

第一个方程的积分给出

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=-(gt)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{v}_0$$

第二个方程的积分给出

$$\boldsymbol{r}=-\frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{v}_0t+\boldsymbol{r}_0$$

从式(3)和(4)代入 $\boldsymbol{v}_0$ 和 $\boldsymbol{r}_0$ 的值，得到

$$\boldsymbol{r}=-\frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{j}+\underbrace{(v_0\cos\alpha)t\,\boldsymbol{i}+(v_0\sin\alpha)t\,\boldsymbol{j}}_{\boldsymbol{v}_0t}+\boldsymbol{0}$$

合并项，遂有

**理想抛体运动方程** $$\boldsymbol{r}=(v_0\cos\alpha)t\,\boldsymbol{i}+\left((v_0\sin\alpha)t-\frac{1}{2}gt^2\right)\boldsymbol{j}\tag{5}$$

方程(5)是理想抛体运动的*向量方程*. $\alpha$ 是抛射体的**发射角(点火角，仰角)**，如前面所说，$v_0$ 是抛射体的**初始速率**. $\boldsymbol{r}$ 的分量给出抛体运动的参数方程

$$x=(v_0\cos\alpha)t,\quad y=(v_0\sin\alpha)t-\frac{1}{2}gt^2\tag{6}$$

其中 $x$ 是在 $t\geqslant0$ 时抛射体的水平距离，$y$ 是抛射体的高度.

**例 4** 抛射体在地平面上从原点发射，初始速率为 500 m/s，发射角为 60°. 抛射体在 10 秒后位于何处?

**解** 用方程(5)取 $v_0=500$，$\alpha=60°$，$g=9.8$ 和 $t=10$，得到抛射体在发射 10 秒后的位置向量:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=(v_0\cos\alpha)t\,\boldsymbol{i}+\left((v_0\sin\alpha)t-\frac{1}{2}gt^2\right)\boldsymbol{j}\\&=(500)\left(\frac{1}{2}\right)(10)\boldsymbol{i}+\left((500)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)10-\left(\frac{1}{2}\right)(9.8)(100)\right)\boldsymbol{j}\approx2500\,\boldsymbol{i}+3840\,\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

在发射 10 秒后，抛射体大约在高空 3840 m 和水平距离 2500 m 的地方. ■

如同可以从方程(6)看出的那样，理想抛射体沿抛物线运动. 如果在方程(6)中，把第一个方程的 $t=x/(v_0\cos\alpha)$ 代入第二个方程，我们得到笛卡儿坐标方程

$$y=-\left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right)x^2+(\tan\alpha)x$$

这个方程具有 $y=ax^2+bx$ 的形式，所以它的图形是抛物线.

抛射体当其垂直速度分量为零时达到它的最高点. 如果抛射体是在地平面上发射，当它在方程(5)的垂直分量为零时着陆，而**射程 $R$** 是从原点到落地点的距离. 我们把结果概括如下，请

读者在习题23 中予以证明.

> **理想抛体运动的高度、飞行时间和射程**
>
> 对于理想抛体运动，当物体在地平面上从原点以初始速率 $v_0$ 和发射角 $\alpha$ 发射时，它的运行数据如下：
>
> 最大高度 $y_{max} = \dfrac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g}$
>
> 飞行时间 $t = \dfrac{2v_0 \sin \alpha}{g}$
>
> 射程 $R = \dfrac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$

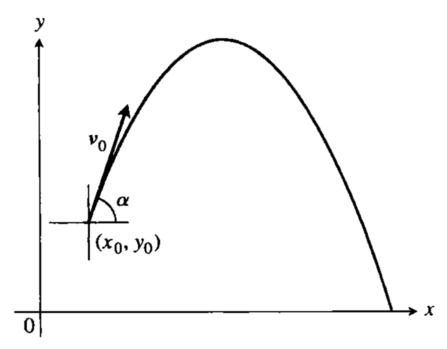



图 11.10 从点$(x_0,y_0)$发射的抛射体的路径，发射的初始速度向量为 $\boldsymbol{v}_0$，同地平面之间的发射角为 $\alpha$

如果理想抛体是从点$(x_0,y_0)$而不是原点发射(见图 11.10)，运动路径的位置向量为

$$\boldsymbol{r} = (x_0 + (v_0 \cos \alpha)t)\boldsymbol{i} + \left(y_0 + (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right)\boldsymbol{j} \tag{7}$$

这是在习题25 中要证明的结果.

### 习题 11.2

在习题 1 ~6 中，计算积分.

**1.** $\int_0^1 [t^3\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + (t+1)\boldsymbol{k}]\,\mathrm{d}t$.

**2.** $\int_1^2 \left[(6-6t)\boldsymbol{i} + 3\sqrt{t}\boldsymbol{j} + \left(\frac{4}{t^2}\right)\boldsymbol{k}\right]\mathrm{d}t$.

**3.** $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} [(\sin t)\boldsymbol{i} + (1+\cos t)\boldsymbol{j} + (\sec^2 t)\boldsymbol{k}]\,\mathrm{d}t$.

**4.** $\int_0^{\pi/3} [(\sec t \tan t)\boldsymbol{i} + (\tan t)\boldsymbol{j} + (2 \sin t \cos t)\boldsymbol{k}]\,\mathrm{d}t$.

**5.** $\int_1^4 \left[\frac{1}{t}\boldsymbol{i} + \frac{1}{5-t}\boldsymbol{j} + \frac{1}{2t}\boldsymbol{k}\right]\mathrm{d}t$.

**6.** $\int_0^1 \left[\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{3}}{1+t^2}\boldsymbol{k}\right]\mathrm{d}t$.

在习题 7 ~ 12 中，解初值问题，求作为 $t$ 的函数的位置向量 $\boldsymbol{r}$.

**7.** 微分方程：$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -t\,\boldsymbol{i} - t\,\boldsymbol{j} - t\,\boldsymbol{k}$；

初值条件：$\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$.

**8.** 微分方程：$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (180t)\boldsymbol{i} + (180t - 16t^2)\boldsymbol{j}$；

初值条件：$\boldsymbol{r}(0) = 100\,\boldsymbol{j}$.

**9.** 微分方程：$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{2}(t+1)^{1/2}\boldsymbol{i} + \mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{j} + \frac{1}{t+1}\boldsymbol{k}$；

初值条件：$\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{k}$.

**10.** 微分方程：$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (t^3 + 4t)\boldsymbol{i} + t\,\boldsymbol{j} + 2t^2\boldsymbol{k}$；

初值条件：$\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$.

**11.** 微分方程：$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -32\boldsymbol{k}$；

初值条件：$\boldsymbol{r}(0) = 100\boldsymbol{k}$,

$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 8\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j}$.

**12.** 微分方程：$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$；

初值条件：$\boldsymbol{r}(0) = 10\,\boldsymbol{i} + 10\,\boldsymbol{j} + 10\,\boldsymbol{k}$,

$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \boldsymbol{0}$.

**13.** 质点在 $t=0$ 时位于点(1,2,3). 它从一条直线运动到点(4,1,4)，在点(1,2,3)的速率为 2，加速度向量为常向量 $3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. 求质点在时间 $t$ 的位置向量 $\boldsymbol{r}(t)$的方程.

**14.** 在直线上运动的质点，在 $t=0$ 时位于点(1，-1,2)，其速率为 2. 质点以恒定加速度 $2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$向点(3,0,3)移动. 求它在时间 $t$ 的位置向量 $\boldsymbol{r}(t)$.

在习题 15 ~ 26 中，所有抛射体的飞行在不加说明的情况下都被看成是理想的. 假定所有发射角都从水平方向起度量. 同时假定所有抛射体都在地平面上从原点发射，除非另作说明.

**15. 运动时间** 抛射体发射的初始速率为 840 m/s，发射角为 60°. 它需要多少时间达到 21 km 水平距离?

**16. 求炮弹的初速率** 假定炮弹的最大射程为 24.5 km,

求炮弹离开炮口时的速率.

**17. 飞行时间与高度** 抛射体以初始速率 500 m/s 和仰角为 45°发射.

(a) 抛射体将在什么时间着陆和飞越多少距离?

(b) 当抛射体的水平距离为 5 km 时它的高度是多少?

(c) 抛射体达到的最大高度是多大?

**18. 投掷棒球** 在场地之上 32 ft 的看台上投掷棒球, 投掷角在水平方向之上 30°. 如果初始速率为 32 ft/s, 棒球将在什么时间落地和落在多远的地方?

**19. 发射高尔夫球** 在地面用弹射器以 45°角发射高尔夫球, 球在 10 m 远的地方落地.

(a) 球的初始速率是多少?

(b) 用同样的初始速率, 求使落地点为 6 m 远的两个发射角.

**20. 电子发射** 电视显像管中的一个电子从水平方向以$5\times10^6$ m/s的速率朝距离 40 cm 处的荧光屏发射. 电子在其撞击荧光屏前大约下降多少高度?

**21. 等射程发射角** 两个发射角能够使炮弹在炮身同一水平面上达到 16 km 下射程的目标, 如果炮弹的初始速率为400 m/s, 这两个发射角是多大?

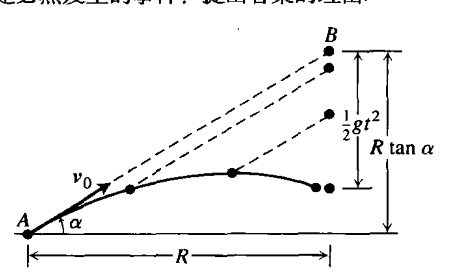
**22. 射程与高度同速率的关系**

(a) 证明, 在给定的发射角, 当抛射体的初始速率加倍时, 它的射程为原来射程的 4 倍.

(b) 为了使抛射体的高度和射程加倍, 初始速率应增加的百分数是多少?

**23.** 对于理想抛体运动的最大高度、飞行时间和射程, 证明正文(按照例 4)中给出的结果.

**24. 弹子碰撞** 附图显示用两颗弹子做试验. 把弹子 $A$ 向弹子 $B$ 投射, 投射角为 $\alpha$, 初始速率为 $v_0$. 在同一时刻, 弹子 $B$ 在 $A$ 的下射程 $R$ 单位的一点之上 $R\tan\alpha$ 单位的地方从静止状态下落. 结果发现两颗弹子碰撞而同 $v_0$ 的值无关. 这是纯属巧合还是必然发生的事件? 提出答案的理由.




**25. 从点$(x_0,y_0)$发射** 通过求解初值问题

微分方程: $\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=-g\boldsymbol{j}$

初值条件: $\boldsymbol{r}(0)=x_0\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}$,

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(0)=(v_0\cos\alpha)\boldsymbol{i}+(v_0\sin\alpha)\boldsymbol{j}$$

推导 $xy$ 平面内位置向量 $\boldsymbol{r}$ 的参数方程(见方程(7))

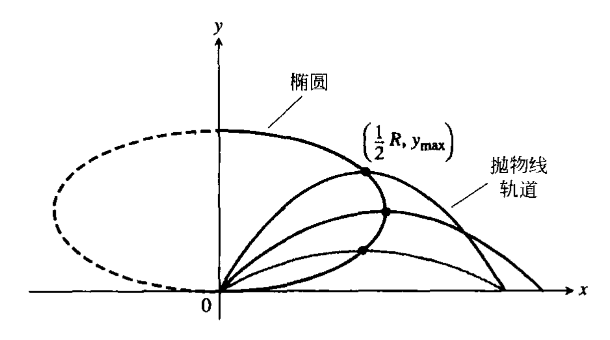
$$x=x_0+(v_0\cos\alpha)t$$

$$y=y_0+(v_0\sin\alpha)t-\frac{1}{2}gt^2$$

**26. 抛射体轨道的峰值点** 对于从地面以发射角 $\alpha$ 和初始速率 $v_0$ 发射的抛射体, 考虑把 $\alpha$ 作为变量和 $v_0$ 作为固定常数. 我们对每个 $\alpha$ $(0<\alpha<\pi/2)$ 得到如附图所示的抛物线轨道. 证明: $xy$ 平面内给出这些抛物线轨道的最大高度的点, 全部位于椭圆

$$x^2+4\left(y-\frac{v_0^2}{4g}\right)^2=\frac{v_0^4}{4g^2}$$

上, 其中 $x\geqslant0$.




**27.** 证明可积向量函数的下列运算性质:

(a) 常数纯量倍法则:

$$\int_a^b k\boldsymbol{r}(t)\,dt=k\int_a^b\boldsymbol{r}(t)\,dt\quad(\text{任意纯量 }k)$$

取 $k=-1$, 得到负常数纯量倍法则:

$$\int_a^b(-\boldsymbol{r}(t))\,dt=-\int_a^b\boldsymbol{r}(t)\,dt$$

(b) 和法则与差法则:

$$\int_a^b(\boldsymbol{r}_1(t)\pm\boldsymbol{r}_2(t))\,dt=\int_a^b\boldsymbol{r}_1(t)\,dt\pm\int_a^b\boldsymbol{r}_2(t)\,dt$$

(c) 常向量倍法则:

$$\int_a^b\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{r}(t)\,dt=\boldsymbol{C}\cdot\int_a^b\boldsymbol{r}(t)\,dt\quad(\text{任何常向量 }\boldsymbol{C})$$

$$\int_a^b\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{r}(t)\,dt=\boldsymbol{C}\times\int_a^b\boldsymbol{r}(t)\,dt\quad(\text{任何常向量 }\boldsymbol{C})$$

**28. 纯量函数和向量函数的积** 假定纯量函数 $u(t)$ 和向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 都是在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上定

义的.

(a) 证明：若 $u$ 和 $\boldsymbol{r}$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，则 $u\boldsymbol{r}$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

(b) 证明：若 $u$ 和 $\boldsymbol{r}$ 都是 $[a,b]$ 上的可微数，则 $u\boldsymbol{r}$ 在 $[a,b]$ 上是可微的，并且

$$\frac{d}{dt}(u\boldsymbol{r}) = u\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{r}\frac{du}{dt}$$

**29. 向量函数的反导数**

(a) 利用纯量函数中值定理系 2 证明：若两个向量函数 $\boldsymbol{R}_1(t)$ 和 $\boldsymbol{R}_2(t)$ 在区间 $I$ 上有恒等的导数，则它们在整个区间 $I$ 上仅相差一个常向量值.

(b) 利用(a)中的结果证明：若 $\boldsymbol{R}(t)$ 是 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 $I$ 上的任何反导数，则 $\boldsymbol{r}$ 在 $I$ 上的任何其他反导数等于 $\boldsymbol{R}(t)+\boldsymbol{C}$，其中 $\boldsymbol{C}$ 是某个常向量.

**30. 微积分基本定理** 实变量纯量函数的微积分基本理对于实变量向量函数同样成立. 用下述方法证明这个结果：

首先利用纯量函数的基本定理证明：若向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 对于 $a \leqslant t \leqslant b$ 是连续的，则在 $(a,b)$ 内的每个点有

$$\frac{d}{dt}\int_a^t \boldsymbol{r}(\tau)d\tau = \boldsymbol{r}(t)$$

然后利用习题 29(b) 中的结论证明：若 $\boldsymbol{R}$ 是 $\boldsymbol{r}$ 在 $[a,\ b]$ 上的任何反导数，则有

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt = \boldsymbol{R}(b) - \boldsymbol{R}(a)$$

**31. 排球** 一个排球在距 6 ft 高球网 12 ft 远的地面之上 4 ft 的点被击出. 它飞离击球点的初始速度为 35 ft/s 和仰角为 27°，并且未被对方球员接到而落地.

(a) 求排球路径的向量方程.

(b) 排球上升的高度是什么？它在什么时间达到最大高度？

(c) 求排球飞越的距离和飞行的时间.

(d) 它在什么时候达到地面之上 7 ft 的高度？从那一点到落地点的距离(地面距离)是多少？

(e) 假定把排球网升高到 8 ft，结果会改变吗？作出解释.

**32. 掷铅球** 1987 年，娜塔丽娅 · 里苏斯卡娅在莫斯科创造了一项女子世界纪录，她把 18 磅 13 盎司的铅球投掷 73 英尺 10 英寸. 假定她是在地平面之上 6.5 英尺以 40°角投掷，铅球的初始速度是多少？

## 11.3 空间中的弧长

我们在本节和后面两节讨论曲线形状的数学特征，这种特征表明曲线转弯和扭曲的陡度.

### 11.3.1 沿空间曲线的弧长

光滑的空间曲线的特征之一是其具有可度量的弧长. 这使我们可以从曲线上的某个基点起给出沿曲线的有向距离来定位曲线上的点，这是在坐标轴上定位点的方法，即通过给出它们距原点的有向距离(见图 11.11).

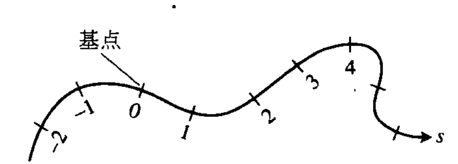



图 11.11 光滑曲线可以像数直线那样标度，每个点的坐标是从预先设定的基点起沿曲线的有向距离

为了量度沿空间中光滑曲线的距离，我们在用于平面曲线的距离公式中增添一个 z 项.

> **定义** 光滑曲线
>
> $$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}, \quad a \leqslant t \leqslant b$$
>
> 当 $t$ 从 $t=a$ 增加到 $t=b$ 时恰好描绘一次的**长度**是
>
> $$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt \qquad (1)$$

正如对于平面曲线一样，可以用满足所述条件的任何方便的参数表示来计算空间曲线的长度. 证明从略.

公式(1)中的平方根是 $|\boldsymbol{v}|$，即速度向量 $d\boldsymbol{r}/dt$ 的长度. 这使我们可以用更简单的形式写出

曲线长度的公式.

**弧长公式**

$$L = \int_a^b |\boldsymbol{v}|\, \mathrm{d}t \tag{2}$$

**例 1** 一架滑翔机沿螺旋线 $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$ 向上滑翔. 滑翔机从 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 的路径的长度是多少?

**解** 这段时间的路径对应于螺旋线的一个整圈(见图 11.2). 曲线这部分的长度为

$$L = \int_a^b |\boldsymbol{v}|\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{2} \text{ 长度单位}$$

这是螺旋线坐落在 $xy$ 平面内的圆周长的$\sqrt{2}$倍. ■

如果我们在用参数 $t$ 表示的光滑曲线 $C$ 上选择一个基点 $P(t_0)$, 每个 $t$ 值决定 $C$ 上一点 $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 和一个"有向距离"

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{v}(\tau)|\,\mathrm{d}\tau$$

这个距离从基点起沿 $C$ 度量(见图 11.13). 如果 $t > t_0$, $s(t)$是沿曲线从 $P(t_0)$到 $P(t_1)$的距离; 如果$t < t_0$, $s(t)$是这个距离的负值. $s$ 的每个值决定 $C$ 上的一点, 并且这成为 $C$ 对于 $s$ 的参数表示. $s$ 称为曲线的**弧长参数**. 参数的值随 $t$ 增加的方向增加. 弧长参数对于考察空间曲线的弯曲和扭曲性质特别有效.

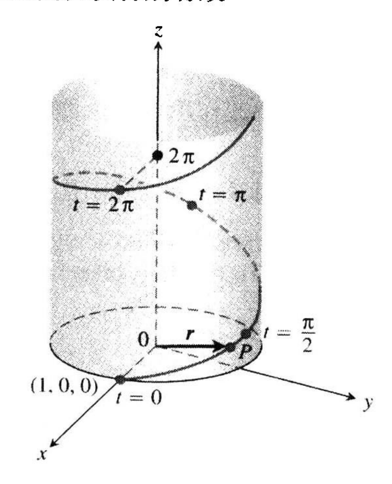



图 11.12 例 1 中的螺旋线 $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$

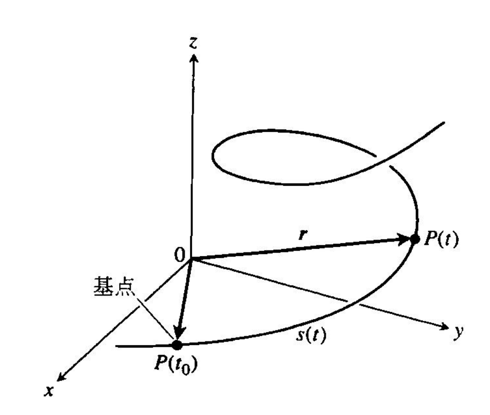



图 11.13 沿曲线从点 $P(t_0)$到任何点 $P(t)$的有向距离是 $s(t) = \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{v}(\tau)|\,\mathrm{d}\tau$

**以 $P(t_0)$ 为基点的弧长参数**

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2 + [z'(\tau)]^2}\,\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{v}(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \tag{3}$$

在公式(3)中用希腊字母 $\tau$(读作"tau")作为积分变量, 因为字母 $t$ 已经用作积分上限.

如果曲线 $\boldsymbol{r}(t)$已用参数 $t$ 给出, $s(t)$是由公式(3)给出的弧长函数, 那么我们有可能求解 $t$ 作为 $s$ 的函数: $t = t(s)$. 于是曲线可能通过用 $t(s)$代换 $t$ 重新用参数 $s$ 表示: $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t(s))$. 新

的参数表示用沿曲线从基点到一点的有向距离来确定曲线上的这个点.

**例 2** 如果 $t_0=0$，沿螺旋线

$$\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$$

从 $t_0$ 到 $t$ 的弧长参数是

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{v}(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \quad (\text{公式}(3)) \\ &= \int_0^t \sqrt{2}\,\mathrm{d}\tau \quad (\text{从例 1 得到的值}) \\ &= \sqrt{2}t \end{aligned}$$

从这个方程求解 $t$，得到 $t=s/\sqrt{2}$. 代入位置向量 $\boldsymbol{r}$，给出螺旋线的下述弧长参数表示：

$$\boldsymbol{r}(t(s))=\left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\boldsymbol{i}+\left(\sin\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\boldsymbol{j}+\frac{s}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}$$

■

对于已经用某个其他参数 $t$ 给出的曲线，通常是很难用解析方法求弧长的参数表示的，这一点不同于例 2. 不过，幸好我们很少需要用 $s(t)$ 或它的反函数 $t(s)$ 的确切公式.

### 11.3.2 质点沿光滑曲线运动的速率

人物传记

乔塞亚·威拉德·吉布斯
(Josiah Willard Gibbs，1839—1903)

由于公式(3)中根式的导数是连续的(曲线是光滑的)，微积分基本定理表明，$s$ 是 $t$ 的可微函数，具有导数

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=|\boldsymbol{v}(t)| \tag{4}$$

正如我们已经知道的那样，质点沿它的路径运动的这个速率是速度向量 $\boldsymbol{v}$ 的长度.

虽然基点 $P(t_0)$ 在公式(3)的 $s$ 定义中起作用，但是它对于公式(4)不起作用. 运动质点沿它的路径行进一段距离的速率同它离基点的远近无关.

注意 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t>0$，因为按照定义，对于光滑曲线 $|\boldsymbol{v}|$ 不会为零. 我们又一次见到 $s$ 是 $t$ 的增函数.

### 11.3.3 单位切向量 $\boldsymbol{T}$

我们已经知道速度向量 $\boldsymbol{v}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ 同曲线相切，因此，向量

$$\boldsymbol{T}=\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$$

是同(光滑)曲线相切的单位向量. 由于对于我们考虑的曲线 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t>0$，$s$ 是一对一函数并且有反函数，反函数给出 $t$ 作为 $s$ 的可微函数(3.7 节). 反函数的导数为

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}t}=\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}$$

这使 $\boldsymbol{r}$ 成为 $s$ 的可微函数，它的导数可以用链式法则计算如下：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{v}\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}=\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}=\boldsymbol{T}$$

这个公式说明，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}s$ 是在速度向量 $\boldsymbol{v}$ 的方向上的单位切向量(见图 11.14).

**定义** 光滑曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 的单位切向量是

$$\boldsymbol{T}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}t}=\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} \tag{5}$$

单位切向量 $\boldsymbol{T}$ 是 $t$ 的可微函数，只要 $\boldsymbol{v}$ 是 $t$ 的可微函数. 在 11.5 节将会见到，$\boldsymbol{T}$ 是移动参考标架中的三个单位向量之一，这个标架是用来描述三维空间中移动物体的运动的.

**例 3** 求曲线

$$\boldsymbol{r}(t) = (3\cos t)\boldsymbol{i} + (3\sin t)\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}$$

的单位切向量，这条曲线表示 11.2 节例 3 中的滑翔机的路径.

**解** 在那个例子中，求出

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -(3\sin t)\boldsymbol{i} + (3\cos t)\boldsymbol{j} + 2t\,\boldsymbol{k}$$

和

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{9+4t^2}$$

因此，

$$\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = -\frac{3\sin t}{\sqrt{9+4t^2}}\boldsymbol{i} + \frac{3\cos t}{\sqrt{9+4t^2}}\boldsymbol{j} + \frac{2t}{\sqrt{9+4t^2}}\boldsymbol{k}$$ ■

对于围绕单位圆依反时针方向的运动

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j}$$

我们看出

$$\boldsymbol{v} = (-\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j}$$

已经是单位向量，所以 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{v}$(见图 11.15).

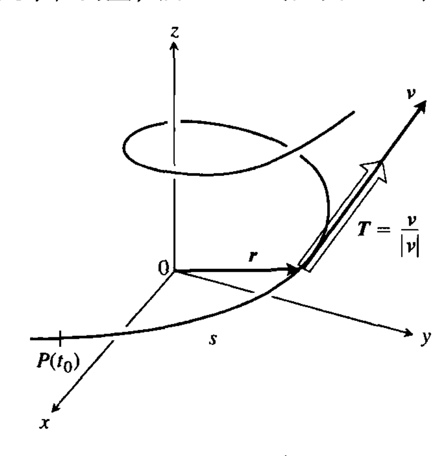


图 11.14 用 $|\boldsymbol{v}|$ 除 $\boldsymbol{v}$ 求单位切向量

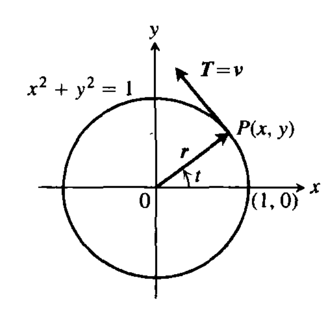


图 11.15 围绕单位圆依反时针方向的运动

## 习题 11.3

在习题 1 ~ 8 中，求曲线的单位切向量. 此外，求曲线指出部分的长度.

1. $\boldsymbol{r}(t)=(2\cos t)\boldsymbol{i}+(2\sin t)\boldsymbol{j}+\sqrt{5}t\,\boldsymbol{k}$，$0\leqslant t\leqslant\pi$.
2. $\boldsymbol{r}(t)=(6\sin 2t)\boldsymbol{i}+(6\cos 2t)\boldsymbol{j}+5t\,\boldsymbol{k}$，$0\leqslant t\leqslant\pi$.
3. $\boldsymbol{r}(t)=t\,\boldsymbol{i}+(2/3)t^{3/2}\boldsymbol{k}$，$0\leqslant t\leqslant 8$.
4. $\boldsymbol{r}(t)=(2+t)\boldsymbol{i}-(t+1)\boldsymbol{j}+t\,\boldsymbol{k}$，$0\leqslant t\leqslant 3$.
5. $\boldsymbol{r}(t)=(\cos^3 t)\boldsymbol{j}+(\sin^3 t)\boldsymbol{k}$，$0\leqslant t\leqslant\pi/2$.
6. $\boldsymbol{r}(t)=6t^3\boldsymbol{i}-2t^3\boldsymbol{j}-3t^3\boldsymbol{k}$，$1\leqslant t\leqslant 2$.
7. $\boldsymbol{r}(t)=(t\cos t)\boldsymbol{i}+(t\sin t)\boldsymbol{j}+(2\sqrt{2}/3)t^{3/2}\boldsymbol{k}$，$0\leqslant t\leqslant\pi$.
8. $\boldsymbol{r}(t)=(t\sin t+\cos t)\boldsymbol{i}+(t\cos t-\sin t)\boldsymbol{j}$，$\sqrt{2}\leqslant t\leqslant 2$.
9. 在曲线
$$\boldsymbol{r}(t) = (5\sin t)\boldsymbol{i} + (5\cos t)\boldsymbol{j} + 12t\,\boldsymbol{k}$$
上，求沿曲线在弧长增加方向距离原点 $26\pi$ 单位的点.
10. 在曲线
$$\boldsymbol{r}(t) = (12\sin t)\boldsymbol{i} - (12\cos t)\boldsymbol{j} + 5t\boldsymbol{k}$$
上，求沿曲线在弧长增加的反方向距离原点 $13\pi$ 单位的点.

在习题 11 ~ 14 中通过计算公式(3)的积分

$$s = \int_0^t |\boldsymbol{v}(\tau)|\,\mathrm{d}\tau$$

求从 $t=0$ 的点起沿曲线的弧长参数.

**11.** $\boldsymbol{r}(t)=(4\cos t)\boldsymbol{i}+(4\sin t)\boldsymbol{j}+3t\boldsymbol{k}$, $0\leqslant t\leqslant\pi/2$.

**12.** $\boldsymbol{r}(t)=(\cos t+t\sin t)\boldsymbol{i}+(\sin t-t\cos t)\boldsymbol{j}$, $\pi/2\leqslant t\leqslant\pi$.

**13.** $\boldsymbol{r}(t)=(e^t\cos t)\boldsymbol{i}+(e^t\sin t)\boldsymbol{j}+e^t\boldsymbol{k}$, $-\ln 4\leqslant t\leqslant 0$.

**14.** $\boldsymbol{r}(t)=(1+2t)\boldsymbol{i}+(1+3t)\boldsymbol{j}+(6-6t)\boldsymbol{k}$, $-1\leqslant t\leqslant 0$.

**15. 弧长**　求曲线

$$\boldsymbol{r}(t)=(\sqrt{2}t)\boldsymbol{i}+(\sqrt{2}t)\boldsymbol{j}+(1-t^2)\boldsymbol{k}$$

从点 $(0,0,1)$ 到 $(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$ 的长度.

**16. 螺旋线的长度**　例 1 中螺旋线一圈的长度 $2\pi\sqrt{2}$ 也是边长为 $2\pi$ 单位的正方形的对角线长度. 说明如何通过切割并且展平螺旋线环绕的圆柱面的一部分获得这个正方形.

**17. 椭圆**

(a) 证明曲线

$$\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j}+(1-\cos t)\boldsymbol{k},\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

是一个正圆柱面同一个平面的交线，由此证明这条曲线是一个椭圆. 求这个圆柱面和平面的方程.

(b) 画出圆柱面上椭圆的草图. 在图上添加在 $t=0$, $\pi/2$, $\pi$, $3\pi/2$ 的单位切向量.

(c) 证明加速度向量始终处在同平面平行的位置(同平面的法向量正交). 因此，如果画出加速度作为附着在椭圆上的向量，它将位于椭圆所在的平面内. 在草图中添加 $t=0$, $\pi/2$, $\pi$, $3\pi/2$ 时的加速度向量.

(d) 写出椭圆长度的积分. 但是不要试图求这个积分；它是非初等积分.

**T** (e) **数值积分器**　用计算机积分器估计这个椭圆的长度，准确到两位小数.

**18. 曲线长度不依赖于参数表示**　为了说明光滑空间曲线的长度不依赖于用来计算它的参数表示，用下列参数表示计算例 1 的螺旋线一圈的长度：

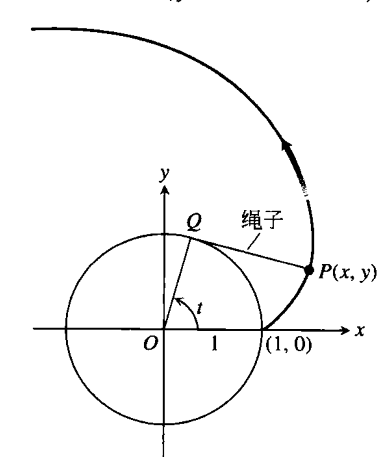
(a) $\boldsymbol{r}(t)=(\cos 4t)\boldsymbol{i}+(\sin 4t)\boldsymbol{j}+4t\boldsymbol{k}$, $0\leqslant t\leqslant\pi/2$.

(b) $\boldsymbol{r}(t)=[\cos(t/2)]\boldsymbol{i}+[\sin(t/2)]\boldsymbol{j}+(t/2)\boldsymbol{k}$, $0\leqslant t\leqslant 4\pi$.

(c) $\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}-(\sin t)\boldsymbol{j}-t\boldsymbol{k}$, $-2\pi\leqslant t\leqslant 0$.

**19. 圆的渐伸线**　如果把缠绕在固定圆上的绳子解开，同时使其在圆所在平面内绷直，它的端点 $P$ 描绘出圆的一条渐伸线. 在附图中，涉及的圆是 $x^2+y^2=1$，描绘起点在 $(1,0)$. 绳子的解开部分同圆在点 $Q$ 相切，而 $t$ 是从正 $x$ 轴到线段 $OQ$ 的角的弧度量度. 推导渐伸线的点 $P(x,y)$ 的参数方程

$$x=\cos t+t\sin t,\ y=\sin t-t\cos t,\ t>0$$




**20.** (续习题 19) 求圆的渐伸线在点 $P(x,y)$ 的单位切向量.

**21. 沿直线的距离**　证明：如果 $\boldsymbol{u}$ 是单位向量，那么，沿直线 $\boldsymbol{r}(t)=P_0+t\boldsymbol{u}$ 从 $P_0$ 起的弧长参数等于 $t$ 自身，其中 $P_0$ 是 $t=0$ 时的点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$.

**22.** 利用 $n=10$ 的辛普森法则，求曲线

$$\boldsymbol{r}(t)=t\,\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+t^3\boldsymbol{k}$$

从原点到点 $(2,4,8)$ 的弧长的近似值.

## 11.4　曲线的曲率

在这一节我们研究曲线是如何转向或者弯曲的. 首先考察坐标平面内的曲线，然后转入空间中的曲线.

### 11.4.1　平面曲线的曲率

当质点沿平面内的光滑曲线运动时，向量 $\boldsymbol{T}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}s$ 在曲线弯曲的地方转向. 由于 $\boldsymbol{T}$ 是单位向量，在质点沿曲线运动的过程中，它的长度保持不变而只改变方向. $\boldsymbol{T}$ 沿曲线每单位长度转向的变化率称为曲率(见图 11.16). 曲率函数所用的传统符号是希腊字母 $\kappa$(读作“kappa”).

> **定义** 如果 $\boldsymbol{T}$ 是光滑曲线的单位切向量，曲线的曲率函数是
> $$\kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right|$$

如果 $|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}s|$ 的值很大，$\boldsymbol{T}$ 在质点通过 $P$ 时急剧转向，曲线在 $P$ 的曲率是很大的. 如果 $|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}s|$ 接近于零，$\boldsymbol{T}$ 的转向比较缓慢，曲线在 $P$ 的曲率比较小.

如果光滑曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 已经用不同于弧长参数 $s$ 的另外一个参数 $t$ 给出，可以按下述方式计算曲率：

$$\kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right| \quad （链式法则）$$

$$= \frac{1}{|\mathrm{d}s/\mathrm{d}t|}\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\right|$$

$$= \frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\right| \quad \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = |\boldsymbol{v}|\right)$$

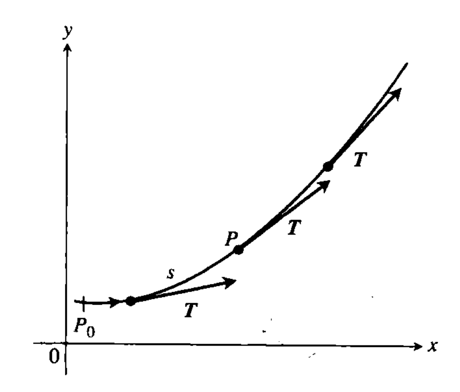



图 11.16 当 $P$ 沿曲线在弧长增加的方向运动时，单位切向量 $\boldsymbol{T}$ 转向；$|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}s|$ 在 $P$ 的值称为曲线在 $P$ 的曲率

> **计算曲率的公式**
>
> 如果 $\boldsymbol{r}(t)$ 是光滑曲线，那么曲率为
> $$\kappa = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\right| \tag{1}$$
> 其中 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|$ 是单位切向量.

通过检验定义，我们在下面例 1 和例 2 中看出，直线和圆的曲率是常数.

**例 1** 一条直线的参数表示为 $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{C} + t\boldsymbol{v}$，其中 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是常向量. 因此，$\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{v}$，单位切向量 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|$ 是常向量，它始终指向同一方向并且导数为 $\mathbf{0}$（见图 11.17）. 由此推出，对于参数 $t$ 的任何值，直线的曲率为

$$\kappa = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|}|\mathbf{0}| = 0$$ ■

图 11.17 沿一条直线的单位切向量 $\boldsymbol{T}$ 始终指向同一方向，曲率 $|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}s|$ 为零（例 1）

**例 2** 现在来求圆的曲率. 从半径为 $a$ 的圆的参数表示

$$\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j}$$

开始. 于是，

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -(a\sin t)\boldsymbol{i} + (a\cos t)\boldsymbol{j}$$

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2} = \sqrt{a^2} = |a| = a \quad （由于 a > 0, |a| = a）$$

由此求出

$$\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = -(\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} = -(\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j}$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\right| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$$

所以，对于参数 $t$ 的任何值，圆的曲率是

$$\kappa = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{1}{a}(1) = \frac{1}{a} = \frac{1}{\text{半径}}$$ ■

式(1)中计算 $\kappa$ 的公式虽然也可以用来计算空间曲线的曲率，但是在下节我们要寻求一个通常更便于应用的计算公式.

在同单位切向量 $\boldsymbol{T}$ 正交的向量中，单位法向量 $\boldsymbol{N}$ 是特别重要的一个，因为它指向曲线转弯的方向. 由于 $\boldsymbol{T}$ 的长度为常数(等于 1)，导数 $\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}s$ 同 $\boldsymbol{T}$ 正交(11.1 节公式(4)). 因此，如果 $\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}s$ 用它的长度 $\kappa$ 相除，我们就得到同 $\boldsymbol{T}$ 正交的单位法向量 $\boldsymbol{N}$(见图 11.18).

**定义** 在 $\kappa \neq 0$ 的点，平面内光滑曲线的**主单位法向量**是

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$$

向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}s$ 指向 $\boldsymbol{T}$ 在曲线弯曲时转弯的方向. 因此，如果我们面向弧长增加的方向，向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}s$ 在 $\boldsymbol{T}$ 沿顺时针方向转弯时指向右侧，在 $\boldsymbol{T}$ 沿反时针方向转弯时指向左侧. 换句话说，主法向量 $\boldsymbol{N}$ 指向曲线凹的一侧(见图 11.18).

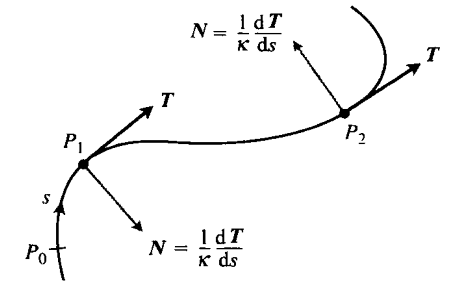



图 11.18 同曲线正交的向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}s$ 始终指出 $\boldsymbol{T}$ 转弯的方向；单位法向量 $\boldsymbol{N}$ 是 $\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}s$ 的方向

如果光滑曲线已经用弧长参数 $s$ 之外的另一个参数 $t$ 给出，那么利用链式法则可以直接计算 $\boldsymbol{N}$:

$$\boldsymbol{N} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}s}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}s|} = \frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}t)(\mathrm{d}t/\mathrm{d}s)}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}t||\mathrm{d}t/\mathrm{d}s|}$$

$$= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}t|} \qquad \left(\text{消去}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}t} > 0\right)$$

这个公式使我们能够求 $\boldsymbol{N}$ 而不必先求 $\kappa$ 和 $s$.

**计算 $\boldsymbol{N}$ 的公式**

如果 $\boldsymbol{r}(t)$ 是光滑曲线，那么主单位法向量是

$$\boldsymbol{N} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}t|} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|$ 是单位切向量.

**例 3** 求圆周运动

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos 2t)\boldsymbol{i} + (\sin 2t)\boldsymbol{j}$$

的 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{N}$.

**解** 首先求 $\boldsymbol{T}$:

$$\boldsymbol{v} = -(2\sin 2t)\boldsymbol{i} + (2\cos 2t)\boldsymbol{j}$$

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{4\sin^2 2t + 4\cos^2 2t} = 2$$

$$T = \frac{v}{|v|} = -(\sin 2t)i + (\cos 2t)j$$

由此求出

$$\frac{dT}{dt} = -(2\cos 2t)i - (2\sin 2t)j$$

$$\left|\frac{dT}{dt}\right| = \sqrt{4\cos^2 2t + 4\sin^2 2t} = 2$$

和

$$N = \frac{dT/dt}{|dT/dt|}$$

$$= -(\cos 2t)i - (\sin 2t)j \quad (公式(2))$$

请注意 $T \cdot N = 0$，证实 $N$ 同 $T$ 正交. 还要注意，对于本例中的圆周运动，$r(t)$ 的单位法向量 $N$ 指向圆在原点的圆心. ■

### 11.4.2 平面曲线的曲率圆

在平面曲线上 $\kappa \neq 0$ 的点 $P$ 的**曲率圆**或者**密切圆**，是曲线所在平面上满足下列条件的圆：

(1) 它同曲线在 $P$ 相切(具有和曲线相同的切线)；

(2) 具有和曲线在 $P$ 的相同曲率.

(3) 处于曲线凹的一侧或者内侧(如图 11.19).

曲线在 $P$ 的**曲率半径**是曲率圆的半径，依据例 2，

$$曲率半径 = \rho = \frac{1}{\kappa}$$

为了求曲率半径 $\rho$，我们求曲率 $\kappa$，再取倒数. 曲线在 $P$ 的**曲率中心**是曲率圆的圆心.

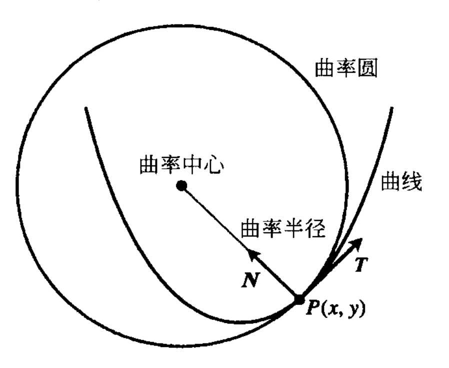



图 11.19 在 $P(x,y)$ 的密切圆处于曲线的内侧

**例 4** 求抛物线 $y = x^2$ 在原点的密切圆，并且画出图形.

**解** 利用参数 $t = x$ 给出抛物线的参数表示(见 9.6 节例 1)

$$r(t) = t\,i + t^2 j$$

首先求抛物线在原点的曲率，利用公式(1)，

$$v = \frac{dr}{dt} = i + 2t\,j$$

$$|v| = \sqrt{1 + 4t^2}$$

所以

$$T = \frac{v}{|v|} = (1 + 4t^2)^{-1/2} i + 2t(1 + 4t^2)^{-1/2} j$$

由此求出

$$\frac{dT}{dt} = -4t(1 + 4t^2)^{-3/2} i + [2(1 + 4t^2)^{-1/2} - 8t^2(1 + 4t^2)^{-3/2}] j$$

在原点，$t = 0$，所以曲率为

$$\kappa(0) = \frac{1}{|v(0)|}\left|\frac{dT}{dt}(0)\right| \quad (公式(1))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1}}|0i + 2j| = (1)\sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

因此，曲率半径是 $1/\kappa=1/2$. 从图 11.20 看出，在原点，$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{i}$，所以 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{j}$，而密切圆的圆心在 $(0,1/2)$. 密切圆的方程是

$$(x-0)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

从图 11.20 可以看出，密切圆在原点对抛物线的逼近比切线逼近 $y=0$ 是更好的逼近. ■

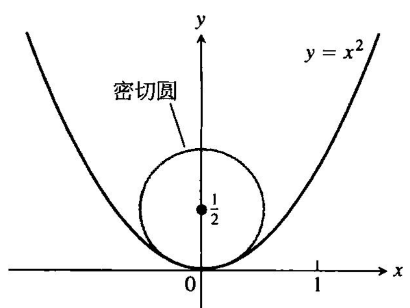



图 11.20 抛物线 $y=x^2$ 在原点的密切圆(例 4)

### 11.4.3 空间曲线的曲率和法向量

如果空间中的光滑曲线是用作为某个参数 $t$ 的函数的位置向量 $\boldsymbol{r}(t)$ 表示的，并且 $s$ 是曲线的弧长参数，那么单位切向量 $\boldsymbol{T}$ 是 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}s=\boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|$. 于是空间曲线的曲率定义为

$$\kappa=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right|=\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\right| \tag{3}$$

同平面曲线的曲率一样. 向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}s$ 同 $\boldsymbol{T}$ 正交，我们把**主单位法向量**定义为

$$\boldsymbol{N}=\frac{1}{\kappa}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}t|} \tag{4}$$

**例 5** 求螺旋线

$$\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t)\boldsymbol{i}+(a\sin t)\boldsymbol{j}+bt\,\boldsymbol{k},\ a,b\geqslant 0,a^2+b^2\neq 0$$

(见图 11.21)的曲率.

**解** 从速度向量 $\boldsymbol{v}$ 计算 $\boldsymbol{T}$:

$$\boldsymbol{v}=-(a\sin t)\boldsymbol{i}+(a\cos t)\boldsymbol{j}+b\,\boldsymbol{k}$$

$$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{a^2\sin^2t+a^2\cos^2t+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\boldsymbol{T}=\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[-(a\sin t)\boldsymbol{i}+(a\cos t)\boldsymbol{j}+b\boldsymbol{k}]$$

然后利用公式(3)，

$$\begin{aligned}\kappa&=\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\right|\\&=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left|\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[-(a\cos t)\boldsymbol{i}-(a\sin t)\boldsymbol{j}]\right|\\&=\frac{a}{a^2+b^2}|-(\cos t)\boldsymbol{i}-(\sin t)\boldsymbol{j}|\\&=\frac{a}{a^2+b^2}\sqrt{(\cos t)^2+(\sin t)^2}=\frac{a}{a^2+b^2}\end{aligned}$$

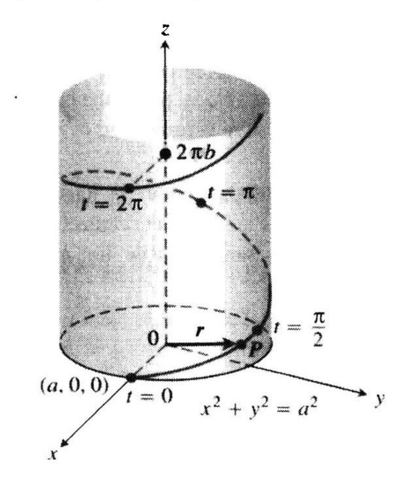



图 11.21 用正数 $a$ 和 $b$ 及 $t\geqslant 0$ 画出的螺旋线 $\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t)\boldsymbol{i}+(b\sin t)\boldsymbol{j}+bt\,\boldsymbol{k}$(例 5)

从这个等式看出，对于固定的 $a$，曲率随 $b$ 的增加而减小. 对于固定的 $b$，减小 $a$ 最终也是减小曲率.

如果 $b=0$，螺旋线退化成半径为 $a$ 的圆，它的曲率像应有的那样减小到 $1/a$. 如果 $a=0$，螺旋线变成 $z$ 轴，它的曲率减小到 0，这也是应有的结果. ■

**例 6** 求例 5 中主单位法向量 $\boldsymbol{N}$，并且描述它的指向.

**解** 对于从例 5 得到的单位切向量 $\boldsymbol{T}$，有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[(a\cos t)\boldsymbol{i}+(a\sin t)\boldsymbol{j}]\quad(例(5))$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\boldsymbol{N} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}t|} \quad (\text{公式}(4))$$

$$= -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[(a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j}]$$

$$= -(\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j}$$

因此，$\boldsymbol{N}$ 平行于 $xy$ 平面，并且始终指向 $z$ 轴. ■

## 习题 11.4

在习题 1 ~4 中，求平面曲线的 $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$ 和 $\kappa$.

**1.** $\boldsymbol{r}(t) = t\,\boldsymbol{i} + (\ln\cos t)\boldsymbol{j}$, $-\pi/2 < t < \pi/2$.

**2.** $\boldsymbol{r}(t) = (\ln\sec t)\boldsymbol{i} + t\,\boldsymbol{j}$, $-\pi/2 < t < \pi/2$.

**3.** $\boldsymbol{r}(t) = (2t+3)\boldsymbol{i} + (5-t^2)\boldsymbol{j}$.

**4.** $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j}$, $t>0$.

**5. $xy$ 平面内函数图形的曲率公式**

(a) $xy$ 平面内 $y=f(x)$ 的图形自动具有参数表示形式 $x=x$, $y=f(x)$ 以及向量公式 $\boldsymbol{r}(x) = x\,\boldsymbol{i} + f(x)\boldsymbol{j}$. 利用这个公式证明：若 $f$ 是 $x$ 的二次可微函数，则

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1+(f'(x))^2]^{3/2}}$$

(b) 利用(a)中 $\kappa$ 的公式求

$$y = \ln(\cos x),\quad -\pi/2 < x < \pi/2$$

的曲率. 把答案同习题 1 的答案作比较.

(c) 证明在拐点的曲率为零.

**6. 用参数表示的平面曲线的曲率公式**

(a) 证明：由二次可微函数 $x=f(t)$ 和 $y=g(t)$ 定义的光滑曲线 $\boldsymbol{r}(t) = f(x)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j}$ 的曲率由公式

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}$$

给出. 公式中的点(·)表示对 $t$ 的导数，每个点代表一次导数. 利用这个公式求下列曲线的曲率：

(b) $\boldsymbol{r}(t) = t\,\boldsymbol{i} + (\ln\sin t)\boldsymbol{j}$, $0<t<\pi$;

(c) $\boldsymbol{r}(t) = [\tan^{-1}(\sinh t)]\boldsymbol{i} + (\ln\cosh t)\boldsymbol{j}$.

**7. 平面曲线的法线**

(a) 证明：$\boldsymbol{n}(t) = -g'(t)\boldsymbol{i} + f'(t)\boldsymbol{j}$ 和 $-\boldsymbol{n}(t) = g'(t)\boldsymbol{i} - f'(t)\boldsymbol{j}$ 都是曲线 $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j}$ 在点 $(f(t), g(t))$ 的法线.

为了获得特定平面曲线的主单位法向量 $\boldsymbol{N}$，可以从(a)中选择指向曲线凹陷一边的 $\boldsymbol{n}$ 或者 $-\boldsymbol{n}$，并且使其成为单位向量（见图 11.18）. 利用这种方法求下列曲线的 $\boldsymbol{N}$：

(b) $\boldsymbol{r}(t) = t\,\boldsymbol{i} + \mathrm{e}^{2t}\boldsymbol{j}$;

(c) $\boldsymbol{r}(t) = \sqrt{4-t^2}\,\boldsymbol{i} + t\,\boldsymbol{j}$, $-2 \leqslant t \leqslant 2$.

**8.** （续习题 7）(a) 利用习题 7 的方法求曲线

$$\boldsymbol{r}(t) = t\,\boldsymbol{i} + (1/3)t^3\boldsymbol{j}$$

当 $t<0$ 时的 $\boldsymbol{N}$；然后求其当 $t>0$ 时的 $\boldsymbol{N}$.

(b) 对于(a)中的曲线，利用公式(4)直接由 $\boldsymbol{T}$ 计算对于 $t\neq 0$ 的 $\boldsymbol{N}$. 在 $t=0$ 时存在 $\boldsymbol{N}$ 吗？画出曲线的图形，并且说明当 $t$ 由负值变成正值时 $\boldsymbol{N}$ 会出现什么变化.

在习题 9 ~16 中，求 $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$ 和 $\kappa$.

**9.** $\boldsymbol{r}(t) = (3\sin t)\boldsymbol{i} + (3\cos t)\boldsymbol{j} + 4t\boldsymbol{k}$.

**10.** $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$.

**11.** $\boldsymbol{r}(t) = (\mathrm{e}^t\cos t)\boldsymbol{i} + (\mathrm{e}^t\sin t)\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$.

**12.** $\boldsymbol{r}(t) = (6\sin 2t)\boldsymbol{i} + (6\cos 2t)\boldsymbol{j} + 5t\boldsymbol{k}$.

**13.** $\boldsymbol{r}(t) = (t^3/3)\boldsymbol{i} + (t^2/2)\boldsymbol{j}$, $t>0$.

**14.** $\boldsymbol{r}(t) = (\cos^3 t)\boldsymbol{i} + (\sin^3 t)\boldsymbol{j}$, $0<t<\pi/2$.

**15.** $\boldsymbol{r}(t) = t\,\boldsymbol{i} + (a\cosh(t/a))\boldsymbol{j}$, $a>0$.

**16.** $\boldsymbol{r}(t) = (\cosh t)\boldsymbol{i} - (\sinh t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$.

**17.** 证明：抛物线 $y=ax^2$, $a\neq 0$ 在其顶点具有最大曲率，并且无最小曲率.（注意：由于曲线在平移或者旋转时保持曲率不变，这个结果对于任何抛物线都是正确的.）

**18.** 证明：椭圆 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $a>b>0$ 在其长轴具有最大曲率，在其短轴具有最小曲率.（同习题 17 一样，这个结果对于任何椭圆都是正确的.）

**19. 螺旋线的最大曲率** 在例 5 中已求出螺旋线

$$\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j} + bt\,\boldsymbol{k}\quad (a,b \geqslant 0)$$

的曲率为 $\kappa = a^2/(a^2+b^2)$. 对于给定的 $b$ 值，$\kappa$ 可能达到的最大值是什么？提出答案的理由.

**20. 总曲率** 对于光滑曲线从 $s=s_0$ 延伸到 $s=s_1>s_0$ 的部分，我们用对 $\kappa$ 从 $s_0$ 到 $s_1$ 的积分求曲线的总曲率. 如果曲线有某个另外的参数，例如 $t$，那么总曲率为

$$K = \int_{s_0}^{s_1}\kappa\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1}\kappa\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1}\kappa|\boldsymbol{v}|\,\mathrm{d}t$$

其中$t_0$和$t_1$对应于$s_0$和$s_1$. 求下列曲线的总曲率:

(a)螺旋线

$$r(t) = (3\cos t)i + (3\sin t)j + t\,k, 0 \leqslant t \leqslant 4\pi$$

的这部分.

(b)抛物线

$$y = x^2, -\infty < x < \infty$$

21. 求曲线

$$r(t) = t\,i + (\sin t)j$$

在点$(\pi/2, 1)$的曲率圆的方程. (曲线是$xy$平面内$y=\sin x$的图形的参数表示.)

22. 求曲线

$$r(t) = (2\ln t)i - [t + (1/t)]j, \quad e^{-2} \leqslant t \leqslant e^2$$

在点$(0,-2)$的曲率圆的方程, 这个点是$t=1$的点.

T 在习题5中推导出的公式

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$$

把二次可微的平面曲线$y=f(x)$的曲率表示成$x$的函数. 在习题23~26中, 求曲线的曲率函数. 然后在给定区间上一起画出$f(x)$和$\kappa(x)$的图形. 你将会发现某些意外的结果.

23. $y=x^2$, $-2\leqslant x\leqslant 2$. 24. $y=x^4/4$, $-2\leqslant x\leqslant 2$.

25. $y=\sin x$, $0\leqslant x\leqslant 2\pi$. 26. $y=e^x$, $-1\leqslant x\leqslant 2$.

**计算机探究**

在习题27~34中, 你将要用一种CAS(计算机代数系统)考察平面曲线上离心率$\kappa\neq 0$的一点$P$的密切圆. 用CAS执行下列处理步骤:

(a)在指定区间上绘制用参数形式或者函数形式给出的平面曲线, 以便观察曲线的形状.

(b)利用习题5或者习题6中的相应公式, 计算曲线在给定值$t_0$的曲率$\kappa$. 如果曲线是用函数$y=f(x)$给出的, 利用参数表示$x=t$和$y=f(t)$.

(c)求曲线在$t_0$的单位法向量$N$. 请注意, $N$的分量的符号取决于单位切向量$T$在$t=t_0$的转向是顺时针方向还是反时针方向(参见习题7).

(d)如果$C=ai+bj$是从原点到密切圆的中心$(a, b)$的向量, 从向量公式

$$C = r(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}N(t_0)$$

求中心向量$C$. 曲线上的点$P(x_0, y_0)$由位置向量$r(t_0)$给出.

(e)用隐式方式绘制密切圆的方程$(x-a)^2+(y-b)^2=1/\kappa^2$的图形. 然后一起绘制曲线和密切圆的图形. 你可能需要试验视窗的尺寸, 但是要保证视窗是正方形的.

27. $r(t)=(3\cos t)i+(5\sin t)j$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$; $t_0=\pi/4$.

28. $r(t)=(\cos^3 t)i+(\sin^3 t)j$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$; $t_0=\pi/4$.

29. $r(t)=t^2 i+(t^3-3t)j$, $-4\leqslant t\leqslant 4$; $t_0=3/5$.

30. $r(t)=(t^3-2t^2-t)i+\dfrac{3t}{\sqrt{1+t^2}}j$, $-2\leqslant t\leqslant 5$; $t_0=1$.

31. $r(t)=(2t-\sin t)i+(2-2\cos t)j$, $0\leqslant t\leqslant 3\pi$; $t_0=3\pi/2$.

32. $r(t)=(e^{-t}\cos t)i+(e^{-t}\sin t)j$, $0\leqslant t\leqslant 6\pi$; $t_0=\pi/4$.

33. $y=x^2-x$, $-2\leqslant x\leqslant 5$; $x_0=1$.

34. $y=x(1-x)^{2/5}$, $-1\leqslant x\leqslant 2$; $x_0=1/2$.

## 11.5 加速度的切分量和法分量

当你沿着一条空间曲线行进时, 如果用笛卡儿$i$, $j$, $k$坐标系表示描述你的运动的向量, 其实对你是不适合的. 富有意义的向量反倒是表示你前进方向的向量(单位切向量$T$)和你的路径转弯方向的向量(单位法向量$N$), 以及你的运动在这两个向量决定的平面中从平面的垂直方向(由单位副法向量$B=T\times N$定义)"扭转"的趋势的向量. 这个$TNB$标架是随运动移动的三个相互垂直的单位向量(见图11.22), 把沿曲线的加速度表示成这个标架的线性组合, 特别揭示出路径和沿路径运动的性质.

### 11.5.1 *TNB* 标架

空间曲线的**副法向量**是同时与$T$和$N$正交的单位向量$B=T\times N$(见图11.23). $T$, $N$和$B$共同定义一个运动的右手向量标架, 它在计算空间中质点运动的路径方面起着重要作用. 这个标架称为**弗莱纳标架**(因为简-弗雷德里克·弗莱纳(1816—1900)而得名), 也称为***TNB*标架**.

### 11.5.2 加速度的切分量和法分量

当物体受到重力、制动器或者火箭发动机组的加速时, 通常我们想知道作用在运动方向即切线方向$T$的加速度是多少. 可以利用链式法则把速度向量$v$改写成

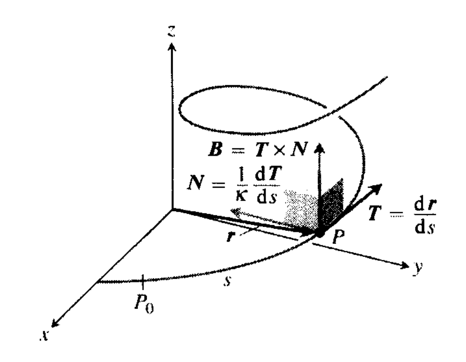



图 11.22 沿空间曲线移动的相互垂直的单位向量的 ***TNB*** 标架

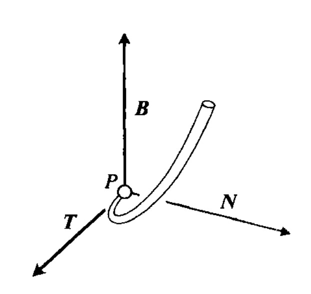



图 11.23 向量 $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{B}$(按这个顺序)构成空间中相互正交的单位向量的右手标架

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{T}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

并且对这串等式两端微分计算加速度:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{T}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\left(\kappa\boldsymbol{N}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) \quad \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s} = \kappa\boldsymbol{N}\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \kappa\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\boldsymbol{N}\end{aligned}$$

**定义** 如果把加速度向量写成

$$\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{N} \tag{1}$$

那么,

$$a_T = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{v}| \quad \text{和} \quad a_N = \kappa\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \kappa|\boldsymbol{v}|^2 \tag{2}$$

是加速度的**切向**纯分量和**法向**纯分量.

请注意,副法向量 $\boldsymbol{B}$ 不出现在公式(1)中. 无论我们所观察的运动物体可能在空间中出现何种转动或者扭摆,加速度 $\boldsymbol{a}$ 始终位于同 $\boldsymbol{B}$ 正交的 $\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 的平面内. 此外,公式确切告诉我们加速度在运动的切线方向所取的值($\mathrm{d}^2s/\mathrm{d}t^2$)和在运动的法线方向所取的值($\kappa(\mathrm{d}s/\mathrm{d}t)^2$)(见图 11.24).

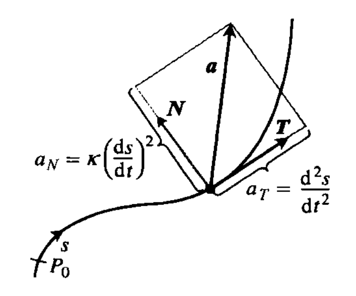



图 11.24 加速度的切分量和法分量;加速度 $\boldsymbol{a}$ 始终位于同 $\boldsymbol{B}$ 正交的 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 的平面内

从公式(2)我们能够发现什么东西? 按照定义,加速度 $\boldsymbol{a}$ 是速度 $\boldsymbol{v}$ 的变化率,一般说来,当物体沿它的路径运动时速度 $\boldsymbol{v}$ 的长度和方向都发生变化. 加速度的切分量 $a_T$ 度量 $\boldsymbol{v}$ 的长度的变化率(即速率的变化). 加速度的法分量 $a_N$ 度量 $\boldsymbol{v}$ 的方向的变化率.

请注意,加速度法向纯分量是曲率和速率平方的乘积. 这说明当你乘坐的汽车在急剧转弯($\kappa$ 很大)和高速转弯($|\boldsymbol{v}|$ 很大)时,为什么必须牢牢扶住. 如果汽车的速率增加一倍,在同样

的曲率下，你将经受4倍的加速度法分量的作用.

如果物体在圆上以恒速运动，$d^2s/dt^2$ 为零，所有点的加速度以 $\boldsymbol{N}$ 的方向指向圆心. 如果物体加速或者减速，$\boldsymbol{a}$ 具有非零的切分量(见图11.25).

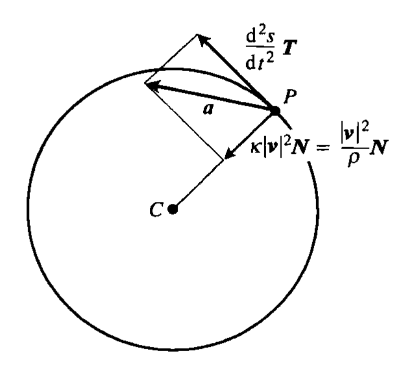



图 11.25 绕半径为 $\rho$ 的圆周依反时针方向运动的物体加速时加速度的切分量和法分量

我们通常利用公式 $a_N = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 - a_T^2}$ 计算 $a_N$，这个公式是从方程 $|\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = a_T^2 + a_N^2$ 求解 $a_N$ 得到的. 用这个公式可以求 $a_N$ 而无需先计算 $\kappa$.

**计算加速度法分量的公式**

$$a_N = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 - a_T^2} \tag{3}$$

**例** 求物体运动

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j}, \quad t > 0$$

的加速度，把加速度写成 $\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{N}$ 的形式，但是不用求 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{N}$. (运动路径是图11.26中圆的渐伸线.)

**解** 首先用公式(2)求 $a_T$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \\ &= (-\sin t + \sin t + t\cos t)\boldsymbol{i} + (\cos t - \cos t + t\sin t)\boldsymbol{j} \\ &= (t\cos t)\boldsymbol{i} + (t\sin t)\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t} = \sqrt{t^2} = |t| = t \quad (t > 0)$$

$$a_T = \frac{d}{dt}|\boldsymbol{v}| = \frac{d}{dt}(t) = 1 \quad (\text{公式(2)})$$

得到 $a_T$ 后，用公式(3)求 $a_N$:

$$\boldsymbol{a} = (\cos t - t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t + t\cos t)\boldsymbol{j}$$

$$|\boldsymbol{a}|^2 = t^2 + 1 \quad (\text{经过代数运算后})$$

$$\begin{aligned}a_N &= \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 - a_T^2} \\ &= \sqrt{(t^2+1) - (1)} = \sqrt{t^2} = t\end{aligned}$$

然后用公式(1)求 $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{N} = (1)\boldsymbol{T} + (t)\boldsymbol{N} = \boldsymbol{T} + t\boldsymbol{N}$$ ■

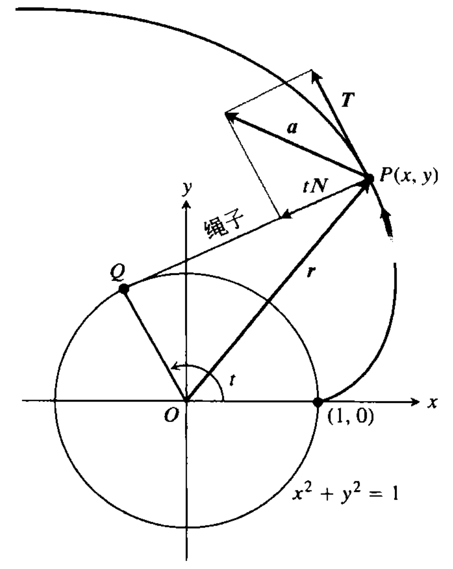



图 11.26 运动 $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j}(t>0)$ 的加速度的切分量和法分量；如果把环绕固定圆的绳子解开，并且使其在圆所在的平面内绷直，它的端点 $P$ 经过的路径是圆的渐伸线(例)

### 11.5.3 挠率

试问 $d\boldsymbol{B}/ds$ 具有何种同 $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有关的特性？从向量积微分法则，我们得到

$$\frac{d\boldsymbol{B}}{ds} = \frac{d(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N})}{ds} = \frac{d\boldsymbol{T}}{ds}\times\boldsymbol{N} + \boldsymbol{T}\times\frac{d\boldsymbol{N}}{ds}$$

由于 $\boldsymbol{N}$ 是 $d\boldsymbol{T}/ds$ 的方向，$(d\boldsymbol{T}/ds)\times\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}$，从而有

$$\frac{d\boldsymbol{B}}{ds} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{T}\times\frac{d\boldsymbol{N}}{ds} = \boldsymbol{T}\times\frac{d\boldsymbol{N}}{ds}$$

由此看出，$d\boldsymbol{B}/ds$ 同 $\boldsymbol{T}$ 正交，因为向量积是同它的两个因式正交的.

由于 $\frac{d\boldsymbol{B}}{ds}$ 也垂直于 $\boldsymbol{B}$(其长度为常数)，推知 $\frac{d\boldsymbol{B}}{ds}$ 同 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 的平面正交. 换句话说，$\frac{d\boldsymbol{B}}{ds}$ 平行于

$N$，所以$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$是$N$的纯量倍数. 用符号表示，

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}=-\tau\boldsymbol{N}$$

在这个公式中加负号是一种惯例. 纯量$\tau$称为沿曲线的挠率. 注意，

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{N}=-\tau\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N}=-\tau(1)=-\tau$$

我们用这个公式引出下面的定义.

**定义** 令$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}$，光滑曲线的**挠率**函数是

$$\tau=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{N} \tag{4}$$

曲率$\kappa$不会取负值，同曲率不一样，挠率$\tau$可以取正值、负值或者零.

由$\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{B}$决定的三个平面的命名和图形显示在图11.27中. 可以把曲率$\kappa=|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}s|$想象成当点$P$在其路径上运动时，法平面转动的变化率. 同样，挠率$\tau=(\mathrm{d}\boldsymbol{B}/\mathrm{d}s)\cdot\boldsymbol{N}$是当点沿曲线运动时，密切平面绕$\boldsymbol{T}$转动的变化率. 挠率是曲线扭转程度的度量.

请注意图11.28. 如果$P$是在弯曲的轨道上向上攀行的火车，机车前灯在每单位距离上摇摆的变化率是轨道的曲率. 机车在由$\boldsymbol{T}$和$\boldsymbol{N}$构成的平面向外扭转的变化率是轨道的挠率.

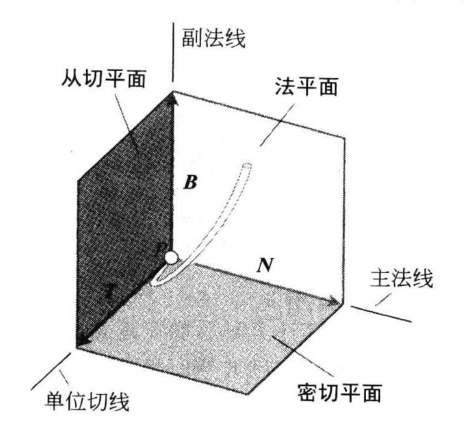



图11.27 由$\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{N}$和$\boldsymbol{B}$决定的三个平面的名称

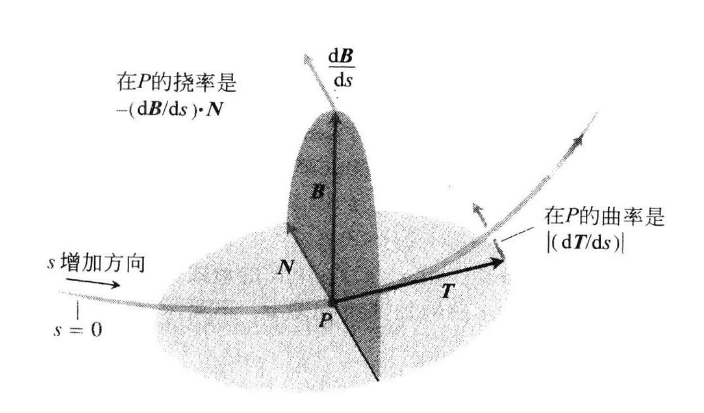



图11.28 每个运动物体伴随$\boldsymbol{TNB}$标架运动，这个标架表示运动路径的几何特性

### 11.5.4 计算公式

应用最为广泛的挠率公式当推

$$\tau=\frac{\begin{vmatrix}\dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z}\\ \dddot{x} & \dddot{x} & \dddot{x}\end{vmatrix}}{|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}|^2}\quad(\text{如果 }\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}) \tag{5}$$

这个公式在高等微积分教程中推导.

公式(5)中的点(·)表示对$t$求导数，一个点代表一次求导. 因此，$\dot{x}$(“$x$点”)表示$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$，$\ddot{x}$(“$x$二重点”)表示$\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$，$\dddot{x}$(“$x$三重点”)表示$\mathrm{d}^3x/\mathrm{d}t^3$. 同样$\dot{y}=\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$，等等.

还有一个便于使用的曲率公式，如在下面的简表中给出的那样(参见习题21).

**空间曲线的公式**

单位切向量 $\boldsymbol{T}=\dfrac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$

主单位法向量 $\boldsymbol{N}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}t|}$

副法向量 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}$

曲率 $\kappa=\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right|=\dfrac{|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{v}|^3}$

挠率 $\tau=-\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{N}=\dfrac{\begin{vmatrix}\dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z}\\ \dddot{x} & \dddot{x} & \dddot{x}\end{vmatrix}}{|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}|^2}$

加速度的切向纯分量和法向纯分量

$\boldsymbol{a}=a_T\boldsymbol{T}+a_N\boldsymbol{N}$

$a_T=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{v}|$

$a_N=\kappa|\boldsymbol{v}|^2=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2-a_T^2}$

## 习题 11.5

在习题 1 和 2 中，用 $\boldsymbol{a}=a_T\boldsymbol{T}+a_N\boldsymbol{N}$ 的形式写出物体运动的加速度向量 $\boldsymbol{a}$，不用求 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{N}$.

**1.** $\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t)\boldsymbol{i}+(a\sin t)\boldsymbol{j}+bt\,\boldsymbol{k}$.

**2.** $\boldsymbol{r}(t)=(1+3t)\boldsymbol{i}+(t-2)\boldsymbol{j}-3t\,\boldsymbol{k}$.

在习题 3～6 中，用 $\boldsymbol{a}=a_T\boldsymbol{T}+a_N\boldsymbol{N}$ 的形式写出物体运动在给定 $t$ 值的加速度向量 $\boldsymbol{a}$，不用求 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{N}$.

**3.** $\boldsymbol{r}(t)=(t+1)\boldsymbol{i}+2t\,\boldsymbol{j}+t^2\boldsymbol{k}$, $t=1$.

**4.** $\boldsymbol{r}(t)=(t\cos t)\boldsymbol{i}+(t\sin t)\boldsymbol{j}+t^2\boldsymbol{k}$, $t=0$.

**5.** $\boldsymbol{r}(t)=t^2\boldsymbol{i}+(t+(1/3)t^3)\boldsymbol{j}+(t-(1/3)t^3)\boldsymbol{k}$, $t=0$.

**6.** $\boldsymbol{r}(t)=(\mathrm{e}^t\cos t)\boldsymbol{i}+(\mathrm{e}^t\sin t)\boldsymbol{j}+\sqrt{2}\mathrm{e}^t\boldsymbol{k}$, $t=0$.

在习题 7 和 8 中，求在给定 $t$ 值的 $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{B}$. 然后求在那个 $t$ 值的密切平面、法平面和从切平面的方程.

**7.** $\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $t=\pi/4$.

**8.** $\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j}+t\,\boldsymbol{k}$, $t=0$.

在 11.4 节的习题 9～16 中，已经求出空间曲线的 $\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{N}$ 和 $\kappa$. 如今，在本节习题 9～16 中，求这些空间曲线的 $\boldsymbol{B}$ 和 $\tau$.

**9.** $\boldsymbol{r}(t)=(3\sin t)\boldsymbol{i}+(3\cos t)\boldsymbol{j}+4t\boldsymbol{k}$.

**10.** $\boldsymbol{r}(t)=(\cos t+t\sin t)\boldsymbol{i}+(\sin t-t\cos t)\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$.

**11.** $\boldsymbol{r}(t)=(\mathrm{e}^t\cos t)\boldsymbol{i}+(\mathrm{e}^t\sin t)\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$.

**12.** $\boldsymbol{r}(t)=(6\sin 2t)\boldsymbol{i}+(6\cos 2t)\boldsymbol{j}+5t\boldsymbol{k}$.

**13.** $\boldsymbol{r}(t)=(t^3/3)\boldsymbol{i}+(t^2/2)\boldsymbol{j}$, $t>0$.

**14.** $\boldsymbol{r}(t)=(\cos^3 t)\boldsymbol{i}+(\sin^3 t)\boldsymbol{j}$, $0<t<\pi/2$.

**15.** $\boldsymbol{r}(t)=t\,\boldsymbol{i}+(a\cosh(t/a))\boldsymbol{j}$, $a>0$.

**16.** $\boldsymbol{r}(t)=(\cosh t)\boldsymbol{i}-(\sinh t)\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$.

**17.** 在你的汽车的速度计上显示的车速是稳定的 35 mph. 你可能处在加速中吗? 作出解释.

**18.** 对于以恒速运动的质点的加速度可以得出任何结论吗? 提出答案的理由.

**19.** 对于加速度向量始终同其速度向量正交的的质点的速率可以得出任何结论吗? 提出答案的理由.

**20.** 一个质量为 $m$ 的物体以 10 单位/秒的恒速沿抛物线 $y=x^2$ 运动. 在点(0, 0)引起物体加速度的作用力是什么，在点$(2^{1/2},2)$的作用力是什么? 用 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 表示答案. (记住牛顿定律 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$.)

**21. 曲率的向量公式** 对于光滑曲线，推导曲率公式

$$\kappa=\frac{|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{v}|^3}$$

**22.** 证明: 如果运动质点加速度的法分量为零，那么质点将沿直线运动.

**23. 某些情况下求曲率的捷径** 如果已知 $|a_N|$ 和 $|\boldsymbol{v}|$，曲率公式 $a_N=\kappa|\boldsymbol{v}|^2$ 给出一种求曲率的便利方法. 利用这个公式求曲线

$\boldsymbol{r}(t)=(\cos t+t\sin t)\boldsymbol{i}+(\sin t-t\cos t)\boldsymbol{j}, t>0$

的曲率和曲率半径. (从例 1 取 $a_N$ 和 $|\boldsymbol{v}|$.)

**24.** 对于直线

$\boldsymbol{r}(t)=(x_0+At)\boldsymbol{i}+(y_0+Bt)\boldsymbol{j}+(z_0+Ct)\boldsymbol{k}$

证明曲率 $\kappa$ 和挠率 $\tau$ 同时为零.

**25.** 对于光滑的平面曲线 $\boldsymbol{r}(t)=f(t)\boldsymbol{i}+g(t)\boldsymbol{j}$ 的挠率能够得出什么结论? 提出答案的理由.

**26. 螺旋线的挠率** 证明: 螺旋线

$\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t)\boldsymbol{i}+(a\sin t)\boldsymbol{j}+bt\boldsymbol{k}, a,b\geqslant 0$

的挠率为 $\tau=b/(a^2+b^2)$. 对于给定的 $a$ 值，$\tau$ 可能具有的最大值是什么? 提出答案的理由.

**27. 平面内具有零挠率的可微曲线** 平面内一条具有零挠率的充分可微的曲线是质点运动路径的特例，质点在垂直于固定向量 $\boldsymbol{C}$ 的平面内运动，它的速度向量保持同 $\boldsymbol{C}$ 垂直. 这种运动本身可以被视为微积分中下述问题的解:

假设 $\boldsymbol{r}(t)=f(t)\boldsymbol{i}+g(t)\boldsymbol{j}+h(t)\boldsymbol{k}$ 对于区间 $[a,b]$ 内的全部 $t$ 是二次可微的，当 $t=a$ 时 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$，并且对于 $[a,b]$ 内的所有 $t$ 有 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}=0$. 那么，对于 $[a,b]$ 内的所有 $t$，$h(t)=0$.

求解这个问题. (提示: 从 $\boldsymbol{a}=\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t^2$ 开始，并且按相反的顺序应用初值条件.)

**28. 由 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 计算 $\tau$ 的公式** 如果我们从定义 $\tau=-(\mathrm{d}\boldsymbol{B}/\mathrm{d}s)\cdot\boldsymbol{N}$ 开始，并且应用链式法则把 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}/\mathrm{d}s$ 改写成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}$$

就获得公式

$$\tau=-\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{N}\right)$$

同公式(5)相比，这个公式的优点在于更容易推导和表述，而其缺点是在不用计算机时的计算量可能很大. 利用这个新公式求习题 26 中螺旋线的挠率.

**计算机探究**

在习题 29 ~ 32 中，对于曲线和给定的 $t$ 值，用一种 CAS(计算机代数系统)求物体运动的 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a}$, 速率, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{B}$, $\kappa$, $\tau$ 以及加速度的切分量和法分量，对答案舍入到 4 位小数

**29.** $\boldsymbol{r}(t)=(t\cos t)\boldsymbol{i}+(t\sin t)\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$, $t=\sqrt{3}$.

**30.** $\boldsymbol{r}(t)=(\mathrm{e}^t\cos t)\boldsymbol{i}+(\mathrm{e}^t\sin t)\boldsymbol{j}+\mathrm{e}^t\boldsymbol{k}$, $t=\ln 2$.

**31.** $\boldsymbol{r}(t)=(t-\sin t)\boldsymbol{i}+(1-\cos t)\boldsymbol{j}+\sqrt{-t}\boldsymbol{k}$, $t=-3\pi$.

**32.** $\boldsymbol{r}(t)=(3t-t^2)\boldsymbol{i}+(3t^2)\boldsymbol{j}+(3t+t^3)\boldsymbol{k}$, $t=1$.

## 11.6 极坐标中的速度和加速度

我们在这一节推导极坐标中运动物体的速度和加速度的方程. 然后，把它们应用于建立开普勒行星运动第二定律，这个定律是牛顿万有引力定律的推论.

### 11.6.1 极坐标和柱面坐标中的运动

在极坐标中，当在点 $P(r,\theta)$ 的质点沿极坐标平面内的曲线运动时，我们用图 11.29 所示的运动的单位向量

$$\boldsymbol{u}_r=(\cos\theta)\boldsymbol{i}+(\sin\theta)\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{u}_\theta=-(\sin\theta)\boldsymbol{i}+(\cos\theta)\boldsymbol{j}\tag{1}$$

来表示它的位置、速度和加速度. 向量 $\boldsymbol{u}_r$ 指向位置向量 $\overrightarrow{OP}$ 的方向，所以 $\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{u}$. 同 $\boldsymbol{u}_r$ 正交的向量 $\boldsymbol{u}_\theta$ 指向 $\theta$ 增加的方向.

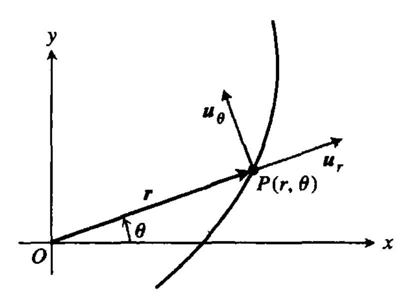



图 11.29 $\boldsymbol{r}$ 的长度是点 $P$ 的正极坐标 $r$，因此，$\boldsymbol{u}_r=\boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$ 也是 $\boldsymbol{r}/r$; 方程(1)用 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 表示 $\boldsymbol{u}_r$ 和 $\boldsymbol{u}_\theta$

从方程(1)求出

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_r}{\mathrm{d}\theta}=-(\sin\theta)\boldsymbol{i}+(\cos\theta)\boldsymbol{j}=\boldsymbol{u}_\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_\theta}{\mathrm{d}\theta}=-(\cos\theta)\boldsymbol{i}-(\sin\theta)\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{u}_r$$

当我们求 $\boldsymbol{u}_r$ 和 $\boldsymbol{u}_\theta$ 对时间 $t$ 的导数考察它们如何随时间变化时，链式法则给出

$$\dot{\boldsymbol{u}}_r=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_r}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta}=\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta,\quad \dot{\boldsymbol{u}}_\theta=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_\theta}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta}=-\dot{\theta}\boldsymbol{u}_r\tag{2}$$

因此,

$$v = \dot{r} = \frac{d}{dt}(ru_r) = \dot{r}u_r + r\dot{u}_r = \dot{r}u_r + r\dot{\theta}u_\theta$$

(参见图 11.30). 同前一节一样，我们采用牛顿对于时间导数的点(·)记号，使公式尽可能保持简单：$\dot{u}_r$ 表示 $du_r/dt$，$\dot{\theta}$ 表示 $d\theta/dt$，依此类推.

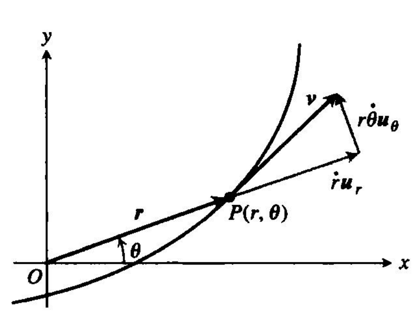


图 11.30 在极坐标中，速度向量是 $v = \dot{r}u_r + r\dot{\theta}u_\theta$

加速度向量为

$$a = \dot{v} = (\ddot{r}u_r + \dot{r}\dot{u}_r) + (\dot{r}\dot{\theta}u_\theta + r\ddot{\theta}u_\theta + r\dot{\theta}\dot{u}_\theta)$$

当用方程(2)求 $\dot{u}_r$ 和 $\dot{u}_\theta$ 的值并且把分量分离时，加速度向量的方程变成

$$a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)u_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})u_\theta$$

为了把这些运动方程推广到空间中的运动，我们在方程 $r = ru_r$ 的右端添加 $zk$. 于是，在这样的柱面坐标中，我们有

$$r = ru_r + zk$$

$$v = \dot{r}u_r + r\dot{\theta}u_\theta + \dot{z}k \qquad (3)$$

$$a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)u_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})u_\theta + \ddot{z}k$$

**附注**

请注意，如果 $z \neq 0$，那么 $|r| \neq r$.

向量 $u_r$，$u_\theta$ 和 $k$ 构成一个右手标架(见图 11.31)，其中

$$u_r \times u_\theta = k, \quad u_\theta \times k = u_r, \quad k \times u_r = u_\theta$$

### 11.6.2 行星的平面运动

牛顿万有引力定律表明，如果 $r$ 是从质量为 $M$ 的太阳中心到质量为 $m$ 的行星中心的径向量，那么，行星同太阳之间的引力为

$$F = -\frac{GmM}{|r|^2}\frac{r}{|r|}$$

(见图 11.32). 数 $G$ 是**万有引力常数**. 如果质量以千克为单位，力以牛顿为单位，距离以米为单位，那么 $G$ 的值约为 $6.6726 \times 10^{-11} \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$.

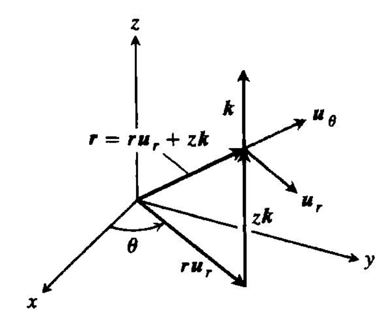


图 11.31 柱面坐标中的位置向量和基本单位向量

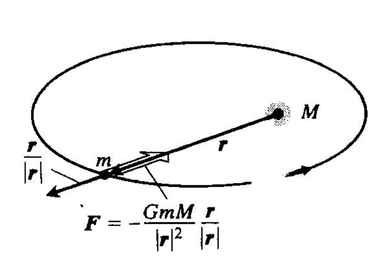


图 11.32 引力指向行星和太阳的质心之间的连线

把万有引力定律同作用于行星的力的牛顿第二定律 $F = m\ddot{r}$ 结合起来，得到

$$m\ddot{r} = -\frac{GmM}{|r|^2}\frac{r}{|r|}$$

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{|r|^2}\frac{r}{|r|}$$

行星在所有时间是朝太阳的质心加速.

由于$\ddot{\boldsymbol{r}}$是 $\boldsymbol{r}$ 的纯量倍数，故有

$$\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{0}$$

从这个方程得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})=\underbrace{\dot{\boldsymbol{r}}\times\dot{\boldsymbol{r}}}_{\boldsymbol{0}}+\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{0}$$

由此推出

$$\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{C} \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 是某个常向量.

方程(4)说明，$\boldsymbol{r}$ 和$\dot{\boldsymbol{r}}$总是位于同 $\boldsymbol{C}$ 垂直的平面内. 因此，行星是在通过太阳质心的固定平面内运行(见图 11.33).

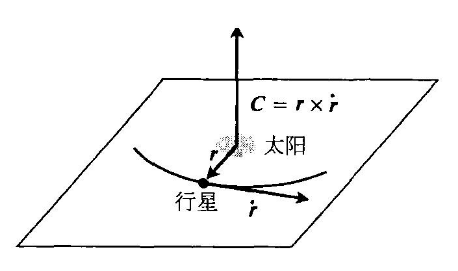



图 11.33 服从牛顿的万有引力定律和运动定律的行星在经过太阳质心和垂直于 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}$ 的平面内运行

人物传记

约翰内斯·开普勒
(Johannes Kepler，1571—1630)

### 11.6.3 开普勒第一定律(椭圆定律)

开普勒第一定律指出，行星运行的轨道是以太阳为一个焦点的椭圆. 这个椭圆的离心率是

$$e=\frac{r_0v_0^2}{GM}-1 \tag{5}$$

其极方程是

$$r=\frac{(1+e)r_0}{1+e\cos\theta} \tag{6}$$

我们省略这个定律的冗长证明. 太阳质量 $M$ 为 $1.99\times10^{30}$kg.

### 11.6.4 开普勒第二定律(等面积定律)

开普勒第二定律指出，从太阳到行星的径向量(我们所用模型中的向量 $\boldsymbol{r}$)在相等的时间内扫过相等的面积(见图 11.34). 为了导出这个定律，利用公式(3)计算公式(4)中的向量积 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}&=\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\\&=r\boldsymbol{u}_r\times(\dot{r}\,\boldsymbol{u}_r+r\dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_\theta)\quad(\text{公式}(3),\ \dot{z}=0)\\&=r\dot{r}\,\underbrace{(\boldsymbol{u}_r\times\boldsymbol{u}_r)}_{\boldsymbol{0}}+r(r\dot{\theta})\underbrace{(\boldsymbol{u}_r\times\boldsymbol{u}_\theta)}_{\boldsymbol{k}}\\&=r(r\dot{\theta})\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{7}$$

置 $t=0$，显示

$$\boldsymbol{C}=[r(r\dot{\theta})]_{t=0}\boldsymbol{k}=r_0v_0\boldsymbol{k}$$

从式(7)中代入这个 $\boldsymbol{C}$ 的值，得到

$$r_0v_0\boldsymbol{k}=r^2\dot{\theta}\boldsymbol{k}\quad\text{或}\quad r^2\dot{\theta}=r_0v_0$$

这就是面积的由来. 在极坐标中，面积微分是

$$\mathrm{d}A=\frac{1}{2}r^2d\theta$$

(9.3 节). 因此，$\mathrm{d}A/\mathrm{d}t$ 具有常数值

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}=\frac{1}{2}r_0v_0 \tag{8}$$

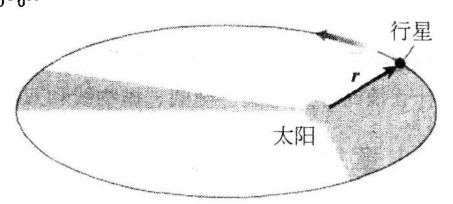



图 11.34 行星到太阳的连线在相等时间内扫过相等的面积

所以 $dA/dt$ 为常数，给出开普勒第二定律.

### 11.6.5 开普勒第三定律(时间-距离定律)

行星环绕太阳运行一周所需时间是行星的**轨道周期**. 开普勒第三定律指出，行星的轨道周期 $T$ 和轨道半长轴 $a$ 的关系由等式

$$\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{GM}$$

确定. 由于等式右端在已知的太阳系内是常数，$T^2$ 和 $a^3$ 之比对于太阳系的每个行星是相同的.

下面给出开普勒第三定律的部分推导过程. 对行星的椭圆轨道包围的面积计算如下：

$$\begin{aligned}\text{面积}&=\int_0^T dA\\&=\int_0^T \frac{1}{2}r_0v_0\,dt \quad (\text{公式}(8))\\&=\frac{1}{2}Tr_0v_0\end{aligned}$$

如果 $b$ 是半短轴，椭圆的面积为 $\pi ab$，所以

$$T=\frac{2\pi ab}{r_0v_0}=\frac{2\pi a^2}{r_0v_0}\sqrt{1-e^2} \quad (\text{对于任何椭圆}, b=a\sqrt{1-e^2}) \tag{9}$$

至此，仅剩下用 $r_0$，$v_0$，$G$ 和 $M$ 表示 $a$ 和 $e$. 公式(5)给出对 $e$ 的表示. 对于 $a$，我们注意到，在方程(6)中置 $\theta=\pi$，给出

$$r_{\max}=r_0\frac{1+e}{1-e}$$

因此，由图 11.34，

$$2a=r_0+r_{\max}=\frac{2r_0}{1-e}=\frac{2r_0GM}{2GM-r_0v_0^2} \tag{10}$$

对等式(9)两端平方，再代入公式(5)和(10)的结果，即得到开普勒第三定律(习题 9).

### 习题 11.6

在习题 1～5 中，求用 $\boldsymbol{u}_r$ 和 $\boldsymbol{u}_\theta$ 表示的速度向量和加速度向量.

1. $r=a(1-\cos\theta)$ 和 $\frac{d\theta}{dt}=3$.
2. $r=a\sin 2\theta$ 和 $\frac{d\theta}{dt}=2t$.
3. $r=e^{a\theta}$ 和 $\frac{d\theta}{dt}=2$.
4. $r=a(1+\sin t)$ 和 $\theta=1-e^{-t}$.
5. $r=2\cos 4t$ 和 $\theta=2t$.
6. **轨道类型** 方程(6)的轨道在公式(5)中的 $v_0$ 取什么值时分别为圆、椭圆、抛物线和双曲线?
7. **圆形轨道** 证明取圆形轨道的行星以常速率运行.（提示：这是开普勒定律的推论之一.）
8. 假定 $\boldsymbol{r}$ 是沿平面曲线运动的质点的位置向量，$dA/dt$ 是向量扫过面积的速率. 对于方程
$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}|$$
的正确性给出基于增量和极限的几何论证，在其中不引入坐标，并且假定所需的导数存在.
9. **开普勒第三定律** 完成开普勒第三定律的推导(公式(10)之后的部分).
10. 利用开普勒第三定律和地球的轨道周期为 365.256 天这个事实，求地球轨道长轴的长度.

## 第 11 章复习指导问题

1. 陈述向量函数的微分法则和积分法则. 举出一些例子.
2. 对于沿充分可微的空间曲线运动的物体，如何定义和计算它的速度、速率、运动方向和加速度? 举一个例子.
3. 关于定长向量函数的导数有什么特性? 举一个

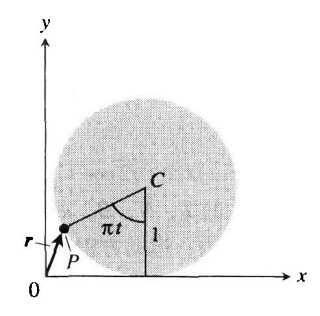
例子.

4. 什么是理想抛体运动的向量方程和参数方程？如何求抛射体的最大高度、飞行时间和射程？举出一些例子.
5. 如何定义和计算光滑空间曲线线段的长度？举一个例子. 在定义中要作出什么数学上的假定？
6. 如何度量空间中沿光滑曲从某个预先选定的基点起的距离？举一个例子.
7. 什么是可微曲线的单位切向量？举一个例子.
8. 定义平面内二次可微曲线的曲率、曲率圆(密切圆)、曲率中心和曲率半径. 举出一些例子. 什么曲线具有零曲率？什么曲线具有常数曲率？
9. 什么是平面曲线的主法向量，在什么情况下定义？主法向量指向哪里？举一个例子.
10. 如何定义空间曲线的主单位法向量 $\boldsymbol{N}$ 和曲率 $\kappa$？这两个量有何关系？举出一些例子.
11. 什么是曲线的副法向量？举一个例子. 这个向量同曲线的挠率有什么关系？举一个例子.
12. 用什么公式可以把运动物体的加速度向量写成它的切分量和法分量之和？举一个例子. 为什么可能需要把加速度向量写成这种形式？如果物体以常速率运动，将是什么情况？如果物体以常速率绕圆周运动，又是什么情况？
13. 描述开普勒关于太阳系行星运动的三个定律.

## 第 11 章实习习题

在习题 1 和 2 中，画出曲线的图形并且描绘曲线在给定 $t$ 值的速度向量和加速度向量. 然后用 $\boldsymbol{a}=a_T\boldsymbol{T}+a_N\boldsymbol{N}$ 的形式表示加速度向量 $\boldsymbol{a}$(不用求 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{N}$)，并且求 $\kappa$ 在给定 $t$ 值的值.

1. $\boldsymbol{r}(t)=(4\cos t)\boldsymbol{i}+(\sqrt{2}\sin t)\boldsymbol{j}$，$t=0$ 和 $\pi/4$.
2. $\boldsymbol{r}(t)=(\sqrt{3}\sec t)\boldsymbol{i}+(\sqrt{3}\tan t)\boldsymbol{j}$，$t=0$.
3. 平面内的质点在时间 $t$ 的位置向量是
$$\boldsymbol{r}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{i}+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{j}$$
求质点的最高速率.
4. 假定位置向量为
$$\boldsymbol{r}(t)=(e^t\cos t)\boldsymbol{i}+(e^t\sin t)\boldsymbol{j}$$
证明 $\boldsymbol{r}$ 同加速度向量 $\boldsymbol{a}$ 之间的角不会改变. 这个角有多大？
5. **求曲率** 在平面内运动的质点在点 $P$ 的速度和加速度为 $\boldsymbol{v}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{i}+15\boldsymbol{j}$. 求质点的路径在 $P$ 的曲率.
6. 求曲线 $y=e^x$ 上曲率达到最大值的点.
7. 质点围绕 $xy$ 平面内的单位圆运动. 它在时间 $t$ 的位置是 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，其中 $x$ 和 $y$ 是 $t$ 的可微函数. 如果 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{i}=y$，求 $dy/dt$. 质点运动是依顺时针方向还是反时针方向？
8. 通过一条沿曲线 $9y=x^3$(距离以米为单位)走向的气压传输管传送信息. 在点(3,3)，$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{i}=4$ 和 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}=-2$. 求 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}$ 在点(3,3)的值.
9. **表现圆上运动的特征** 假定在平面内运动的质点的速度向量和位置向量始终正交. 证明质点是在以原点为中心的圆上运动.
10. **沿摆线运动的速率** 让中心在 $C$ 半径为 1 英尺的圆形轮子沿 $x$ 轴以每秒半圈的速度向右滚动(参见附图). 在时间 $t$(秒)，轮子周界上点 $P$ 的位置向量是
$$\boldsymbol{r}=(\pi t-\sin\pi t)\boldsymbol{i}+(1-\cos\pi t)\boldsymbol{j}$$
(a) 画出点 $P$ 在整个区间 $0\leq t\leq 3$ 描绘的曲线草图.
(b) 求在 $t=0,1,2,3$ 时的速度向量 $\boldsymbol{v}$ 和加速度向量 $\boldsymbol{a}$，并且把它们添加到图形中.
(c) 在任何给定的时刻，轮子最高点和中心 $C$ 向前行进的速率是多少？




11. **射击** 一粒子弹以 45°角和 44 ft/s 的速率从射手在地面之上 6.5 ft 处的手中射出. 子弹在 3 秒后到达何处？
12. **标枪** 标枪从投掷者手中在地面之上 7 ft 以 45°角和 80 ft/s 的速率掷出. 标枪将达到多大高度？
13. 在水平倾斜角为 $\phi$ 的一座直边坡的小山脚下，从一点以初始速率 $v_0$ 和仰角 $\alpha$ 击出高尔夫球，其中
$$0<\phi<\alpha<\frac{\pi}{2}$$
证明：在山坡上度量的球着点距离为

$$\frac{2v_0^2\cos\alpha}{g\cos^2\phi}\sin(\alpha-\phi)$$

因此证明，对于给定的初始速率 $v_0$，可能达到的最大距离在 $\alpha=(\phi/2)+(\pi/4)$ 时出现，也就是说，出现在初始速度向量等分山坡和垂直线之间的夹角的时候.

T 14. **标枪** 1988 年东德运动员佩特娜·费尔科创造了掷标枪 262 英尺 5 英寸的女子世界纪录.

(a) 假定费尔科是在 40°仰角和地面之上 6.5 英尺掷出标枪，标枪的初始速率是多少？

(b) 标枪达到了多大的高度？

在习题 15 和 16 中，求曲线的长度.

15. $\boldsymbol{r}(t)=(2\cos t)\boldsymbol{i}+(2\sin t)\boldsymbol{j}+t^2\boldsymbol{k}$，$0\leqslant t\leqslant\pi/4$.

16. $\boldsymbol{r}(t)=(3\cos t)\boldsymbol{i}+(3\sin t)\boldsymbol{j}+2t^{3/2}\boldsymbol{k}$，$0\leqslant t\leqslant 3$.

在习题 17 ~ 20 中，求在给定 $t$ 值的 $\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{B}$，$\kappa$ 和 $\tau$.

17. $\boldsymbol{r}(t)=\frac{4}{9}(1+t)^{3/2}\boldsymbol{i}+\frac{4}{9}(1-t)^{3/2}\boldsymbol{j}+\frac{1}{3}t\,\boldsymbol{k}$，$t=0$.

18. $\boldsymbol{r}(t)=(e^t\sin 2t)\boldsymbol{i}+(e^t\cos 2t)\boldsymbol{j}+2e^t\boldsymbol{k}$，$t=0$.

19. $\boldsymbol{r}(t)=t\,\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}e^{2t}\boldsymbol{j}$，$t=\ln 2$.

20. $\boldsymbol{r}(t)=(3\cosh 2t)\boldsymbol{i}+(3\sinh 2t)\boldsymbol{j}+6t\,\boldsymbol{k}$，$t=\ln 2$

在习题 21 和 22 中，用 $\boldsymbol{a}=a_T\boldsymbol{T}+a_N\boldsymbol{N}$ 的形式表示 $t=0$ 时的加速度向量 $\boldsymbol{a}$，其中不求 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{N}$.

21. $\boldsymbol{r}(t)=(2+3t+3t^2)\boldsymbol{i}+(4t+4t^2)\boldsymbol{j}-(6\cos t)\boldsymbol{k}$.

22. $\boldsymbol{r}(t)=(2+t)\boldsymbol{i}+(t+2t^2)\boldsymbol{j}+(1+t^2)\boldsymbol{k}$.

23. 如果位置向量为

$$\boldsymbol{r}(t)=(\sin t)\boldsymbol{i}+(\sqrt{2}\cos t)\boldsymbol{j}+(\sin t)\boldsymbol{k}$$

求作为 $t$ 的函数的 $\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{B}$，$\kappa$ 和 $\tau$.

24. 在区间 $0\leqslant t\leqslant\pi$ 内，运动方程

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{i}+(5\cos t)\boldsymbol{j}+(3\sin t)\boldsymbol{k}$$

的速度向量和加速度向量在什么时候正交？

25. 空间中运动质点在 $t\geqslant 0$ 的位置为

$$\boldsymbol{r}(t)=2\boldsymbol{i}+\left(4\sin\frac{t}{2}\right)\boldsymbol{j}+\left(3-\frac{t}{\pi}\right)\boldsymbol{k}$$

求 $\boldsymbol{r}$ 同向量 $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$ 首次正交的时间.

26. 求曲线

$$\boldsymbol{r}(t)=t\,\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+t^3\boldsymbol{k}$$

在点(1,1,1)的密切平面、法平面和从切平面的方程.

27. 求同曲线

$$\boldsymbol{r}(t)=e^t\,\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j}+\ln(1-t)\boldsymbol{k}$$

在 $t=0$ 相切的直线的参数方程.

28. 求同螺旋线

$$\boldsymbol{r}(t)=(\sqrt{2}\cos t)\boldsymbol{i}+(\sqrt{2}\sin t)\boldsymbol{j}+t\,\boldsymbol{k}$$

在 $t=\pi/4$ 的点相切的直线的参数方程.

29. **同步曲线** 从理想抛体方程

$$x=(v_0\cos\alpha)t,\quad y=(v_0\sin\alpha)t-\frac{1}{2}gt^2$$

中消去 $\alpha$，证明 $x^2+(y+gt^2/2)^2=v_0^2t^2$. 这说明从原点以相同初始速率 $v_0$ 发射的抛射体，在任何给定时刻都将落入中心在 $(0,-gt^2/2)$ 半径为 $v_0t$ 的圆上，无论它们的发射角是多大. 这些圆是发射的同步曲线.

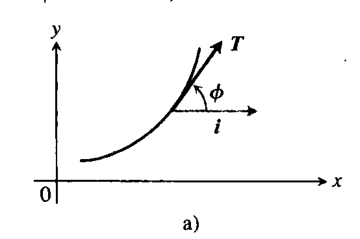
30. **曲率半径** 证明：二次可微平面曲线 $\boldsymbol{r}(t)=f(t)\boldsymbol{i}+g(t)\boldsymbol{j}$ 的曲率半径由公式

$$\rho=\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2-\ddot{s}^2}}$$

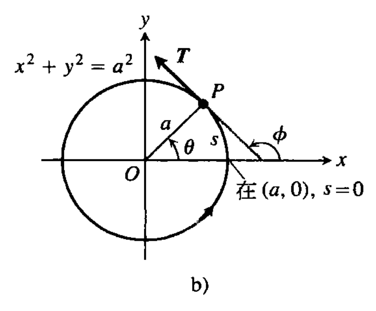
给出，其中

$$\ddot{s}=\frac{d}{dt}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$$

31. **平面曲线曲率的另一个定义** 另一个曲率定义把充分可微的平面曲线的曲率定义为 $|d\phi/ds|$，其中 $\phi$ 是 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{i}$ 之间的角（见图 11.35a）. 图 11.35b显示从圆 $x^2+y^2=a^2$ 上的点 $(a,0)$ 依反时针方向绕圆周到点 $P$ 测出的距离 $s$，以及在 $P$ 的角 $\phi$. 利用这个替代定义计算圆的曲率.（提示：$\phi=\theta+\pi/2$.）



a)



b)

图 11.35 习题 31 的图形

32. **从太空实验察的观察** 当宇航员在太空实验室 *Skylab* 4 飞越它在地面上空 437 km 的远地点高度时，能够观察到百分之几的地球表面积？为

了求这个百分数，如附图所示，用绕 $y$ 轴旋转圆弧 $GT$ 产生的曲面模拟地球的可见表面. 然后采取下列步骤：

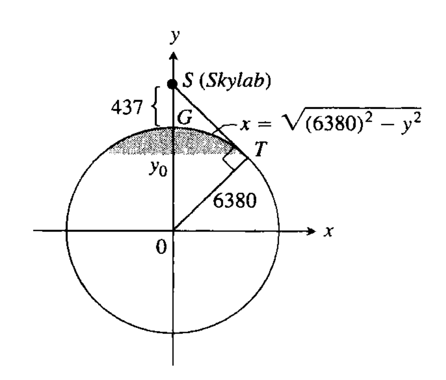
(1) 用图中的相似三角形证明：$y_0/6380 = 6380/(6380+437)$. 求解 $y_0$.

(2) 按公式

$$VA = \int_{y_0}^{6380} 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

计算可见面积，取 4 位有效数字

(3) 把结果表示成地球表面积的百分数.




## 第 11 章补充和提高习题

1. 如附图所示，在 $t=0$ 时，一个无摩擦的质点 $P$ 在重力作用下由静止状态从点 $(a,0,0)$ 开始沿螺旋线

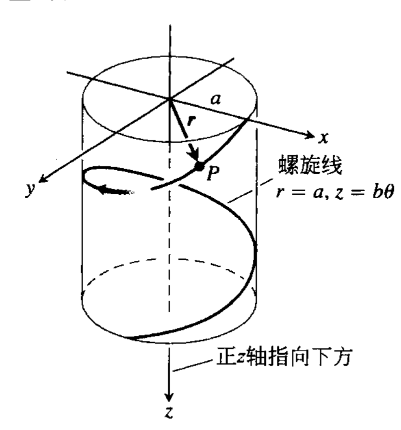
$$\boldsymbol{r}(\theta) = (a\cos\theta)\boldsymbol{i} + (a\sin\theta)\boldsymbol{j} + b\theta\,\boldsymbol{k} \quad (a,b>0)$$

下滑. 这个方程中的 $\theta$ 是柱面坐标 $\theta$，螺旋线是柱面坐标中的曲线 $r=a$，$z=b\theta$，$\theta\geqslant 0$. 假定对于运动而言 $\theta$ 是 $t$ 的可微函数. 能量守恒定律告诉我们，质点在垂直下落一段距离 $z$ 后的速率是 $\sqrt{2gz}$，其中 $g$ 是恒定的重力加速度.

(a) 求 $\theta=2\pi$ 时的角加速度 $d\theta/dt$.

(b) 把质点 $\theta$ 坐标和 $z$ 坐标表示成 $t$ 的函数.

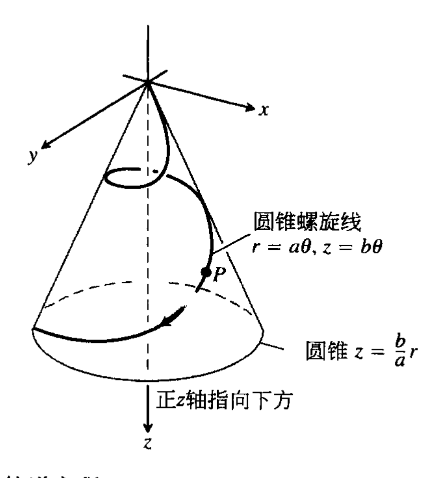
(c) 把速度向量 $d\boldsymbol{r}/dt$ 和加速度向量 $d^2\boldsymbol{r}/dt^2$ 的切分量和法分量表示成 $t$ 的函数. 加速度向量在副法向量 $\boldsymbol{B}$ 的方向有任何非零分量吗？




2. 假定习题 1 中的曲线用下面附图所示的圆锥螺旋线 $r=a\theta$，$z=b\theta$ 代替.

(a) 把角速度 $d\theta/dt$ 表示成 $\theta$ 的函数.

(b) 把质点沿这条螺旋线移动的距离表示成 $\theta$ 的函数.




3. 从轨道方程

$$r = \frac{(1+e)r_0}{1+e\cos\theta}$$

推断，一颗行星在 $\theta=0$ 时距离太阳最近，并且证明这时 $r=r_0$.

**T** 4. **开普勒方程** 确定一颗行星在给出时间和日期在其轨道上的位置问题，最终导致求解形如

$$f(x) = x - 1 - \frac{1}{2}\sin x = 0$$

的"开普勒"方程.

(a) 证明这个方程在 $x=0$ 和 $x=2$ 之间有一个解.

(b) 把你使用的计算机或者计算器置于弧度方式，用牛顿法求解取尽可能多的小数位数.

5. 在 11.6 节中，我们求出在平面内运动的质点的速度向量为

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} = \dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta$$

(a) 通过计算点积 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{j}$ 把 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 表示成 $\dot{r}$ 和 $r\dot{\theta}$ 的函数.

(b) 通过计算点积 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}_r$ 和 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}_\theta$，把 $\dot{r}$ 和 $r\dot{\theta}$ 表

示成$\dot{x}$和$\dot{y}$的函数.

**6.** 把极坐标平面内的二次可微曲线 $r=f(\theta)$ 的曲率表示成$f$及其导数的函数.

**7.** 一根通过极坐标平面原点的细杆，在平面内以 3 rad/min的速率绕原点旋转. 一只甲虫从点(2,0)开始以 1 in/min 的速率沿着杆向原点爬行.

(a) 求当甲虫爬行到原点的半程(距离原点 1 in)时它的极坐标形式的速度和加速度.

T (b) 在甲虫到达原点时，它爬行过的路径的长度是多少? 答案准确到 1/10 in.

**8. 角动量守衡** 令 $\boldsymbol{r}(t)$ 表示空间中运动物体在时间 $t$ 的位置. 假定在时间 $t$ 作用于物体力是

$$\boldsymbol{F}(t)=-\frac{c}{|\boldsymbol{r}(t)|^3}\boldsymbol{r}(t)$$

其中 $c$ 为常数. 在物理学中运动物体在时间 $t$ 的**角动量**定义为 $\boldsymbol{L}(t)=\boldsymbol{r}(t)\times m\boldsymbol{v}(t)$，其中 $m$ 是物体的质量，$\boldsymbol{v}(t)$ 是速度. 证明 $\boldsymbol{L}(t)$ 是一个守恒的量，即是证明 $\boldsymbol{L}(t)$ 是不依赖于时间的常向量. 记住牛顿定律$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$.（这是一个微积分问题而非物理学问题.）

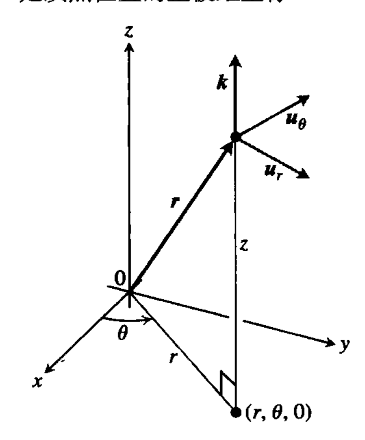
**9. 柱面坐标中表示位置和运动的单位向量** 当在柱面坐标中给出空间中运动质点的位置时，我们用于描述它的位置和运动的单位向量是

$$\boldsymbol{u}_r=(\cos\theta)\boldsymbol{i}+(\sin\theta)\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{u}_\theta=-(\sin\theta)\boldsymbol{i}+(\cos\theta)\boldsymbol{j}$$

(参见附图.) 于是质点的位置向量是

$$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{u}_r+z\,\boldsymbol{k}$$

其中 $r$ 是质点位置的正极距坐标.




(a) 证明 $\boldsymbol{u}_r,\boldsymbol{u}_\theta$ 和 $\boldsymbol{k}$ 以这个顺序构成单位向量的右手标架.

(b) 证明

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_r}{\mathrm{d}\theta}=\boldsymbol{u}_\theta,\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_\theta}{\mathrm{d}\theta}=-\boldsymbol{u}_r$$

(c) 假定存在所需的关于 $t$ 各个导数，用 $\boldsymbol{u}_r$，$\boldsymbol{u}_\theta$，$\boldsymbol{k}$，$\dot{r}$ 和 $\dot{\theta}$ 表示 $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}$ 和 $\boldsymbol{a}=\ddot{\boldsymbol{r}}$.

**10. 柱面坐标中的弧长**

(a) 证明当用柱面坐标表示 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2$ 时，得到 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2+\mathrm{d}z^2$.

(b) 用一个框体的边和对角线对这个结果作出几何解释. 画出框体的草图.

(c) 利用(a)中的结果求曲线

$$r=\mathrm{e}^\theta,\ z=\mathrm{e}^\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\ln 8$$

的长度.

# 第12章 偏 导 数

**概述** 许多函数所依赖的自变量在一个以上. 例如，正圆柱体的体积是其半径和高度的一个函数$V=\pi r^2h$，所以它是两个变量的函数$V(r,h)$. 在这一章，我们把一元函数微积分的基本概念推广到多元函数. 多元函数的导数具有更多的变化和更为有趣，因为它们的变量可能以不同的方式相互作用. 多元函数的积分(在下一章讨论)具有各种各样的应用.

## 12.1 多元函数

在这一节我们定义多于一个自变量的函数，并且讨论绘制它的图形的方法.

定义多元实自变量的实值函数的方法，同定义一元函数的情况类似. 定义域是实数的有序组(序偶，三元组，四元组，$n$元组)的集合，值域是我们一直以来讨论的实数的集合.

**定义** 假定$D$是实数$n$元组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的集合. $D$上的**实值函数**$f$是一个赋值规则，它对$D$中的每个元素赋予一个唯一的(一个)实数

$$w=f(x_1,x_2,\ \cdots,x_n)$$

集合$D$是函数的**定义域**. $f$所取的$w$值的集合是函数的**值域**. 符号$w$是$f$的**因变量**，$f$称为$n$个**自变量**$x_1$到$x_n$的函数. 各个$x_j$也称为函数的**输入变量**，$w$称为函数的**输出变量**.

如果$f$是两个自变量的函数，通常用$x$和$y$作为自变量，并且把$f$的定义域描绘成$xy$平面内的一个区域. 如果$f$是三个自变量的函数，那么用$x$，$y$和$z$作为自变量，并且把定义域想象成空间中的一个区域.

在各种应用中，我们倾向用可以对变量含义引起联想的字母. 例如，为了表示正圆柱体的体积是其半径和高的函数，可写成$V=f(r,h)$. 为了更加明确，可以用由$r$和$h$的值计算体积$V$的公式代替记号$f(r,h)$，写成$V=\pi r^2h$. 无论哪一种情况，$r$和$h$是函数的自变量，$V$是因变量.

如通常那样，计算由公式定义的函数值时，在公式中代入自变量的值，由此计算因变量的对应值. 例如，函数$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$在点$(3,0,4)$的值是

$$\begin{aligned}f(3,0,4)&=\sqrt{(3)^2+(0)^2+(4)^2}\\&=\sqrt{25}\\&=5\end{aligned}$$

### 12.1.1 定义域与值域

在定义多于一个变量的函数时，我们遵循通常的惯例，把导致复数值或者以零做除数的输入排除在外. 例如，如果$f(x,y)=\sqrt{y-x^2}$，$y$不能取小于$x^2$的值。如果$f(x,y)=1/(xy)$，$xy$不能取0值. 假定函数的定义域是使定义规则产生实数的最大集合，除非对定义域另外给出显式说明. 函数的值域由因变量的输出值集合构成.

**例1** **(a)** 下面是两个变量的函数.

| 函　数 | 定 义 域 | 值　域 |
|---|---|---|
| $w=\sqrt{y-x^2}$ | $y\geq x^2$ | $[0,\infty)$ |
| $w=\frac{1}{xy}$ | $xy\neq 0$ | $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ |
| $w=\sin xy$ | 全平面 | $[-1,1]$ |

**(b)** 下面是三个变量的函数.

| 函　数 | 定 义 域 | 值　域 |
|---|---|---|
| $w=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ | 全空间 | $[0,\infty)$ |
| $w=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$ | $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ | $(0,\infty)$ |
| $w=xy\ln z$ | 半空间 $z>0$ | $(-\infty,\infty)$ |

■

### 12.1.2 二元函数

正如实直线上的区间一样，平面内的区域可能有内点和边界点. 闭区间$[a,b]$包含它们的边界点在内，而开区间$(a,b)$不包含它们的边界点，至于$[a,b)$这样的区间既非开区间，也非闭区间.

**定义** 在 $xy$ 平面内，如果区域(集合)$R$ 中的一点$(x_0,y_0)$是整个位于 $R$ 内的某个正半径圆盘的中心，那么它是 $R$ 的**内点**(见图 12.1a). 如果以$(x_0,y_0)$为中心的每个圆盘既包含 $R$ 之外的点，也包含 $R$ 内的点，那么它是 $R$ 的**边界点**(见图 12.1b). (边界点本身不必一定属于 $R$.)

区域的内点作为一个集合，构成区域的**内部**. 区域的边界点构成区域的**边界**. 如果一个区域全部由内点组成，它是**开区域**. 如果一个区域包含它的全部边界点，它是**闭区域**(见图 12.2).

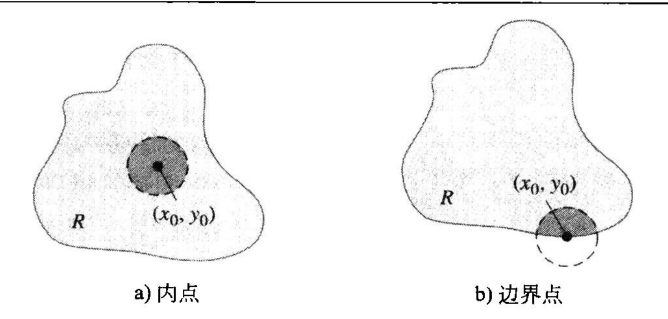



图 12.1 平面区域 $R$ 的内点和边界点：内点必须是 $R$ 的点；$R$ 的边界点不必一定属于 $R$

正如实数的半开区间$[a,b)$一样，平面内的某些区域既非开区域也非闭区域. 如果在图 12.2 的开圆盘中添加它的某些边界点，而不是全部边界点，那么得到的集合就既非开区域也非闭区域. 存在某些边界点使这个集合不是开区域；不包含其余的边界点使集合不是闭区域.

**定义** 平面内的区域如果位于某个固定半径的圆盘的内部，那么它是**有界的**. 区域如果不是有界的，它就是**无界的**.

平面内的线段、三角形、三角形的内部、矩形、圆和圆盘是有界集合的例子. 平面内无界集合的例子包含直线、坐标轴、定义在无限区间上的函数图形、象限、半平面和平面本身.

**例 2** 描述函数$f(x,y)=\sqrt{y-x^2}$的定义域.

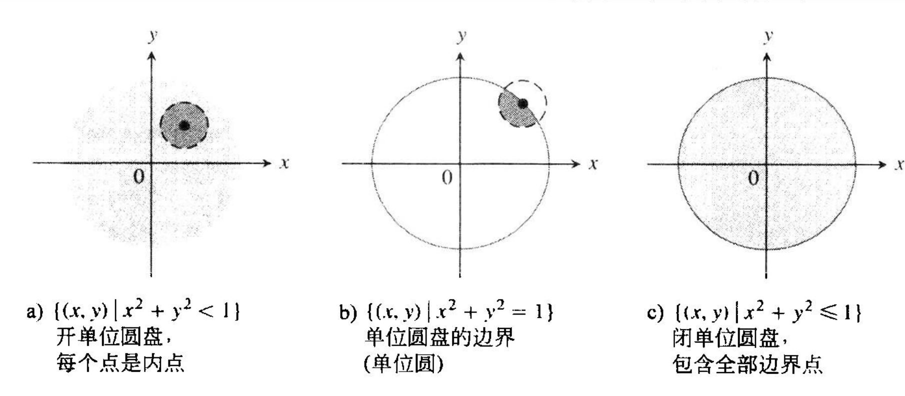



图 12.2　平面内单位圆盘的内点和边界点

**解**　由于 $f$ 仅当 $y-x^2\geqslant 0$ 时有定义，因此定义域是图 12.3 所示的无界闭区域. 抛物线 $y=x^2$ 是定义域的边界. 位于抛物线上方的点构成定义域的内部. ■

### 12.1.3　二元函数的图形、层曲线和等值曲线

描绘函数 $f(x,y)$ 值的图形有两种标准的方法. 一种方法是画出并且标明定义域中 $f$ 取常数值的曲线. 另外一种方法是在空间中画出曲面 $z=f(x,y)$ 的图形.

> **定义**　函数 $f(x,y)$ 在 $xy$ 平面内具有常数值 $f(x,y)=c$ 的点集称为 $f$ 的**层曲线**(或**等位线**). 对于 $f$ 定义域内的点 $(x,y)$，空间中全部点 $(x,y,f(x,y))$ 的集合称为 $f$ 的**图形**. $f$ 的图形也称为**曲面 $z=f(x,y)$**.

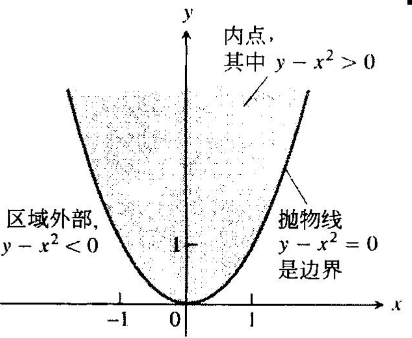



图 12.3　例 2 中 $f(x,y)$ 的定义域由阴影区域和它的边界抛物线组成

**例 3**　绘制函数 $f(x,y)=100-x^2-y^2$ 的图形，并且在 $xy$ 平面内画出 $f$ 在定义域中的层曲线 $f(x,y)=0$，$f(x,y)=51$ 和 $f(x,y)=75$.

**解**　$f$ 的定义域是整个 $xy$ 平面，$f$ 的值域是小于或者等于 100 的实数的集合. 函数的图形是抛物面 $z=100-x^2-y^2$. 图形的一部分显示在图 12.4 中.

层曲线 $f(x,y)=0$ 是 $xy$ 平面内满足

$$f(x,y)=100-x^2-y^2=0 \quad 或 \quad x^2+y^2=100$$

的点集，这是圆心在原点半径为 10 的圆. 同样，层曲线 $f(x,y)=51$ 和 $f(x,y)=75$ (见图 12.4) 是圆

$$f(x,y)=100-x^2-y^2=51 \quad 或 \quad x^2+y^2=49$$

$$f(x,y)=100-x^2-y^2=75 \quad 或 \quad x^2+y^2=25$$

层曲线 $f(x,y)=100$ 只包含一个原点. (它依然是层曲线.) ■

在空间中用平面 $z=c$ 切割曲面 $z=f(x,y)$ 得到的曲线，由代表函数值 $f(x,y)=c$ 的点构成. 它称为**等值曲线**，以便区别于 $f$ 在定义域中的层曲线 $f(x,y)=c$. 图 12.5 显示曲面 $z=100-x^2-y^2$ 上由函数 $f(x,y)=100-x^2-y^2$ 定义的等值曲线 $f(x,y)=75$. 这条等值曲线位于圆 $x^2+y^2=25$ 的正上方，这个圆是函数定义域中的层曲线 $f(x,y)=75$.

然而，并非人人都采用这种区分，有的人也许愿意用单一的名称来称呼这两种曲线，并且取决于他想用其中哪一个名称来表达上下文. 例如，在大多数地图中，把表示海拔(海平面之上的高度)为常数的曲线称为等值曲线(等高线)，而不用层曲线这个名称(见图 12.6).

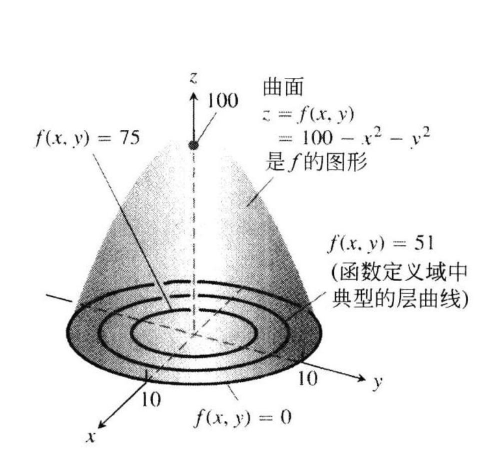
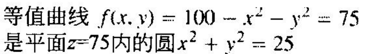



图 12.4 例 3 中函数 $f(x,y)$ 的图形和选定的层曲线



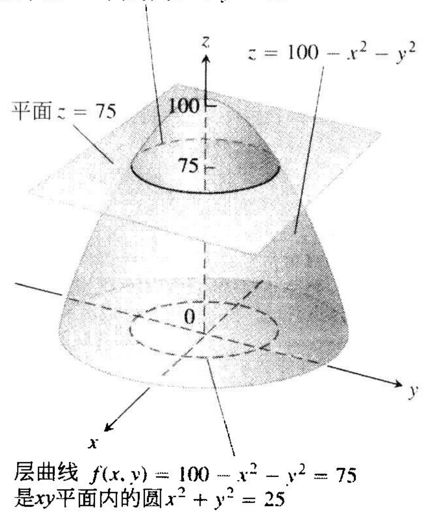




图 12.5 用平行于 $xy$ 平面的平面 $z = c$ 切割曲面 $z = f(x,y)$ 产生等值曲线

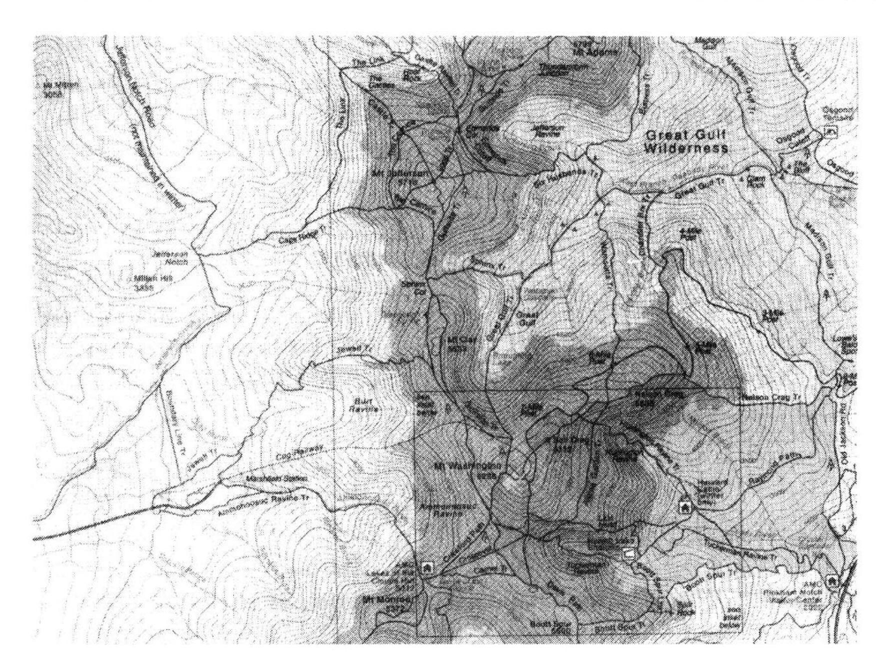



图 12.6 美国新罕布什尔州华盛顿山的等值曲线图(复制得到阿巴拉契亚山组织的许可)

### 12.1.4 三元函数

在平面内，两个自变量的函数 $f$ 取常数值 $f(x,y) = c$ 的点集，构成函数定义域中的曲线. 在空间中，三个自变量的函数 $f$ 取常数值 $f(x,y,z) = c$ 的点集，构成函数定义域中的曲面.

> **定义** 在空间中，三个自变量的函数 $f$ 取常数值 $f(x,y,z) = c$ 的点 $(x,y,z)$ 的集合称为 $f$ 的**层曲面(或等位面)**.

由于三个自变量的函数$f$的图形包含的点$(x,y,z,f(x,y,z))$位于四维空间中，所以在三维参考标架内不能实际描绘它们. 然而，通过考察函数的三维层曲面，可以了解函数具有何种特性.

**例 4** 描述函数$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$的层曲面.

**解** $f$的值是从原点到点$(x,y,z)$的距离. 每个层曲面$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=c(c>0)$是圆心在原点半径为$c$的球面. 图 12.7 显示三个这种球面的剖视图. 层曲面$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=0$只包含原点.

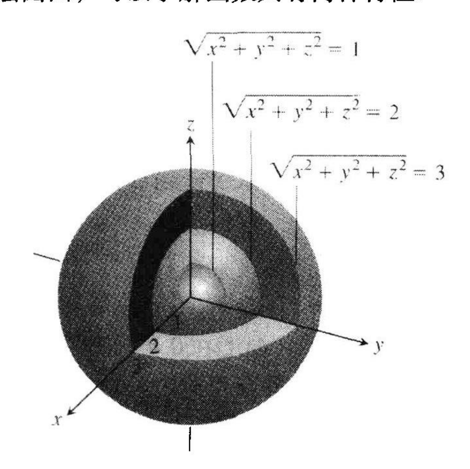
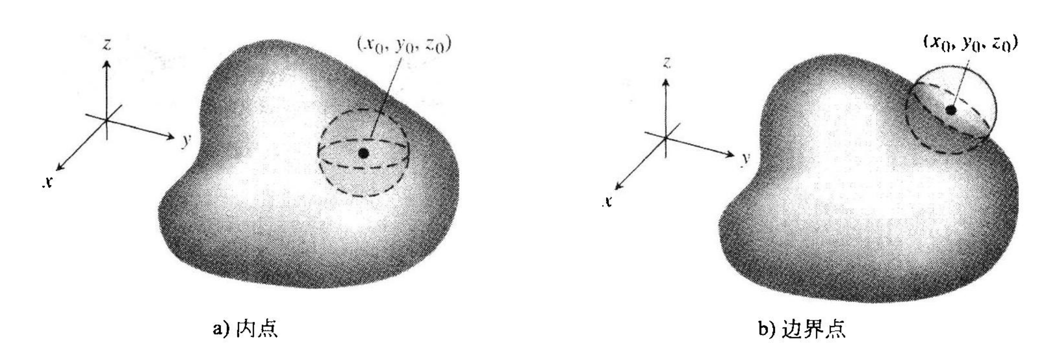



图 12.7 函数$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$的层曲面是一些同心球面(例 4)

我们在此不画函数的图形，而是考察函数定义域中的层曲面. 层曲面显示当在定义域中移动时函数值如何变化. 如果停留在圆心在原点半径为$c$的球面上，函数保持常数值$c$. 如果从一个球面上的一点移动到另外一个球面上，函数值改变. 如果我们从原点移开，函数值增加；如果向原点移动，函数值减少. 函数值改变的方式取决于在定义域中移动的方向. 函数值改变对方向的依赖性是很重要的，在 12.5 节我们再回到这个问题. ■

在空间中，对于区域的内部和边界、开区域和闭区域以及有界区域和无界区域的定义，同在平面内对于区域的这些定义类似. 为了适应空间中额外的一维，我们利用正半径的球体代替圆盘.

> **定义** 在空间中，如果区域$R$内的一点$(x_0,y_0,z_0)$是整个位于$R$内的某个球体的中心，那么它是$R$的**内点**(见图 12.8a). 如果中心在点$(x_0,y_0,z_0)$的每个球体既包含$R$外部的点，也包含$R$内部的点，那么点$(x_0,y_0,z_0)$是$R$的**边界点**(见图 12.8b). $R$的**内部**是$R$的内点的集合. $R$的**边界**是$R$的边界点的集合.
>
> 全部由内点组成的区域是**开**区域. 包含整个边界的区域是**闭**区域.




a) 内点　　b) 边界点

图 12.8 空间区域中的内点和边界点

空间中开集合的例子包括球的内部，半开空间$z>0$，第一卦限(其中$x,y,z$全部为正实数)，以及空间本身.

空间中闭集合的例子包括直线，平面，以及闭半空间$z\geqslant0$.

去除部分边界的球体，或者缺少一个面、一条边或一个角点的立方体，它们既非开集合也非

闭集合.

超出三个自变量的函数也是很重要的. 例如在空间中，曲面上的温度可能不仅依赖于曲面上点 $P(x,y,z)$ 的位置，同时也依赖于考察温度的时间 $t$，所以我们把温度函数表示成 $T=f(x,y,z,t)$.

### 12.1.5 计算机绘图

计算机和计算器中的三维绘图程序使得只用少许操作键就可能绘制二元函数的图形. 时常我们能够从图形比从公式更快地获得信息.

**例 5** 地表下的温度 $w$ 是地下深度 $x$ 和一年内时间 $t$ 的函数. 如果 $x$ 以英尺为度量单位，$t$ 是从一年内最高地表温度期望日期算起的天数，那么我们可以用函数

$$w=\cos(1.7\times10^{-2}t-0.2x)e^{-0.2x}$$

模拟温度的变化.（温度在 0 英尺的变化范围是从 +1 到 -1，所以在 $x$ 英尺深的温度变化可以解释成地表温度变化的若干分之一.）

图 12.9 显示由计算机生成的温度函数的图形. 在地下 15 英尺深的地方，温度变化（图中垂直幅度的变化）大约是地表温度变化的 5%. 在地下 25 英尺深的地方，温度在一年中几乎没有变化.

图形还显示，地下 15 英尺处的温度同地表温度大约有半年的相位差. 当地表温度最低时（例如在一月底），地下 15 英尺处的温度处于它的最高值. 地下 15 英尺处的季节是相反的. ■

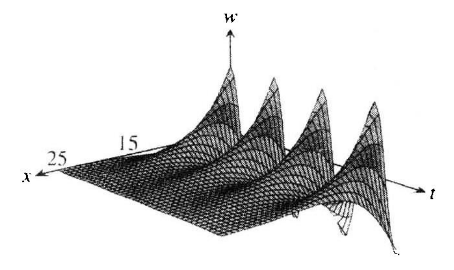



图 12.9 这幅由计算机生成的图形显示地下温度的季节性变化是地表温度的若干分之一（例 5）（改自 Norton Starr 提供的原图）

图 12.10 显示由计算机绘制的几幅二元函数的图形以及它们的层曲线.

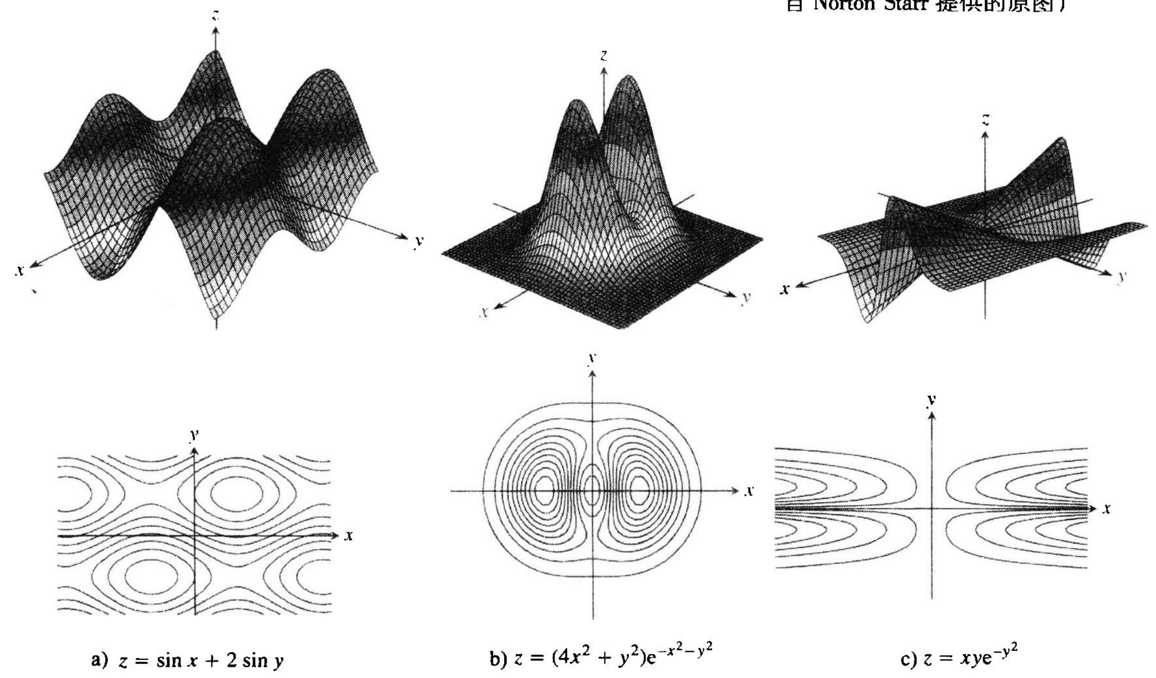



图 12.10 计算机绘制的典型的二元函数的图形和层曲线

## 习题 12.1

在习题 1 ~ 12 中，(a)求函数的定义域，(b)求函数的值域，(c)描述函数的层曲线，(d)求函数定义域的边界，(e)确定定义域是开区域，闭区域，或者既非开区域也非闭区域，(f)判断定义域是有界的还是无界的.

**1.** $f(x,y)=y-x$.　　**2.** $f(x,y)=\sqrt{y-x}$.

**3.** $f(x,y)=4x^2+9y^2$.　　**4.** $f(x,y)=x^2-y^2$.

**5.** $f(x,y)=xy$.　　**6.** $f(x,y)=y/x^2$.

**7.** $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$.

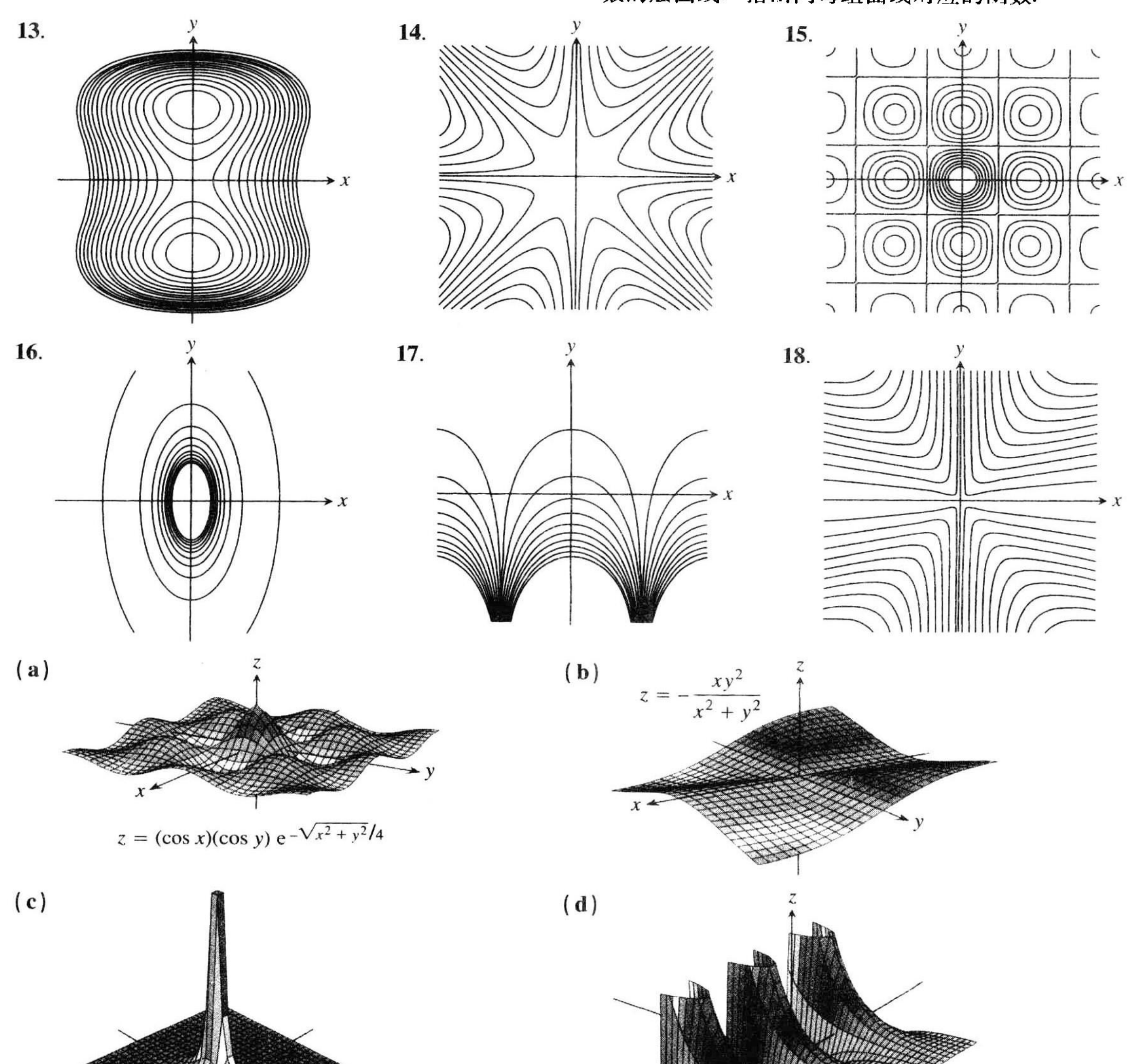
**8.** $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$.

**9.** $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$.　**10.** $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$.

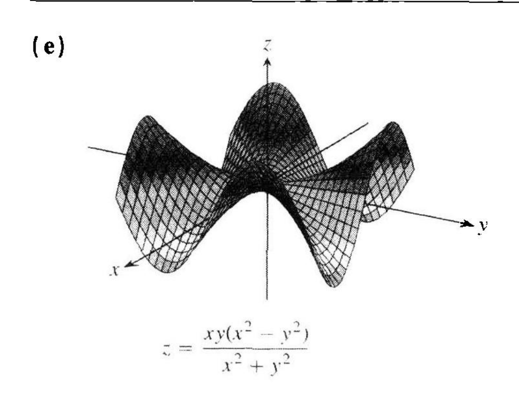
**11.** $f(x,y)=\sin^{-1}(y-x)$.

**12.** $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

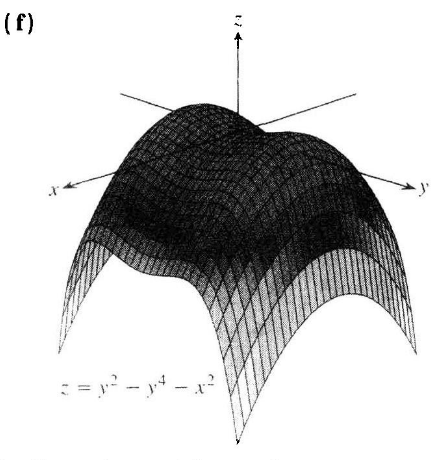
习题 13 ~ 18 显示在(a) ~ (f)中画出图形的函数的层曲线. 指出同每组曲线对应的函数.



(e)




(f)




在习题 19 ~ 28 中，用两种方式显示函数的值：(**a**)画出曲面 $z=f(x,y)$ 的草图；(**b**)在函数的定义域内画出不同类型的层曲线. 标明每条层曲线的函数值.

**19.** $f(x,y)=y^2$.

**20.** $f(x,y)=4-y^2$.

**21.** $f(x,y)=x^2+y^2$.

**22.** $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

**23.** $f(x,y)=-(x^2+y^2)$.

**24.** $f(x,y)=4-x^2-y^2$.

**25.** $f(x,y)=4x^2+y^2$.

**26.** $f(x,y)=4x^2+y^2+1$.

**27.** $f(x,y)=1-|y|$.

**28.** $f(x,y)=1-|x|-|y|$.

在习题 29 ~ 32 中，求函数 $f(x,y)$ 通过给定点的层曲线的方程.

**29.** $f(x,y)=16-x^2-y^2$，$(2\sqrt{2},\sqrt{2})$.

**30.** $f(x,y)=\sqrt{x^2-1}$，$(1,0)$.

**31.** $f(x,y)=\int_x^y\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$，$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

**32.** $f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{y}\right)^n$，$(1,2)$.

在习题 33 ~ 40 中，画出函数的一幅典型层曲面的草图.

**33.** $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.

**34.** $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$.

**35.** $f(x,y,z)=x+z$.

**36.** $f(x,y,z)=z$.

**37.** $f(x,y,z)=x^2+y^2$.

**38.** $f(x,y,z)=y^2+z^2$.

**39.** $f(x,y,z)=z-x^2-y^2$.

**40.** $f(x,y,z)=(x^2/25)+(y^2/16)+(z^2/9)$.

在习题 41 ~ 44 中，求函数通过给定点的层曲面的方程.

**41.** $f(x,y,z)=\sqrt{x-y}-\ln z$，$(3,-1,1)$.

**42.** $f(x,y,z)=\ln(x^2+y+z^2)$，$(-1,2,1)$.

**43.** $g(x,y,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!z^n}$，$(\ln 2,\ln 4,3)$.

**44.** $g(x,y,z)=\int_x^y\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}+\int_{\sqrt{2}}^{z}\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}$，$(0,1/2,2)$.

**计算机探究**

在习题 45 ~ 48 中，对每个函数用一种 CAS(计算机代数系统)执行下列处理步骤：

(**a**) 在给定的矩形区域上绘制曲面的图形.

(**b**) 在矩形区域上绘制几条层曲线.

(**c**) 绘制 $f$ 通过给定点的层曲线.

**45.** $f(x,y)=x\sin\frac{y}{2}+y\sin 2x, 0\leqslant x\leqslant 5\pi$，$0\leqslant y\leqslant 5\pi$，$P(3\pi,3\pi)$.

**46.** $f(x,y)=(\sin x)(\cos y)\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}/8}$，$0\leqslant x\leqslant 5\pi$，$0\leqslant y\leqslant 5\pi$，$P(4\pi,4\pi)$.

**47.** $f(x,y)=\sin(x+2\cos y)$，$-2\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$，$-2\pi\leqslant y\leqslant 2\pi$，$P(\pi,\pi)$.

**48.** $f(x,y)=\mathrm{e}^{(x^{0.1}-y)}\sin(x^2+y^2)$，$0\leqslant x\leqslant 2\pi$，$-2\pi\leqslant y\leqslant \pi$，$P(\pi,-\pi)$.

在习题 49 ~ 52 中，用一种 CAS 绘制隐式定义函数的层曲面.

**49.** $4\ln(x^2+y^2+z^2)=1$.

**50.** $x^2+z^2=1$.

**51.** $x+y^2-3z^2=1$.

**52.** $\sin\left(\frac{x}{2}\right)-(\cos y)\sqrt{x^2+z^2}=2$.

**曲面的参数表示** 正如在平面内用一对定义在某个参数区间 $I$ 上的参数方程 $x=f(t)$，$y=g(t)$ 描述曲线一样，在某些情况下，可以用三个定义在某个参数矩形区域 $a\leqslant u\leqslant b$，$c\leqslant v\leqslant d$ 上的参数方程

$x=f(u,v)$，$y=g(u,v)$，$z=h(u,v)$描述空间中的曲面. 很多计算机代数系统允许在参数模式下绘制这样的曲面图形.（曲面的参数表示在14.5节详细讨论.）在习题53～56中，用一种CAS绘制曲面的图形. 此外，在$xy$平面内绘制几条层曲线.

**53.** $x=u\cos v$，$y=u\sin v$，$z=u$，$0\leqslant u\leqslant 2$，$0\leqslant v\leqslant 2\pi$.

**54.** $x=u\cos v$，$y=u\sin v$，$z=v$，$0\leqslant u\leqslant 2$，$0\leqslant v\leqslant 2\pi$.

**55.** $x=(2+\cos u)\cos v$，$y=(2+\cos u)\sin v$，$z=\sin u$，$0\leqslant u\leqslant 2\pi$，$0\leqslant v\leqslant 2\pi$.

**56.** $x=2\cos u\cos v$，$y=2\cos u\sin v$，$z=2\sin u$，$0\leqslant u\leqslant 2\pi$，$0\leqslant v\leqslant \pi$.

## 12.2 高维空间中函数的极限和连续性

这一节讨论多元函数的极限和连续性.

### 12.2.1 极限

对于同点$(x_0,y_0)$充分接近的所有点$(x,y)$，如果函数$f(x,y)$的值处于和某个固定实数$L$任意接近的状态，我们就说$f$当$(x,y)$趋近$(x_0,y_0)$时趋近极限$L$. 这同一元函数极限的形式定义是相似的. 但是，需要注意，如果点$(x_0,y_0)$位于$f$定义域内部，$(x,y)$可以从任何方向趋近$(x_0,y_0)$. 这种趋近极限点的方向可能成为一个问题，这种情况在下面一些例子中可以见到.

**定义** 设$L$是固定的实数，$(x_0,y_0)$是一个点. 如果对于每个数$\varepsilon>0$，存在一个对应的数$\delta>0$，使得对于$f$定义域内的所有点$(x,y)$，每当

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

时有

$$|f(x,y)-L|<\varepsilon$$

就说函数$f(x,y)$当$(x,y)$趋近$(x_0,\ y_0)$时趋近极限$L$，并且记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$$

极限的定义表明，只要从点$(x,y)$到$(x_0,y_0)$的距离充分小(但是不为0)，$f(x,y)$同$L$之间的距离会变得任意小.

极限定义适用于$f$定义域的边界点$(x_0,y_0)$以及内点. 唯一的要求是在任何时候保持$(x,y)$在$f$的定义域内. 像对一元函数一样，可以证明

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x=x_0$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y=y_0$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} k=k \quad (\text{任意实数 } k)$$

例如，在第一个极限表示式中，$f(x,y)=x$，$L=x_0$. 利用极限的定义，假定选定$\varepsilon>0$. 如果令$\delta=\varepsilon$，可以看出，

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta=\varepsilon$$

隐含

$$\sqrt{(x-x_0)^2}<\varepsilon \quad ((x-x_0)^2\leqslant(x-x_0)^2+(y-y_0)^2)$$

$$|x-x_0|<\varepsilon \quad (\sqrt{a^2}=|a|)$$

$$|f(x,y)-x_0|<\varepsilon \quad (x=f(x,y))$$

就是说

$$|f(x,y)-x_0|<\varepsilon,\quad \text{只要}\quad 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0$$

同一元函数一样，两个二元函数之和的极限是它们的极限(如果两个极限存在)之和. 对于函数的差、积、常数倍、商以及幂的极限，有类似的结果.

**定理 1 (二元函数极限的性质)** 如果 $L,M$ 和 $k$ 是实数，并且有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad 和 \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M$$

那么，下列法则成立：

(1) 和法则 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) + g(x,y)) = L + M$

(2) 差法则 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) - g(x,y)) = L - M$

(3) 积法则 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) \cdot g(x,y)) = L \cdot M$

(4) 常数倍法则 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (kf(x,y) = kL$ (任意实数 $k$)

(5) 商法则 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L}{M}$ ($M \neq 0$)

(6) 幂法则 如果 $r$ 和 $s$ 是两个无公因数的整数，并且 $s\neq 0$，那么

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,\ y))^{r/s} = L^{r/s}$$

只要 $L^{r/s}$ 是实数. (如果 $s$ 是偶数，我们假定 $L>0$.)

我们对定理 1 不予证明，只对它的正确性作非形式的讨论. 如果 $(x,y)$ 充分地接近 $(x_0,y_0)$，那么就有 $f(x,y)$ 接近 $L$ 和 $g(x,y)$ 接近 $M$(由极限的非形式解释). 于是，理所当然地，$f(x,y)+g(x,y)$ 接近 $L+M$，$f(x,y)-g(x,y)$ 接近 $L-M$，$f(x,y)g(x,y)$ 接近 $LM$，$kf(x,y)$ 接近 $kL$ 以及 $f(x,y)/g(x,y)$ 接近 $L/M(M\neq 0)$.

当我们把定理 1 应用到多项式和有理函数时，可以得到很有用的结果：这两种函数当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限可以从计算两种函数在 $(x_0,y_0)$ 的值得到. 唯一的条件是有理函数在 $(x_0,y_0)$ 有定义.

**例 1**

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x-xy+3}{x^2y+5xy-y^3} = \dfrac{0-(0)(1)+3}{(0)^2(1)+5(0)(1)-(1)^3} = -3.$

(b) $\lim_{(x,y)\to(3,-4)} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(3)^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5.$ ■

**例 2** 求

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

**解** 由于分母 $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时趋近 0，我们不能利用定理 1 中的商法则. 但是，如果对分子和分母同乘以 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$，就得到可以求极限的等价的分式：

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-xy)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y} \quad (代数运算)\\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x(\sqrt{x}+\sqrt{y}) \quad (消去非零因式(x-y))\end{aligned}$$

$$= 0(\sqrt{0} + \sqrt{0}) = 0$$

我们能够消去因式$(x-y)$，是因为路径$y=x$(沿着它$x-y=0$)不在函数

$$\frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

的定义域中. ■

**例 3** 求极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{4xy^2}{x^2+y^2}$，如果极限值存在.

**解** 我们首先注意到，当$y\neq 0$时，函数沿直线$x=0$的值始终为0. 同样，只要$x\neq 0$，函数沿直线$y=0$的值始终为0. 所以，如果当$(x,y)\to(0,0)$时极限存在，那么极限值必定为0. 为了检验这个结论是否正确，我们应用极限的定义.

令$\varepsilon>0$是给定的任意实数. 需要求这样一个数$\delta>0$，使得

$$\left|\frac{4xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon, \quad 只要 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

或者

$$\frac{4|x|y^2}{x^2+y^2} < \varepsilon, \quad 只要 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

由于$y^2 \leqslant x^2+y^2$，故有

$$\frac{4|x|y^2}{x^2+y^2} \leqslant 4|x| = 4\sqrt{x^2} \leqslant 4\sqrt{x^2+y^2} \qquad \left(\frac{y^2}{x^2+y^2} \leqslant 1\right)$$

所以，如果选择$\delta=\varepsilon/4$，并且令$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$，得到

$$\left|\frac{4xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| \leqslant 4\sqrt{x^2+y^2} < 4\delta = 4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon$$

由定义推出

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^2}{x^2+y^2} = 0$$ ■

### 12.2.2 连续性

同一元函数一样，多元函数的连续性是用极限定义的.

> **定义** 函数$f(x,y)$**在点$(x_0,y_0)$是连续的**，如果
> (1) $f$在$(x_0,y_0)$有定义；
> (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$存在；
> (3) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.
> 如果函数在它的定义域的每个点是连续的，那么它是连续函数.

同极限的定义一样，连续性的定义适用于在$f$的定义域的边界点以及内点. 唯一的条件是要求点$(x, y)$在$f$的定义域内.

定理1的一个推论是，连续函数的代数组合在涉及的所有函数有定义的每个点是连续的. 这意味着连续函数的和、差、积、常数倍、商以及幂在函数有定义的点是连续的. 特别是，两个变量的多项式和有理函数，在它们有定义的每个点是连续的.

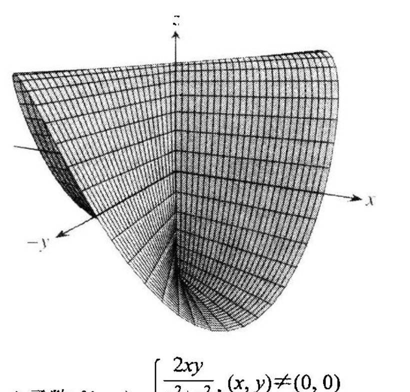
**例 4** 证明函数

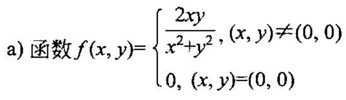
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

在原点以外的每个点是连续的(见图 12.11).

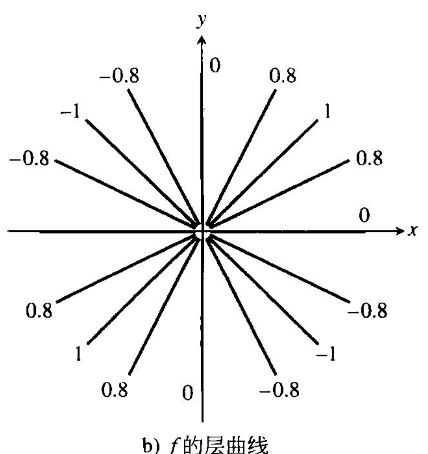
**解** 函数$f$在任何点$(x,y)\neq(0,0)$是连续的，因为它的值是由$x$和$y$的有理函数给出的.

在点$(0,0)$，$f$的值有定义，但是我们断言$f$当$(x,y)\to(0,0)$不存在极限. 原因在于，如我们现在所见，当$(x,y)$沿不同路径趋近原点时，可能得出不同的结果.



a) 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 的图形，函数在原点以外的每个点连续




b) $f$的层曲线

图 12.11 例 4 的图形

对于$m$的每个值，函数$f$在“带孔的”直线$y=mx(x\neq0)$上取常数值，因为

$$f(x,y)\Big|_{y=mx}=\frac{2xy}{x^2+y^2}\Big|_{y=mx}=\frac{2x(mx)}{x^2+(mx)^2}=\frac{2mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{2m}{1+m^2}$$

因此，当$(x,y)$沿这条直线趋近$(0,0)$时$f$以这个数为极限：

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{沿}y=mx}}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[f(x,y)\Big|_{y=mx}\right]=\frac{2m}{1+m^2}$$

这个极限随$m$改变. 所以，当$(x,y)$趋近原点时，不存在我们可以称为$f$的极限的唯一数值. 函数的极限既然不存在，函数也就是不连续的. ■

关于二元函数的极限(对这一点或者还有多元函数)，例 4 说明一个重要事实：如果函数在一点存在极限，那么沿每条趋近路径的极限必须是相同的. 这个结果同一元函数的情况类似，一元函数的左极限与右极限必须相同. 所以，对于二元函数或者多元函数，只要发现存在具有不同极限的路径，我们就知道在它们趋近的点不存在极限.

**极限不存在的双路径检验法**

如果在函数$f(x,y)$的定义域内，当点$(x,y)$沿两条不同的路径趋近点$(x_0,y_0)$时$f$具有不同的极限，那么极限$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$不存在.

**例 5** 证明函数

$$f(x,y)=\frac{2x^2y}{x^4+y^2}$$

(见图 12.12)当$(x,y)$趋近$(0,0)$时不存在极限.

**解** 不能用直接代入变量值的方式求函数的极限，因为那样将得到 0/0 型不定式. 我们考察$f$在以$(0,0)$为终点的曲线上的值. 函数$f$沿着曲线$y=kx^2(x\neq0)$具有常数值

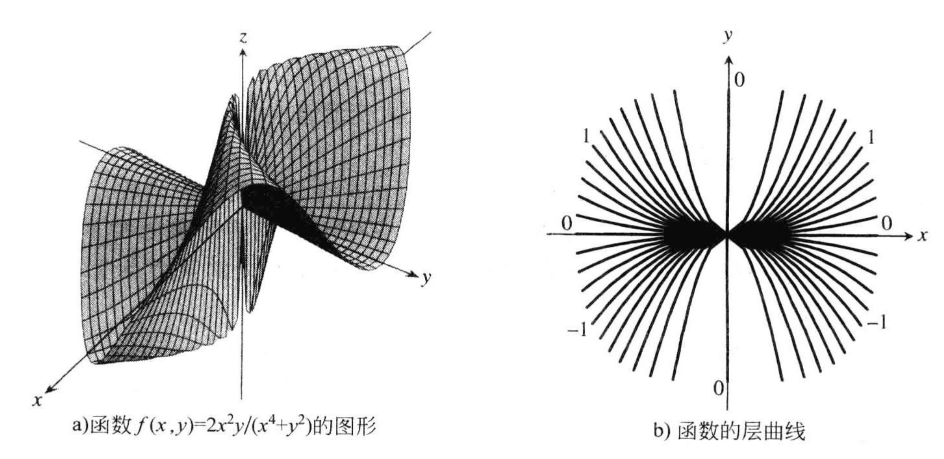



图 12.12　从 a 中图形的暗示和 b 中的层曲线的值，证实极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在

$$f(x,y)\Big|_{y=kx^2} = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}\Big|_{y=kx^2} = \frac{2x^2(kx^2)}{x^4+(kx^2)^2} = \frac{2kx^4}{x^4+k^2x^4} = \frac{2k}{1+k^2}$$

因此，

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{沿}y=kx^2}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[f(x,y)\Big|_{y=kx^2}\right] = \frac{2k}{1+k^2}$$

这个极限随趋近路径而变化. 例如，如果$(x,y)$沿抛物线 $y=x^2$ 趋近$(0,0)$，这时 $k=1$，极限为 1；如果$(x,y)$沿 $x$ 轴趋近$(0,0)$，这时 $k=0$，极限为 0. 按照双路径检验法，$f$ 当$(x, y)$趋近$(0, 0)$时没有极限. ■

可以证明，例 5 中的函数$f$当$(x,y)$沿每条直线路径 $y=mx$ 趋近$(0,0)$时具有极限 0(见习题 43). 然而，函数沿所有直线趋近$(x_0,y_0)$具有同样极限并不意味着在$(x_0,y_0)$存在极限.

多元连续函数的复合函数也是连续函数. 证明从略，证明方法类似于一元函数(见 2.6 节定理 10).

**复合函数的连续性**

如果$f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$连续，而 $g$ 是在 $f(x_0,y_0)$ 连续的一元函数，那么由 $h(x,y)=g(f(x,y))$定义的复合函数 $h=g\circ f$ 在$(x_0,y_0)$连续.

例如，复合函数

$$e^{x-y},\quad \cos\frac{xy}{x^2+1},\quad \ln(1+x^2y^2)$$

是在每个点$(x,y)$连续的函数.

同一元函数一样，通用的法则是，二元连续函数的复合函数是连续的. 唯一的条件是每个函数在其适用的场合是连续的.

### 12.2.3　多于两个变量的函数

对于二元函数的极限和连续性的定义，以及有关和、积、商、幂和复合函数的极限和连续性的结论，全部推广到三个变量或者更多变量的函数. 像

$$\ln(x+y+z)\quad \text{和}\quad \frac{y\sin z}{x-1}$$

这样的函数，在它们的整个定义域上是连续的，而像

$$\lim_{P\to(1,0,-1)} \frac{e^{x+z}}{z^2+\cos\sqrt{xy}} = \frac{e^{1-1}}{(-1)^2+\cos 0} = \frac{1}{2}$$

(其中 $P$ 表示点 $(x,y,z)$)这样的极限，可以通过直接代入变量值求出.

### 12.2.4 闭有界集上的连续函数的极值

极值定理(4.1 节定理 1)表明，在整个有界闭区间 $[a,b]$ 上连续的一元函数，在 $[a,b]$ 上至少取一次绝对极大值和绝对极小值. 这个定理，对于在 $xy$ 平面内的有界闭集合 $R$(像线段、圆盘或者填充三角形)上连续的函数 $z=f(x,y)$ 同样是成立的. 函数在 $R$ 内的某个点上取绝对极大值，在 $R$ 内的某个点上取绝对极小值.

对于三个变量或者更多变量的函数有同样的结果. 例如，连续函数 $w=f(x,y,z)$ 在其定义的任何闭有界集合(球体、立方体、球壳或长方体)上，必定取绝对极大值和绝对极小值.

在 12.7 节将学习如何求这些极值.

### 习题 12.2

在习题 1 ~ 12 中，求极限.

**1.** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2-y^2+5}{x^2+y^2+2}$. **2.** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,4)} \dfrac{x}{\sqrt{y}}$.

**3.** $\lim\limits_{(x,y)\to(3,4)} \sqrt{x^2+y^2-1}$. **4.** $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-3)} \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^2$.

**5.** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\pi/4)} \sec x\tan y$. **6.** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos\dfrac{x^2+y^3}{x+y+1}$.

**7.** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\ln 2)} e^{x-y}$. **8.** $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \ln|1+x^2y^2|$.

**9.** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^y\sin x}{x}$. **10.** $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \cos\sqrt[3]{|xy|-1}$.

**11.** $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{x\sin y}{x^2+1}$. **12.** $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi/2,0)} \dfrac{\cos y+1}{y-\sin x}$.

在习题 13 ~ 20 中，首先改写分式，再求极限.

**13.** $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \dfrac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$. **14.** $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}$.

**15.** $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq 1}} \dfrac{xy-y-2x+2}{x-1}$.

**16.** $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(2,-4)\\ y\neq -4,\, x\neq x^2}} \dfrac{y+4}{x^2y-xy+4x^2-4x}$.

**17.** $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \dfrac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

**18.** $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(2,2)\\ x+y\neq 4}} \dfrac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2}$. **19.** $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(2,0)\\ 2x-y\neq 4}} \dfrac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4}$.

**20.** $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(4,3)\\ x\neq y+1}} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1}$.

在习题 21 ~ 26 中，求极限.

**21.** $\lim\limits_{P\to(1,3,4)} \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$.

**22.** $\lim\limits_{P\to(1,-1,-1)} \dfrac{2xy+yz}{x^2+z^2}$.

**23.** $\lim\limits_{P\to(3,3,0)} (\sin^2x+\cos^2y+\sec^2z)$.

**24.** $\lim\limits_{P\to(-1/4,\pi/2,2)} \tan^{-1}xyz$.

**25.** $\lim\limits_{P\to(\pi,0,3)} ze^{-2y}\cos 2x$.

**26.** $\lim\limits_{P\to(0,-2,0)} \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

在习题 27 ~ 30 中，函数在 $xy$ 平面内的哪些点是连续的?

**27.** (a) $f(x,y)=\sin(x+y)$.
(b) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$.

**28.** (a) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$. (b) $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2+1}$.

**29.** (a) $g(x,y)=\sin\dfrac{1}{xy}$. (b) $g(x,y)=\dfrac{x+y}{2+\cos x}$.

**30.** (a) $g(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-3x+2}$.
(b) $g(x,y)=\dfrac{1}{x^2-y}$.

在习题 31 ~ 34 中，函数在空间中的哪些点是连续的?

**31.** (a) $f(x,y,z)=x^2+y^2-2z^2$.
(b) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2-1}$.

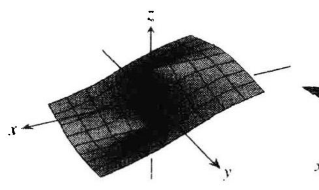
**32.** (a) $f(x,y,z)=\ln xyz$.
(b) $f(x,y,z)=e^{x+y}\cos z$.

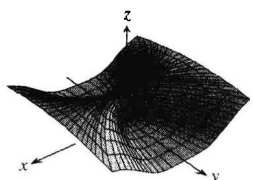
**33.** (a) $h(x,y,z)=xy\sin\dfrac{1}{z}$.
(b) $h(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+z^2-1}$.

**34.** (a) $h(x,y,z)=\dfrac{1}{|y|+|z|}$.
(b) $h(x,y,z)=\dfrac{1}{|xy|+|z|}$.

在习题 35 ~ 42 中，通过考察不同的趋近路径，证明函数当 $(x,y)\to(0,0)$ 时不存在极限.

**35.** $f(x,y)=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. **36.** $f(x,y)=\dfrac{x^4}{x^4+y^2}$.






37. $f(x,y)=\dfrac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$.　　38. $f(x,y)=\dfrac{xy}{|xy|}$.

39. $g(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$.　　40. $g(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$.

41. $h(x,y)=\dfrac{x^2+y}{y}$.　　42. $h(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2-y}$.

43. 证明：例5中的函数在点$(x,y)$沿每条直线路径趋近$(0,0)$时具有极限0.

44. 设$f(x_0,y_0)=3$. 如果$f$在点$(x_0,y_0)$是连续的，那么关于极限

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

可以得出什么结论？如果$f$在点$(x_0,y_0)$是不连续的，可以得出什么论？提出答案的理由.

二元函数的**夹层定理**表明，如果对于中心在点$(x_0,y_0)$的圆盘内的所有点$(x,y)\neq(x_0,y_0)$有

$$g(x,y)\leqslant f(x,y)\leqslant h(x,y)$$

并且$f$和$h$当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时具有相同的有限极限$L$，那么

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$$

利用这个结果支持你在习题45～48中对问题的答案.

45. 已知

$$1-\frac{x^2y^2}{3}<\frac{\tan^{-1}xy}{xy}<1$$

这对于极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\tan^{-1}xy}{xy}$$

能提供任何信息吗？提出答案的理由.

46. 已知

$$2|xy|-\frac{x^2y^2}{6}<4-4\cos\sqrt{|xy|}<2|xy|$$

这对于极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4-4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|}$$

能提供任何信息吗？提出答案的理由.

47. 已知

$$|\sin(1/x)|\leqslant 1$$

这对于极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\sin\frac{1}{x}$$

能提供任何信息吗？提出答案的理由.

48. 已知

$$|\cos(1/y)|\leqslant 1$$

这对于极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\cos\frac{1}{y}$$

能提供任何信息吗？提出答案的理由.

49. (续例4)

(a) 重述例4. 然后在公式

$$f(x,y)\Big|_{y=mx}=\frac{2m}{1+m^2}$$

中代入$m=\tan\theta$，并且简化得到的结果，由此说明$f$的值如何随直线的倾角改变.

(b) 利用从(a)中得到的公式，证明$f$当$(x,y)$沿直线$y=mx$趋近$(0,0)$时的极限从$-1$变化到1，其值取决于趋近的角度.

50. **连续延拓**　用一种方式定义$f(0,0)$，把

$$f(x,y)=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

延拓为在原点是连续的.

**改用极坐标**　你如果在直角坐标对求极限$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$未能取得任何进展，尝试改用极坐标. 在函数中代入$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，并且考察得到的表达式当$r\to0$时的极限. 换句话说，试确定是否存在一个数$L$满足下述判别准则：

给定$\varepsilon>0$，存在这样一个$\delta>0$，使得对于所有$r$和$\theta$有

$$|r|<\delta\ \Rightarrow\ |f(r,\theta)-L|<\varepsilon \qquad (1)$$

如果存在这样一个$L$，那么

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{r\to0} f(r,\theta)=L$$

例如，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3}{x^2+y^2}=\lim_{r\to0}\frac{r^3\cos^3\theta}{r^2}=\lim_{r\to0} r\cos^3\theta=0$$

为了证实上面最后一个等式，需要证明蕴涵式(1)在$f(r,\theta)=r\cos^3\theta$和$L=0$时是满足的. 就是说，需要证明：给定任何$\varepsilon>0$，存在这样一个$\delta>0$，使得对于所有$r$和$\theta$有

$$|r|<\delta\ \Rightarrow\ |r\cos^3\theta-0|<\varepsilon$$

由于

$$|r\cos^3\theta|=|r||\cos^3\theta|\leqslant|r|\cdot1=|r|$$

如果我们取$\delta=\varepsilon$，上述蕴涵式对于所有$r$和$\theta$成立.

相反，

$$\frac{x^2}{x^2+y^2}=\frac{r^2\cos^2\theta}{r^2}=\cos^2\theta$$

取从 0 到 1 的所有值，而无论 $|r|$ 多么小，所以极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

不存在.

在这两个例子中，当 $r\to 0$ 时极限的存在与否是很明显的. 然而，转向极坐标并非总是有帮助的，甚至可能使我们陷入错误的结论. 例如，函数的极限可能沿每条直线(或射线) $\theta=$ 常数存在，而在路径更广的意义下仍然不存在. 例 4 说明了这一点. 在极坐标中，$f(x, y)=(2x^2y)/(x^4+y^2)$ 对于 $r\neq 0$ 变成

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos\theta\sin 2\theta}{r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}$$

如果保持 $\theta$ 为常数而且令 $r\to 0$，其极限为0. 然而，在路径 $y=x^2$ 上有 $r\sin\theta=r^2\cos^2\theta$，从而

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos\theta\sin 2\theta}{r^2\cos^4\theta+(r\cos^2\theta)^2} = \frac{2r\cos^2\theta\sin\theta}{2r^2\cos^4\theta} = \frac{r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta} = 1$$

在习题 51 ~ 56 中，求 $f$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限，或者证明极限不存在.

**51.** $f(x,y)=\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}$. **52.** $f(x,y)=\cos\left(\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right)$.

**53.** $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$. **54.** $f(x,y)=\dfrac{2x}{x^2+x+y^2}$.

**55.** $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\dfrac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right)$.

**56.** $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

在习题 57 和 58 中，用一种方式定义 $f(0,0)$ 把 $f$ 延拓为在原点是连续的

**57.** $f(x,y)=\ln\left(\dfrac{3x^2-x^2y^2+3y^2}{x^2+y^2}\right)$.

**58.** $f(x,y)=\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$.

在习题 59 ~ 62 中给出函数 $f(x,y)$ 和正数 $\varepsilon$. 在每题证明，存在这样个 $\delta>0$，使得对于所有 $(x,y)$ 有

$$\sqrt{x^2+y^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-f(0,0)|<\varepsilon$$

**59.** $f(x,y)=x^2+y^2$，$\varepsilon=0.01$.

**60.** $f(x,y)=y/(x^2+1)$，$\varepsilon=0.05$.

**61.** $f(x,y)=(x+y)/(x^2+1)$，$\varepsilon=0.01$.

**62.** $f(x,y)=(x+y)/(2+\cos x)$，$\varepsilon=0.02$.

在习题 63 ~ 66 中给出函数和正数 $\varepsilon>0$. 在每题证明，存在这样一个 $\delta>0$，使得对于所有 $(x,y,z)$ 有

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y,z)-f(0,0,0)|<\varepsilon$$

**63.** $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$，$\varepsilon=0.015$.

**64.** $f(x,y,z)=xyz$，$\varepsilon=0.008$.

**65.** $f(x,y,z)=\dfrac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2+1}$，$\varepsilon=0.015$.

**66.** $f(x,y,z)=\tan^2x+\tan^2y+\tan^2z$，$\varepsilon=0.03$.

**67.** 证明 $f(x,y,z)=x+y-z$ 在每个点 $(x_0,y_0,z_0)$ 连续.

**68.** 证明 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在原点连续.

## 12.3 偏导数

多元函数的微积分是以一元函数的微积分为基础，把微积分一次运用于一个变量上. 当对函数的一个自变量求导数而保持其他自变量为常数时，我们得到一个“偏的”(部分的)导数. 这一节说明如何定义偏导数和给出它的几何解释，以及如何运用一元函数的微分法则求偏导数.

### 12.3.1 二元函数的偏导数

如果 $(x_0,y_0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的定义域中的一点，垂直平面 $y=y_0$ 切割曲面 $z=f(x,y)$ 将产生曲线 $z=f(x,y_0)$(见图 12.13). 这条曲线是函数 $z=f(x,y_0)$ 在平面 $y=y_0$ 内的图形. 这个平面内的横坐标是 $x$，纵坐标是 $z$. $y$ 值保持为常数 $y_0$，所以 $y$ 不是一个变量.

我们把 $f$ 在点 $(x_0,y_0)$ 对于 $x$ 的偏导数定义为 $f(x,y_0)$ 在点 $x=x_0$ 对于 $x$ 的寻常导数. 为了区别偏导数和寻常导数，我们用记号 $\partial$ 代替过去所用的记号 d.

**定义** 在点 $(x_0,y_0)$ 函数 $f(x,y)$ 对于 $x$ 的偏导数是

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

只要这个极限存在.

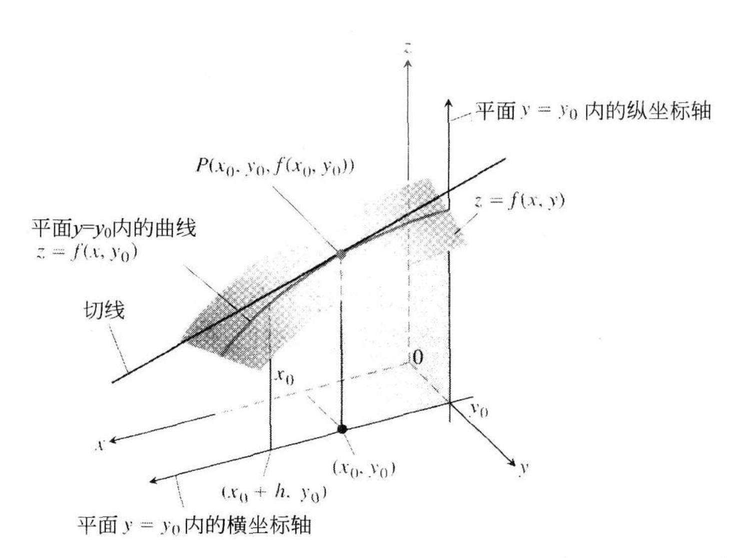



图 12.13 从 $xy$ 平面的第一象限上方看到的平面 $y=y_0$ 同曲面 $z=f(x,y)$ 的交线

偏导数的一个等价表达式是

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\right|_{x=x_0}$$

在平面 $y=y_0$ 内，曲线 $z=f(x,y_0)$ 在点 $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 的斜率是 $f$ 在点 $(x_0,y_0)$ 对于 $x$ 的偏导数的值.（在图 12.13 中这个斜率为负数.）曲线在 $P$ 的切线是平面 $y=y_0$ 内通过 $P$ 和具有这个斜率的直线. 在点 $(x_0,y_0)$ 的偏导数 $\partial f/\partial x$ 给出当 $y$ 保持固定值 $y_0$ 时 $f$ 对于 $x$ 的变化率.

偏导数用哪一种记号表示，以我们要强调的方面为转移：

为了强调在点 $(x_0,y_0)$ 求导数，用

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \quad 或 \quad f_x(x_0,y_0)$$

表示"$f$ 在点 $(x_0,y_0)$ 对于 $x$ 的偏导数"或者"$f$ 在点 $(x_0,y_0)$ 偏微分 $x$"是方便的.

在自然科学和工程技术中，当讨论变量而不涉及显式地表达函数时，通常用

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$$

表示"$z$ 在点 $(x_0,y_0)$ 对于 $x$ 的偏导数".

当我们把偏导数本身作为一种函数考察时，用

$$f_x,\ \frac{\partial f}{\partial x},\ z_x \ 或\ \frac{\partial z}{\partial x}$$

表示"$f$（或者 $z$）对于 $x$ 的偏导数"是方便的.

$f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 对于 $y$ 的偏导数的定义，类似于 $f$ 对于 $x$ 的偏导数的定义：保持 $x$ 在固定值 $x_0$，再取 $f(x_0,y)$ 在 $y_0$ 对于 $y$ 的寻常导数.

**定义** 在点 $(x_0,y_0)$，**函数 $f(x,y)$ 对于 $y$ 的偏导数**是

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x_0,y)\right|_{y=y_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

只要这个极限存在.

在垂直平面 $x=x_0$ 内，曲线 $z=f(x_0,y)$ 在点 $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 的斜率(见图 12.14)是 $f$ 在点 $(x_0,y_0)$ 对于 $y$ 的偏导数. 曲线在 $P$ 的切线是平面 $x=x_0$ 内通过 $P$ 和具有这个斜率的直线. 这个偏导数给出 $f$ 当 $x$ 保持固定值 $x_0$ 时 $f$ 在点 $(x_0,y_0)$ 对于 $y$ 的变化率.

函数 $f$ 对于 $y$ 的偏导数的表示方式，同 $f$ 对于 $x$ 的偏导数的表示方式一样，在不同情况下可以选用

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),\quad f_y(x_0,y_0),\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad f_y$$

请注意，我们如今有了两条在点 $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 同曲面相切的切线(见图 12.15). 它们决定同曲面在 $P$ 相切的平面吗? 我们将要看到的正是这样，但是在查明原因之前，必须对偏导数有更多的了解.

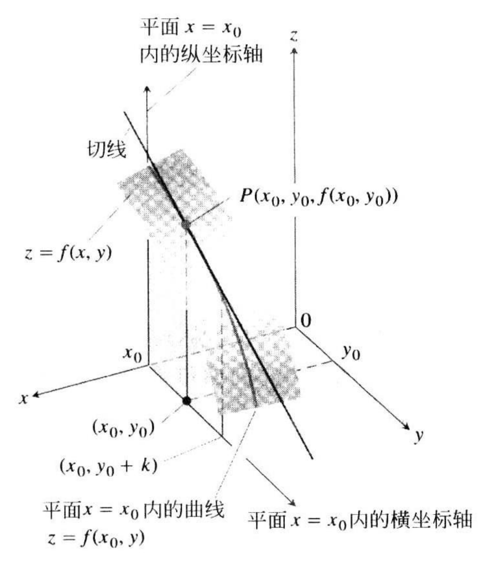



图 12.14　从 $xy$ 平面的第一象限上方看到的平面 $x=x_0$ 同曲面 $z=f(x,y)$ 的交线

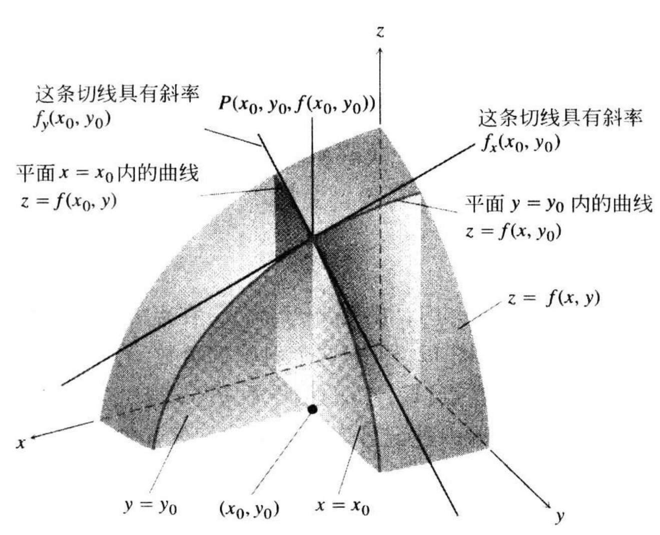



图 12.15　把图 12.13 和 12.14 合并在一起，曲面在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 的两条切线决定的平面至少在本图中看起来是同曲面相切的

### 12.3.2　偏导数的求法

偏导数 $\partial f/\partial x$ 和 $\partial f/\partial y$ 的定义给出在一点求 $f$ 导数的两种不同方法：把 $y$ 作为常数按寻常方法对 $x$ 求导数，以及把 $x$ 作为常数用寻常方法对 $y$ 求导数. 如下列例子所示，函数在给定点 $(x_0,y_0)$ 的这两种偏导数的值通常是不一样的.

**例 1**　设

$$f(x,y)=x^2+3xy+y-1$$

求 $\partial f/\partial x$ 和 $\partial f/\partial y$ 在点 $(4,-5)$ 的值.

**解**　为了求 $\partial f/\partial x$，把 $y$ 作为常数，并且求 $f$ 对于 $x$ 的导数：

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+3xy+y-1)=2x+3\cdot 1\cdot y+0-0=2x+3y$$

$\partial f/\partial x$ 在点 $(4,-5)$ 的值是 $2(4)+3(-5)=-7$.

为了求 $\partial f/\partial y$，把 $x$ 作为常数，并且求 $f$ 对于 $y$ 的导数：

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2+3xy+y-1)=0+3\cdot x\cdot 1+1-0=3x+1$$

$\partial f/\partial y$ 在点(4, -5)的值是 $3(4)+1=13$. ■

**例 2** 设 $f(x,y)=y\sin xy$，求 $\partial f/\partial y$ 作为一个函数.

**解** 把 $x$ 作为常数，而把 $f$ 作为 $y$ 和 $\sin xy$ 的乘积：

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(y\sin xy)=y\frac{\partial}{\partial y}\sin xy+(\sin xy)\frac{\partial}{\partial y}(y)$$

$$=(y\cos xy)\frac{\partial}{\partial y}(xy)+\sin xy=xy\cos xy+\sin xy$$ ■

**例 3** 设

$$f(x,y)=\frac{2y}{y+\cos x}$$

求 $f_x$ 和 $f_y$.

**解** 把 $f$ 作为一个商. 保持 $y$ 为常数，得到

$$f_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{y+\cos x}\right)=\frac{(y+\cos x)\frac{\partial}{\partial x}(2y)-2y\frac{\partial}{\partial x}(y+\cos x)}{(y+\cos x)^2}$$

$$=\frac{(y+\cos x)(0)-2y(-\sin x)}{(y+\cos x)^2}=\frac{2y\sin x}{(y+\cos x)^2}$$

保持 $x$ 为常数，得到

$$f_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{y+\cos x}\right)=\frac{(y+\cos x)\frac{\partial}{\partial y}(2y)-2y\frac{\partial}{\partial y}(y+\cos x)}{(y+\cos x)^2}$$

$$=\frac{(y+\cos x)(2)-2y(1)}{(y+\cos x)^2}=\frac{2\cos x}{(y+\cos x)^2}$$ ■

可用寻常导数的隐式微分法求偏导数，如下面例子给出的说明.

**例 4** 设方程

$$yz-\ln z=x+y$$

定义 $z$ 为两个自变量 $x$ 和 $y$ 的函数，并且存在偏导数，求 $\partial z/\partial x$.

**解** 在方程中保持 $y$ 为常数并且把 $z$ 作为 $x$ 的可微函数，求方程两端对于 $x$ 的导数：

$$\frac{\partial}{\partial x}(yz)-\frac{\partial}{\partial x}\ln z=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}=1+0 \qquad \left(以\ y\ 为常数,\frac{\partial}{\partial x}(yz)=y\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\left(y-\frac{1}{z}\right)\frac{\partial z}{\partial x}=1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{yz-1}$$ ■

**例 5** 平面 $x=1$ 同抛物面 $z=x^2+y^2$ 的交线是抛物线. 求这条抛物线在点(1,2,5)的切线的斜率(见图 12.16).

**解** 切线的斜率是偏导数 $\partial z/\partial y$ 在点(1,2)的值：

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=\left.\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\right|_{(1,2)}=\left.2y\right|_{(1,2)}=2(2)=4$$

作为一种检验，可以把这条抛物线当成在平面 $x=1$ 内的一元函数 $z=(1)^2+y^2=1+y^2$ 的图形，并且求其在 $y=2$ 的斜率. 如今按寻常导数计算这个斜率，

$$\left.\frac{dz}{dy}\right|_{y=2} = \left.\frac{d}{dy}(1+y^2)\right|_{y=2} = \left.2y\right|_{y=2} = 4$$ ■

### 12.3.3 多于两个变量的函数

多于两个自变量的函数的偏导数定义，同二元函数的偏导数定义相似. 它们是对于一个自变量的寻常导数，而让其他自变量保持为常数.

**例 6** 如果 $x,y,z$ 是自变量并且

$$f(x,y,z) = x\sin(y+3z)$$

那么

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}[x\sin(y+3z)] = x\frac{\partial}{\partial z}\sin(y+3z)$$

$$= x\cos(y+3z)\frac{\partial}{\partial z}(y+3z) = 3x\cos(y+3z)$$ ■

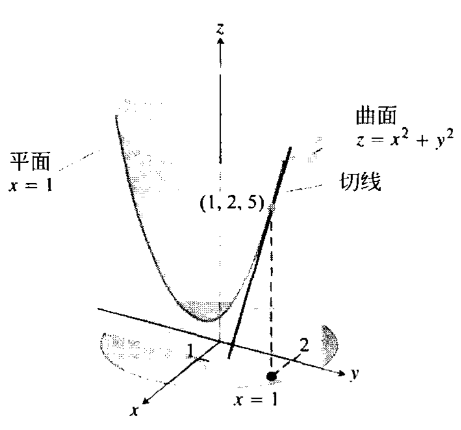



图 12.16 平面 $x=1$ 和曲面 $z=x^2+y^2$ 的相交曲线在点(1,2,5)的切线(例 5)

**例 7** 如果把电阻为 $R_1$，$R_2$，$R_3$ 欧姆的电阻器并联成电阻为 $R$ 欧姆的电阻器，$R$ 的值可以由方程

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

求出(见图 12.17). 求 $\partial R/\partial R_2$ 在 $R_1=30$，$R_2=45$ 和 $R_3=90$ 欧姆时的值.

**解** 为了求 $\partial R/\partial R_2$，把 $R_1$ 和 $R_3$ 作为常数，并且利用稳式微分法求方程两端对于 $R_2$ 的导数：

$$\frac{\partial}{\partial R_2}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial R_2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

$$-\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial R_2} = 0 - \frac{1}{R_2^2} + 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R^2}{R_2^2} = \left(\frac{R}{R_2}\right)^2$$

当 $R_1=30$，$R_2=45$ 和 $R_3=90$ 时，

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{30} + \frac{1}{45} + \frac{1}{90} = \frac{3+2+1}{90} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$$

所以 $R=15$ 而有

$$\frac{\partial R}{\partial R_2} = \left(\frac{15}{45}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

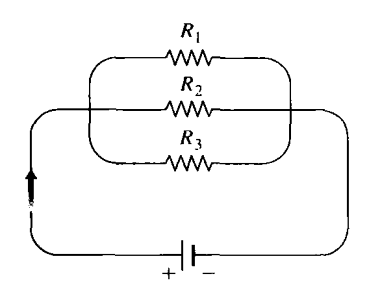



图 12.17 按这种方式联接的电阻器称为并联(例 7)：每个电阻器让一部分电流通过；它们的等价电阻 $R$ 由公式

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

计算

因此，在给定的三个电阻值，$R_2$ 的微小变化导致 $R$ 值大约 1/9 的变化. ■

### 12.3.4 偏导数与连续性

一个函数 $f(x,y)$ 在一点可能同时具有对于 $x$ 和 $y$ 偏导数，而在那个点却不是连续的. 这不同于一元函数，其中导数的存在蕴涵着连续性. 但是，如果 $f(x,y)$ 的两个偏导数存在，并且在以 $(x_0,y_0)$ 为中心的整个圆盘是连续的，那么 $f$ 在 $(x_0,y_0)$ 是连续的，这一点将在本节最后看出.

**例 8** 令

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$$

(见图 12.18).

(a) 求$f$当$(x,y)$沿直线$y=x$趋近$(0,0)$时的极限.

(b) 证明$f$在原点是不连续的.

(c) 证明两个偏导数$\partial f/\partial x$和$\partial f/\partial y$在原点存在.

**解**

(a) 由于$f(x,y)$沿直线$y=x$(除开原点)恒为零，故有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\Big|_{y=x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$$

(b) 由于$f(0,0)=1$，(a)中的极限证明$f$在$(0,0)$是不连续的.

(c) 为了求在点$(0,0)$的$\partial f/\partial x$，保持$y$固定在$y=0$. 于是对于所有$x$，$f(x,y)=1$，$f$的图形是图 12.18 中的直线$L_1$. 这条直线在任何$x$的斜率是$\partial f/\partial x=0$. 特别是，在点$(0,0)$，$\partial f/\partial x=0$. 同样，$\partial f/\partial y$是直线$L_2$在任何$y$的斜率，所以，在点$(0,0)$，$\partial f/\partial y=0$. ■

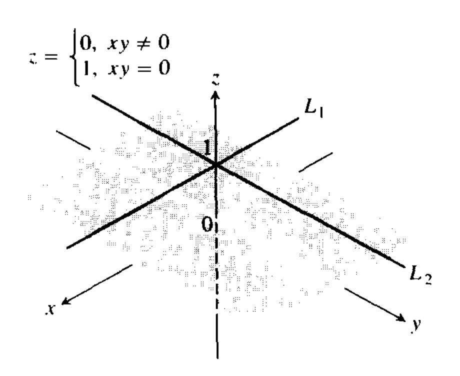



图 12.18　$f(x,y) = \begin{cases} 0, & xy\neq 0 \\ 1, & xy=0 \end{cases}$的图形由直线$L_1$和$L_2$以及$xy$平面内的四个开象限组成；函数在原点存在偏导数，但是在那里是不连续的(例 8)

尽管有例 8 的结果，在高维的情况下，函数在一点的可微性蕴涵连续性仍然成立. 例 8 提供的启示在于，对于高维的可微性，需要比仅存在偏导数更强的条件. 在本节最后，我们定义二元函数的可微性，并且再讨论可微性同连续性的联系.

### 12.3.5　二阶偏导数

对函数$f(x,y)$求偏导数两次，得到它的二阶偏导数. 这些导数通常用下面的记号表示：

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$　("d 方 $f$ dx 方")　或　$f_{xx}$　("$f$ 偏微 $xx$")

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$　("d 方 $f$ dy 方")　或　$f_{yy}$　("$f$ 偏微 $yy$")

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$　("d 方 $f$ dx dy")　或　$f_{yx}$　("$f$ 偏微 $yx$")

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$　("d 方 $f$ dy dx")　或　$f_{xy}$　("$f$ 偏微 $xy$")

定义偏导数的公式为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\cdots$$

等等. 请注意求偏导数的顺序：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

表示先对$y$求导数，然后对$x$求导数.

$$f_{yx} = (f_y)_x$$

代表同样的求导数顺序.

人物传记

**皮埃尔·西蒙·拉普拉斯**

(Pierre-Simon Laplace，1749—1827)

**例 9**　如果$f(x,y)=x\cos y+ye^x$，求二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

**解**　由于

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x\cos y+ye^x)=\cos y+ye^x$$

所以

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=-\sin y+e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=ye^x$$

而

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x\cos y+ye^x)=-x\sin y+e^x$$

所以

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=-\sin y+e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=-x\cos y$$ ■

### 12.3.6 混合导数定理

读者也许已经注意到，例 9 中的二阶“混合”偏导数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \quad 和 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

是相等的. 这并不是一种巧合. 正如下面定理所述，只要$f$, $f_x$, $f_y$, $f_{xy}$和$f_{yx}$是连续的，它们就必定相等.

> **定理 2（混合导数定理）** 若$f(x,y)$及其偏导数$f_x$, $f_y$, $f_{xy}$和$f_{yx}$在包含点$(a,b)$的整个开区域上有定义，并且它们在$(a,b)$都是连续的，则
>
> $$f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$$

**人物传记**

阿列克西斯 · 克莱罗
(Alexis Clairaut, 1713—1765)

定理 2 也称为克莱罗定理，以发现它的法国数学家阿列克西斯 · 克莱罗命名，定理的证明在附录 A.9 中给出. 定理 2 说明，我们可以按任何一种求导顺序计算二阶混合导数，只要连续性条件得到满足. 这一点能够对求混合导数提供便利.

**例 10** 设

$$w=xy+\frac{e^y}{y^2+1}$$

求$\partial^2 w/\partial x\partial y$.

**解** 记号$\partial^2 w/\partial x\partial y$表明先求对$y$的导数，然后求对$x$的导数. 然而，如果我们推迟对$y$求导数而先对$x$求导数，会更快得到答案. 按两步求导数，

$$\frac{\partial w}{\partial x}=y \quad 而 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}=1$$

如果先求对$y$的导数，我们同样得到$\partial^2 w/\partial x\partial y=1$. 由于定理 2 的条件对于$w$而言在所有点$(x_0, y_0)$保持，所以可以按任何一种顺序求导数. ■

### 12.3.7 更高阶的偏导数

虽然在大多数情况下，我们所处理的是一阶和二阶偏导数，因为这两种导数最常出现在各种应用问题中，但是，对于函数可能求多少阶导数并没有理论上的限制，只要所涉及的导数存在. 于是，我们用

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = f_{yyx}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = f_{yyxx}$$

这样的记号表示三阶导数和四阶导数，等等. 同二阶导数一样，求导数的顺序是不重要的，只要其中的所有导数是连续的.

**例 11** 求$f(x,y,z) = 1 - 2xy^2z + x^2y$ 的导数$f_{yxyz}$.

**解** 首先求对变量$y$的导数，然后求对$x$的导数，接着再求对$y$的导数，最后求对$z$的导数：

$$f_y = -4xyz + x^2$$

$$f_{yx} = -4yz + 2x$$

$$f_{yxy} = -4z$$

$$f_{yxyz} = -4$$

■

### 12.3.8 可微性

讨论函数可微性的起点不是我们在研究一元函数时见过的差商，而是增量的概念. 回忆在3.10节对一元函数的讨论，如果$y = f(x)$在$x = x_0$是可微的，那么$f$的值当$x$从$x_0$变化到$x_0 + \Delta x$时的改变由公式

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon \Delta x$$

给出，其中当$\Delta x \to 0$时，$\varepsilon \to 0$. 对于二元函数，把类似的性质作为可微性的定义. 增量定理（见于高等微积分教程）告诉我们，这个性质在什么条件下成立.

**定理 3（二元函数的增量定理）** 假定$f(x,y)$的一阶偏导数在包含点$(x_0,y_0)$的整个开区域$R$有定义，并且$f_x$和$f_y$在$(x_0,y_0)$是连续的. 那么，$f$的值当从$R$内的点$(x_0,y_0)$移动到另外一点$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$时的改变

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$$

满足等式

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

其中当$\Delta x, \Delta y \to 0$时$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$.

可以看出其中的$\varepsilon_1$和$\varepsilon_2$来自附录A.9中的证明. 将来还会看到，对于多于两个自变量的函数存在类似的结果.

**定义** 如果函数$z = f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$的偏导数$f_x(x_0,y_0)$和$f_y(x_0,y_0)$存在，并且满足等式

$$\Delta z = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

其中当$\Delta x, \Delta y \to 0$时$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$，那么$f$**在点$(x_0,y_0)$是可微的**. 如果$f$在其定义域中的每个点是可微的，就称$f$**是可微的**.

我们从这个定义立即得到定理3的系：若函数的一阶偏导数是连续的，则它是可微的.

**定理 3 的系** 若函数$f(x,y)$的偏导数$f_x$和$f_y$在整个开区域$R$是连续的，则$f$在$R$的每个点是可微的.

如果$z=f(x,y)$是可微的，那么，可微性定义保证当$\Delta x,\Delta y\to 0$时$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\to 0$. 这个结果告诉我们，二元函数在其可微的每个点是连续的.

**定理 4（可微性蕴涵连续性）** 若函数$f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$是可微的，则$f$在$(x_0,y_0)$是连续的.

正如从定理 3 和定理 4 可以看到的那样，如果函数$f(x,y)$的偏导数$f_x$和$f_y$在包含点$(x_0,y_0)$的整个开区域$R$是连续的，那么$f$在$(x_0,y_0)$必定是连续的. 但是，回忆一下，如我们在例 8 中所见的那样，在一点存在一阶偏导数的二元函数仍然可能在那个点是不连续的. 仅存在偏导数对于保证函数在一点的连续性是不够的.

## 习题 12.3

在习题 1 ~ 22 中，求$\partial f/\partial x$和$\partial f/\partial y$.

**1.** $f(x,y)=2x^2-3y-4$.

**2.** $f(x,y)=x^2-xy+y^2$.

**3.** $f(x,y)=(x^2-1)(y+2)$.

**4.** $f(x,y)=5xy-7x^2-y^2+3x-6y+2$.

**5.** $f(x,y)=(xy-1)^2$.

**6.** $f(x,y)=(2x-3y)^3$.

**7.** $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

**8.** $f(x,y)=(x^3+(y/2))^{2/3}$.

**9.** $f(x,y)=1/(x+y)$.

**10.** $f(x,y)=x/(x^2+y^2)$.

**11.** $f(x,y)=(x+y)/(xy-1)$.

**12.** $f(x,y)=\tan^{-1}(y/x)$.

**13.** $f(x,y)=e^{(x+y+1)}$.

**14.** $f(x,y)=e^{-x}\sin(x+y)$.

**15.** $f(x,y)=\ln(x+y)$.

**16.** $f(x,y)=e^{xy}\ln y$.

**17.** $f(x,y)=\sin^2(x-3y)$.

**18.** $f(x,y)=\cos^2(3x-y^2)$.

**19.** $f(x,y)=x^y$.

**20.** $f(x,y)=\log_y x$.

**21.** $f(x,y)=\int_x^y g(t)\,dt$（$g$对于全部$t$连续）.

**22.** $f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n\ (|xy|<1)$.

在习题 23 ~ 34 中，求$f_x$，$f_y$和$f_z$.

**23.** $f(x,y,z)=1+xy^2-2z^2$.

**24.** $f(x,y,z)=xy+yz+xz$.

**25.** $f(x,y,z)=x-\sqrt{y^2+z^2}$.

**26.** $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$.

**27.** $f(x,y,z)=\sin^{-1}(xyz)$.

**28.** $f(x,y,z)=\sec^{-1}(x+yz)$.

**29.** $f(x,y,z)=\ln(x+2y+3z)$.

**30.** $f(x,y,z)=yz\ln(xy)$.

**31.** $f(x,y,z)=e^{-(x^2+y^2+z^2)}$.

**32.** $f(x,y,z)=e^{-xyz}$.

**33.** $f(x,y,z)=\tanh(x+2y+3z)$.

**34.** $f(x,y,z)=\sinh(xy-z^2)$.

在习题 35 ~ 40 中，求函数对于每个变量的偏导数.

**35.** $f(t,\alpha)=\cos(2\pi t-\alpha)$.

**36.** $g(u,v)=v^2e^{(2u/v)}$.

**37.** $h(\rho,\phi,\theta)=\rho\sin\phi\cos\theta$.

**38.** $g(r,\theta,z)=r(1-\cos\theta)-z$.

**39.** **心脏所作的功**（见 3.10 节习题 59）

$$W(P,V,\delta,v,g)=PV+\frac{V\delta v^2}{2g}$$

**40.** **威尔逊批量公式**（见 4.5 节习题 45）

$$A(c,h,k,m,q)=\frac{km}{q}+cm+\frac{hq}{2}$$

在习题 41 ~ 46 中，求函数的所有二阶偏导数.

**41.** $f(x,y)=x+y+xy$.

**42.** $f(x,y)=\sin xy$.

**43.** $g(x,y)=x^2y+\cos y+y\sin x$.

**44.** $h(x,y)=xe^y+y+1$.

**45.** $r(x,y)=\ln(x+y)$.

**46.** $s(x,y)=\tan^{-1}(y/x)$.

在习题 47 ~ 50 中，证明$w_{xy}=w_{yx}$.

**47.** $w=\ln(2x+3y)$.

**48.** $w=e^x+x\ln y+y\ln x$.

**49.** $w=xy^2+x^2y^3+x^3y^4$.

**50.** $w = x \sin y + y \sin x + xy$.

**51.** 对于计算下列函数的偏导数 $f_{xy}$，可以先对 $x$ 求导数或者先对 $y$ 求导数，采用哪一种求导顺序更快？试在不写任何算式的情况下给出答案.

(a) $f(x,y) = x \sin y + e^y$.

(b) $f(x,y) = 1/x$.

(c) $f(x,y) = y + (x/y)$.

(d) $f(x,y) = y + x^2y + 4y^3 - \ln(y^2+1)$.

(e) $f(x,y) = x^2 + 5xy + \sin x + 7e^x$.

(f) $f(x,y) = x \ln xy$.

**52.** 下列函数中每个函数的5阶偏导数 $\partial^5 f/\partial x^2 \partial y^3$ 为零. 为了尽可能快地证明这个结果，应该首先对变量 $x$ 还是 $y$ 求导数？试在不写任何算式的情况下给出答案.

(a) $f(x,y) = y^2x^4e^x + 2$.

(b) $f(x,y) = y^2 + y(\sin x - x^4)$.

(c) $f(x,y) = x^2 + 5xy + \sin x + 7e^x$.

(d) $f(x,y) = xe^{y^2/2}$.

在习题53和54中，利用偏导数的定义计算函数在指定点的偏导数.

**53.** $f(x,y) = 1 - x + y - 3x^2y$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在点(1,2).

**54.** $f(x,y) = 4 + 2x - 3y - xy^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在点(-2,1).

**55. 三个变量** 令 $w = f(x,y,z)$ 是三个自变量的函数，写出 $f$ 在点 $(x_0,y_0,z_0)$ 的偏导数 $\partial f/\partial z$ 的形式定义. 利用这个定义求 $f(x,y,z) = x^2yz^2$ 在点(1,2,3)的 $\partial f/\partial z$.

**56. 三个变量** 令 $w = f(x,y,z)$ 是三个自变量的函数，写出 $f$ 在点 $(x_0,y_0,z_0)$ 的偏导数 $\partial f/\partial y$ 的形式定义. 利用这个定义求 $f(x,y,z) = -2xy^2 + yz^2$ 在点(-1,0,3)的 $\partial f/\partial y$.

**57.** 假定方程

$$xy + z^3x - 2yz = 0$$

把 $z$ 定义为两个自变量 $x$ 和 $y$ 的函数，并且存在偏导数，求 $\partial z/\partial x$ 在点(1,1,1)的值.

**58.** 假定方程

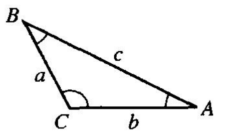
$$xz + y \ln x - x^2 + 4 = 0$$

把 $x$ 定义为两个自变量 $y$ 和 $z$ 的函数，并且存在偏导数，求 $\partial x/\partial z$ 在点(1,-1,-3)的值.

习题59和60涉及附图所示三角形的角和边的关系.

**59.** 把 $A$ 表示成 $a,b,c$ 的隐函数，并且计算 $\partial A/\partial a$ 和 $\partial A/\partial b$.

**60.** 把 $a$ 表示成 $A,b,B$ 的隐函数，并且计算 $\partial a/\partial A$ 和 $\partial a/\partial B$.




**61. 两个因变量** 如果方程 $x = v \ln u$ 和 $y = u \ln v$ 把 $u$ 和 $v$ 定义为自变量 $x$ 和 $y$ 的函数，并且存在 $v_x$，用 $u$ 和 $y$ 表示 $v_x$.（提示：求两个方程对 $x$ 的导数，并且通过消去 $u_x$ 求解 $v_x$.）

**62. 两个因变量** 如果方程 $u = x^2 - y^2$ 和 $v = x^2 - y$ 把 $x$ 和 $y$ 定义为自变量 $u$ 和 $v$ 的函数，并且存在偏导数，求 $\partial x/\partial u$ 和 $\partial y/\partial u$.（参见习题61中的提示.）然后令 $s = x^2 + y^2$，并且求 $\partial s/\partial u$.

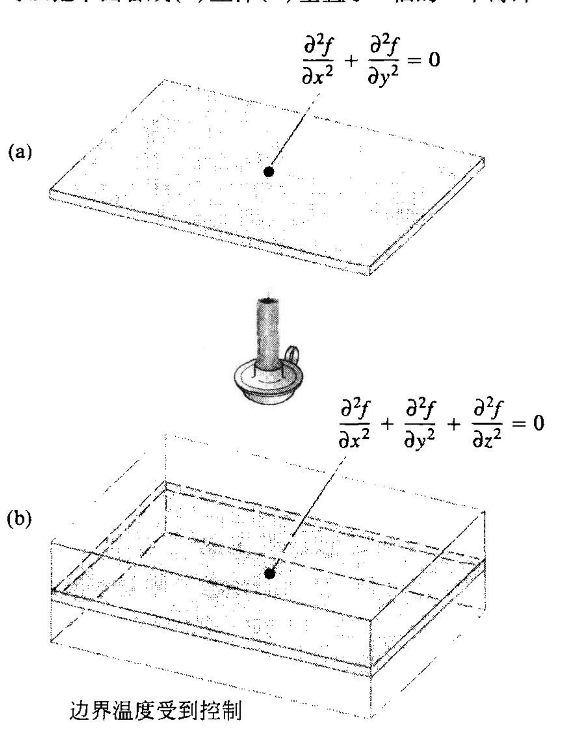
**三维拉普拉斯方程**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

是空间中的稳态温度分布 $T = f(x, y, z)$、重力势和静电势所满足的方程. **二维拉普拉斯方程**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

是从上述方程删除 $\partial^2 f/\partial z^2$ 项得到的方程，描述平面内的重力势和静电势以及稳态温度分布(参见附图). 可以把平面看成(a)立体(b)垂直于 $z$ 轴的一个薄片.




在习题63～68中，证明函数满足拉普拉斯方程.

**63.** $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$.

64. $f(x,\ y,\ z)=2z^3-3(x^2+y^2)z$.

65. $f(x,\ y)=e^{-2y}\cos 2x$.

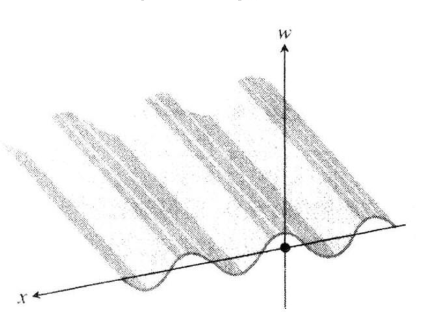
66. $f(x,\ y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

67. $f(x,\ y,\ z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$.

68. $f(x,\ y,\ z)=e^{3x+4y}\cos 5z$.

**波动方程** 如果我们站在海洋的岸边拍摄波浪的快照，照片显示某个瞬间的波峰和波谷的图案. 从图案中看出空间中相对于距离的周期性垂直运动. 如果我们置身于海水中，当波浪经过时可以感觉到海水的起落. 我们观察到随时间的周期性垂直运动. 在物理学中，这种优美的对称性用**一维波动方程**

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$




表示，其中 $w$ 是波幅的高度，$x$ 是距离变量，$t$ 是时间变量，$c$ 是波传播的速度.

在我们的例子中，$x$ 是横越洋面的距离，但是在其他应用中，$x$ 可能是沿一条振动弦的距离，通过空气的距离(声波)，或者通过空间的距离(光波). 数 $c$ 因波的类型和传播介质而异.

在习题 69 ~ 75 中，证明函数是波动方程的解.

69. $w=\sin(x+ct)$.　　70. $w=\cos(2x+2ct)$.

71. $w=\sin(x+ct)+\cos(2x+2ct)$.

72. $w=\ln(2x+2ct)$.

73. $w=\tan(2x-2ct)$.

74. $w=5\cos(3x+3ct)+e^{x+ct}$.

75. $w=f(u)$，其中 $f$ 是 $u$ 的可微函数，而 $u=a(x+ct)$，其中 $a$ 是常数.

76. 如果函数 $f(x,\ y)$ 在整个开区域 $R$ 上具有一阶连续偏导数，$f$ 在 $R$ 上是否必定连续? 提出答案的理由.

77. 如果函数 $f(x,\ y)$ 在整个开区域 $R$ 上具有二阶连续偏导数，$f$ 的一阶偏导数在 $R$ 上是否必定连续? 提出答案的理由.

## 12.4 链式法则

在 3.5 节讨论的一元函数的链式法则说明，当 $w=f(x)$ 是 $x$ 的可微函数并且 $x=g(t)$ 是 $t$ 的可微函数时，$w$ 成为 $t$ 的可微函数，并且 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$ 可以用公式

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

计算.

二元函数或多元函数的链式法则具有多种形式. 具体的形式取决于涉及多少个变量，但是只要考虑附加变量的出现时就像 3.5 节的链式法则那样处置.

### 12.4.1 二元函数

当函数 $w=f(x,\ y)$ 在 $x=x(t)$ 和 $y=y(t)$ 都是 $t$ 的可微函数时，链式法则公式由下述定理给出.

**定理 5 (二元函数的链式法则)** 若 $w=f(x,y)$ 具有连续的偏导数 $f_x$ 和 $f_y$，且 $x=x(t),y=y(t)$ 是 $t$ 的可微函数，则复合函数 $w=f(x(t),y(t))$ 是 $t$ 的可微函数，且有

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=f_x(x(t),y(t))\cdot x'(t)+f_y(x(t),y(t))\cdot y'(t)$$

或

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

**证明** 要证明的事项包括：如果 $x=x(t)$ 和 $y=y(t)$ 在 $t=t_0$ 是可微的，那么，$w$ 在 $t=t_0$ 是可微的，并且有

$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0}=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0}+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0}$$

其中 $P_0=(x(t_0),y(t_0))$. 下标 $P_0$ 和 $t_0$ 指示求每个导数所在的点.

**附注**

$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$, $f_x$ 中的每一个都是指 $f$ 对于 $x$ 的偏导数.

令 $\Delta x,\Delta y,\Delta w$ 是 $t$ 从 $t_0$ 变化到 $t_0+\Delta t$ 产生的增量. 由于 $f$ 是可微的(参见 12.3 节的定义)，

$$\Delta w=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0}\Delta x+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$$

其中当 $\Delta x,\Delta y\to0$ 时 $\varepsilon_1,\varepsilon_2\to0$. 为了求 $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$，在这个等式中遍除以 $\Delta t$，并且令 $\Delta t$ 趋近零. 除法给出

$$\frac{\Delta w}{\Delta t}=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0}\frac{\Delta y}{\Delta t}+\varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta t}+\varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

令 $\Delta t$ 趋近零，得到

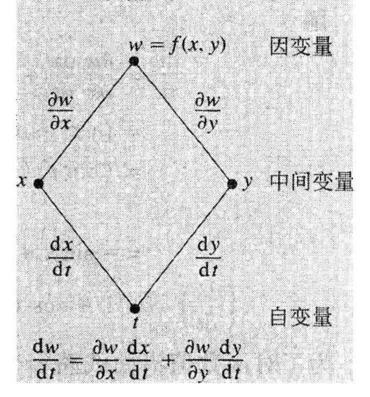
$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta w}{\Delta t}=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0}+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0}$$
$$+0\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0}+0\cdot\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0}$$

■

**附注**

我们用下面的图形记忆链式法则. 为了求 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$，从 $w$ 开始，把由 $w$ 到 $t$ 的两条下行路径上写出的导数相乘，然后对乘积求和.

链式法则




附注中的**树形图**提供记忆链式法则的一种实用方法. 注意 $w$ 既是 $x$ 和 $y$ 的函数，又是 $t$ 的函数. 在图中，当 $t=t_0$ 时，导数 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 是在 $t_0$ 求值. 因此，$t_0$ 的值决定可微函数 $x=x(t)$ 的值 $x_0$ 和可微函数 $y=y(t)$ 的值 $y_0$. 偏导数 $\partial w/\partial x$ 和 $\partial w/\partial y$(它们本身是 $x$ 和 $y$ 的函数)是在对应于 $t_0$ 的点 $P_0(x_0,y_0)$ 求值. "真正的"自变量是 $t$，而 $x$ 和 $y$ 是中间变量(受 $t$ 控制)，$w$ 是因变量.

一种更准确的链式法则记号，指出定理 5 中各个导数求值的点：

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(t_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0)$$

**例 1** 应用链式法则沿路径 $x=\cos t$，$y=\sin t$ 求

$$w=xy$$

对于 $t$ 的导数. 导数在 $t=\pi/2$ 的值是什么？

**解** 应用链式法则求 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$ 如下：

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$
$$=\frac{\partial(xy)}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos t)+\frac{\partial(xy)}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin t)=(y)(-\sin t)+(x)(\cos t)$$
$$=(\sin t)(-\sin t)+(\cos t)(\cos t)=-\sin^2t+\cos^2t=\cos 2t$$

在这个例子中可以用更直接的计算来检验结果. 作为 $t$ 的函数，

$$w=xy=\cos t\sin t=\frac{1}{2}\sin 2t$$

所以

$$\frac{dw}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)=\frac{1}{2}\cdot 2\cos 2t=\cos 2t$$

在两种情况下，对于给定的 $t$ 值都有

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t=\pi/2}=\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\cos\pi=-1$$ ■

### 12.4.2 三元函数

读者或许能够预言三元函数的链式法则，因为它仅涉及在二元函数的链式法则公式中添加预定的第三项.

> **定理 6（三元函数的链式法则）** 若 $w=f(x,y,z)$ 是可微的，且 $x,y,z$ 是 $t$ 的可微函数，则 $w$ 是 $t$ 的可微函数，且有
>
> $$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

定理的证明同定理 5 完全一样，只不过此时有三个而不是两个中间变量. 用于记忆新链式法则公式的图形也是相似的，其中有三条从 $w$ 到 $t$ 的路径.

**例 2** 设

$$w=xy+z,\quad x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad z=t$$

求 $dw/dt$. 在此例中，$w(t)$ 的值当 $t$ 变化时按照螺旋线路径（11.1 节）变化. 导数在 $t=0$ 的值是什么？

**解**

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt}&=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}\\&=(y)(-\sin t)+(x)(\cos t)+(1)(1)\\&=(\sin t)(-\sin t)+(\cos t)(\cos t)+1\\&\qquad\text{（代入中间变量）}\\&=-\sin^2 t+\cos^2 t+1=1+\cos 2t\end{aligned}$$

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t=0}=1+\cos(0)=2$$ ■

**附注**

下图从 $w$ 到 $t$ 有三条路径而不是两条，但是求 $dw/dt$ 的方法仍然相同：把每条下行路径上写出的导数相乘，然后求和.

链式法则

$w=f(x,y,z)$ 因变量

$\frac{\partial w}{\partial x}$ $\frac{\partial w}{\partial y}$ $\frac{\partial w}{\partial z}$

$x$ $y$ $z$ 中间变量

$\frac{dx}{dt}$ $\frac{dy}{dt}$ $\frac{dz}{dt}$

$t$ 自变量

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

为了对函数值沿曲线路径变化作出物理解释，考虑一个随时间 $t$ 改变位置的物体. 如果 $w=T(x,y,z)$ 是沿参数方程为 $x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$ 的曲线 $C$ 上每个点 $(x,y,z)$ 的温度，那么复合函数 $w=T(x(t),y(t),z(t))$ 表示沿曲线同 $t$ 相关的温度. 于是定理 6 中计算出的导数 $dw/dt$ 是沿曲线移动时温度的瞬时变化率.

### 12.4.3 在曲面上定义的函数

如果我们关注的在于空间中一个球体上的点 $(x,y,z)$ 的温度函数 $w=f(x,y,z)$，或许宁愿把 $x,y,z$ 看成给出空间中点的经度和纬度的变量 $r$ 和 $s$ 的函数. 如果 $x=g(r,s)$，$y=h(r,s)$，$z=k(r,s)$，那么可以用复合函数

$$w=f(g(r,s),\ h(r,s),\ k(r,s))$$

把温表示成 $r$ 和 $s$ 的函数. 在下述条件下，$w$ 同时具有对于 $r$ 和 $s$ 的偏导数，这两个偏导数可以用下面定理中的方法计算.

**定理7（两个自变量和三个中间变量的链式法则）** 假定 $w=f(x,y,z)$，$x=g(r,s)$，$y=h(r,s)$，$z=k(r,s)$．若这四个函数都是可微的，则 $w$ 具有对于 $r$ 和 $s$ 的偏导数，且由公式

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

给出.

这两个公式的第一个公式可以在定理6的链式法则中保持 $s$ 固定并且把 $r$ 当作 $t$ 而导出．第二个公式可以用同样方法导出，即保持 $r$ 固定并且把 $s$ 当作 $t$．记忆这两个偏导数公式的树形图显示在图 12.19 中.

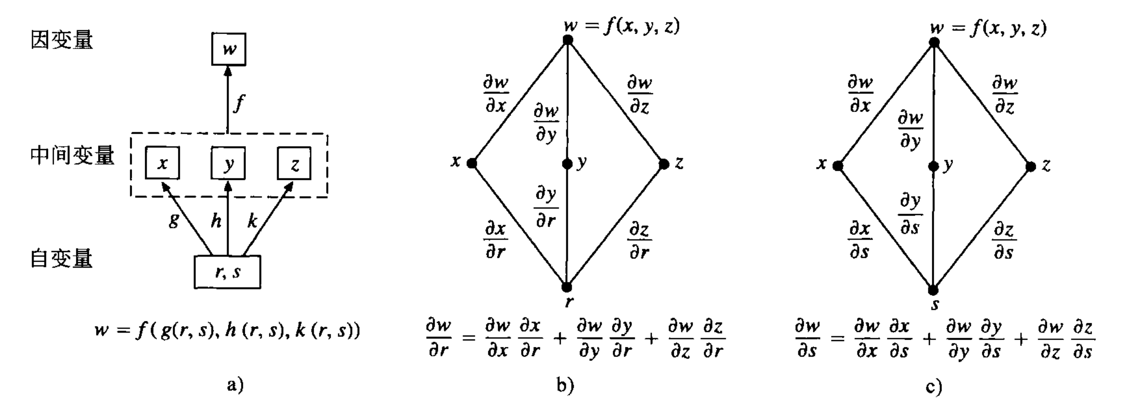



图 12.19 定理7的复合函数和树形图

**例3** 设

$$w=x+2y+z^2,\quad x=\frac{r}{s},\quad y=r^2+\ln s,\quad z=2r$$

用 $r$ 和 $s$ 表示 $\partial w/\partial r$ 和 $\partial w/\partial s$.

**解**

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}=(1)\left(\frac{1}{s}\right)+(2)(2r)+(2z)(2)$$

$$=\frac{1}{s}+4r+(4r)(2)=\frac{1}{s}+12r \quad \text{（代换中间变量 } z\text{）}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}=(1)\left(-\frac{r}{s^2}\right)+(2)\left(\frac{1}{s}\right)+(2z)(0)=\frac{2}{s}-\frac{r}{s^2}$$ ■

如果 $f$ 是两个变量而非三个变量的函数，定理7中每个对应的偏导数公式减少一项.

若 $w=f(x,y)$，$x=g(r,s)$，$y=h(r,s)$，则

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

图 12.20 显示上面第一个公式的树形图．第二个公式的树形图是相似的，只不过用 $s$ 代替 $r$.

**例4** 设

$$w=x^2+y^2,\quad x=r-s,\quad y=r+s$$

用 $r$ 和 $s$ 表示 $\partial w/\partial r$ 和 $\partial w/\partial s$.

**解**

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=(2x)(1)+(2y)(1)$$

$=2(r-s)+2(r+s)$ （代换中间变量）

$=4r$

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=(2x)(-1)+(2y)(1)$$

$=-2(r-s)+2(r+s)$ （代换中间变量）

$=4s$ ■

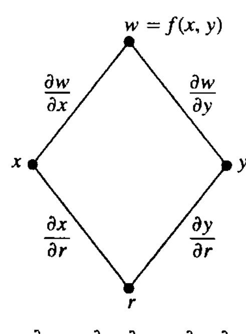



图 12.20 记忆公式 $\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$ 的树形图

如果 $f$ 单独是 $x$ 的函数，偏导数公式更为简单.

> 若 $w=f(x)$，$x=g(r,s)$，则
> $$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\frac{\partial x}{\partial r},\quad \frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\frac{\partial x}{\partial s}$$

在这种情况下，用寻常(一个变量)导数 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$ 代替 $\partial w/\partial x$. 记忆偏导数链式法则公式的树形图显示在图 12.21 中.

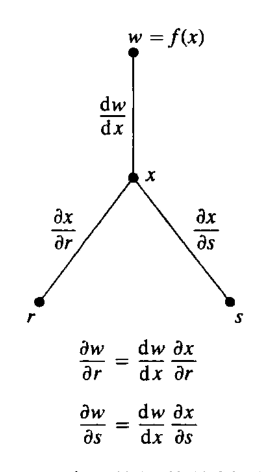



图 12.21 求 $f$ 的导数的树形图，$f$ 作为 $r$ 和 $s$ 以及一个中间变量 $x$ 的复合函数

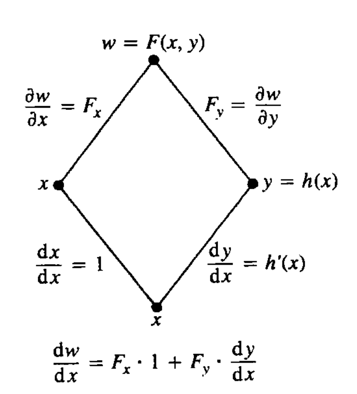



图 12.22 求 $w=F(x,y)$ 对于 $x$ 的导数的树形图；置 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}x=0$，导致隐式微分法的简单计算公式(定理 8)

### 12.4.4 再讨论隐式微分法

定理 5 中两个变量的微分法则，导致由隐式微分法产生的经过某种代运算的公式. 假定

(1) 函数 $F(x,y)$ 是可微的；

(2) 方程 $F(x,y)=0$ 隐式定义 $y$ 为 $x$ 的可微函数，例如 $y=h(x)$.

由于 $w=F(x,y)=0$，导数 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$ 必定为零. 用链式法则(见图 12.22 中的树形图)计算导数，求出

$$0=\frac{dw}{dx}=F_x\frac{dx}{dx}+F_y\frac{dy}{dx}\quad(\text{定理5取}\ t=x\ \text{和}\ f=F)$$

$$=F_x\cdot 1+F_y\cdot\frac{dy}{dx}$$

如果 $F_y=\partial w/\partial y\neq 0$，可以从这个方程求解 $dy/dx$，得到

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$$

我们把这个结果表述为下面的正式定理.

> **定理 8(隐式微分法公式)** 假定 $F(x,y)$ 是可微的，并且方程 $F(x,y)=0$ 定义 $y$ 为 $x$ 的函数. 那么，在 $F_y\neq 0$ 的任何点，
>
> $$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$$

**例 5** 设 $y^2-x^2-\sin xy=0$，利用定理 8 求 $dy/dx$.

**解** 取 $F(x,y)=y^2-x^2-\sin xy$. 于是

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{-2x-y\cos xy}{2y-x\cos xy}=\frac{2x+y\cos xy}{2y-x\cos xy}$$

这个计算比在 3.6 节例 3 中用来求 $dy/dx$ 的单变量的计算大为缩短. ■

### 12.4.5 多元函数

我们在本节已经见到链式法则的多种不同形式，但是如果可能把它们视为相同的一般公式的特例，就无需全部记住它们. 在求解特定问题时，画出相应的树形图，即把因变量置于顶端，中间变量居中，而把选择的自变量放在底部，可能是有帮助的. 为了求因变量对于选定自变量的导数，从因变量开始，向下查看树形图下至自变量的每条路径，沿每条路径计算导数并且将它们相乘. 然后求不同路径上的乘积之和.

一般说来，假定 $w=f(x,y,\cdots,v)$ 是变量 $x,y,\cdots,v$(一个有限集)的可微函数，$x,y,\cdots,v$ 是 $p,q,\cdots,t$(另外一个有限集)的可微函数. 那么，$w$ 是是从 $p$ 到 $t$ 的变量的可微函数，$w$ 对于这些变量的偏导数由形式为

$$\frac{\partial w}{\partial p}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p}+\cdots+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p}$$

的公式给出. 其他偏导数的公式由每次用 $q,\cdots,t$ 中的一个变量代替 $p$ 得到.

记忆这个公式的一种方法是把公式右端想象为具有分量

$$\underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},\cdots,\frac{\partial w}{\partial v}\right)}_{w\text{对于中间变量的导数}}\quad\text{和}\quad\underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial p},\frac{\partial y}{\partial p},\cdots,\frac{\partial v}{\partial p}\right)}_{\text{中间变量对于选择的自变量的导数}}.$$

的两个向量的点积.

### 习题 12.4

在习题 1 ~ 6 中，(a) 用两种方法把 $dw/dt$ 表示成 $t$ 的函数，一是用链式法则，二是用 $t$ 表示 $w$ 并且直接求对 $t$ 的导数. (b) 然后在给定的 $t$ 值求 $dw/dt$.

**1.** $w=x^2+y^2$，$x=\cos t$，$y=\sin t$；$t=\pi$.

**2.** $w=x^2+y^2$，$x=\cos t+\sin t$，$y=\cos t-\sin t$；$t=0$.

**3.** $w=\frac{x}{z}+\frac{y}{z}$，$x=\cos^2 t$，$y=\sin^2 t$，$z=1/t$；$t=3$.

**4.** $w=\ln(x^2+y^2+z^2)$，$x=\cos t$，$y=\sin t$，$z=4\sqrt{t}$；$t=3$.

**5.** $w=2ye^x-\ln z$，$x=\ln(t^2+1)$，$y=\tan^{-1}t$，$z=e^t$；$t=1$.

**6.** $w=z-\sin xy$，$x=t$，$y=\ln t$，$z=e^{t-1}$；$t=1$.

在习题 7 和 8 中，(a)用两种方法把$\partial z/\partial u$和$\partial z/\partial v$表示成 $u$ 和 $v$ 的函数，一是利用链式法则，二是直接用 $u$ 和 $v$ 表示 $z$，再求导数．(b)然后在给定点$(u, v)$求$\partial z/\partial u$ 和$\partial z/\partial v$.

**7.** $z=4e^x\ln y$, $x=\ln(u\cos v)$, $y=u\sin v$; $(u,v)=(2,\pi/4)$.

**8.** $z=\tan^{-1}(x/y)$, $x=u\cos v$, $y=u\sin v$; $(u,v)=(1.3,\pi/6)$.

在习题 9 和 10 中，(a)用两种方法把$\partial w/\partial u$ 和$\partial w/\partial v$ 表示成 $u$ 和 $v$ 的函数，一是用链式方则，二是直接用 $u$ 和 $v$ 表示 $w$，再求导数．(b)然后在给定点$(u,v)$求$\partial w/\partial u$ 和$\partial w/\partial v$.

**9.** $w=xy+yz+xz$, $x=u+v$, $y=u-v$, $z=uv$; $(u,v)=(1/2,1)$.

**10.** $w=\ln(x^2+y^2+z^2)$, $x=ue^v\sin u$, $y=ue^v\cos u$, $z=ue^v$; $(u,v)=(-2,0)$.

在习题 11 和 12 中，(a)用两种方法把$\partial u/\partial x$，$\partial u/\partial y$ 和$\partial u/\partial z$ 表示成 $x,y,z$ 的函数，一是用链式法则，二是直接用 $x,y,z$ 表示 $u$，再求导数．(b)然后在给定点$(x,y,z)$求$\partial u/\partial x$，$\partial u/\partial y$ 和$\partial u/\partial z$.

**11.** $u=\dfrac{p-q}{q-r}$, $p=x+y+z$, $q=x-y+z$, $r=x+y-z$; $(x,y,z)=(\sqrt{3},2,1)$.

**12.** $u=e^{qr}\sin^{-1}p$, $p=\sin x$, $q=z^2\ln y$, $r=1/z$; $(x,y,z)=(\pi/4,1/2,-1/2)$.

在习题 13 ~ 24 中，写出对于每个导数的链式法则公式并且画出树形图．

**13.** 对于 $z=f(x,y)$，$x=g(t)$，$y=h(t)$ 的导数$\dfrac{dz}{dt}$.

**14.** 对于 $z=f(u,v,w)$，$u=g(t)$，$v=h(t)$，$w=k(t)$ 的导数$\dfrac{dz}{dt}$.

**15.** 对于 $w=h(x,y,z)$，$x=f(u,v)$，$y=g(u,v)$，$z=k(u,v)$ 的偏导数$\dfrac{\partial w}{\partial u}$和$\dfrac{\partial w}{\partial v}$.

**16.** 对于 $w=f(r,s,t)$，$r=g(x,y)$，$s=h(x,y)$，$t=k(x,y)$ 的偏导数$\dfrac{\partial w}{\partial x}$和$\dfrac{\partial w}{\partial y}$.

**17.** 对于 $w=g(x,y)$，$x=h(u,v)$，$y=k(u,v)$ 的偏导数$\dfrac{\partial w}{\partial u}$和$\dfrac{\partial w}{\partial v}$.

**18.** 对于 $w=g(u,v)$，$u=h(x,y)$，$v=k(x,y)$ 的偏导数$\dfrac{\partial w}{\partial x}$和$\dfrac{\partial w}{\partial y}$.

**19.** 对于 $z=f(x,y)$，$x=g(t,s)$，$y=h(t,s)$ 的偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial t}$和$\dfrac{\partial z}{\partial s}$.

**20.** 对于 $y=f(u)$，$u=g(r,s)$ 的偏导数$\dfrac{\partial y}{\partial r}$.

**21.** 对于 $w=g(u)$，$u=h(s,t)$ 的偏导数$\dfrac{\partial w}{\partial s}$和$\dfrac{\partial w}{\partial t}$.

**22.** 对于 $w=f(x,y,z,v)$，$x=g(p,q)$，$y=h(p,q)$，$z=j(p,q)$，$v=k(p,q)$ 的偏导数$\dfrac{\partial w}{\partial p}$.

**23.** 对于 $w=f(x,y)$，$x=g(r)$，$y=h(s)$ 的偏导数$\dfrac{\partial w}{\partial r}$和$\dfrac{\partial w}{\partial s}$.

**24.** 对于 $w=g(x,y)$，$x=h(r,s,t)$，$y=k(r,s,t)$ 的偏导数$\dfrac{\partial w}{\partial s}$.

在习题 25 ~ 28 中，假定方程定义 $y$ 为 $x$ 的可微函数，利用定理 8 求 $dy/dx$ 在给定点的值.

**25.** $x^3-2y^2+xy=0$; $(1,1)$.

**26.** $xy+y^2-3x-3=0$; $(-1,1)$.

**27.** $x^2+xy+y^2-7=0$; $(1,2)$.

**28.** $xe^y+\sin xy+y-\ln 2=0$; $(0,\ln 2)$.

**三元函数的隐式微分法**　定理 8 可以推广到三元函数以至更多变量的函数．三元函数的隐式微分法公式如下：若方程 $F(x,y,z)=0$ 定义 $z$ 为 $x$ 和 $y$ 的可微函数，则在 $F_z\neq 0$ 的点，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

在习题 29 ~ 32 中，利用这两个公式求$\partial z/\partial x$ 和$\partial z/\partial y$ 在给定点的值.

**29.** $z^3-xy+yz+y^3-2=0$; $(1,1,1)$.

**30.** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}-1=0$; $(2,3,6)$.

**31.** $\sin(x+y)+\sin(y+z)+\sin(x+z)=0$; $(\pi,\pi,\pi)$.

**32.** $xe^y+ye^z+2\ln x-2-3\ln 2=0$; $(1,\ln 2,\ln 3)$.

**33.** 如果

$$w=(x+y+z)^2,$$
$$x=r-s,\ y=\cos(r+s),\ z=\sin(r+s)$$

求$\partial w/\partial r$ 在 $r=1$，$s=-1$ 的值.

**34.** 如果

$$w=xy+\ln z,\ x=v^2/u,\ y=u+v,\ z=\cos u$$

求$\partial w/\partial v$ 在 $u=-1$，$v=2$ 的值.

**35.** 如果

$$w=x^2+(y/x),\ x=u-2v+1,\ y=2u+v-2$$

求$\partial w/\partial v$ 在 $u=0$，$v=0$ 的值.

**36.** 如果

$$z=\sin xy+x\sin y,\ x=u^2+v^2,\ y=uv$$

求$\partial z/\partial u$ 在 $u=0$，$v=1$ 的值.

**37.** 如果

$$z=5\tan^{-1}x,\ x=e^u+\ln v$$

求$\partial z/\partial u$ 和$\partial z/\partial v$ 在 $u=\ln 2$，$v=1$ 的值.

**38.** 如果

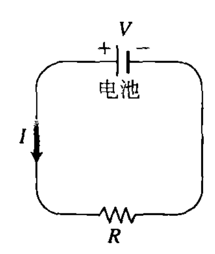
$$z = \ln q,\ q = \sqrt{v+3}\ \tan^{-1} u$$

求$\partial z/\partial u$和$\partial z/\partial v$在$u=1$，$v=-2$的值.

**39. 电路中的电压变化** 电路中满足定律$V=IR$的电压$V$，随着电池的耗损而缓慢下降. 同时，电阻$R$随着电阻器的加热而增加. 利用方程

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial I}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial V}{\partial R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$$

求在$R=600\ \Omega$，$I=0.04$ A，$\mathrm{d}R/\mathrm{d}t=0.5\ \Omega/\mathrm{s}$和$\mathrm{d}V/\mathrm{d}t=-0.01$ V/s的瞬间电流是如何变化的?




**40. 箱子尺寸的变化** 假设长方形箱子的边长$a$，$b$，$c$随时间改变. 在考察的时刻$a=1$ m，$b=2$ m，$c=3$ m，$\mathrm{d}a/\mathrm{d}t=\mathrm{d}b/\mathrm{d}t=1$ m/s，$\mathrm{d}c/\mathrm{d}t=-3$ m/s. 箱子在那个瞬间的体积$V$和表面积$S$的变化率是多少? 箱子内部对角线的长度是增加还是减少?

**41.** 如果$f(u,v,w)$是可微的，并且$u=x-y$，$v=y-z$，$w=z-x$，证明

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

**42. 极坐标** 假定在可微函数$w=f(x,\ y)$中代入极坐标$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$.

(a) 证明

$$\frac{\partial w}{\partial r} = f_x\cos\theta + f_y\sin\theta$$

和

$$\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} = -f_x\sin\theta + f_y\cos\theta$$

(b) 求解(a)中的方程，用$\partial w/\partial r$和$\partial w/\partial\theta$表示$f_x$和$f_y$.

(c) 证明

$$(f_x)^2 + (f_y)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2$$

**43. 拉普拉斯方程** 证明：若$w=f(u,v)$满足拉普拉斯方程$f_{uu}+f_{vv}=0$，且$u=(x^2-y^2)/2$，$v=xy$，则$w$满足拉普拉斯方程$w_{xx}+w_{yy}=0$.

**44. 拉普拉斯方程** 令$w=f(u)+g(v)$，其中$u=x+\mathrm{i}y$，$v=x-\mathrm{i}y$，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$. 证明$w$满足拉普拉斯方程$w_{xx}+w_{yy}=0$，只要所需的所有函数是可微的.

**45. 螺旋线上的极值** 假定函数$f(x,y,z)$在螺旋线

$$x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t$$

上的点的偏导数是

$$f_x=\cos t,\ f_y=\sin t,\ f_z=t^2+t-2$$

$f$在曲线上的什么点(如果存在)可能取极值?

**46. 空间曲线** 令$w=x^2\mathrm{e}^{2y}\cos 3z$. 求$\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$在曲线

$$x=\cos t,\ y=\ln(t+2),\ z=t$$

上的点$(1,\ln 2,0)$的值.

**47. 圆上的温度** 令$T=f(x,y)$是在圆

$$x=\cos t,\ y=\sin t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

上的点$(x,\ y)$的温度，并且假定

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 8x-4y,\ \frac{\partial T}{\partial y} = 8y-4x$$

(a) 通过考察导数$\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$和$\mathrm{d}^2T/\mathrm{d}t^2$求圆上在什么点出现极大值和极小值温度.

(b) 假定$T=4x^2-4xy+4y^2$. 求$T$在圆上的极大值和极小值.

**48. 椭圆上的温度** 令$T=g(x,\ y)$是在椭圆

$$x=2\sqrt{2}\cos t,\ y=\sqrt{2}\sin t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

上的点$(x,\ y)$的温度，并且假定

$$\frac{\partial T}{\partial x} = y,\ \frac{\partial T}{\partial y} = x$$

(a) 通过考察$\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$和$\mathrm{d}^2T/\mathrm{d}t^2$，确定椭圆上温度取极大值和极小值的位置.

(b) 假定$T=xy-2$. 求$T$在椭圆上的极大值和极小值.

**求积分函数的导数** 在适度的连续性限制下，存在下述结果：若

$$F(x) = \int_a^b g(t,x)\,\mathrm{d}t$$

则

$$F'(x) = \int_a^b g_x(t,x)\,\mathrm{d}t$$

利用这个事实和链式法则，通过令

$$G(u,x) = \int_a^u g(t,x)\,\mathrm{d}t$$

其中$u=f(x)$，可以求出

$$F(x) = \int_a^{f(x)} g(t,x)\,\mathrm{d}t$$

的导数. 在习题49和50中，求函数的导数.

**49.** $F(x)=\int_0^{x^2}\sqrt{t^4+x^3}\,\mathrm{d}t$.

**50.** $F(x)=\int_{x^2}^{1}\sqrt{t^3+x^2}\,\mathrm{d}t$.

## 12.5 方向导数与梯度向量

图 12.23 显示沿纽约哈得孙河西点地区的等高线地图，你会注意到图中各条支流垂直于等高线流动. 这些支流取道最速下降的流动路径，所以河水以尽可能快的速度流到哈得孙河. 因此，支流中的海拔高度的瞬时变化率带有一个特定的方向. 在这一节，可以看到为什么这个称为"下坡"方向的方向是垂直于等高线的.

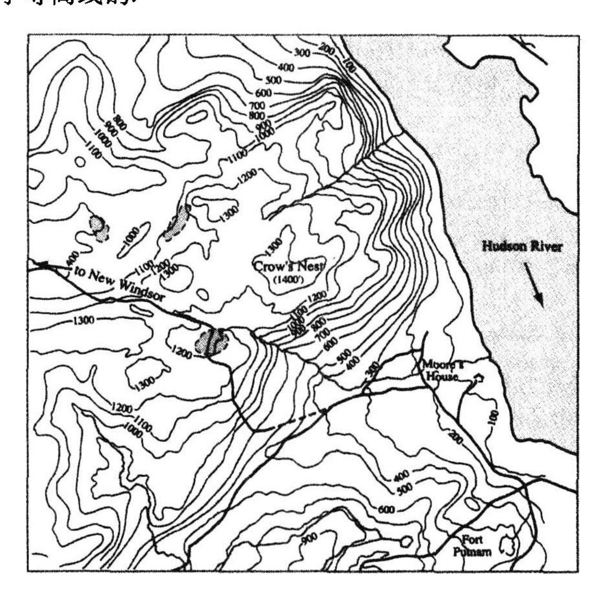



图 12.23 纽约西点地区的等高线地图，显示河流沿最速下降路径垂直于等高线流动

### 12.5.1 平面内的方向导数

从 12.4 节知道，如果 $f(x,y)$ 是可微的，那么 $f$ 沿可微曲线 $x=g(t)$，$y=h(t)$ 对于 $t$ 的变化率是

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

在任何点 $P_0(x_0,y_0)=P_0(g(t_0),h(t_0))$，这个公式给出 $f$ 对于增加的 $t$ 的变化率，因而特别依赖于沿曲线运动的方向. 如果曲线是直线，而 $t$ 是在某个给定单位向量 $\boldsymbol{u}$ 的方向上沿直线从 $P_0$ 度量的弧长参数，那么 $df/dt$ 是 $f$ 在其定义域内在 $\boldsymbol{u}$ 方向对于距离的变化率. 通过改变 $\boldsymbol{u}$，当我们经过 $P_0$ 在不同方向移动时求 $f$ 对于距离的变化率. 现在对这个概念给出更确切的定义.

假定函数 $f(x,y)$ 是在 $xy$ 平面的整个区域 $R$ 上定义的，$P_0(x_0,y_0)$ 是 $R$ 内的一点，并且 $\boldsymbol{u}=u_1\boldsymbol{i}+u_2\boldsymbol{j}$ 是单位向量. 那么，方程

$$x=x_0+su_1,\quad y=y_0+su_2$$

是通过 $P_0$ 同 $\boldsymbol{u}$ 平行的直线的参数表示. 如果参数 $s$ 度量在 $\boldsymbol{u}$ 的方向从 $P_0$ 起的弧长，我们通过计算在 $P_0$ 的 $df/ds$，求出 $f$ 在 $\boldsymbol{u}$ 方向上在 $P_0$ 的变化率(见图 12.24).

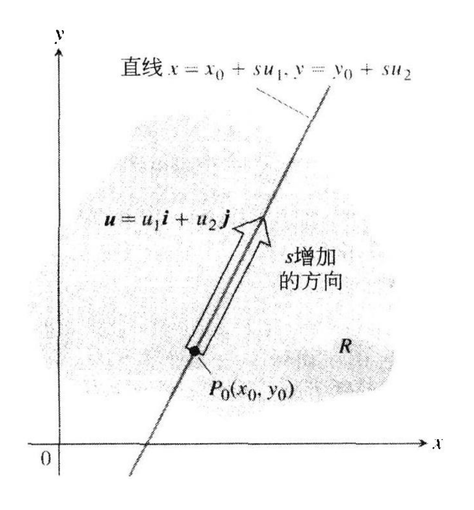



图 12.24 $f$ 在 $\boldsymbol{u}$ 方向在点 $P_0$ 的变化率是 $f$ 沿这条直线在 $P_0$ 的变化率

**定义** $f$ 在单位向量 $u=u_1i+u_2j$ 的方向在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的导数是

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\right)_{u,P_0}=\lim_{s\to 0}\frac{f(x_0+su_1,\ y_0+su_2)-f(x_0,\ y_0)}{s} \tag{1}$$

如果极限存在.

方向导数也用

$$(D_uf)_{P_0}\quad（“f \text{ 在 } u \text{ 方向在点 } P_0 \text{ 的导数}”）$$

表示.

**例 1** 利用定义，求函数

$$f(x,y)=x^2+xy$$

在单位向量 $u=(1/\sqrt{2})i+(1/\sqrt{2})j$ 方向在点 $P_0(1,2)$ 的导数.

**解**

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\right)_{u,P_0}=\lim_{s\to 0}\frac{f(x_0+su_1,y_0+su_2)-f(x_0,y_0)}{s}\qquad（公式(1)）$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{f\left(1+s\cdot\frac{1}{\sqrt{2}},2+s\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-f(1,2)}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{\left(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\left(2+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)-(1^2+1\cdot 2)}{s}$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{\left(1+\frac{2s}{\sqrt{2}}+\frac{s^2}{2}\right)+\left(2+\frac{3s}{\sqrt{2}}+\frac{s^2}{2}\right)-3}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{\frac{5s}{\sqrt{2}}+s^2}{s}=\lim_{s\to 0}\left(\frac{5}{\sqrt{2}}+s\right)=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

$f(x,y)=x^2+xy$ 在 $u$ 方向在点 $P_0(1,2)$ 的变化率是 $5/\sqrt{2}$. ■

### 12.5.2 方向导数的物理解释

方程 $z=f(x,y)$ 表示空间中的曲面 $S$. 如果 $z_0=f(x_0,y_0)$，那么点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 位于 $S$ 上. 通过点 $P$ 和 $P_0(x_0,y_0)$ 并且平行于 $u$ 的垂直平面同 $S$ 相交于曲线 $C$（见图 12.25）. $f$ 在 $u$ 方向的变化率是曲线 $C$ 在由向量 $u$ 和 $k$ 构成的右手系中在 $P$ 的切线的斜率.

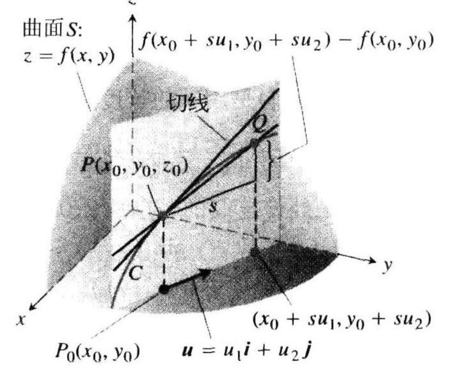



图 12.25 曲线 $C$ 在 $P_0$ 的斜率是 $\lim\limits_{Q\to P}$ 斜率$(PQ)$；这是方向导数$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\right)_{u,P_0}=(D_uf)P_0$

当 $u=i$ 时，在 $P_0$ 的方向导数是 $\partial f/\partial x$ 在 $(x_0,y_0)$ 的值. 当 $u=j$ 时，在 $P_0$ 的方向导数是 $\partial f/\partial y$ 在 $(x_0,y_0)$ 的值. 方向导数推广这两个偏导数. 至此，我们可以求 $f$ 在任何方向 $u$ 的变化率而不仅限于方向 $i$ 和 $j$.

下面给出方向导数的一种物理解释. 假定 $T=f(x,y)$ 是平面内某个区域上每个点的温度，那么 $f(x_0,y_0)$ 是在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的温度，而 $(D_uf)_{P_0}$ 是在 $u$ 方向在点 $P_0$ 测出的温度的瞬时变化率

### 12.5.3 方向导数的求法与梯度

现在来建立计算可微函数 $f$ 的方向导数的有效公式. 我们从直线

$$x=x_0+su_1,\quad y=y_0+su_2 \tag{2}$$

开始，这是通过 $P_0$ 的参数化直线，用单位向量 $u=u_1i+u_2j$ 方向上增加的弧长参数 $s$. 于是

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\right)_{u,P_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \quad \text{(可微函数} f \text{的链式法则)}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}\cdot u_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}\cdot u_2 \quad \text{(由方程(2), } \mathrm{d}x/\mathrm{d}s = u_1,\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}s = u_2\text{)}$$

$$= \underbrace{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}\boldsymbol{j}\right]}_{f\text{在}P_0\text{的梯度}} \cdot \underbrace{[u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j}]}_{\text{方向}\boldsymbol{u}} \tag{3}$$

**定义** 函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的**梯度向量(梯度)**是通过计算$f$在$P_0$的偏导数得到的向量

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial f}\boldsymbol{j}$$

记号$\nabla f$读作"grad $f$"，也读作"$f$的梯度"和"del $f$". 倒三角形符号$\nabla$本身读作"del". 梯度的另外一个记号是 grad $f$，按其书写方式读音.

公式(3)说明，可微函数$f$在$\boldsymbol{u}$方向在点$P_0$的导数是$\boldsymbol{u}$和$f$在$P_0$的梯度的点积.

**定理 9（方向导数是一个点积）** 若$f(x,y)$在包含点$P_0(x_0,y_0)$的一个开区域内是可微的，则有

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\right)_{u,P_0} = (\nabla f)_{P_0}\cdot\boldsymbol{u} \tag{4}$$

这是$f$在$P_0$的梯度同$\boldsymbol{u}$的点积.

**例 2** 求$f(x,y) = xe^y + \cos(xy)$在$\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$方向在点(2,0)的导数.

**解** $\boldsymbol{v}$的方向是用$\boldsymbol{v}$的长度除$\boldsymbol{v}$后得到的单位向量：

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{\boldsymbol{v}}{5} = \frac{3}{5}\boldsymbol{i} - \frac{4}{5}\boldsymbol{j}$$

$f$的偏导数是处处连续的，$f$在(2,0)的偏导数由

$$f_x(2,0) = (e^y - y\sin(xy))_{(2,0)} = e^0 - 0 = 1$$

$$f_y(2,0) = (xe^y - x\sin(xy))_{(2,0)} = 2e^0 - 2\cdot 0 = 2$$

给出. $f$在(2,0)的梯度为

$$\nabla f|_{(2,0)} = f_x(2,0)\boldsymbol{i} + f_y(2,0)\boldsymbol{j} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$$

（见图 12.26）. 因此，$f$在$\boldsymbol{v}$方向在点$P(2, 0)$的导数为

$$(D_{\boldsymbol{u}}f)|_{(2,0)} = \nabla f|_{(2,0)}\cdot\boldsymbol{u} \quad \text{(公式(4))}$$

$$= (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j})\cdot\left(\frac{3}{5}\boldsymbol{i} - \frac{4}{5}\boldsymbol{j}\right) = \frac{3}{5} - \frac{8}{5} = -1$$

■

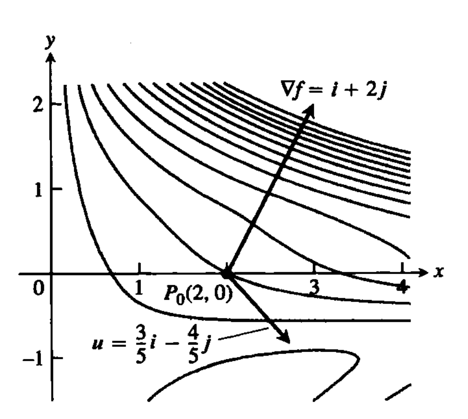



图 12.26 用图形表示$\nabla f$作为$f$定义域中的向量，在$f(x,y) = xe^y + \cos(xy)$的情形定义域是整个$xy$平面，$f$在$\boldsymbol{u} = (3/5)\boldsymbol{i} - (4/5)\boldsymbol{j}$方向上的点(2,0)的变化率是$\nabla f.\ \boldsymbol{u} = -1$（例 2）

用公式

$$D_{\boldsymbol{u}}f = \nabla f\cdot\boldsymbol{u} = |\nabla f||\boldsymbol{u}|\cos\theta = |\nabla f|\cos\theta$$

计算点积(其中$\theta$是两个向量$\boldsymbol{u}$和$\nabla f$之间的角)，揭示方向导数的下述性质.

**方向导数 $D_u f=\nabla f\cdot u=|\nabla f|\cos\theta$ 的性质**

(1) 函数$f$在 $\cos\theta=1$ 或者当 $u$ 和$\nabla f$的方向相同时增加最快. 就是说，在其定义域的每个点 $P$，函数值$f$在 $P$ 的梯度向量$\nabla f$的方向增加最快. 在这个方向的导数是

$$D_u f=|\nabla f|\cos(0)=|\nabla f|$$

(2) 同样，$f$在$-\nabla f$的方向减少最快. 在这个方向的导数是 $D_u f=|\nabla f|\cos(\pi)=-|\nabla f|$.

(3) 同梯度$\nabla f\neq 0$正交的任何方向 $u$ 是$f$变化为零的方向，因为这时的 $\theta$ 等 $\pi/2$ 且有

$$D_u f=|\nabla f|\cos(\pi/2)=|\nabla f|\cdot 0=0$$

正如我们将在后面讨论的那样，这些二维的方向导数的性质在三维时同样存在.

**例 3** 求$f(x,y)=(x^2/2)+(y^2/2)$变化的方向：

(a) $f$在点(1,1)增加最快的方向.

(b) $f$在点(1,1)减少最快的方向.

(c) $f$在点(1,1)变化为零的方向是什么？

**解**

(a) $f$在点(1,1)增加最快的方向是$\nabla f$的方向. 在这个点的梯度为

$$(\nabla f)_{(1,1)}=(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})_{(1,1)}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$$

它的方向是

$$\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}}{|\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}|}=\frac{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}$$

(b) $f$在点(1,1)减少最快的方向是$-\nabla f$的方向，这个方向是

$$-\boldsymbol{u}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}$$

(c) $f$在点(1,1)变化为零的方向是同$\nabla f$正交的方向：

$$\boldsymbol{n}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}\quad 和\quad -\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}$$

参见图 12.27. ■

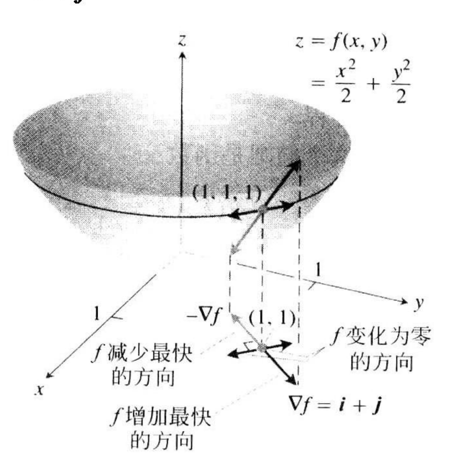



图 12.27 $f(x,y)$在点(1,1)增加最快的方向是$\nabla f|_{(1,1)}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$的方向. 它对应于曲面上在点(1,1,1)的最速上升的方向(例 3)

### 12.5.4 梯度与层曲线的切线

如果可微函数$f(x,y)$沿光滑曲线$\boldsymbol{r}=g(t)\boldsymbol{i}+h(t)\boldsymbol{j}$具有常数值$c$(使曲线成为$f$的层曲线)，那么$f(g(t),h(t))=c$. 在这个方程的两端求关于$t$的导数，导出方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(g(t),h(t))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=0\quad(链式法则)$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}\right)}_{\nabla f}\cdot\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}\right)}_{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}}=0\qquad(5)$$

方程(5)表明，$\nabla f$同切向量$\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$正交，所以它同曲线正交.

> 在可微函数 $f(x,y)$ 定义域的每个点 $(x_0,y_0)$，$f$ 的梯度同通过 $(x_0,y_0)$ 的层曲线正交(见图 12.28).

方程(5)证实我们的观察结果：地形图中河流的流向垂直于等高线(参见图 12.23). 由于下流河流将以最快的方式流向它的终点，所以它必须在方向导数性质(2)的负梯度向量方向流动. 方程(5)告诉我们这种方向同层曲线垂直.

图 12.28 可微二元函数在一点的梯度始终同函数通过那个点的层曲线正交

这个观察结果也使我们能够求层曲线的切线方程. 它们是同梯度正交的直线. 通过点 $P_0(x_0,\ y_0)$ 同向量 $\boldsymbol{N}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}$ 正交的直线具有方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$

(见习题 35). 如果 $\boldsymbol{N}$ 是梯度 $(\nabla f)_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\boldsymbol{i}+f_y(x_0,\ y_0)\boldsymbol{j}$，这个方程是由

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0 \tag{6}$$

给出的切线.

**例 4** 求椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=2$(见图 12.29)在点 $(-2,1)$ 的切线的方程.

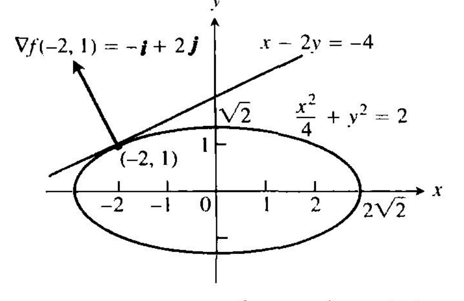



图 12.29 把椭圆 $(x^2/4)+y^2=2$ 当作函数 $f(x,y)=(x^2/4)+y^2$ 的层曲线，可以求这个椭圆的切线(例 4)

**解** 这个椭圆是函数

$$f(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2$$

的层曲线. $f$ 在点 $(-2,\ 1)$ 的梯度为

$$\nabla f|_{(-2,1)}=\left(\frac{x}{2}\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}\right)_{(-2,1)}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$$

切线是直线

$$(-1)(x+2)+(2)(y-1)=0 \qquad (\text{方程}(6))$$

$$x-2y=-4$$

■

如果已知两个函数 $f$ 和 $g$ 的梯度，我们自然知道它们的常数倍、和、差、积以及商的梯度. 在习题 36 中要求读者证实梯度运算的下述法则. 请注意，这些法则和一元函数导数的相应法则具有同样形式.

**梯度的代数运算法则**

| | |
|---|---|
| (1) 常数倍法则 | $\nabla(kf)=k\nabla f$ (任意实数 $k$) |
| (2) 和法则 | $\nabla(f+g)=\nabla f+\nabla g$ |
| (3) 差法则 | $\nabla(f-g)=\nabla f-\nabla g$ |
| (4) 积法则 | $\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$ |
| (5) 商法则 | $\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\nabla f-f\nabla g}{g^2}$ |

**例5** 我们以

$$f(x,y) = x - y \quad \nabla f = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$$
$$g(x,y) = 3y \quad \nabla g = 3\boldsymbol{j}$$

为例说明梯度代数运算法则中的两个法则：

(1)法则(3)

$$\nabla(f-g) = \nabla(x-4y) = \boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} = \nabla f - \nabla g$$

(2)法则(4)

$$\begin{aligned}\nabla(fg) &= \nabla(3xy - 3y^2) = 3y\boldsymbol{i} + (3x-6y)\boldsymbol{j} = 3y(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}) + 3y\boldsymbol{j} + (3x-6y)\boldsymbol{j} \\ &= 3y(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}) + (3x-3y)\boldsymbol{j} \\ &= 3y(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}) + (x-y)3\boldsymbol{j} = g\nabla f + f\nabla g\end{aligned}$$

■

### 12.5.5 三元函数

对于空间中的可微函数$f(x,y,z)$和单位向量$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}$，我们有

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

和

$$D_{\boldsymbol{u}} f = \nabla f \cdot \boldsymbol{u} = \frac{\partial f}{\partial x}u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}u_2 + \frac{\partial f}{\partial z}u_3$$

方向导数可以再写成

$$D_{\boldsymbol{u}} f = \nabla f \cdot \boldsymbol{u} = |\nabla f||\boldsymbol{u}|\cos\theta = |\nabla f|\cos\theta$$

的形式. 所以过去对于二元函数列出的性质仍然存在. 在任意给定的点，$f$在$\nabla f$方向增加最快而在$-\nabla f$方向减少最快. 在同$\nabla f$正交的任何方向，$f$的导数为零.

**例6**

(a)求$f(x,y,z) = x^3 - xy^2 - z$在$\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$方向在点$P_0(1,1,0)$的导数.

(b)$f$在什么方向在$P_0$的变化最快？$f$在这些方向的变化率是什么？

**解** (a)用$\boldsymbol{v}$的长度除$\boldsymbol{v}$得到$\boldsymbol{v}$的方向：

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (6)^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{2}{7}\boldsymbol{i} - \frac{3}{7}\boldsymbol{j} + \frac{6}{7}\boldsymbol{k}$$

$f$在$P_0$的偏导数为

$$f_x = (3x^2 - y^2)_{(1,1,0)} = 2, \quad f_y = -2xy|_{(1,1,0)} = -2, \quad f_z = -1|_{(1,1,0)} = -1$$

$f$在$P_0$的梯度为

$$\nabla f|_{(1,1,0)} = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$$

因此，$f$在$\boldsymbol{v}$方向在点$P_0$的导数是

$$\begin{aligned}(D_{\boldsymbol{u}} f)_{(1,1,0)} &= \nabla f|_{(1,1,0)} \cdot \boldsymbol{u} = (2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) \cdot \left(\frac{2}{7}\boldsymbol{i} - \frac{3}{7}\boldsymbol{j} + \frac{6}{7}\boldsymbol{k}\right) \\ &= \frac{4}{7} + \frac{6}{7} - \frac{6}{7} = \frac{4}{7}\end{aligned}$$

(b)函数$f$在$\nabla f = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$的方向增加最快而在$-\nabla f$的方向减少最快. 在这两个方向的变化率分别是

$$|\nabla f| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3 \quad 和 \quad -|\nabla f| = -3$$

■

## 习题 12.5

在习题 1 ~ 4 中，求函数在给定点的梯度. 然后一起画出函数通过点的梯度和层曲线的草图.

**1.** $f(x,y)=y-x$，$(2,1)$.

**2.** $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$，$(1,1)$.

**3.** $g(x,y)=y-x^2$，$(-1,0)$.

**4.** $g(x,y)=\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}$，$(\sqrt{2},1)$.

在习题 5 ~ 8 中，求函数 $f$ 在给定点的梯度 $\nabla f$.

**5.** $f(x,y,z)=x^2+y^2-2z^2+z\ln x$，$(1,1,1)$.

**6.** $f(x,y,z)=2z^3-3(x^2+y^2)z+\tan^{-1}xz$，$(1,1,1)$.

**7.** $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}+\ln(xyz)$，$(-1,2,-2)$.

**8.** $f(x,y,z)=e^{x+y}\cos z+(y+1)\sin^{-1}x$，$(0,0,\pi/6)$.

在习题 9 ~ 16 中，求函数在 $\boldsymbol{A}$ 方向在点 $P_0$ 的导数.

**9.** $f(x,y)=2xy-3y^2$，$P_0(5,5)$，$\boldsymbol{A}=4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$.

**10.** $f(x,y)=2x^2+y^2$，$P_0(-1,1)$，$\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$.

**11.** $g(x,y)=x-(y^2/x)+\sqrt{3}\sec^{-1}(2xy)$，$P_0(1,1)$，$\boldsymbol{A}=12\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}$.

**12.** $h(x,y)=\tan^{-1}(y/x)+\sqrt{3}\sin^{-1}(xy/2)$，$P_0(1,1)$，$\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$.

**13.** $f(x,y,z)=xy+yz+zx$，$P_0(1,-1,2)$，$\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$.

**14.** $f(x,y,z)=x^2+2y^2-3z^2$，$P_0(1,1,1)$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

**15.** $g(x,y,z)=3e^x\cos yz$，$P_0(0,0,0)$，$\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$.

**16.** $h(x,y,z)=\cos xy+e^{yz}+\ln zx$，$P_0(1,0,1/2)$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$.

在习题 17 ~ 22 中，求函数在点 $P_0$ 增加最快的方向和减少最快的方向. 然后求函数在这两个方向的导数.

**17.** $f(x,y)=x^2+xy+y^2$，$P_0(-1,1)$.

**18.** $f(x,y)=x^2y+e^{xy}\sin y$，$P_0(1,0)$.

**19.** $f(x,y,z)=(x/y)-yz$，$P_0(4,1,1)$.

**20.** $g(x,y,z)=xe^y+z^2$，$P_0(1,\ln 2,1/2)$.

**21.** $f(x,y,z)=\ln xy+\ln yz+\ln xz$，$P_0(1,1,1)$.

**22.** $h(x,y,z)=\ln(x^2+y^2-1)+y+6z$，$P_0(1,1,0)$.

在习题 23 ~ 26 中，一起画出给定曲线 $f(x,y)=c$ 同 $f$ 在给定点的梯度 $\nabla f$ 和切线的草图. 然后写出切线的方程.

**23.** $x^2+y^2=4$，$(\sqrt{2},\sqrt{2})$.

**24.** $x^2-y=1$，$(\sqrt{2},1)$.

**25.** $xy=-4$，$(2,-2)$.

**26.** $x^2-xy+y^2=7$，$(-1,2)$.

**27. 零方向导数** 函数 $f(x,y)=xy+y^2$ 在什么方向上在点 $P(3,2)$ 的导数为零？

**28. 零方向导数** 函数 $f(x,y)=(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$ 在什么方向上在点 $P(1,1)$ 的导数为零？

**29.** 对于函数 $f(x,y)=x^2-3xy+4y^2$，是否存在一个方向 $\boldsymbol{u}$，$f$ 在这个方向在点 $P(1,2)$ 的变化率等于 14？提出答案的理由.

**30. 沿一个圆变化的温度** 对于温度函数 $T(x,y,z)=2xy-yz$（温度以摄氏度为单位，距离以英尺为单位），是否存在一个方向 $\boldsymbol{u}$，$T$ 在这个方向上的点 $P(1,-1,1)$ 的变化率为 $-3$℃/ft？提出答案的理由.

**31.** 在点 $P_0(1,2)$，函数 $f(x,y)$ 在 $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ 方向的导数是 $2\sqrt{2}$，在 $-2\boldsymbol{j}$ 方向的导数是 $-3$. $f$ 在 $-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$ 方向的导数是什么？提出答案的理由.

**32.** 在一点 $P$，函数 $f(x,y,z)$ 在 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 方向的导数是最大的. $f$ 在这个方向的导数值为 $2\sqrt{3}$.

**(a)** $\nabla f$ 在 $P$ 的值是什么？提出答案的理由.

**(b)** 在点 $P$，$f$ 在 $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ 方向的导数是什么？

**33. 方向导数与纯量分量** 在一点 $P_0$，可微函数 $f(x,y,z)$ 在一个单位向量 $\boldsymbol{u}$ 方向的导数，同 $(\nabla f)_{P_0}$ 在 $\boldsymbol{u}$ 方向的纯量分量有何关系？提出答案的理由.

**34. 方向导数与偏导数** 假定函数 $f(x,y,z)$ 对于所需的方向导数和偏导数有定义，$D_{\boldsymbol{i}}f$，$D_{\boldsymbol{j}}f$，$D_{\boldsymbol{k}}f$ 同 $f_x$，$f_y$，$f_z$ 有何关系？提出答案的理由.

**35. $xy$ 平面内的直线** 证明：$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ 是 $xy$ 平面内通过点 $(x_0,y_0)$ 同向量 $\boldsymbol{N}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}$ 正交的直线的方程.

**36. 梯度的代数运算法则** 给定常数 $k$ 和梯度

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k},\nabla g=\frac{\partial g}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial g}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial g}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

证实这两个梯度的代数运算法则.

## 12.6 切平面与微分

在这一节，我们在空间中的光滑曲面上一点定义切平面. 然后展示如何从定义曲面的函数的偏导数求切平面的方程. 这种思想同在坐标平面内一元函数的曲线上一点的切线定义相似(见2.7节). 接下去研究多元函数的全微分和线性化.

### 12.6.1 切平面与法线

如果 $\boldsymbol{r}=g(t)\boldsymbol{i}+h(t)\boldsymbol{j}+k(t)\boldsymbol{k}$ 是在可微函数 $f(x,y,z)$ 的层曲面 $f(x,y,z)=c$ 上的光滑曲线，那么 $f(g(t),h(t),k(t))=c$. 求这个方程两端对于 $t$ 的导数，导致

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(g(t),h(t),k(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}=0 \quad \text{(链式法则)}$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)}_{\nabla f}\cdot\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\right)}_{\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t}=0 \qquad (1)$$

在沿曲线的每个点，$\nabla f$ 同曲线的速度向量正交.

此时，我们把注意力限制在通过点 $P_0$ 的曲线上(见图12.30). 在 $P_0$ 的所有速度向量在 $P_0$ 都同 $\nabla f$ 正交，所以曲线的全部切线位于通过 $P_0$ 同 $\nabla f$ 正交的平面内. 我们把这个平面称为曲面在 $P_0$ 的切平面. 通过 $P_0$ 同这个平面垂直的直线是曲面在 $P_0$ 的法线.

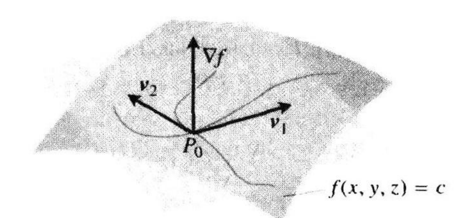



图12.30 梯度 $\nabla f$ 同曲面内通过 $P_0$ 的每条光滑曲线的速度向量正交，因此在 $P_0$ 的速度向量位于一个公共平面内，这个平面称为曲面在点 $P_0$ 的切平面

> **定义** 在可微函数 $f(x,y,z)$ 的层曲面 $f(x,y,z)=c$ 上点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的**切平面**是通过 $P_0$ 同 $\nabla f|_{P_0}$ 正交的平面.
>
> 曲面在 $P_0$ 的**法线**是通过 $P_0$ 同 $\nabla f|_{P_0}$ 平行的直线.

因此，从10.5节可知，切平面和法线具有下述方程.

> **$f(x,y,z)=c$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面**
>
> $$f_x(P_0)(x-x_0)+f_y(P_0)(y-y_0)+f_z(P_0)(z-z_0)=0 \qquad (2)$$
>
> **$f(x,y,z)=c$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的法线**
>
> $$x=x_0+f_x(P_0)t, \quad y=y_0+f_y(P_0)t, \quad z=z_0+f_z(P_0)t \qquad (3)$$

**例1** 求曲面 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z-9=0$(圆形抛物面)在点 $P_0(1,2,4)$ 的切平面和法线.

**解** 曲面的图形显示在图12.31中.

切平面是通过 $P_0$ 同 $f$ 在 $P_0$ 的梯度垂直的平面. 这个梯度是

$$\nabla f|_{P_0}=(2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})_{(1,2,4)}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

因此，切平面是平面

$$2(x-1)+4(y-2)+(z-4)=0 \quad 或 \quad 2x+4y+z=14$$

曲面在 $P_0$ 的法线是

$$x = 1 + 2t, \quad y = 2 + 4t, \quad z = 4 + t$$ ■

为了求同光滑曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$（其中 $z_0=f(x_0,y_0)$）的切平面方程，我们首先注意方程 $z=f(x,y)$ 等价于 $f(x,y)-z=0$. 因此曲面 $z=f(x,y)$ 是函数 $F(x,y,z)=f(x,y)-z$ 的零层曲面. $F$ 的偏导数为

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)-z) = f_x - 0 = f_x$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}(f(x,y)-z) = f_y - 0 = f_y$$

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}(f(x,y)-z) = 0 - 1 = -1$$

因此，层曲面在 $P_0$ 的切平面方程

$$F_x(P_0)(x-x_0) + F_y(P_0)(y-y_0) + F_z(P_0)(z-z_0) = 0$$

化为

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0$$

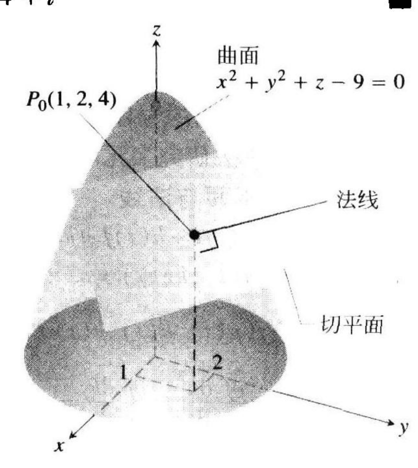


图 12.31 这个曲面在点 $P_0$ 的切平面和法线(例 1)

**曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 的切平面**

可微函数 $f(x,y)$ 的曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)=(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 的切平面是

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0 \tag{4}$$

**例 2** 求曲面 $z = x\cos y - ye^x$ 在点(0,0,0)的切平面.

**解** 首先计算 $f(x,y) = x\cos y - ye^x$ 的偏导数:

$$f_x(0,0) = (\cos y - ye^x)_{(0,0)} = 1 - 0\cdot 1 = 1$$

$$f_y(0,0) = (-x\sin y - e^x)_{(0,0)} = 0 - 1 = -1$$

再利用方程(4)求 $z=f(x,y)$ 在点(0,0,0)的切平面:

$$1\cdot(x-0) - 1\cdot(y-0) - (z-0) = 0 \quad （方程(4)）$$

或

$$x - y - z = 0$$ ■

**例 3** 曲面

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2 = 0 \quad （圆柱面）$$

和

$$g(x,y,z) = x + z - 4 = 0 \quad （平面）$$

相交于椭圆 $E$(见图 12.32). 求在点 $P_0(1,1,3)$ 同 $E$ 相切的直线的参数方程.

**解** 所求的切线在 $P_0$ 同时和 $\nabla f$ 和 $\nabla g$ 正交，因此平行于 $\boldsymbol{v}=\nabla f\times\nabla g$. $\boldsymbol{v}$ 的分量和 $P_0$ 的坐标给出切线的方程. 我们有

$$\nabla f|_{(1,1,3)} = (2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j})_{(1,1,3)} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$$

$$\nabla g|_{(1,1,3)} = (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k})_{(1,1,3)} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{v} = (2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})\times(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$$

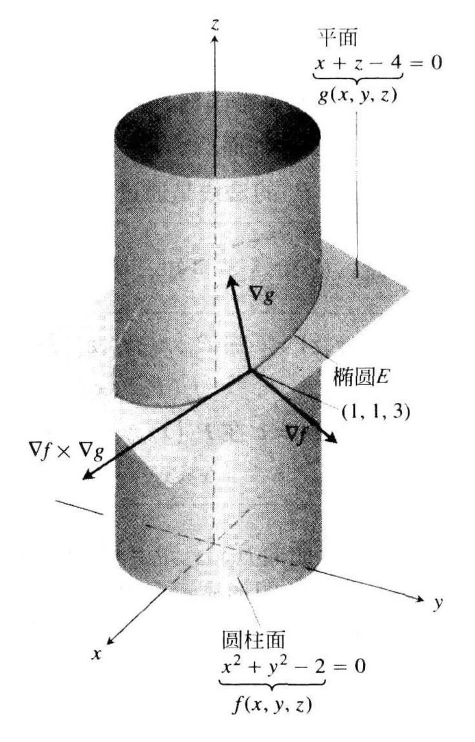


图 12.32 这个圆柱面和平面相交于椭圆 $E$(例 3)

切线的方程为

$$x = 1 + 2t, \quad y = 1 - 2t, \quad z = 3 - 2t$$ ■

### 12.6.2 估计函数在特定方向的改变

当我们在函数$f$的定义域从一点$P_0$移动一小段距离 d$s$ 到达邻近的另外一点时，如果要估计函数值有多大的改变，方向导数起着寻常导数的作用. 如果$f$是一元函数，我们有

$$df = f'(P_0)ds \quad (\text{寻常导数} \times \text{增量})$$

对于二元函数和多元函数，我们利用公式

$$df = (\nabla f|_{P_0} \cdot \boldsymbol{u})ds \quad (\text{方向导数} \times \text{增量})$$

其中$\boldsymbol{u}$是从$P_0$移动的方向.

> **估计函数$f$在方向$\boldsymbol{u}$的改变**
>
> 为了估计可微函数$f$的值从点$P_0$在特定方向$\boldsymbol{u}$移动一小段距离 d$s$ 时的改变，利用公式
>
> $$df = \underbrace{(\nabla f|_{P_0} \cdot \boldsymbol{u})}_{\text{方向导数}} \cdot \underbrace{ds}_{\text{距离增量}}$$

**例4** 对于函数

$$f(x,y,z) = y\sin x + 2yz$$

如果点$P(x,y,z)$从$P_0(0,1,0)$直接向$P_1(2,2,-2)$移动0.1个单位，估计$f$的值有多大改变.

**解** 首先求$f$在向量$\overrightarrow{P_0P_1} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$方向在点$P_0$的导数. 这个向量的方向是

$$\boldsymbol{u} = \frac{\overrightarrow{P_0P_1}}{|\overrightarrow{P_0P_1}|} = \frac{\overrightarrow{P_0P_1}}{3} = \frac{2}{3}\boldsymbol{i} + \frac{1}{3}\boldsymbol{j} - \frac{2}{3}\boldsymbol{k}$$

$f$在$P_0$的梯度为

$$\nabla f|_{(0,1,0)} = ((y\cos x)\boldsymbol{i} + (\sin x + 2z)\boldsymbol{j} + 2y\boldsymbol{k})_{(0,1,0)} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k}$$

因此，

$$\nabla f|_{P_0} \cdot \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k}) \cdot \left(\frac{2}{3}\boldsymbol{i} + \frac{1}{3}\boldsymbol{j} - \frac{2}{3}\boldsymbol{k}\right) = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$$

函数$f$的值从$P_0$在$\boldsymbol{u}$方向移动 d$s$ = 0.1 单位产生的改变 d$f$ 近似等于

$$df = (\nabla f|_{P_0} \cdot \boldsymbol{u})(ds) = \left(-\frac{2}{3}\right)(0.1) \approx -0.067 \text{ 单位}$$ ■

### 12.6.3 二元函数如何线性化

二元函数可能是很复杂的，有时我们需要用较为简单的函数替代它们，使其在特定的应用问题中给出所需的精度而在处理上不至于出现很大困难. 在这件事情上，我们采用的方法同求一元函数的线性替代(3.10节)相似.

假定要替代的函数是$z = f(x,y)$，并且要求替代在一点$(x_0,y_0)$的邻域是有效的，在这个点，我们知道$f$, $f_x$和$f_y$的值，而且$f$是可微的. 如果从点$(x_0,y_0)$按增量$\Delta x = x - x_0$和$\Delta y = y - y_0$移动到任意点$(x,y)$，那么由12.3节的可微性定义，给出函数的改变

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

其中当$\Delta x,\Delta y \to 0$时，$\varepsilon_1,\varepsilon_2 \to 0$. 如果增量$\Delta x$和$\Delta y$很小，乘积$\varepsilon_1\Delta x$和$\varepsilon_2\Delta y$必然更小，并且有

$$f(x,y) \approx \underbrace{f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)}_{L(x,y)}$$

换句话说，只要$\Delta x$和$\Delta y$是很小的，$f$将近似具有线性函数$L$的同样值. 如果$f$是难于利用的，

而我们的计算允许带有误差，那么可以用 $L$ 作为 $f$ 的近似值(见图 12.33).

> **定义** 函数 $f(x,y)$ 在 $f$ 是可微的一点 $(x_0,y_0)$ 的**线性化**是函数
> $$L(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \tag{5}$$
> 逼近
> $$f(x,y)\approx L(x,y)$$
> 是 $f$ 在 $(x_0,y_0)$ 的**标准线性逼近**.

从方程(4)看出，平面 $z=L(x,y)$ 同曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 相切. 因此，二元函数的线性化是一种*切平面*逼近，同一元函数的线性化是*切线*逼近的方法一样.

用可微函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 的线性化 $L(x,y)$ 逼近 $f$ 时，一个重要问题是逼近可以达到何等精度.

如果在以 $(x_0,y_0)$ 为中心的一个矩形区域 $R$ 上(见图 12.34)可以求出 $|f_{xx}|$，$|f_{yy}|$ 和 $|f_{xy}|$ 的一个公共上界 $M$，那么可以用一个简单公式(在 12.9 节中推导)限定在整个区域 $R$ 上的误差 $E$. 这个**误差**由 $E(x,y)=f(x,y)-L(x,y)$ 定义.

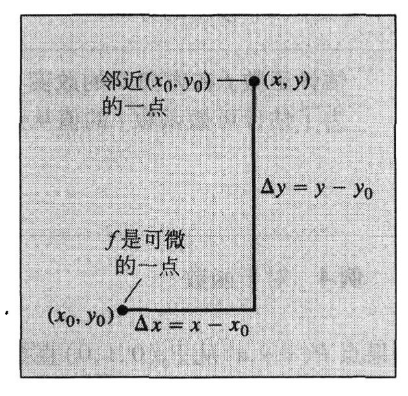



图 12.33 如果 $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 是可微的，那么 $f$ 在邻近的任何点 $(x,y)$ 的值近似等于 $f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$

> **标准线性逼近的误差**
>
> 如果函数 $f(x,y)$ 在一个包含以点 $(x_0,y_0)$ 为中心的矩形 $R$ 的整个开集上存在一阶和二阶偏导数，并且 $M$ 是 $|f_{xx}|$，$|f_{yy}|$ 和 $|f_{xy}|$ 的值在 $R$ 上的任意上界，那么在 $R$ 上用 $f(x,y)$ 的线性化
> $$L(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$
> 替代 $f$ 引起的误差 $E(x,y)$ 满足不等式
> $$|E(x,y)|\leqslant\frac{1}{2}M(|x-x_0|+|y-y_0|)^2$$

对于给定的 $M$，为了使 $|E(x,y)|$ 成为很小的量，必须使 $|x-x_0|$ 和 $|y-y_0|$ 是很小的量.

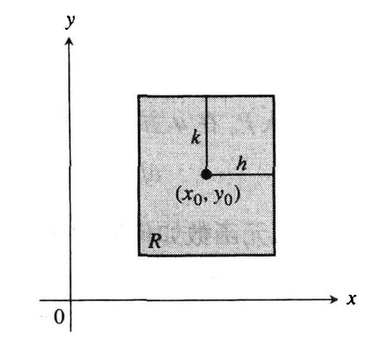



图 12.34 $xy$ 平面内的矩形区域 $R$: $|x-x_0|\leqslant h$, $|y-y_0|\leqslant k$

### 12.6.4 微分

从 3.10 节回忆一下，对于一元函数 $y=f(x)$，当 $x$ 从 $a$ 改变到 $a+\Delta x$ 时，我们用

$$\Delta f=f(a+\Delta x)-f(a)$$

定义 $f$ 的改变，并且把 $f$ 的微分定义为

$$\mathrm{d}f=f'(a)\Delta x$$

现在来考察二元函数. 假定 $f(x,y)$ 是可微函数，它在点 $(x_0,y_0)$ 的偏导数存在. 如果从点 $(x_0,y_0)$ 移动到邻近的点 $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$，$f$ 的改变是

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

利用记号 $x-x_0=\Delta x$ 和 $y-y_0=\Delta y$，从 $L(x,y)$ 的定义直接计算，显示 $L$ 的相应改变为

$$\Delta L = L(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - L(x_0, y_0)$$
$$= f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y$$

**微分** $dx$ 和 $dy$ 是自变量，所以它们可以被赋予任何值. 通常我们取 $dx=\Delta x = x-x_0$，$dy=\Delta y = y-y_0$. 于是，我们有下述 $f$ 的微分定义或者全微分定义.

> **定义**　如果从点 $(x_0,y_0)$ 移动到邻近的点 $(x_0+dx, y_0+dy)$，在函数 $f(x,y)$ 的线性化中产生的改变
>
> $$df = f_x(x_0,y_0)dx + f_y(x_0,y_0)dy$$
>
> 称为 **$f$ 的全微分**.

**例 5**　一家公司制造正圆柱形的糖浆贮存罐，罐体的高度为 25 英尺，半径为 5 英尺. 那么贮存罐的体积对于高度和半径的微小改变有多大的敏感度？

**解**　用体积公式 $V=\pi r^2 h$，全微分给出体积改变的近似值为

$$dV = V_r(5,25)dr + V_h(5,25)dh = (2\pi rh)_{(5,25)}dr + (\pi r^2)_{(5,25)}dh = 250\pi\, dr + 25\pi\, dh$$

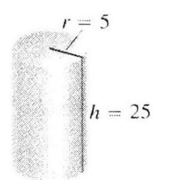
因此，半径 $r$ 的 1 单位改变将使体积产生约 $250\pi$ 单位的改变，高度 $h$ 的 1 单位改变将使体积产生约 $25\pi$ 单位的改变. 贮存罐的体积对于 $r$ 微小改变的敏感度是对于 $h$ 同样微小改变的敏感度的 10 倍. 作为承担质量控制的工程师，所关心的是保证贮存罐具有正确的体积，因此需要特别注意贮存罐半径的精度.

相反，如果把 $r$ 和 $h$ 的值颠倒过来，取 $r=25$，$h=5$，那么 $V$ 的全微分变成

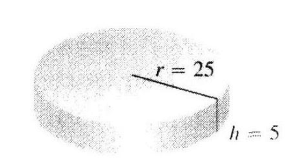
$$dV = (2\pi rh)_{(25,5)}dr + (\pi r^2)_{(25,5)}dh$$
$$= 250\pi\, dr + 625\pi\, dh$$

这时体积对于 $h$ 的变化比对于 $r$ 的变化具有更大的敏感度(见图 12.35).

一般的规律是函数对于产生最大偏导数的变量的微小改变具有最高的敏感度. ■




a) 圆柱体的体积对于 $r$ 的微小改变比对于 $h$ 同样的微小改变具有更大的敏感度




b) 圆柱体的体积对于 $h$ 的微小改变比对于 $r$ 的同样微小改变具有更大的敏感度

图 12.35　圆柱体体积对于高度和半径微小改变的敏感度

## 12.6.5　多于两个变量的函数

对于多于两个变量的可微函数，存在类似的结果.

(1) 函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的**线性化**为

$$L(x,y,z) = f(P_0) + f_x(P_0)(x-x_0) + f_y(P_0)(y-y_0) + f_z(P_0)(z-z_0)$$

(2) 假定 $R$ 是以 $P_0$ 为中心的闭长方体，它位于一个开区域内，$f$ 在区域上的二阶偏导数是连续的. 同时假定在整个 $R$ 上 $|f_{xx}|$，$|f_{yy}|$，$|f_{zz}|$，$|f_{xy}|$，$|f_{xz}|$ 和 $|f_{yz}|$ 全部小于或等于 $M$. 那么用 $L$ 逼近 $f$ 的**误差** $E(x,y,z)=f(x,y,z)-L(x,y,z)$ 在整个 $R$ 上以不等式

$$|E| \leq \frac{1}{2}M(|x-x_0|+|y-y_0|+|z-z_0|)^2$$

为界.

(3) 如果 $f$ 的二阶偏导数是连续的，并且 $x,y,z$ 从 $x_0,y_0,z_0$ 改变微小的量 $dx,dy,dz$，那么**全微分**

$$df = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy + f_z(P_0)dz$$

对 $f$ 产生的改变给出满意的逼近.

**例 6**　求函数

$$f(x,y,z) = x^2 - xy + 3\sin z$$

在点$(x_0,y_0,z_0)=(2,1,0)$的线性化$L(x,y,z)$. 然后在矩形区域

$$R:\quad |x-2|\leqslant 0.01,\ |y-1|\leqslant 0.02,\ |z|\leqslant 0.01$$

上求用$L$替代$f$所产生误差的一个上界.

**解** 例行计算给出

$$f(2,1,0)=2,\quad f_x(2,1,0)=3,\quad f_y(2,1,0)=-2,\quad f_z(2,1,0)=3$$

因此,

$$L(x,y,z) = 2+3(x-2)+(-2)(y-1)+3(z-0) = 3x-2y+3z-2$$

由于

$$f_{xx}=2,\quad f_{yy}=0,\quad f_{zz}=-3\sin z,\quad f_{xy}=-1,\quad f_{xz}=0,\quad f_{yz}=0$$

我们可以有把握地取 $\max|-3\sin z|=3$ 作为$M$. 因此，在$R$上用$L$替代$f$引起的误差满足

$$|E|\leqslant \frac{1}{2}(3)(0.01+0.02+0.01)^2 = 0.0024$$

■

## 习题 12.6

在习题 1 ~ 8 中，在给定曲面上的点$P_0$，(a)求切平面的方程；(b)求法线的方程.

1. $x^2+y^2+z^2=3$，$P_0(1,1,1)$.
2. $x^2+y^2-z^2=18$，$P_0(3,5,-4)$.
3. $2z-x^2=0$，$P_0(2,0,2)$.
4. $x^2+2xy-y^2+z^2=7$，$P_0(1,-1,3)$.
5. $\cos\pi x-x^2y+e^{xz}+yz=4$，$P_0(0,1,2)$
6. $x^2-xy-y^2-z=0$，$P_0(1,1,-1)$.
7. $x+y+z=1$，$P_0(0,1,0)$.
8. $x^2+y^2-2xy-x+3y-z=-4$，$P_0(2,-3,18)$.

在习题 9 ~ 12 中，求在给定点同给定曲面相切的平面的方程.

9. $z=\ln(x^2+y^2)$，$(1,0,0)$.
10. $z=e^{-(x^2+y^2)}$，$(0,0,1)$.
11. $z=\sqrt{y-x}$，$(1,2,1)$.
12. $z=4x^2+y^2$，$(1,1,5)$.

在习题 13 ~ 18 中，求在给定点同两个曲面的相交曲线相切的切线的参数方程.

13. 曲面：$x+y^2+2z=4$；$x=1$.
    点：$(1,1,1)$.
14. 曲面：$xyz=1$；$x^2+2y^2+3z^2=6$.
    点：$(1,1,1)$.
15. 曲面：$x^2+2y+2z=4$；$y=1$.
    点：$(1,1,1/2)$.
16. 曲面：$x+y^2+z=2$；$y=1$.
    点：$(1/2,1,1/2)$.
17. 曲面：$x^3+3x^2y^2+y^3+4xy-z^2=0$；$x^2+y^2+z^2=11$.
    点：$(1,1,3)$.
18. 曲面：$x^2+y^2=4$；$x^2+y^2-z=0$.
    点：$(\sqrt{2},\sqrt{2},4)$.
19. 对于函数
    $$f(x,y,z)=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
    如果坐标点$P(x,y,z)$从$P_0(3,4,12)$在$3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$的方向移动一段$ds=0.1$单位的距离，函数值的改变大约是多少?
20. 对于函数
    $$f(x,y,z)=e^x\cos yz$$
    如果坐标点$P(x,y,z)$从原点在$2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$的方向移动一段$ds=0.1$单位的距离，函数值的改变大约是多少?
21. 对于函数
    $$g(x,y,z)=x+x\cos z-y\sin z+y$$
    如果坐标点$P(x,y,z)$从$P_0(2,-1,0)$朝$P_1(0,1,2)$移动一段$ds=0.2$单位的距离，函数值的改变大约是多少?
22. 对于函数
    $$h(x,y,z)=\cos(\pi xy)+xz^2$$
    如果坐标点$P(x,y,z)$从$P_0(-1,-1,-1)$朝原点移动一段$ds=0.1$单位的距离，函数值的改变大约是多少?
23. **沿圆周的温度变化** 假定$xy$平面内在点$(x,y)$的摄氏温度为$T(x,y)=x\sin 2y$，并且$xy$平面内的距离以米为度量单位. 一个质点围绕圆心在原点半径为 1 m 的圆周依顺时针方向以恒速 2 m/s 运动.
    (a)质点在点$P(1/2,\sqrt{3}/2)$经受的温度改变是多少摄氏度每米?
    (b)质点在点$P$经受的温度改变是多少摄氏度每秒?
24. **沿空间曲线的温度变化** 假定一个空间区域的摄氏温度由$T(x,y,z)=2x^2-xyz$给出. 在这个

区域运动的质点在时间 $t$ 的位置由 $x=2t^2, y=3t, t=-t^2$ 给定，其中时间以秒和距离以米为度量单位.

(a) 质点在点 $P(8,6,-4)$ 经受的温度改变是多少摄氏度每米？

(b) 质点在点 $P$ 经受的温度改变是多少摄氏度每秒？

在习题 25 ~ 30 中，求函数在每点的线性化 $L(x,y)$.

**25.** $f(x,y)=x^2+y^2+1$ 在(a)$(0,0)$，(b)$(1,1)$.

**26.** $f(x,y)=(x+y+2)^2$ 在(a)$(0,0)$，(b)$(1,2)$.

**27.** $f(x,y)=3x-4y+5$ 在(a)$(0,0)$，(b)$(1,1)$.

**28.** $f(x,y)=x^3y^4$ 在(a)$(1,1)$，(b)$(0,0)$.

**29.** $f(x,y)=e^x\cos y$ 在(a)$(0,0)$，(b)$(0,\pi/2)$.

**30.** $f(x,y)=e^{2y-x}$在(a)$(0,0)$，(b)$(1,2)$.

在习题 31 ~ 36 中，求函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0$ 的线性化 $L(x,y)$. 然后，对于在矩形区域 $R$ 上的线性化逼近 $f(x,y)\approx L(x,y)$ 的误差值 $|E|$，求一个上界.

**31.** $f(x,y)=x^2-3xy+5$ 在点 $P_0(2,1)$；
$R$: $|x-2|\leqslant 0.1$，$|y-1|\leqslant 0.1$.

**32.** $f(x,y)=(1/2)x^2+xy+(1/4)y^2+3x-3y+4$ 在点 $P_0(2,2)$；
$R$: $|x-2|\leqslant 0.1$，$|y-2\leqslant 0.1$.

**33.** $f(x,y)=1+y+x\cos y$ 在点 $P_0(0,0)$；
$R$: $|x|\leqslant 0.2$，$|y|\leqslant 0.2$.
(在估计 $E$ 时利用 $|\cos y|\leqslant 1$ 和 $|\sin y|\leqslant 1$.)

**34.** $f(x,y)=xy^2+y\cos(x-1)$ 在点 $P_0(1,2)$；
$R$: $|x-1|\leqslant 0.1$，$|y-2|\leqslant 0.1$.

**35.** $f(x,y)=e^x\cos y$ 在点 $P_0(0,0)$；
$R$: $|x|\leqslant 0.1$，$|y|\leqslant 0.1$.
(在估计 $E$ 时利用 $e^x\leqslant 1.11$ 和 $|\cos y|\leqslant 1$.)

**36.** $f(x,y)=\ln x+\ln y$ 在点 $P_0(1,1)$；
$R$: $|x-1|\leqslant 0.2$，$|y-1|\leqslant 0.2$.

在习题 37 ~ 42 中，求函数 $f(x,y,z)$ 在给定点的线性化 $L(x,y,z)$.

**37.** $f(x,y,z)=xy+yz+xz$ 在点：
(a)$(1,1,1)$； (b)$(1,0,0)$；
(c)$(0,0,0)$.

**38.** $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在点：
(a)$(1,1,1)$； (b)$(0,1,0)$；
(c)$(1,0,0)$.

**39.** $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$在点：
(a)$(1,0,0)$； (b)$(1,1,0)$；
(c)$(1,2,2)$.

**40.** $f(x,y,z)=(\sin xy)/z$ 在点：
(a)$(\pi/2,1,1)$；(b)$(2,0,1)$.

**41.** $f(x,y,z)=e^x+\cos(y+z)$在点：
(a)$(0,0,0)$； (b)$\left(0,\frac{\pi}{2},0\right)$；
(c)$\left(0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.

**42.** $f(x,y,z)=\tan^{-1}(xyz)$在点：
(a)$(1,0,0)$； (b)$(1,1,0)$；
(c)$(1,1,1)$.

在习题 43 ~ 46 中，求函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0$ 的线性化 $L(x,y,z)$. 然后，对于矩形区域 $R$ 上的线性化逼近 $f(x,y,z)\approx L(x,y,z)$ 的误差值 $|E|$，求一个上界.

**43.** $f(x,y,z)=xz-3yz+2$ 在点 $P_0(1,1,2)$；
$R$: $|x-1|\leqslant 0.01$，$|y-1|\leqslant 0.01$，
$|z-2|\leqslant 0.02$.

**44.** $f(x,y,z)=x^2+xy+yz+(1/4)z^2$ 在点 $P_0(1,1,2)$；
$R$: $|x-1|\leqslant 0.01$，$|y-1|\leqslant 0.01$，
$|z-2|\leqslant 0.08$.

**45.** $f(x,y,z)=xy+2yz-3xz$ 在点 $P_0(1,1,0)$；
$R$: $|x-1|\leqslant 0.01$，$|y-1|\leqslant 0.01$，
$|z|\leqslant 0.01$.

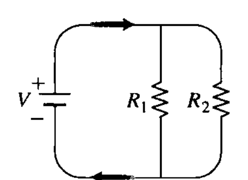
**46.** $f(x,y,z)=\sqrt{2}\cos x\sin(y+z)$在点 $P_0(0,0,\pi/4)$；
$R$: $|x|\leqslant 0.01$，$|y|\leqslant 0.01$，
$|z-\pi/4|\leqslant 0.01$.

**47. 估计最大误差** 假定 $T$ 是从公式 $T=x(e^y+e^{-y})$求出的值，其中 $x$ 和 $y$ 取 2 和 $\ln 2$ 的最大可能误差分别是 $|dx|=0.1$ 和 $|dy|=0.02$. 估计在计算 $T$ 值时的最大可能误差.

**48. 电阻的变化** 由电阻为 $R_1$ 和 $R_2$ 欧姆的电阻器并联(参见附图)产生的电阻 $R$，可以用公式

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

计算.




(a) 证明

$$dR=\left(\frac{R}{R_1}\right)^2 dR_1+\left(\frac{R}{R_2}\right)^2 dR_2$$

(b) 假定你设计出由附图所示的两个电阻器的并联电路，其中 $R_1=100$ 欧姆，$R_2=400$ 欧姆. 但是在制造中电阻总会有某些改变，由厂商

提供的电阻器不可能达到这两个准确的电阻值. 电路的电阻值 $R$ 对于 $R_1$ 和 $R_2$ 中哪一个改变的敏感度更大? 提出答案的理由.

**49.** 假定你打算通过测量细长矩形的长度和宽度来计算矩形的面积. 你应该对长度和宽度中哪一个尺寸的测量更加关注? 提出答案的理由.

**50.** (a) 函数 $f(x,y)=x^2(y+1)$ 在点 $(1,0)$ 周围的函数值对 $x$ 改变的敏感度大还是对 $y$ 改变的敏感度大? 提出答案的理由.

(b) $dx$ 对 $dy$ 的什么比值将使 $df$ 在点 $(1,0)$ 的值为零?

**51. 2×2 行列式的值** 对于行列式

$$f(a,b,c,d)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

如果 $|a|$ 的值比 $|b|,|c|,|d|$ 的值大得多, 行列式的值对于 $a,b,c,d$ 中哪一个的值最敏感? 提出答案的理由.

**52. 威尔逊批量公式** 经济学中的威尔逊批量公式说明, 对于商店而言, 订购货物(无线电设备, 鞋子, 扫帚, 等等)最为节省的订购量 $Q$ 由公式 $Q=\sqrt{2KM/h}$ 给出, 其中 $K$ 是提出的订单的价格, $M$ 是每周销售商品的数量, $h$ 是每件商品每周的保管费用(包括占用空间、公共设施、安全等在内的费用). $Q$ 在点 $(K_0,M_0,h_0)=(2,20,0.05)$ 附近对于变量 $K,M$ 和 $h$ 中的哪一个是最敏感的? 提出答案的理由.

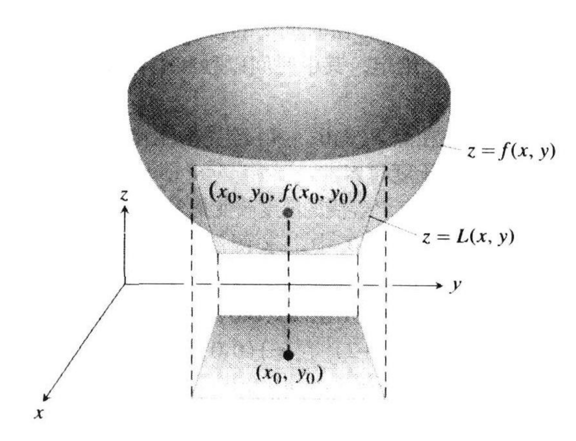
**53. $f(x,y)$ 的线性化是切平面逼近** 证明: 在由可微函数 $f$ 定义的曲面 $z=f(x,y)$ 上, 在点 $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 的切平面是平面

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-f(x_0,y_0))=0$$

或者

$$z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

因此, 在 $P_0$ 的这个切平面是 $f$ 在 $P_0$ 的线性化的图形(参见附图).




**54. 函数沿圆的渐伸线的改变** 求函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在曲线

$$\boldsymbol{r}(t)=(\cos t+t\sin t)\boldsymbol{i}+(\sin t-t\cos t)\boldsymbol{j},\quad t>0$$

的单位切向量方向的导数.

**55. 函数沿螺旋线的改变** 求函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在螺旋线

$$\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$$

的单位切向量方向在点 $t=-\pi/4$, 0, $\pi/4$ 的导数. 函数 $f$ 给出螺旋线上从一点 $P(x,y,z)$ 到原点的距离的平方. 这里计算的导数给出当 $P$ 经过点 $t=-\pi/4$, 0, $\pi/4$ 移动时这个距离平方对于 $t$ 在这些点的变化率.

**56. 正规曲线** 一条光滑曲线对曲面 $f(x,y,z)=c$ 在一个相交点是*正规的*, 如果曲线的速度向量等于曲面在这一点的梯度 $\nabla f$ 的非零纯量倍数.

证明: 曲线

$$\boldsymbol{r}(t)=\sqrt{t}\boldsymbol{i}+\sqrt{t}\boldsymbol{j}-\frac{1}{4}(t+3)\boldsymbol{k}$$

当 $t=1$ 时是对曲面 $x^2+y^2-z=3$ 的正规曲线.

**57. 切曲线** 一条光滑曲线是对曲面 $f(x,y,z)=c$ 在一个交点*切曲线*, 如果曲线的速度向量同曲面在这一点的梯度 $\nabla f$ 是正交的.

证明: 曲线

$$\boldsymbol{r}(t)=\sqrt{t}\boldsymbol{i}+\sqrt{t}\boldsymbol{j}+(2t-1)\boldsymbol{k}$$

当 $t=1$ 时是对曲面 $x^2+y^2-z=1$ 的切曲线.

## 12.7 极值与鞍点

二元连续函数在闭有界定义域上存在极值(参见图 12.36 和图 12.37). 我们从这一节看出, 通过检查函数的一阶偏导数, 可以缩小这些极值的寻找范围. 二元函数的极值只可能出现在定义域的边界点或两个一阶偏导数同时为零的定义域的内点, 或者出现在一个或两个一阶偏导数不存在的点. 但是, 这两个偏导数在一个内点 $(a,b)$ 为零并非总是预示着存在极值. 作为函数图形的曲面可能在 $(a,b)$ 的正上方成为像马鞍的形状, 并且在那里穿过它的切平面.

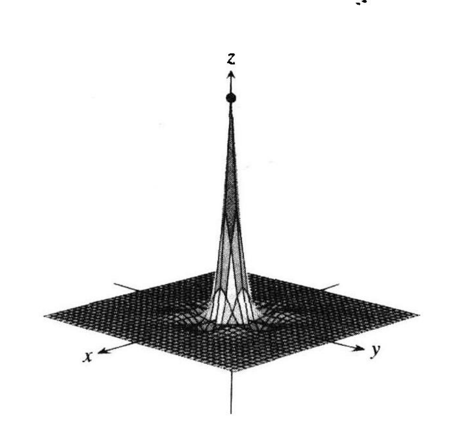



图 12.36 函数 $z=(\cos x)(\cos y)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$ 在正方形区域 $|x|\leqslant 3\pi/2$，$|y|\leqslant 3\pi/2$ 上有一个极大值 1 和一个约为 $-0.067$ 的极小值

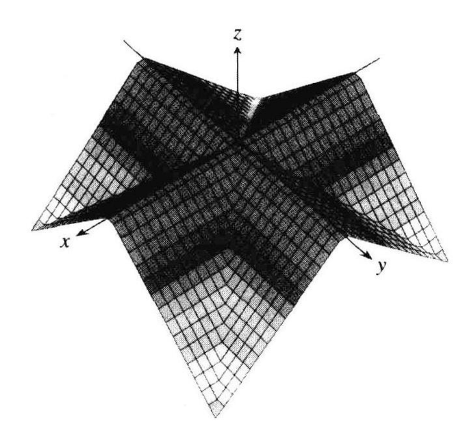



图 12.37 从点(10,15,20)看到的"屋顶曲面" $z=\frac{1}{2}(||x|-|y||-|x|-|y|)$ 这个定义函数在正方形区域 $|x|\leqslant a$，$|y|\leqslant a$ 上有一个极大值 0 和一个极小值 $-a$

### 12.7.1 局部极值导数检验法

为了求一元函数的局部极值，寻找函数图形中具有水平切线的点. 然后，在这样的点中寻找局部极大值、局部极小值和拐点. 对于二元函数 $f(x, y)$，寻找曲面 $z=f(x, y)$ 具有水平切平面的点，然后，在这样的点中寻找局部极大值、局部极小值和鞍点. 我们从定义极大值和极小值开始讨论局部极值的导数检验法.

> **定义** 假设 $f(x,y)$ 是在包含点 $(a,b)$ 的区域 $R$ 上定义的. 那么
>
> **(1)** $f(a,b)$ 是 $f$ 的一个**局部极大值**，如果 $f(a,b)\geqslant f(x,y)$ 对于定义域中以点 $(a,b)$ 为中心的一个开圆盘内的所有点 $(x,y)$ 成立.
>
> **(2)** $f(a,b)$ 是 $f$ 的一个**局部极小值**，如果 $f(a,b)\leqslant f(x,y)$ 对于定义域中以点 $(a,b)$ 为中心的一个开圆盘内的所有点 $(x,y)$ 成立.

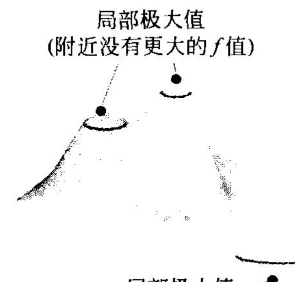



图 12.38 一个局部极大值是一个"山顶"，一个局部极小值是一个"谷底"

局部极大值对应于曲面 $z=f(x,y)$ 上的"山顶"，局部极小值对应于曲面的"谷底"(见图 12.38). 在这样的点，曲面的切平面(如果存在)是横向的. 局部极值也称为**相对极值**.

正如一元函数的情形，确定局部极值的关键是用一阶导数检验法.

**人物传记**

西门 · 丹尼斯 · 泊松
(siméon-Denis Poisson，1781—1840)

> **定理 10（局部极值的一阶导数检验法）** 若函数 $f(x,y)$ 在其定义域的一个内点 $(a,b)$ 有局部极大值或者局部极小值，且在那里存在一阶偏导数，则 $f_x(a,b)=0$，$f_y(a,b)=0$.

**证明** 如果$f(x,y)$在点$(a,b)$有一个局部极值，那么函数$g(x)=f(x,b)$在$x=a$有一个局部极值(见图12.39). 因此，$g'(a)=0$(第4章定理2). 当前$g'(a)=f_x(a,b)$，所以$f_x(a,b)=0$. 对函数$h(y)=f(a,y)$作同样的论证，证明$f_y(a,b)=0$. ■

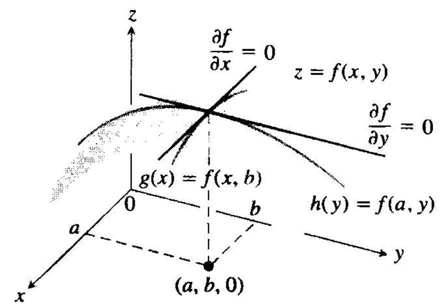



图 12.39 如果$f(x,y)$的局部极大值出现在$x=a$，$y=b$，那么一阶偏导数$f_x(a,b)$和$f_y(a,b)$均为零

如果对于曲面$z=f(x,y)$在点$(a,b)$的切平面方程

$$f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)-(z-f(a,b))=0$$

代入值$f_x(a,b)=0$和$f_y(a,b)=0$，那么方程化简成

$$0\cdot(x-a)+0\cdot(y-b)-z+f(a,b)=0$$

或者

$$z=f(a,b)$$

因此，定理10说明，曲面在取局部极值的点确实有水平切平面，只要那里存在切平面.

> **定义** 在函数$f(x,y)$的定义域内，$f_x$和$f_y$均为零的内点，或者$f_x$和$f_y$之一不存在或两者都不存在的内点，是$f$的**临界点**.

定理10说明，函数$f(x,y)$可能取极值的点只能是临界点和边界点. 同一元可微函数的情形一样，并非在每个临界点都会出现极值. 一元可微函数可能有拐点. 二元可微函数可能有鞍点.

> **定义** 可微函数$f(x,y)$在临界点$(a,b)$有一个**鞍点**，如果在以点$(a,b)$为中心的每个开圆盘内，存在定义域的点$(x,y)$满足$f(x,y)>f(a,b)$，也存在定义域的点$(x,y)$满足$f(x,y)<f(a,b)$. 曲面$z=f(x,y)$上对应的点$(a,b,f(a,b))$称为曲面的鞍点(见图12.40).

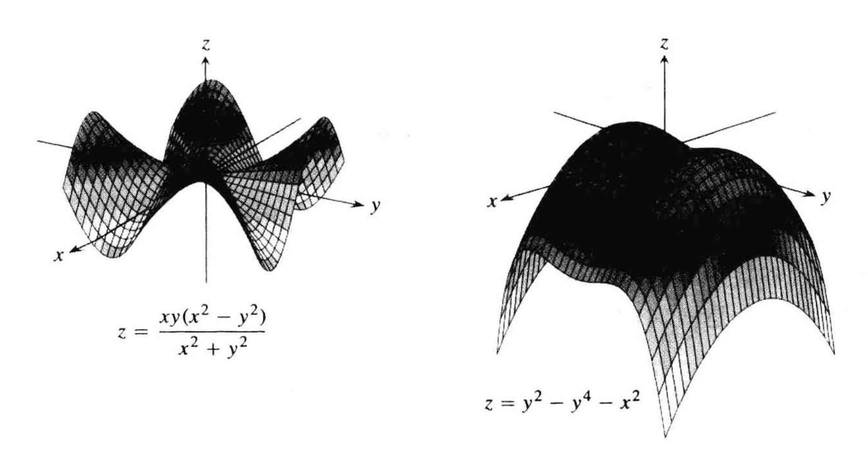
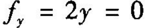



图 12.40 在原点的鞍点

**例1** 求$f(x,y)=x^2+y^2$的局部极值.

**解** 函数$f$的定义域是整个$xy$平面(所以没有边界点)，并且处处存在偏导数$f_x=2x$和$f_y=2y$. 因此，局部极值只可能出现在



$$f_x = 2x = 0 \quad 和 \quad f_y = 2y = 0$$

的点. 这种点唯一的可能是原点. 由于 $f$ 不可能取负值, 我们看出原点给出函数的局部极小值(见图 12.41). ■

**例 2** 求 $f(x,y) = y^2 - x^2$ 的局部极值(如果存在).

**解** $f$ 的定义域是整个 $xy$ 平面(所以没有边界点), 并且处处存在偏导数 $f_x = -2x$ 和 $f_y = 2y$. 因此, 局部极值只可能出现在原点 $(0,0)$. 但是, 沿正 $x$ 轴, 函数 $f$ 具有值 $f(x,0) = -x^2 < 0$; 沿正 $y$ 轴, $f$ 具有值 $f(0,y) = y^2 > 0$. 因此, 在 $xy$ 平面内以 $(0,0)$ 为中心的每个开圆盘内, 包含函数取正值的点和取负值的点. 函数在原点有一个鞍点(见图 12.42)而不是取局部极值. 由此我们得出结论, 函数 $f$ 没有局部极值. ■

在 $R$ 的一个内点 $(a,b)$, $f_x = f_y = 0$ 不能保证 $f$ 在那里具有局部极值. 但是, 如果 $f$ 及其一阶偏导数和二阶偏导数在 $R$ 上连续, 我们可能从将在 12.9 节证明的下述定理中知道更多结果.

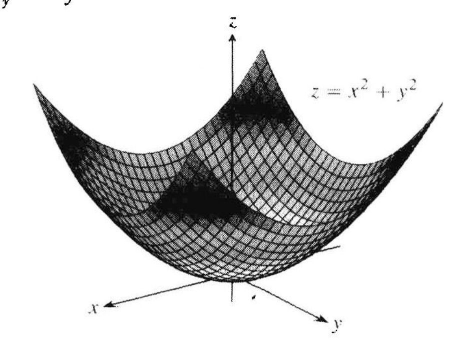



图 12.41 函数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 的图形是抛物面 $z = x^2 + y^2$; 函数在原点有局部极小值 0(例 1)

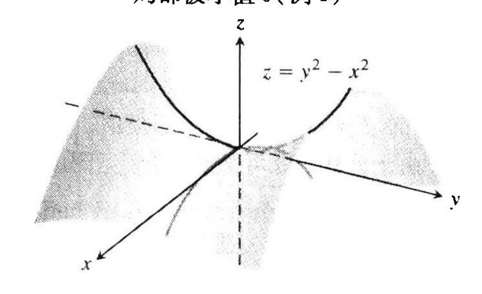



图 12.42 原点是函数 $f(x,y) = y^2 - x^2$ 的鞍点; $f$ 不存在局部极值(例 2)

**定理 11 (局部极值二阶导数检验法)** 假定 $f(x,y)$ 及其一阶偏导数和二阶偏导数在以点 $(a,b)$ 为中心的一个圆盘上是连续的, 并且 $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$. 那么

(i) 若在点 $(a,b)$ 有 $f_{xx} < 0$ 和 $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$, 则 $f$ 在 $(a,b)$ 有**局部极大值**.

(ii) 若在点 $(a,b)$ 有 $f_{xx} > 0$ 和 $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$, 则 $f$ 在 $(a,b)$ 有**局部极小值**.

(iii) 若在点 $(a,b)$ 有 $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$, 则 $f$ 在 $(a,b)$ 有**鞍点**.

(iv) 若在点 $(a,b)$ 有 $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$, 则**检验法无结果**. 在这种情形, 我们必须寻求某种其他方法确定 $f$ 在 $(a,b)$ 的特性.

表达式 $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ 称为函数 $f$ 的**判别式或黑塞式**. 这个表达式有时写成行列式

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

的形式, 更容易记忆.

定理 11 说明, 如果判别式在点 $(a,b)$ 为正值, 那么曲面在所有方向以同样的方式弯曲: 若 $f_{xx} < 0$, 曲面向下弯曲, 导致局部极大值; 若 $f_{xx} > 0$, 曲面向上弯曲, 导致局部极小值. 另一方面, 如果判别式在点 $(a, b)$ 为负值, 那么曲面在某些方向向上弯曲, 而在其他方向向下弯曲, 所以出现鞍点.

**例 3** 求函数

$$f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$$

的局部极值.

**解**　函数是对所有 $x$ 和 $y$ 定义的和可微的，它的定义域没有边界点. 因此，函数仅在 $f_x$ 和 $f_y$ 同时为零的点有极值. 由此导出

$$f_x = y - 2x - 2 = 0,\quad f_y = x - 2y - 2 = 0$$

或者

$$x = y = -2$$

所以，点 $(-2,-2)$ 是 $f$ 可能取极值的唯一点. 为了看出是否如此，我们计算二阶偏导数：

$$f_{xx} = -2,\quad f_{yy} = -2,\quad f_{xy} = 1$$

$f$ 在点 $(a,b)=(-2,-2)$ 的判别式是

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (-2)(-2) - (1)^2 = 4 - 1 = 3$$

二阶偏导数的组合

$$f_{xx} < 0 \quad 和 \quad f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

告诉我们，$f$ 在点 $(-2,-2)$ 有局部极大值. $f$ 在这一点的值为 $f(-2,-2)=8$. ■

**例 4**　求 $f(x,y)=xy$ 的局部极值.

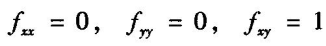
**解**　由于 $f$ 是处处可微的函数(见图 12.43)，它只能在

$$f_x = y = 0 \quad 和 \quad f_y = x = 0$$

的点取极值. 因此，原点是 $f$ 可能取极值的唯一点. 为了看清函数在原点的特性，我们计算二阶偏导数：

图 12.43　曲面 $z=xy$ 在原点存在鞍点(例 4)





$$f_{xx} = 0,\quad f_{yy} = 0,\quad f_{xy} = 1$$

$f$ 在原点的判别式

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -1$$

为负值. 所以函数在原点 $(0,0)$ 存在鞍点. 我们得出 $f(x,y)=xy$ 没有局部极值的结论. ■

### 12.7.2 有界闭区域上函数的绝对极大值和绝对极小值

在有界闭区域 $R$ 上寻找连续函数 $f(x,y)$ 的绝对极值分三步进行：

(1) 列出 $R$ 中这样的内点，$f$ 在这些点可能有局部极大值和局部极小值，并且计算 $f$ 在这些点的值. 这样的点是 $f$ 的临界点.

(2) 列出 $R$ 中这样的边界点，$f$ 在这些点可能有局部极大值和局部极小值，并且计算 $f$ 在这些点的值. 我们将在下面例子中简要说如何做这件事.

(3) 检查这两个列表寻找 $f$ 的极大值和极小值. 这些值是 $f$ 在 $R$ 上的绝对极大值和绝对极小值. 由于绝对极大值和绝对极小值也是局部极大值和局部极小值，$f$ 的绝对极大值和绝对极小值出现在第(1)步和第(2)步列表中的某些地方.

**例 5**　求函数

$$f(x,y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$$

在第一象限内以直线 $x=0, y=0$ 和 $y=9-x$ 为边界的三角形区域上的绝对极大值和绝对极小值.

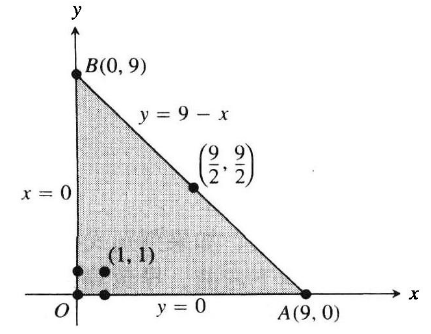



图 12.44　这个三角形区域是例 5 中函数的定义域

**解**　由于 $f$ 是可微函数，$f$ 可能取这些值的点只能是三角形区域(见图 12.44)内 $f_x=f_y=0$ 的点和边界上的点.

**(a)内点** 对于这样的点，我们有

$$f_x = 2 - 2x = 0,\quad f_y = 2 - 2y = 0$$

由此得到单个点$(x,y)=(1,1)$. $f$在这个点的值是

$$f(1,1) = 4$$

**(b)边界点** 一次取三角形的一条边：

(i)在线段$OA$上，$y=0$. 现在可以把函数

$$f(x,y) = f(x,0) = 2 + 2x - x^2$$

视为定义在闭区间$0\leqslant x\leqslant 9$上的$x$的函数. 从第4章知道，它的极值可能出现在区间的端点和使$f'(x,\ 0)=0$的内点. 在端点$x=0$，$f(0,\ 0)=2$；在端点$x=9$，$f(9,\ 0)=2+18-81=-61$. 使$f'(x,\ 0)=2-2x=0$的唯一内点是$x=1$，在这个内点$f(x,\ 0)=f(1,\ 0)=3$.

(ii)在线段$OB$上，$x=0$，而

$$f(x,y) = f(0,y) = 2 + 2y - y^2$$

从$f$对$x$和$y$的对称性以及刚才所作的分析，可知在这条线段上可能出现的绝对极值是

$$f(0,0) = 2,\quad f(0,9) = -61,\quad f(0,1) = 3$$

(iii)我们已经考虑了$f$在线段$AB$的端点的值，现在只须检查$AB$的内点. 用$y=9-x$，得到

$$f(x,y) = 2 + 2x + 2(9-x) - x^2 - (9-x)^2 = -61 + 18x - 2x^2$$

置$f'(x,\ 9-x)=18-4x=0$给出

$$x = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

在这个$x$值，

$$y = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}\quad 而\quad f(x,y) = f\left(\frac{9}{2},\frac{9}{2}\right) = -\frac{41}{2}$$

**归纳** 我们列出函数$f$全部可能的极值：

$$4,2,-61,3,-(41/2)$$

极大值是4，这是$f$在点$(1,1)$的值. 极小值是$-61$，这是$f$在点$(0,9)$和$(9,0)$的值. ■

求解对函数变量有代数约束条件的极值问题，通常需要采用下一节介绍的拉格朗日乘数法. 但是，有时我们可以直接求解这样的问题. 请看下面的例子.

**例6** 一家投递公司只承接长度和围长(截面的周长)之和不超过108英寸的长方形包装箱. 求这家公司可以接受的最大容积包装箱的尺寸.

**解** 令$x$，$y$，$z$分别表示长方形箱体的长、宽、高，那么箱体的围长是$2y+2z$. 我们要使箱体的容积$V=xyz$(见图12.45)达到最大值，条件是满足$x+2y+2z=108$(投递公司接受的最大箱体). 这样，我们可以把箱体容积表示成两个变量的函数：

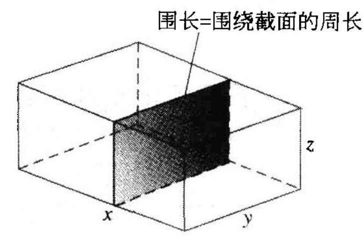


图12.45 例6的包装箱

$$\begin{aligned} V(y,z) &= (108-2y-2z)yz \quad (V = xyz, x = 108-2y-2z) \\ &= 108yz - 2y^2z - 2yz^2 \end{aligned}$$

置这个函数的一阶偏导数等于零，

$$V_y(y,z) = 108z - 4yz - 2z^2 = (108 - 4y - 2z)z = 0$$

$$V_z(y,z) = 108y - 2y^2 - 4yz = (108 - 2y - 4z)y = 0$$

给出临界点

$$(0,0),(0,54),(54,0),(18,18)$$

箱体在$(0,0)$，$(0,54)$，$(54,0)$的容积为零而不是最大值. 在点$(18,18)$，应用二阶导数检验法

（定理 11）：

$$V_{yy} = -4z, \quad V_{zz} = -4y, \quad V_{yz} = 108 - 4y - 4z$$

于是

$$V_{yy}V_{zz} - V_{yz}{}^2 = 16yz - 16(27 - y - z)^2$$

因此，

$$V_{yy}(18,18) = -4(18) < 0$$

和

$$[V_{yy}V_{zz} - V_{yz}{}^2]_{(18,18)} = 16(18)(18) - 16(-9)^2 > 0$$

蕴涵$(y,z) = (18,18)$给出箱体最大容积. 这时包装箱的尺寸是

$$x = 108 - 2(18) - 2(18) = 36 \text{ in}$$
$$y = 18 \text{ in}$$
$$z = 18 \text{ in}$$

箱体最大容积为

$$V = (36)(18)(18) = 11\,664 \text{ in}^3$$

或

$$6.75 \text{ ft}^3$$

■

尽管定理 10 是强有力的，我们还是要求读者记住它的局限性. 这个定理不能应用到函数定义域的边界点，函数在边界点即使具有非零导数，依然可能在那里取极值. 此外，定理不能应用到$f_x$或者$f_y$不存在的点.

> **极大值和极小值检验法小结**
>
> 函数$f(x,y)$的极大值和极小值只能出现在：
>
> (i) $f$定义域的**边界点**；
>
> (ii) **临界点**（$f$定义域中满足$f_x = f_y = 0$的内点或者$f_x$或$f_y$不存在的点）.
>
> 如果$f$的一阶偏导数和二阶偏导数在某个以点$(a,b)$为中心的整个圆盘上连续，并且$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$，那么$f(a,b)$的极值特性可以用**二阶导数检法**检验：
>
> (i) 在$(a, b)$ $f_{xx} < 0$ 和 $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0 \Rightarrow$ **局部极大值**.
>
> (ii) 在$(a, b)$ $f_{xx} > 0$ 和 $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0 \Rightarrow$ **局部极小值**.
>
> (iii) 在$(a, b)$ $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0 \Rightarrow$ **鞍点**.
>
> (iv) 在$(a, b)$ $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0 \Rightarrow$ **检验法无结果**.

## 习题 12.7

在习题 1 ~ 30 中，求函数的全部极大值和极小值以及鞍点.

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$.
2. $f(x,y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y - 6$.
3. $f(x,y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y - 4$.
4. $f(x,y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x - 4$.
5. $f(x,y) = x^2 + xy + 3x + 2y + 5$.
6. $f(x,y) = y^2 + xy - 2x - 2y + 2$.
7. $f(x,y) = 5xy - 7x^2 + 3x - 6y + 2$.
8. $f(x,y) = 2xy - x^2 - 2y^2 + 3x + 4$.
9. $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^2 + 6y + 2$.
10. $f(x,y) = 3x^2 + 6xy + 7y^2 - 2x + 4y$.
11. $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$.
12. $f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 5y^2 - 20x + 26y$.
13. $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y + 6$.
14. $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 2y + 1$.
15. $f(x,y) = x^2 + 2xy$.
16. $f(x,y) = 3 + 2x + 2y - 2x^2 - 2xy - y^2$.

17. $f(x,y)=x^3-y^3-2xy+6.$

18. $f(x,y)=x^3+3xy+y^3.$

19. $f(x,y)=6x^2-2x^3+3y^2+6xy.$

20. $f(x,y)=3y^2-2y^3-3x^2+6xy.$

21. $f(x,y)=9x^3+y^3/3-4xy.$

22. $f(x,y)=8x^3+y^3+6xy.$

23. $f(x,y)=x^3+y^3+3x^2-3y^2-8.$

24. $f(x,y)=2x^3+2y^3-9x^2+3y^2-12y.$

25. $f(x,y)=4xy-x^4-y^4.$

26. $f(x,y)=x^4+y^4+4xy.$

27. $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}.$

28. $f(x,y)=\dfrac{1}{x}+xy+\dfrac{1}{y}.$

29. $f(x,y)=y\sin x.$

30. $f(x,y)=e^{2x}\cos y.$

在习题 31 ~ 38 中，求函数在给定定义域上的绝对极大值和绝对极小值.

31. 第一象限内以直线 $x=0$, $y=2$, $y=2x$ 为界的闭三角形板上的函数

$$f(x,y)=2x^2-4x+y^2-4y+1$$

32. 第一象限内以直线 $x=0$, $y=4$, $y=x$ 为界的闭三角形板上的函数

$$D(x,y)=x^2-xy+y^2+1$$

33. 第一象限内以直线 $x=0$, $y=0$, $y+2x=2$ 为界的闭三角形板上的函数

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

34. 矩形板 $0\leqslant x\leqslant 5$, $-3\leqslant y\leqslant 3$ 上的函数

$$T(x,y)=x^2+xy+y^2-6x$$

35. 矩形板 $0\leqslant x\leqslant 5$, $-3\leqslant y\leqslant 0$ 上的函数

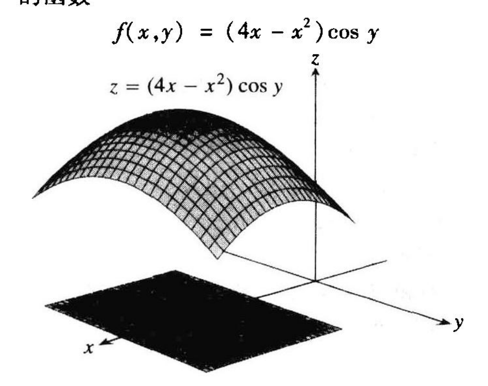
$$T(x,y)=x^2+xy+y^2-6x+2$$

36. 矩形板 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$ 上的函数

$$f(x,y)=48xy-32x^3-24y^2$$

37. 矩形板 $1\leqslant x\leqslant 3$, $-\pi/4\leqslant y\leqslant \pi/4$(参见附图)上的函数

$$f(x,y)=(4x-x^2)\cos y$$




38. 第一象限内以直线 $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ 为界的三角形板上的函数

$$f(x,y)=4x-8xy+2y+1$$

39. 求使积分

$$\int_a^b (6-x-x^2)\,dx$$

达到最大值的积分限 $a$ 和 $b$，其中 $a\leqslant b$.

40. 求使积分

$$\int_a^b (24-2x-x^2)^{1/3}\,dx$$

达到最大值的积分限 $a$ 和 $b$，其中 $a\leqslant b$.

41. 假设函数 $f(x,y)$ 的偏导数为

(a) $f_x=2x-4y$, $f_y=2y-4x$;

(b) $f_x=2x-2$, $f_y=2y-4$;

(c) $f_x=9x^2-9$, $f_y=2y+4$.

求它们的极大值、极小值和鞍点(如果存在). 描述你在每种情形的推理方法.

42. 对于下列每个函数，判别式 $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2$ 在原点的值为零，所以局部极值的二阶导数检验法失效. 通过描绘曲面 $z=f(x,y)$ 的形状，判断函数在原点是否有极大值、极小值或鞍点. 描述你在每种情形的推理方法.

(a) $f(x,y)=x^2y^2$.　(b) $f(x,y)=1-x^2y^2$.

(c) $f(x,y)=xy^2$.　(d) $f(x,y)=x^3y^2$.

(e) $f(x,y)=x^3y^3$.　(f) $f(x,y)=x^4y^4$.

43. 证明：在函数 $f(x,y)=x^2+kxy+y^2$ 中，$k$ 无论取什么值，点 $(0,0)$ 是 $f$ 的临界点.（提示：考察 $k=0$ 和 $k\neq 0$ 这两种情形.）

44. 对于函数 $f(x,y)=x^2+kxy+k^2$，在常数 $k$ 取什么值时二阶导数检验法保证函数在点 $(0,0)$ 有鞍点? 在 $k$ 取什么值时函数在点 $(0,0)$ 有局部极小值? 在 $k$ 取什么值时二阶导数检验法没有结果? 提出答案的理由.

45. 如果 $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$, $f(x,y)$ 在 $(a,b)$ 必定有局部极大值或者局部极小值吗? 提出答案的理由.

46. 如果函数 $f(x,y)$ 及其一阶偏导数和二阶偏导数在整个以 $(a,b)$ 为中心的某圆盘上是连续的，并且 $f_{xx}(a,b)$ 和 $f_{yy}(a,b)$ 的符号相反，关于 $f(a,b)$ 能够得出什么结论? 提出答案的理由.

47. 在曲面 $z=10-x^2-y^2$ 的图形上位于平面 $x+2y+3z=0$ 上方的所有点中，求距离平面最远的点.

48. 在曲面 $z=x^2+y^2+10$ 的图形上求距离平面 $x+2y-z=0$ 最近的点.

49. 函数 $f(x,y)=x+y$ 在闭的第一象限 $x\geqslant 0$ 和

$y\geqslant 0$ 内没有绝对极大值. 这个结论同正文中关于求绝对极值的讨论相抵触吗? 提出答案的理由.

**50.** 在正方形区域 $0\leqslant x\leqslant 1$ 和 $0\leqslant y\leqslant 1$ 上考察函数

$$f(x,y)=x^2+y^2+2xy-x-y+1$$

(**a**) 证明: $f$ 在这个正方形内的线段 $2x+2y=1$ 上有一个绝对极小值. 这个绝对极小值是什么?

(**b**) 求 $f$ 在正方形区域上的绝对极大值.

**参数化曲线上的极值** 为了求函数 $f(x,y)$ 在曲线 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 上的极值, 我们把 $f$ 作为变量 $t$ 的一元函数, 并且利用链式法则求 $df/dt$ 为零的点. 然后, 同任何其他一元函数的情形一样, 在以下范围求 $f$ 的极值:

(**a**) 临界点($df/dt$ 为零或者不存在的点);

(**b**) 参数定义域的端点.

在习题 51 ~ 54 中, 求函数在给定曲线上的绝对极大值和绝对极小值.

**51.** 函数:

(**a**) $f(x,y)=x+y$. (**b**) $g(x,y)=xy$.

(**c**) $h(x,y)=2x^2+y^2$.

曲线:

(**i**) 半圆 $x^2+y^2=4$, $y\geqslant 0$.

(**ii**) 四分之一圆 $x^2+y^2=4$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

用参数方程 $x=2\cos t$, $y=2\sin t$.

**52.** 函数:

(**a**) $f(x,y)=2x+3y$. (**b**) $g(x,y)=xy$.

(**c**) $h(x,y)=x^2+3y^2$.

曲线:

(**i**) 半椭圆 $(x^2/9)+(y^2/4)=1$, $y\geqslant 0$.

(**ii**) 四分之一椭圆 $(x^2/9)+(y^2/4)=1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

用参数方程 $x=3\cos t$, $y=2\sin t$.

**53.** 函数: $f(x,y)=xy$.

曲线:

(**i**) 直线 $x=2t$, $y=t+1$.

(**ii**) 线段 $x=2t$, $y=t+1$, $-1\leqslant t\leqslant 0$.

(**iii**) 线段 $x=2t$, $y=t+1$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

**54.** 函数

(**a**) $f(x, y)=x^2+y^2$.

(**b**) $g(x, y)=1/(x^2+y^2)$.

曲线:

(**i**) 直线 $x=t$, $y=2-2t$.

(**ii**) 线段 $x=t$, $y=2-2t$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

**55. 最小二乘法与回归线** 当我们试图用一条直线 $y=mx+b$ 拟合数值数据点的集合

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$$

(见图 12.46)时, 通常选择这样一条直线: 从各点到直线的垂直距离的平方和取最小值. 在理论上, 这意味着求 $m$ 和 $b$ 的值, 使函数

$$w=(mx_1+b-y_1)^2+\cdots+(mx_n+b-y_n)^2 \tag{1}$$

达到最小值. 证明, 满足这个要求的 $m$ 和 $b$ 的值是

$$m=\frac{(\sum x_k)(\sum y_k)-n\sum x_k y_k}{(\sum x_k)^2-n\sum x_k^2} \tag{2}$$

$$b=\frac{1}{n}(\sum y_k-m\sum x_k) \tag{3}$$

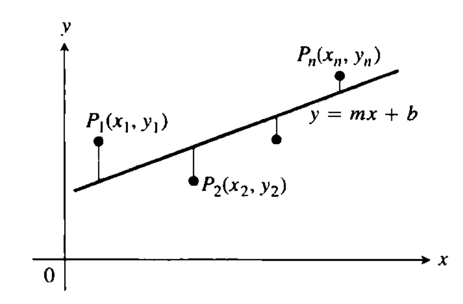



图 12.46 为了用一条直线拟合不在一条直线上的点, 选择使离差的平方和达到最小值的直线

其中全部和是从 $k=1$ 到 $k=n$ 求和. 许多科学计算器带有计算这种公式的内置程序, 用户在输入数据后只用少数几个操作键就能求出 $m$ 和 $b$ 的值.

由 $m$ 和 $b$ 的值决定的直线 $y=mx+b$ 称为所研究数据的**最小二乘线**、**回归线**或者**趋势线**. 求一条最小二乘线, 使你

(**1**) 用简单表达式综合数据;

(**2**) 对于其他未经试验的 $x$ 的值, 预测 $y$ 的值;

(**3**) 以解析方式处理数据.

在习题 56 ~ 58 中, 用公式(2)和(3)求每个数据点集的最小二乘线. 然后用所得的线性方程预测对应于 $x=4$ 的 $y$ 值.

**56.** $(-2,0)$, $(0,2)$, $(2,3)$.

**57.** $(-1,2)$, $(0,1)$, $(3,-4)$.

**58.** $(0,0)$, $(1,2)$, $(2,3)$.

**计算机探究**

在习题 59 ~ 64 中, 考察函数确定它们的局部极值. 用一种 CAS(计算机代数系统)执行下列处理步骤:

(a)绘制函数在给定矩形区域上的图形.

(b)绘制矩形区域内的某些层曲线.

(c)计算函数的一阶偏导数，并且用 CAS 的方程求解器求临界点. 临界点同在(b)中画出的层曲线有何关系？哪些临界点(如果存在)显现为鞍点？提出答案的理由.

(d)计算函数的二阶偏导数，并且求判别式$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2$.

(e)利用极大值-极小值检验法，对在(c)中求出的临界点分类. 所得结果同你在(c)中进行的讨论一致吗？

**59.** $f(x,y)=x^2+y^3-3xy$, $-5\leqslant x\leqslant 5$, $-5\leqslant y\leqslant 5$.

**60.** $f(x,y)=x^3-3xy^2+y^2$, $-2\leqslant x\leqslant 2$, $-2\leqslant y\leqslant 2$.

**61.** $f(x,y)=x^4+y^2-8x^2-6y+16$, $-3\leqslant x\leqslant 3$, $-6\leqslant y\leqslant 6$.

**62.** $f(x,y)=2x^4+y^4-2x^2-2y^2+3$, $-3/2\leqslant x\leqslant 3/2$, $-3/2\leqslant y\leqslant 3/2$.

**63.** $f(x,y)=5x^6+18x^5-30x^4+30xy^2-120x^3$, $-4\leqslant x\leqslant 3$, $-2\leqslant y\leqslant 2$.

**64.** $f(x,y)=\begin{cases}x^5\ln(x^2+y^2), & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)\neq(0,0),\end{cases}$ $-2\leqslant x\leqslant 2$, $-2\leqslant y\leqslant 2$.

## 12.8 拉格朗日乘数

有时我们需要求一个函数的极值，它的求值范围被限制在平面的某个特定子集内，例如在圆盘或闭三角形区域，或者沿一条曲线. 在这一节，我们探讨对受约束的函数求极值的一种强有力的方法——*拉格朗日乘数法*.

**人物传记**

约瑟夫·路易·拉格朗日
(Joseph Louis Lagrange，1736—1813)

### 12.8.1 受约束极大值和极小值

首先考察一个极值问题，其中受约束极小值可以通过消去一个变量求出.

**例 1** 求平面 $2x+y-z-5=0$ 上同原点最接近的点 $P(x,y,z)$.

**解** 问题是在约束条件

$$2x+y-z-5=0$$

下求函数

$$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

的极小值.

由于$|\overrightarrow{OP}|$只要在函数

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

存在极小值时就有极小值，我们可以通过求$f(x,y,z)$在约束条件$2x+y-z-5=0$下的极小值(因此避免平方根)求解问题. 如果把这个方程中的 $x$ 和 $y$ 作为自变量，并且把 $z$ 表示成

$$z=2x+y-5$$

问题遂简化成求点$(x,y)$使函数

$$h(x,y)=f(x,y,2x+y-5)=x^2+y^2+(2x+y-5)^2$$

在这样的点取极小值. 由于 $h$ 的定义域是整个 $xy$ 平面，12.7 节的一阶导数检验法告诉我们，$h$ 可能具有的任何极小值必定出现在满足条件

$$h_x=2x+2(2x+y-5)(2)=0,\quad h_y=2y+2(2x+y-5)=0$$

的点. 这就导出方程

$$10x+4y=20,\quad 4x+4y=10$$

和解

$$x=\frac{5}{3},\quad y=\frac{5}{6}$$

我们可以应用几何论证和二阶导数检验法证明这个点的值使 $h$ 取极小值. 在平面 $z=2x+y-5$ 上对应点的 $z$ 坐标是

$$z=2\left(\frac{5}{3}\right)+\frac{5}{6}-5=-\frac{5}{6}$$

因此，我们所求同原点最接近的点为

$$P\left(\frac{5}{3},\frac{5}{6},-\frac{5}{6}\right)$$

从 $P$ 到原点的距离是 $5\sqrt{6}\approx2.04$. ■

试图用代入法求解受约束极大值或极小值问题，例如在例 1 中可以引用的方法，并非总是可行的. 这就是我们要在本节学习新方法的原因之一.

**例 2** 求双曲柱面 $x^2-z^2-1=0$ 上同原点最接近的点.

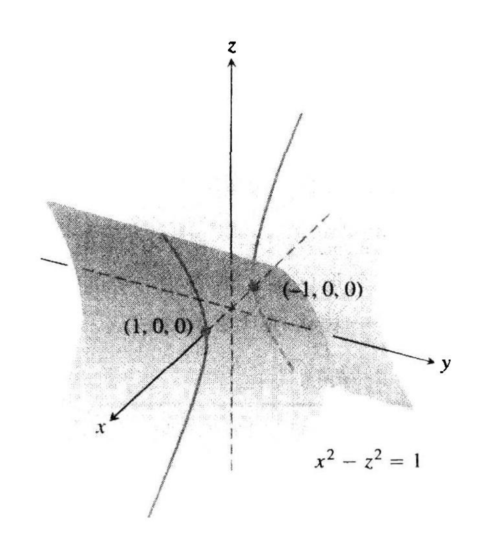



图 12.47 例 2 中的双曲柱面 $x^2-z^2-1=0$

**解 1** 双曲柱面如图 12.47 所示. 我们在这个柱面上寻找同原点最接近的点. 这些点的坐标使满足约束条件 $x^2-z^2-1=0$ 的函数

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2\quad(\text{距离的平方})$$

取最小值. 如果把 $x$ 和 $y$ 作为约束方程中的自变量，我们有

$$z^2=x^2-1$$

并且 $f(x,y,z)=z^2+y+z^2$ 在柱面上的值由函数

$$h(x,y)=x^2+y^2+(x^2-1)=2x^2+y^2-1$$

给出. 为了在柱面上求坐标值使 $f$ 取极小值的点，我们在 $xy$ 平面内寻找坐标值使 $h$ 取极小值的点. $h$ 的唯一极值出现在满足

$$h_x=4x=0\quad\text{和}\quad h_y=2y=0$$

的点，也就是在点 $(0,0)$. 但是，在柱面上不存在 $x$ 和 $y$ 同时为零的点. 错误出现在哪里?

问题是：一阶导数检验法求出的(如它应有的那样)是 $h$ 在其定义域中取极小值的点. 另一方面，我们需要的却是在柱面上使 $h$ 具有极小值的点. 虽然 $h$ 的定义域是整个 $xy$ 平面，但是我们在柱面上能够选择点 $P(x,y,z)$ 前面两个坐标的定义域被限制为柱面在 $xy$ 平面上的"影子"，它不包含直线 $x=-1$ 和 $x=1$ 之间的带区(见图 12.48).

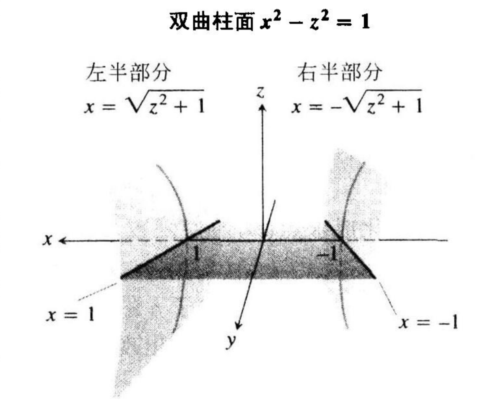



图 12.48 在 $xy$ 平面内从双曲柱面 $x^2-z^2=1$ 上的点 $(x,y,z)$ 中选择前面两个坐标的区域，不包括 $xy$ 平面内的带区 $-1<x<1$ (例 2)

如果把 $y$ 和 $z$ (而不是 $x$ 和 $y$) 作为自变量，并且用 $y$ 和 $z$ 把 $x$ 表示成

$$x^2=z^2+1$$

我们可以避免这个问题. 用这个代换，$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 变成

$$k(y,z)=(z^2+1)+y^2+z^2=1+y^2+2z^2$$

并且寻找使 $k(x,y)$ 取其最小值的点. $yz$ 平面内 $k$ 的定义域这时对应于这样一个定义域，我们在其中选择柱面上点 $(x,y,z)$ 的 $y$ 坐标和 $z$ 坐标. 因此，$yz$ 平面内使 $k(y,z)$ 取极小值的点将有柱面上的对应点. $k$ 的最小值出现在满足

$$k_y = 2y = 0 \quad 和 \quad k_z = 4z = 0$$

的点或者 $y=z=0$ 的点. 这就导出

$$x^2 = z^2 + 1 = 1, \quad x = \pm 1$$

柱面上对应的点是 $(\pm 1,0,0)$. 我们从不等式

$$k(y,z) = 1 + y^2 + 2z^2 \geqslant 1$$

可以看出，点 $(\pm,0,0)$ 给出 $k$ 的极小值. 同时可以看出，从原点到柱面上一点的极小距离是 1 个单位.

**解 2**　求柱面上同原点最接近的点的另外一个方法，是想象一个以原点为中心的小球像肥皂泡一样扩大，直到它接触柱面(见图 12.49). 在每个接触点，柱面和球面有相同的切平面和法线. 因此，如果把球面和柱面表示成通过设置

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$ 和 $g(x,y,z) = x^2 - z^2 - 1$ 为零所得的层曲面，那么梯度 $\nabla f$ 和 $\nabla g$ 在两个曲面的接触点是平行的. 所以在任何接触点，我们能够求出一个纯量 $\lambda$ (“lambda”)，使得

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

或者

$$2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k} = \lambda(2x\boldsymbol{i} - 2z\boldsymbol{k})$$

因此，任何接触点的坐标 $(x,y,z)$ 必定满足三个纯量方程

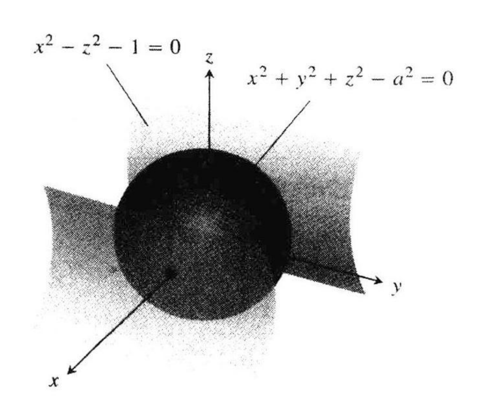



图 12.49　一个中心在原点的球像肥皂泡那样扩大，直到它接触双曲柱面 $x^2 - z^2 - 1 = 0$ (例 2)

$$2x = 2\lambda x, \quad 2y = 0, \quad 2z = -2\lambda z$$

对于什么 $\lambda$ 值，坐标值满足这三个纯量方程的点 $(x,y,z)$ 也在曲面 $x^2 - z^2 - 1 = 0$ 上? 为了回答这个问题，我们利用曲面上没有 $x$ 坐标为零这个事实推出 $x \neq 0$ 的结论. 因此，当且仅当

$$2 = 2\lambda \quad 或 \quad \lambda = 1$$

时，$2x = 2\lambda x$. 对于 $\lambda = 1$，方程 $2z = -2\lambda z$ 变成 $2z = -2z$. 如果这个方程也是满足的，$z$ 必须为零. 由于还有 $y = 0$ (从方程 $2y = 0$ 得到)，我们断定所求的点全部具有形式为

$$(x,0,0)$$

的坐标. 在曲面 $x^2 - z^2 = 1$ 上，哪些点的坐标具有这种形式? 答案是满足

$$x^2 - (0)^2 = 1, \quad x^2 = 1 \quad 或 \quad x = \pm 1$$

的点 $(x, 0, 0)$. 在柱面上，同原点最接近的点是 $(\pm 1,0,0)$. ■

## 12.8.2　拉格朗日乘数法

在例 2 的解 2 中，我们用到了**拉格朗日乘数法**. 这个方法说明，当函数 $f(x,y,z)$ 的变量以 $g(x,y,z) = 0$ 为约束条件时，要从曲面 $g = 0$ 上满足

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

的点中求 $f$ 的极值，其中 $\lambda$ 是一个纯量(称为**拉格朗日乘数**).

为了进一步探讨这个方法和了解它的工作过程，首先给出下述观察结果，我们把它陈述为一个定理.

**定理 12（正交梯度定理）** 假定$f(x,y,z)$在一个区域内是可微的，区域的内部包含一条光滑曲线

$$C:\quad \boldsymbol{r}(t)=g(t)\boldsymbol{i}+h(t)\boldsymbol{j}+k(t)\boldsymbol{k}$$

若$P_0$是在曲线$C$上的一点，相对于$f$在$C$上的值，$f$在这个点有局部极大值或局部极小值，则$\nabla f$在$P_0$同$C$正交.

**证明** 我们证明$\nabla f$在$P_0$同曲线的速度向量正交. $f$在曲线$C$上的值由复合函数$f(g(t),h(t),k(t))$给出，它对$t$的导数是

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}=\nabla f\cdot\boldsymbol{v}$$

在任何点$P_0$，如果$f$有相对于它在曲线上取值的局部极大值或局部极小值，那么$\mathrm{d}f/\mathrm{d}t=0$，所以

$$\nabla f\cdot\boldsymbol{v}=0$$

■

在定理 12 中取消$z$项，我们得到二元函数的类似结果.

**定理 12 的系** 在一条光滑曲线

$$\boldsymbol{r}(t)=g(t)\boldsymbol{i}+h(t)\boldsymbol{j}$$

上的点，如果可微函数$f(x,y)$有相对它在曲线上取值的局部极大值或局部极小值，那么$\nabla f\cdot\boldsymbol{v}=0$，其中$\boldsymbol{v}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$.

定理 12 是拉格郎日乘数法的关键所在. 假定$f(x,y,z)$和$g(x,y,z)$是可微函数，并且$P_0$是曲面$g(x,y,z)=0$上的点，$f$在这个点有相对于它在曲面上其他取值的局部极大值或局部极小值. 此外，假定在曲面$g(x,y,z)=0$上的点$\nabla g\neq 0$. 那么，$f$在$P_0$有相对于它在曲面$g(x,y,z)=0$上通过$P_0$的每条可微曲线上取值的局部极大值或局部极小值. 因此，$\nabla f$同通过$P_0$的每条这样的可微曲线的速度向量正交. 而且，$\nabla g$也是如此(因为如我们在 12.5 节见到的那样，$\nabla g$同层曲面$g=0$正交). 所以，$\nabla f$在$P_0$是$\nabla g$的某个$\lambda$纯量倍数.

**拉格朗日乘数法**

假定$f(x,y,z)$和$g(x,y,z)$是可微函数，并且当$g(x,y,z)=0$时$\nabla g\neq\boldsymbol{0}$. 为了求函数$f$在约束条件$g(x,y,z)=0$下的局部极大值和局部极小值(如果它们存在)，那么求同时满足方程

$$\nabla f=\lambda\nabla g\quad 和\quad g(x,y,z)=0 \tag{1}$$

的$x,y,z$和$\lambda$的值. 对于二元函数，约束条件是相似的，但是没有变量$z$.

在应用这个方法时必须谨慎. 极值实际上可能并不存在(见习题 41).

**例 3** 求函数

$$f(x,y)=xy$$

在椭圆

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$$

(见图 12.50)上的最大值和最小值.

**解** 我们要求$f(x,y)=xy$的极值满足约束条件

$$g(x,y)=\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1=0$$

为此，首先求满足

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad 和 \quad g(x,y) = 0$$

的 $x,y$ 和 $\lambda$ 的值. 方程(1)中的梯度方程给出

$$y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} = \frac{\lambda}{4}x\boldsymbol{i} + \lambda y\boldsymbol{j}$$

由此求出

$$y = \frac{\lambda}{4}x, \quad x = \lambda y, \quad y = \frac{\lambda}{4}(\lambda y) = \frac{\lambda^2}{4}y$$

所以 $y=0$ 或者 $\lambda = \pm 2$.

现在考察这两种情况：

**第一种情况**：如果 $y=0$，那么 $x=y=0$. 但是点(0,0)不在椭圆上. 因此，$y\neq 0$.

**第二种情况**：如果 $y\neq 0$，那么 $\lambda = \pm 2$，$x = \pm 2y$. 在方程 $g(x,y)=0$ 中代入 $x$ 的值，给出

$$\frac{(\pm 2y)^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

$$4y^2 + 4y^2 = 8$$

$$y = \pm 1$$

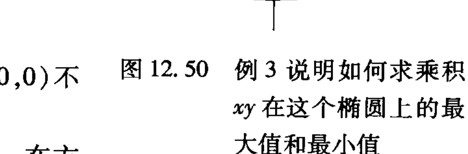



图 12.50 例 3 说明如何求乘积 $xy$ 在这个椭圆上的最大值和最小值

因此，函数 $f(x,y)=xy$ 在椭圆上的四个点( ±2,1)，( ±2，-1)取它的极值. 极值是 $xy=2$ 和 $xy=-2$.

**解的几何解释** 函数 $f(x,y)=xy$ 的层曲线是双曲线 $xy=c$(见图 12.51). 双曲线的位置离原点越远，$f$ 的绝对值越大. 我们需要求 $f(x,y)$ 的极值，已知点 $(x,y)$ 也在椭圆 $x^2+4y^2=8$ 上. 哪些同椭圆相交的双曲线处于离原点最远的位置？在同椭圆正好接触的双曲线中，同椭圆相切的双曲线离原点最远. 在这些点，同双曲线正交的任何向量是同椭圆正交的向量，所以 $\nabla f = y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$ 是 $\nabla g = (x/4)\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$ 的 $\lambda = \pm 2$ 倍. 例如，在点(2,1)，有

$$\nabla f = \boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}, \quad \nabla g = \frac{1}{2}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j} \quad 和 \quad \nabla f = 2\nabla g$$

在点( -2,1)，有

$$\nabla f = \boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}, \quad \nabla g = -\frac{1}{2}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j} \quad 和 \quad \nabla f = -2\nabla g \quad ■$$

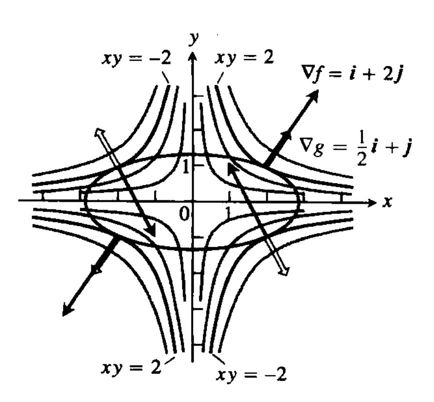



图 12.51 函数 $f(x,y)=xy$ 在约束条件 $g(x,y)=x^2/8+y^2/2-1=0$ 下在四个点( ±2, ±1)取极值，这四个点是椭圆上当 $\nabla f$ (单线箭头)是 $\nabla g$(双线箭头)的某个纯量倍数时的点(例 3)

**例 4** 求函数 $f(x,y)=3x+4y$ 在圆 $x^2+y^2=1$ 上的极大值和极小值.

**解** 我们用

$$f(x,y) = 3x+4y, \quad g(x,y) = x^2+y^2-1$$

的拉格朗日乘数问题模拟这个问题，并且求满足方程

$$\nabla f = \lambda\nabla g: \quad 3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j} = 2x\lambda\boldsymbol{i}+2y\lambda\boldsymbol{j}$$

$$g(x,y) = 0: \quad x^2+y^2-1 = 0$$

的 $x,y$ 和 $\lambda$ 的值. 方程(1)中的梯度方程蕴涵 $\lambda\neq 0$，并且给出

$$x = \frac{3}{2\lambda}, \quad y = \frac{2}{\lambda}$$

这两个方程特别告诉我们，$x$ 和 $y$ 具有相同的符号. 用 $x$ 和 $y$ 的这两个值，方程 $g(x,y)=0$ 给出

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2+\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2-1=0$$

所以

$$\frac{9}{4\lambda^2}+\frac{4}{\lambda^2}=1,\quad 9+16=4\lambda^2,\quad 4\lambda^2=25 \quad 和 \quad \lambda=\pm\frac{5}{2}$$

因此，

$$x=\frac{3}{2\lambda}=\pm\frac{3}{5},\quad y=\frac{2}{\lambda}=\pm\frac{4}{5}$$

并且 $f(x,y)=3x+4y$ 在点 $(x,y)=\pm(3/5,4/5)$ 有极值.

通过计算 $3x+4y$ 在点 $\pm(3/5,4/5)$ 的值，看出 $f(x,y)$ 在圆 $x^2+y^2=1$ 上的极大值和极小值是

$$3\left(\frac{3}{5}\right)+4\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{25}{5}=5 \quad 和 \quad 3\left(-\frac{3}{5}\right)+4\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{25}{5}=-5$$

**解的几何解释** $f(x,y)=3x+4y$ 的层曲线是直线 $3x+4y=c$（见图 12.52）. 这些直线的位置离原点越远，$f$ 的绝对值越大. 我们需要求 $f(x,y)$ 的极值，已知点 $(x,y)$ 也位于圆 $x^2+y^2=1$ 上. 哪些同圆相交的直线离原点最远？同圆相切的直线是离原点最远的直线. 在切点，任何同这条直线正交的向量也是同圆正交的向量，所以梯度 $\nabla f=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$ 是梯度 $\nabla g=2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}$ 的 $\lambda=\pm5/2$ 倍. 例如，在点 $(3/5,4/5)$，

$$\nabla f=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j},\quad \nabla g=\frac{6}{5}\boldsymbol{i}+\frac{8}{5}\boldsymbol{j} \quad 和 \quad \nabla f=\frac{5}{2}\nabla g$$

■

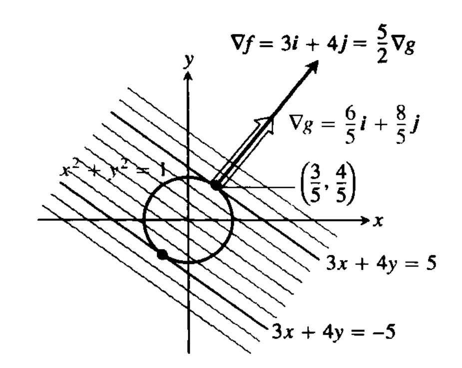



图 12.52 函数 $f(x,y)=3x+4y$ 在点 $(3/5,4/5)$ 取其在单位圆 $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$ 上的最大值，在点 $(-3/5,-4/5)$ 取其在圆上的最小值（例 4）；在每个点，$\nabla f$ 是 $\nabla g$ 的某个纯量倍数；图形显示 $f$ 在第一点的梯度，但是没有画出在第二点的梯度

### 12.8.3 受双重约束的拉格朗日乘数

在许多需要我们求可微函数 $f(x,y,z)$ 的极值问题中，$f$ 的变量带有两个约束条件. 如果约束条件是

$$g_1(x,y,z)=0 \quad 和 \quad g_2(x,y,z)=0$$

并且 $g_1$ 和 $g_2$ 是可微的，而梯度 $\nabla g_1$ 和 $\nabla g_2$ 不平行，我们在求这种受约束的局部极大值和极小值时，引入两个拉格朗日乘数 $\lambda$ 和 $\mu$（读作"mew"）. 就是说，我们通过求同时满足方程组

$$\nabla f=\lambda\nabla g_1+\mu\nabla g_2,\quad g_1(x,y,z)=0,\quad g_2(x,y,z)=0 \tag{2}$$

的 $x,y,z,\lambda$ 和 $\mu$ 的值，确定 $f$ 取受约束极值的点 $P(x,y,z)$. 方程组（2）有着奇妙的几何解释. 曲面 $g_1=0$ 和 $g_2=0$（通常）相交于一条光滑的曲线，例如图 12.53 中的 $C$. 我们沿这条曲线求 $f$ 在曲线上取相对于其他值的局部极大值和极小值的点. 在这些点，如我们在定理 12 中见到的那样，$\nabla f$ 是同 $C$ 正交的. 但是 $\nabla g_1$ 和 $\nabla g_2$ 在这些点也同 $C$ 正交，因为 $C$ 位于曲面 $g_1=0$ 和 $g_2=0$ 上. 所以，$\nabla f$ 位于由 $\nabla g_1$ 和 $\nabla g_2$ 决定的平面内，这意味着对于某些 $\lambda$ 和 $\mu$ 有 $\nabla f=\lambda\nabla g_1+\mu\nabla g_2$. 由于我们求出的点也在两个曲面上，它们的坐标必须满足方程 $g_1(x,y,z)=0$ 和 $g_2(x,y,z)=0$. 这是方程组（2）中保留的条件.

**例 5** 平面 $x+y+z=1$ 同圆柱面 $x^2+y^2=1$ 相交于一个椭圆(见图 12.54). 求椭圆上离原点最近的点和最远的点.

**解** 我们求函数

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

(从点$(x,y,z)$到原点的距离的平方)在约束条件

$$g_1(x,y,z) = x^2+y^2-1 = 0 \quad (3)$$

$$g_2(x,y,z) = x+y+z-1 = 0 \quad (4)$$

下的极值. 这时方程组(2)中的梯度方程给出

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$$

$$2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k} = \lambda(2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}) + \mu(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$$

$$2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k} = (2\lambda x+\mu)\boldsymbol{i}+(2\lambda y+\mu)\boldsymbol{j}+\mu\boldsymbol{k}$$

或者

$$2x = 2\lambda x+\mu,\quad 2y = 2\lambda y+\mu,\quad 2z=\mu \quad (5)$$

方程组(5)中的纯量方程产生

$$\left.\begin{aligned} 2x &= 2\lambda x+2z \Rightarrow (1-\lambda)x = z \\ 2y &= 2\lambda y+2z \Rightarrow (1-\lambda)y = z \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

如果取 $\lambda=1$ 和 $z=0$, 或者 $\lambda\neq1$ 和 $x=y=z/(1-\lambda)$, 方程组(6)中的两个方程同时满足.

如果 $z=0$, 那么联立解方程(3)和(4)求椭圆上对应的点, 给出两个点$(1,0,0)$和$(0,1,0)$. 当你注意图 12.54 时, 可以看出这是合情理的.

若 $x=y$, 则方程(3)和(4)给出

$$x^2+x^2-1=0$$

$$2x^2=1$$

$$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

和

$$x+x+z-1=0$$

$$z=1-2x$$

$$z=1\mp\sqrt{2}$$

在椭圆上的对应点是

$$P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1-\sqrt{2}\right) \quad 和 \quad P_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1+\sqrt{2}\right)$$

但是, 在这里需要小心. 尽管 $P_1$ 和 $P_2$ 都给出 $f$ 在椭圆上的局部极大值, $P_2$ 却比 $P_1$ 离原点更远.

椭圆上离原点最近的点是$(1,0,0)$和$(0,1,0)$. 椭圆上离原点最远的点是 $P_2$. ■

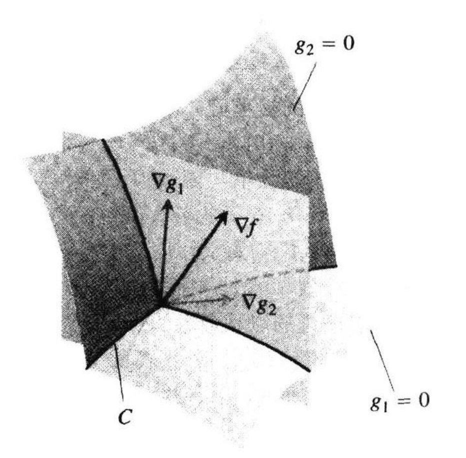



图 12.53 梯度向量$\nabla g_1$ 和$\nabla g_2$ 位于同曲线 C 垂直的平面内, 因为$\nabla g_1$ 同曲面 $g_1=0$ 正交, $\nabla g_2$ 同曲面 $g_2=0$ 正交

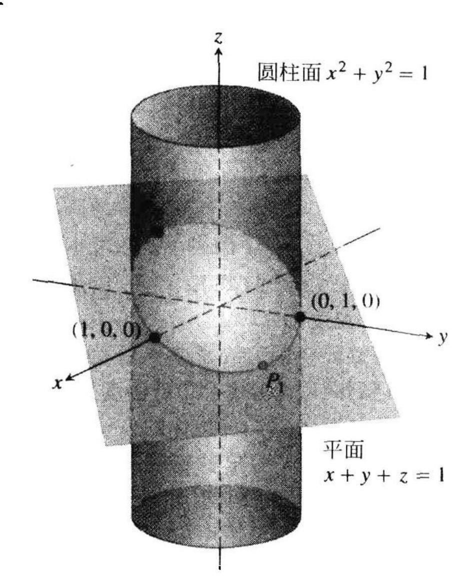



图 12.54 在平面和圆柱面相交的椭圆上求离原点最近和最远的点(例 5)

## 习题 12.8

1. **椭圆上的极值** 求椭圆 $x^2+2y^2=1$ 上使函数 $f(x,y)=xy$ 取它的极值的点.
2. **圆上的极值** 求函数 $f(x,y)=xy$ 在约束条件 $g(x,y)=x^2+y^2-10=0$ 下的极值.
3. **直线上的极大值** 求函数 $f(x,y)=49-x^2-y^2$ 在直线 $x+3y=10$ 上的极大值.
4. **直线上的极值** 求函数 $f(x,y)=x^2y$ 在直线 $x+y=3$ 上的局部极值.

5. **受约束极小值** 求曲线 $xy^2=54$ 上最接近原点的点.
6. **受约束极小值** 求曲线 $x^2y=2$ 上最接近原点的点.
7. 用拉格朗日乘数法求下列极值:
   (a) **双曲线上的极小值** 函数 $f(x,y)=x+y$ 在约束条件 $xy=16$, $x>0$, $y>0$ 下的极小值.
   (b) **直线上的极大值** 函数 $f(x, y)=xy$ 在约束条件 $x+y=16$ 下的极大值.
   解释每个解的几何意义.
8. **曲线上的极值** 求 $xy$ 平面内曲线 $x^2+xy+y^2=1$ 上离原点最近的点和最远的点.
9. **体积固定的容器的最小表面积** 求体积为 $16\pi\ \mathrm{cm}^3$ 而表面积最小的闭正圆柱体容器的尺寸.
10. **球体内的圆柱体** 求可以内接于半径为 $a$ 的球体而表面积最大的开正圆柱体的半径和高度. 这个圆柱体的最大表面积是多少?
11. **椭圆内面积最大的矩形** 用拉格朗日乘数法, 求可以内接于椭圆 $x^2/16+y^2/9=1$ 和两边同坐标轴平行而面积最大的矩形的尺寸.
12. **椭圆内周长最长的矩形** 求可以内接于椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 和边同坐标轴平行而周长最长的矩形的尺寸. 这个矩形的最长周长是多少?
13. **圆上的极值** 求函数 $f(x, y)=x^2+y^2$ 在约束条件 $x^2-2x+y^2-4y=0$ 下的极大值和极小值.
14. **圆上的极值** 求函数 $f(x, y)=3x-y+6$ 在约束条件 $x^2+y^2=4$ 下的极大值和极小值.
15. **金属板上爬行的蚂蚁** 在金属板上一点 $(x,y)$ 的温度为 $T(x,y)=4x^2-4xy+y^2$. 板上一只蚂蚁环绕圆心在原点半径为 5 的圆爬行. 蚂蚁遇到的最高温度和最低温度是多少?
16. **最廉价的贮气罐** 设想你的公司应邀设计液化石油气贮气罐. 客户的规格说明要求罐体是两端为半球体的圆柱体, 贮气 8 000 $\mathrm{m}^3$. 此外, 客户要求制造储气罐用可能最少的材料. 你对客户推荐储气罐圆柱体部分的半径和高度是多少?
17. **到一点的最小距离** 求平面 $x+2y+2z=13$ 上离点 $(1,1,1)$ 最近的点.
18. **到一点的最大距离** 求球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 上离点 $(1,-1,1)$ 最远的点.
19. **到原点的最小距离** 求从曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 到原点的最小距离.
20. **到原点的最小距离** 求曲面 $z=xy+1$ 上离原点最近的点.
21. **到原点的最小距离** 求曲面 $z^2=xy+4$ 上同原点最接近的那些点.
22. **到原点的最小距离** 求曲面 $xyz=1$ 上同原点最接近的那些点.
23. **球面上的极值** 求函数
$$f(x,y,z) = x-2y+5z$$
在球面 $x^2+y^2+z^2=30$ 上的极大值和极小值.
24. **球面上的极值** 求球面 $x^2+y^2+z^2=25$ 上使函数
$$f(x,y,z) = x+2y+3z$$
取极大值和极小值的那些点.
25. **使平方和取最小值** 求三个实数, 它们的和为 9 而它们的平方和取尽可能小的值.
26. **使乘积取最大值** 设 $x,y,z$ 为正数, 如果 $x+y+z^2=16$, 求它们可能具有的最大乘积.
27. **球体内体积最大的长方形框体** 求可以内接于单位球体而体积为最大的闭长方形框体的尺寸.
28. **顶点在平面上的框体** 闭长方形框体以第一卦限内的三个坐标平面为面, 一个顶点在平面 $x/a+y/b+z/c=1$ 上, 其中 $a>0$, $b>0$, $c>0$. 求框体的最大体积.
29. **空间探测器上最热的点** 形状为椭球
$$4x^2+y^2+4z^2 = 16$$
的空间探测器进入地球大气层后, 表面开始发热. 1 小时后, 在探测器表面上点 $(x,y,z)$ 的温度为
$$T(x,y,z) = 8x^2+4yz-16z+600$$
求探测器表面上最热的点
30. **球面上的极值温度** 假设在球面
$$x^2+y^2+z^2 = 1$$
上点 $(x,y,z)$ 的摄氏温度为 $T=400xyz^2$. 确定球面上具有最高温度和最低温度的点.
31. **使效用函数取最大值: 经济学中的例子** 在经济学中, 两种生产资料 $G_1$ 和 $G_2$ 的用量 $x$ 和 $y$ 的效益或者*效用*, 有时用一个函数 $U(x,y)$ 度量. 例如, $G_1$ 和 $G_2$ 可能是一家药品公司需要备有的两种化学药剂, 一种药品需用不同数量的这两种药剂合成, 制造这种药品的增益 $U(x, y)$ 取决于采用的生产工艺. 如果 $G_1$ 的成本是每千克 $a$ 美元, $G_2$ 的成本是每千克 $b$ 美元, 分配用于采购 $G_1$ 和 $G_2$ 的总经费是 $c$ 美元. 在这种情形, 公司的管理人员想要在 $ax+by=c$ 的约束条件下使 $U(x,y)$ 达到最大值. 因此, 他们

需要求解一个典型的拉格朗日乘数问题.

假设

$$U(x,y) = xy + 2x$$

而方程 $ax+by=c$ 简化为

$$2x + y = 30$$

求在后面这个约束条件下 $U$ 的最大值以及相应的 $x$ 和 $y$ 的值.

**32. 定位射电望远镜** 设想你主管在一颗新发现的行星上建立一台射电望远镜. 为了把电磁干扰降低到最大限度，需要把它置于行星磁场最弱的位置. 假定行星是球形的，它的半径长 6 个单位. 在以行星中心为原点的坐标系中，行星的磁场强度由

$$M(x,y,z) = 6x - y^2 + xz + 60$$

给出. 你应把无线电望远镜建立在什么地方?

**33.** 求函数

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y - z^2$$

在约束条件 $2x-y=0$ 和 $y+z=0$ 下的最大值.

**34.** 求函数

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

在约束条件 $x+2y+3z=6$ 和 $x+3y+9z=9$ 下的最小值.

**35. 到原点的最小距离** 求在平面 $y+2z=12$ 和 $x+y=6$ 的交线上同原点最接近的点.

**36. 平面交线上的最大值** 求函数

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y - z^2$$

在平面 $2x-y=0$ 和 $y+z=0$ 的交线上可能具有的最大值.

**37. 相交曲线上的极值** 求函数

$$f(x,y,z) = x^2yz + 1$$

在平面 $z=1$ 同球面 $x^2+y^2+z^2=10$ 的相交曲线上的极值.

**38.** (a) **相交直线上的最大值** 求函数

$$w = xyz$$

在平面 $x+y+z=40$ 和 $x+y-z=0$ 的相交直线上的最大值.

(b) 提出几何论据，支持你求出的是 $w$ 的最大值而不是最小值的断言.

**39. 相交圆上的极值** 求函数

$$f(x,y,z) = xy + z^2$$

在平面 $y-x=0$ 同球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 相交的圆上的极值.

**40. 到原点的最小距离** 求在平面 $2y+4z=5$ 和锥面 $z^2=4x^2+4y^2$ 的相交曲线上最接近原点的点.

**41. 条件 $\nabla f=\lambda\nabla g$ 不是充分条件** 尽管 $\nabla f=\lambda\nabla g$ 是函数 $f(x,y)$ 在约束条件 $g(x,y)=0$ 和 $\nabla g\neq 0$ 下存在极值的必要条件，但是它本身并不能保证函数存在极值. 作为涉及的一个事例，试利用拉格朗日乘数法求函数 $f(x,y)=x+y$ 在约束条件 $xy=16$ 下的极大值. 这个方法将确定两个点 $(4,4)$ 和 $(-4,-4)$ 为极值的候选位置. 然而，和 $(x+y)$ 在双曲线 $xy=16$ 上不存在极大值. 在第一象限的这条双曲线上，你离原点越远，求和函数 $f(x,y)=x+y$ 变得越大.

**42. 最小二乘平面** 平面 $z=Ax+By+C$ 是对下列点 $(x_k,y_k,z_k)$ 作"拟合"得到的平面:

$(0,0,0)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$, $(1,0,-1)$

求 $A,B,C$ 的值使离差的平方和

$$\sum_{k=1}^{4}(Ax_k + By_k + C - z_k)^2$$

达到最小值.

**43.** (a) **球面上的最大值** 证明: 函数 $f(a,b,c)=a^2b^2c^2$ 在 $abc$ 笛卡儿坐标系中圆心在原点半径为 $r$ 的球面上的最大值为 $(r^2/3)^3$.

(b) **几何平均与算术平均** 利用(a)中的结果证明: 对于非负数 $a$, $b$, $c$, 有

$$(abc)^{1/3} \leqslant \frac{a+b+c}{3}$$

就是说，三个非负数的几何平均小于或等于它们的算术平均.

**44. 乘积的和** 令 $a_1$, $a_2$, …, $a_n$ 是 $n$ 个正数. 求

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

在约束条件

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$$

下的最大值.

**计算机探究**

在习题 45 ~ 50 中，用一种 CAS(计算机代数系统)执行实现求受约束极值的拉格朗日乘数法的下述步骤:

(a) 构造函数 $h=f-\lambda_1 g_1-\lambda_2 g_2$，其中 $f$ 是在约束条件 $g_1=0$ 和 $g_2=0$ 下求极值的函数.

(b) 确定 $h$ 的所有一阶偏导数，包括对 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 的偏导数，并且置它们等于 0.

(c) 求解从(b)中得到的包括 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 在内的所有未知量的方程组.

(d) 计算 $f$ 在(c)中求出的每个解点的值，并且选择满足习题中要求的约束条件的极值.

**45.** 求函数

$$f(x,y,z) = xy + yz$$

在约束条件 $x^2+y^2-2=0$ 和 $x^2+z^2-2=0$ 下的极小值.

**46.** 求函数

$$f(x,y,z) = xyz$$

在约束条件 $x^2+y^2-1=0$ 和 $x-z=0$ 下的极小值.

**47.** 求函数

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

在约束条件 $2y+4z-5=0$ 和 $4x^2+4y^2-z^2=0$ 下的极大值.

**48.** 求函数

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

在约束条件 $x^2-xy+y^2-z^2-1=0$ 和 $x^2+y^2-1=0$ 下的极小值.

**49.** 求函数

$$f(x,y,z,w) = x^2+y^2+z^2+w^2$$

在约束条件 $2x-y+z-w-1=0$ 和 $x+y-z+w-1=0$ 下的极小值.

**50.** 确定从直线 $y=x+1$ 到抛物线 $y^2=x$ 的距离.（提示：令$(x,y)$是直线上的一点和$(w,z)$是抛物线上的一点. 题目的要求是求$(x-w)^2+(y-z)^2$的极小值.）

## 12.9 二元函数的泰勒公式

这一节利用泰勒公式推导局部极值的二阶导数检验法(12.7 节)，以及二元函数线性化的误差公式(12.6 节). 在这两种推导中，泰勒公式的应用导致对公式的扩充，对二元函数提供所有各阶多项式逼近.

### 12.9.1 二阶导数检验法的推导

假设函数$f(x,y)$在包含点$P(a,b)$的一个开区域$R$内有连续的偏导数，其中$f_x=f_y=0$(见图 12.55). 令$h$和$k$是足够小的增量，使点$S(a+h,\ b+k)$以及联结$S$和$P$的线段位于$R$内部. 我们用参数方程

$$x = a+th,\quad y = b+tk,\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

表示线段$PS$. 如果$F(t)=f(a+th,b+tk)$，链式法则给出

$$F'(t) = f_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+f_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = hf_x+kf_y$$

由于$f_x$和$f_y$是可微的(它们有连续偏导数)，$F'$是$t$的可微函数，并且

$$\begin{aligned}F'' &= \frac{\partial F'}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial F'}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{\partial}{\partial x}(hf_x+kf_y)\cdot h+\frac{\partial}{\partial y}(hf_x+kf_y)\cdot k\\ &= h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy}\quad (f_{xy}=f_{yx})\end{aligned}$$

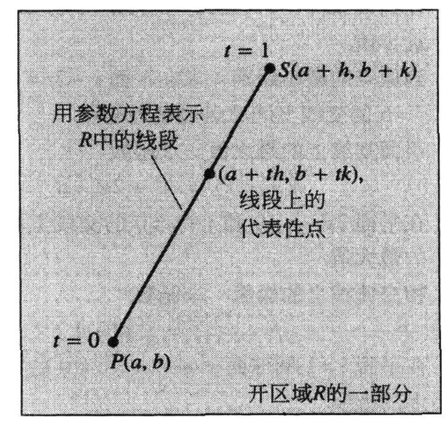



图 12.55 我们从用参数方程表示一条由 $P$ 到邻近一点 $S$ 的典型线段开始二阶导数检验法的推导

由于$F$和$F'$在$[0,1]$上连续，$F'$在$(0,1)$上是可微的，我们可以应用$n=2$和$a=0$的泰勒公式获得

$$F(1) = F(0)+F'(0)(1-0)+F''(c)\frac{(1-0)^2}{2}$$

$$F(1) = F(0)+F'(0)+\frac{1}{2}F''(c) \tag{1}$$

其中$c$是 0 和 1 之间的一个数. 通过以$f$书写式(1)，给出

$$f(a+h,b+k) = f(a,b)+hf_x(a,b)+kf_y(a,b)+\frac{1}{2}(h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy})\Big|_{(a+ch,b+ck)} \tag{2}$$

由于$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$，这就化简成

$$f(a+h,b+k)-f(a,b) = \frac{1}{2}(h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy})\Big|_{(a+ch,b+ck)} \tag{3}$$

$f$ 在 $(a,b)$ 存在极值由 $f(a+h,b+k)-f(a,b)$ 的符号决定. 按照式(3)，这个符号和

$$Q(c) = (h^2f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2f_{yy})\Big|_{(a+ch,b+ck)}$$

的符号相同.

现在，如果 $Q(0)\neq 0$，$Q(c)$ 的符号对于足够小的 $h$ 值和 $k$ 值将同 $Q(0)$ 的符号一样. 我们可以从 $f_{xx}$ 和 $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2$ 在 $(a,b)$ 的符号预测

$$Q(0) = h^2f_{xx}(a,b) + 2hkf_{xy}(a,b) + k^2f_{yy}(a,b) \tag{4}$$

的符号. 在式(4)的两端乘 $f_{xx}$，并且重新整理右端的项，得到

$$f_{xx}Q(0) = (hf_{xx}+kf_{xy})^2 + (f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)k^2 \tag{5}$$

我们从式(5)看出：

(1) 如果在 $(a,b)$ 有 $f_{xx}<0$ 和 $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$，那么对于 $h$ 和 $k$ 的所有足够小的非零值有 $Q(0)<0$，并且 $f$ 在 $(a,b)$ 有局部极大值.

(2) 如果在 $(a,b)$ 有 $f_{xx}>0$ 和 $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$，那么对于 $h$ 和 $k$ 的所有足够小的非零值有 $Q(0)>0$，并且 $f$ 在 $(a,b)$ 有局部极小值.

(3) 如果在 $(a,b)$ 有 $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2<0$，那么存在 $h$ 和 $k$ 的任意小的非零值的组合，对于这些组合有 $Q(0)>0$，而对于 $h$ 和 $k$ 的其他值有 $Q(0)<0$. 在曲面 $z=f(x,y)$ 上同点 $P_0(a,b,f(a,b))$ 任意接近的位置存在在 $P_0$ 之上的点和在 $P_0$ 之下的点，所以 $f$ 在 $(a,b)$ 有一个鞍点.

(4) 如果 $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=0$，我们需要用其他检验法. $Q(0)$ 等于零的可能性使我们对于 $Q(c)$ 的符号无法得出结论.

### 12.9.2 线性逼近的误差公式

我们需要证明，函数 $f(x,y)$ 的值及其在点 $(x_0,y_0)$ 的线性化 $L(x,y)$ 之间的差 $E(x,y)$ 满足

$$|E(x,y)| \leq \frac{1}{2}M(|x-x_0|+|y-y_0|)^2$$

假定函数 $f$ 在包含以 $(x_0,y_0)$ 为中心的一个闭矩形区域 $R$ 的整个开集上有连续的二阶偏导数. 数 $M$ 是 $|f_{xx}|$，$|f_{yy}|$ 和 $|f_{xy}|$ 在 $R$ 上的一个上界.

需要证明的不等式从式(2)推出. 在式(2)中分别用 $x_0$ 和 $y_0$ 代换 $a$ 和 $b$，用 $x-x_0$ 和 $y-y_0$ 代换 $h$ 和 $k$，并且把结果重新整理成

$$f(x,y) = \underbrace{f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}_{\text{线性化}L(x,y)}$$
$$\underbrace{+\frac{1}{2}\left((x-x_0)^2f_{xx} + 2(x-x_0)(y-y_0)f_{xy} + (y-y_0)^2f_{xy}\right)\Big|_{(x_0+c(x-x_0),\,y_0+c(y-y_0))}}_{\text{误差}E(x,y)}$$

这个公式揭示

$$|E| \leq \frac{1}{2}\left(|x-x_0|^2|f_{xx}| + 2|x-x_0||y-y_0||f_{xy}| + |y-y_0|^2|f_{yy}|\right)$$

因此，如果 $M$ 是 $|f_{xx}|$，$|f_{xy}|$ 和 $|f_{yy}|$ 在 $R$ 上的一个上界，就有

$$|E| \leq \frac{1}{2}\left(|x-x_0|^2M + 2|x-x_0||y-y_0|M + |y-y_0|^2M\right)$$
$$= \frac{1}{2}M\left(|x-x_0| + |y-y_0|\right)^2$$

### 12.9.3 二元函数的泰勒公式

前面推导出的 $F'$ 和 $F''$ 的公式可以通过对函数 $f(x,y)$ 应用算子

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad 和 \quad \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

得到. $F'$和 $F''$的公式是更一般公式

$$F^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}F(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y) \tag{6}$$

的前两个实例，这个公式说明，把 $d^n/dt^n$ 应用于 $F(t)$ 给出的结果，同把算子

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n$$

按二项式定理展开后应用于 $f(x,y)$ 得到的结果一样.

如果 $f$ 的直至 $n+1$ 阶偏导数在以点 $(a,b)$ 为中心的一个矩形区域 $R$ 上是连续的，我们可以把 $F(t)$ 的泰勒公式扩展成

$$F(t) = F(0)+F'(0)t+\frac{F''(0)}{2!}t^2+\cdots+\frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^{(n)}+余项$$

取 $t=1$，得到

$$F(1) = F(0)+F'(0)+\frac{F''(0)}{2!}+\cdots+\frac{F^{(n)}(0)}{n!}+余项$$

在最后这个级数的右端，我们把前面 $n$ 个导数代换成它们从公式(6)在 $t=0$ 求值的等价表达式，并且加相应的余项，获得下面的公式.

**函数 $f(x,y)$ 在点 $(a,b)$ 的泰勒公式**

假设 $f(x,y)$ 及其直至 $n+1$ 阶偏导数在以点 $(a,b)$ 为中心的一个开矩形区域 $R$ 上是连续的. 那么在整个 $R$ 上，

$$\begin{aligned}f(a+h,b+k) =& f(a,b)+(hf_x+kf_y)\big|_{(a,b)}+\frac{1}{2!}(h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy})\big|_{(a,b)}\\&+\frac{1}{3!}(h^3f_{xxx}+3h^2kf_{xxy}+3hk^2f_{xyy}+k^3f_{yyy})\big|_{(a,b)}+\cdots\\&+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\Bigg|_{(a,b)}+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\Bigg|_{(a+ch,b+ck)}\end{aligned} \tag{7}$$

公式中的前 $n$ 个导数项在 $(a,b)$ 求值. 最后一项在联结 $(a,b)$ 和 $(a+h,b+k)$ 的线段上的某个点求值.

如果 $(a,b)=(0,0)$ 并且把 $h$ 和 $k$ 作为自变量看待(现在把它们记为 $x$ 和 $y$)，那么公式(7)具有下述更为简单的形式.

**函数 $f(x,y)$ 在原点的泰勒公式**

$$\begin{aligned}f(x,y) =& f(0,0)+xf_x+yf_y+\frac{1}{2!}(x^2f_{xx}+2xyf_{xy}+y^2f_{yy})\\&+\frac{1}{3!}(x^3f_{xxx}+3x^2yf_{xxy}+3xy^2f_{xyy}+y^3f_{yyy})+\cdots+\frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\\&+\frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\Bigg|_{(cx,cy)}\end{aligned} \tag{8}$$

公式中的前 $n$ 个导数项在(0,0)求值. 最后一项在联结原点和$(x,y)$的线段上的某个点求值.

泰勒公式提供二元函数的多项式逼近. 前 $n$ 个导数项给出多项式; 最后一项给出逼近误差. 泰勒公式的前三项给出函数的线性化. 为了改进线性逼近, 我们在公式中添加更高次幂项.

**例** 求函数 $f(x,y)=\sin x \sin y$ 在原点附近的二次逼近. 如果 $|x|\leqslant 0.1$ 和 $|y|\leqslant 0.1$, 逼近的精度如何?

**解** 在公式(8)中取 $n=2$,

$$f(x,y)=f(0,0)+(xf_x+yf_y)+\frac{1}{2}(x^2f_{xx}+2xyf_{xy}+y^2f_{yy})$$
$$+\frac{1}{6}(x^3f_{xxx}+3x^2y\,f_{xxy}+3xy^2f_{xyy}+y^3f_{yyy})_{(cx,cy)}$$

由于

$$f(0,0)=\sin x\sin y|_{(0,0)}=0 \quad f_{xx}(0,0)=-\sin x\sin y|_{(0,0)}=0$$
$$f_x(0,0)=\cos x\sin y|_{(0,0)}=0 \quad f_{xy}(0,0)=\cos x\cos y|_{(0,0)}=1$$
$$f_y(0,0)=\sin x\cos y|_{(0,0)}=0 \quad f_{yy}(0,0)=-\sin x\sin y|_{(0,0)}=0$$

我们有

$$\sin x\sin y\approx 0+0+0+\frac{1}{2}(x^2(0)+2xy(1)+y^2(0))$$
$$\sin x\sin y\approx xy$$

逼近的误差为

$$E(x,y)=\frac{1}{6}(x^3f_{xxx}+3x^2yf_{xxy}+3xy^2f_{xyy}+y^3f_{yyy})|_{(cx,cy)}$$

其中三阶导数的绝对值不会超过 1, 因为它们是正弦函数和全弦函数的乘积. 此外, $|x|\leqslant 0.1$, $|y|\leqslant 0.1$. 因此, 在舍入后

$$|E(x,y)|\leqslant\frac{1}{6}((0.1)^3+3(0.1)^3+3(0.1)^3+(0.1)^3)=\frac{8}{6}(0.1)^3\leqslant 0.001\,34$$

这个误差在 $|x|\leqslant 0.1$ 和 $|y|\leqslant 0.1$ 时不超过 0.001 34. ■

## 习题 12.9

在习题 1 ~ 10 中, 利用函数 $f(x,y)$ 在原点的泰勒公式求 $f$ 在原点邻近的二次逼近和三次逼近.

1. $f(x,y)=xe^y$.
2. $f(x,y)=e^x\cos y$.
3. $f(x,y)=y\sin x$.
4. $f(x,y)=\sin x\cos y$.
5. $f(x,y)=e^x\ln(1+y)$.
6. $f(x,y)=\ln(2x+y+1)$.
7. $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$.
8. $f(x,y)=\cos(x^2+y^2)$.
9. $f(x,y)=\dfrac{1}{1-x-y}$.
10. $f(x,y)=\dfrac{1}{1-x-y+xy}$.
11. 利用泰勒公式求函数 $f(x,y)=\cos x\cos y$ 在原点的二次逼近. 估计这个逼近在 $|x|\leqslant 0.1$ 和 $|y|\leqslant 0.1$ 时的误差.
12. 利用泰勒公式求函数 $f(x,y)=e^x\sin y$ 在原点的二次逼近. 估计这个逼近在 $|x|\leqslant 0.1$ 和 $|y|\leqslant 0.1$ 时的误差.

## 第 12 章复习指导问题

1. 什么是二元和三元实值函数? 举出一些例子.
2. 在平面内或者空间中, 集合是开集和闭集的含义是什么? 举出开集和闭集的一些例子. 此外, 举出一些既非开集也非闭集的例子.
3. 如何用图形方式显示二元函数 $f(x, y)$ 的值? 如何用同样方式显示三元函数 $f(x, y, z)$ 的值?

4. 函数$f(x,y)$当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时具有极限$L$的含义是什么？二元函数的极限有哪些基本性质？
5. 在什么情况下，二元（或三元）函数在其定义域内的一点是连续的？举出函数在某些点连续而在其他点不连续的一些例子.
6. 关于连续函数的代数组合和复合函数能够得出什么结论？
7. 说明判定函数极限不存在的双路径检验法.
8. 如何定义函数$f(x,y)$的偏导数$\partial f/\partial x$和$\partial f/\partial y$？如何解释和求偏导数？
9. 二元函数在一阶偏导数和连续性之间的关系，同一元实值函数在一阶导数和连续性之间的关系有何差异？举一个例子.
10. 什么是混合二阶偏导数的混合导数定理？它对于计算二阶和更高阶偏导数能够提供什么帮助？举出一些例子.
11. 函数$f(x, y)$是可微的含义是什么？函数的增量定理关于可微性说出什么？
12. 在某些情况下，如何从考察函数$f(x,y)$的偏导数$f_x$和$f_y$判定$f$是可微的？$f$在一点的可唯性和连续性之间有什么关系？
13. 什么是链式法则？二元函数的链式法则取什么形式？三元函数和定义在曲面上的函数的链式法则取什么形式？如何图示这三种不同的链式法则？举出一些例子. 用什么图示可以让我们记忆链式法则所有不同的形式？
14. 什么是函数$f(x,y)$在单位向量$\mathbf{u}$的方向上一点$P_0$的导数？它描述什么变化率？方向导数有什么几何解释？举出一些例子.
15. 什么是可微函数$f(x,y)$的梯度向量？它同函数的方向导数有何关系？对于三元函数叙述类似的结果.
16. 如何求可微函数$f(x,y)$层曲线上一点的切线？如何求可微函数$f(x,y,z)$层曲面上一点的切平面和法线？举出一些例子.
17. 如何用方向导数估计函数的改变？
18. 如何求二元函数$f(x,y)$在一点$(x_0,y_0)$的线性化？为什么可能需要这样做？如何求三元函数的线性化？
19. 关于二元和三元函数的线性逼近的精度，可以得出什么结论？
20. 对于可微函数$f(x,y)$的值，当点$(x,y)$从$(x_0,y_0)$移动到邻近一点$(x_0+dx,y_0+dy)$时，怎样估计函数的改变？
21. 如何定义可微函数$f(x,y)$的局部极大值、局部极小值和鞍点？举出一些例子.
22. 为了确定函数$f(x,y)$的局部极值，可以用什么导数检验法？它们如何使你缩小寻找局部极值的范围？举出一些例子.
23. 如何求连续函数$f(x,y)$在$xy$平面内的闭有界区域上的极值？举一个例子.
24. 描述拉格朗日乘数法，并且举出一些例子.
25. 函数$f(x,y)$的泰勒公式如何产生多项式逼近和误差估计？

## 第 12 章实习习题

在习题 1 ~ 4 中，求给定函数的定义域和值域，并且确定函数的层曲线. 画出典型的层曲线草图.

1. $f(x,y)=9x^2+y^2$.
2. $f(x,y)=e^{x+y}$.
3. $g(x,y)=1/xy$.
4. $g(x,y)=\sqrt{x^2-y}$.

在习题 5 ~ 8 中，求给定函数的定义域和值域，并且确定函数的层曲线. 画出典型的层曲线草图.

5. $f(x,y,z)=x^2+y^2-z$.
6. $g(x,y,z)=x^2+4y^2+9z^2$.
7. $h(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$.
8. $k(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2+1}$.

在习题 9 ~ 14 中，求函数的极限值.

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi,\ln 2)} e^y\cos x$.
10. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2+y}{x+\cos y}$.
11. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{x-y}{x^2-y^2}$.
12. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{x^3y^3-1}{xy-1}$.
13. $\lim\limits_{P\to(1,-1,e)}\ln|x+y+z|$.
14. $\lim\limits_{P\to(1,-1,-1)}\tan^{-1}(x+y+z)$.

在习题 15 和 16 中，通过考察趋近极限的不同路径，证明函数的极限不存在.

15. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y\neq x^2}}\dfrac{y}{x^2-y}$.
16. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}}\dfrac{x^2+y^2}{xy}$.

17. **连续延拓** 令
$f(x,y)=(x^2-y^2)/(x^2+y^2),(x,y)\neq(0,0)$
是否可能按某种方式定义$f(0,0)$使函数$f$在原点连续？为什么？

18. **连续延拓** 令

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x-y)}{|x|+|y|}, & |x|+|y|\neq 0\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

函数$f$是否在原点连续？为什么？

在习题19～24中，求函数对于每个变量的偏导数.

**19.** $g(r,\theta)=r\cos\theta+r\sin\theta$.

**20.** $f(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\tan^{-1}\frac{y}{x}$.

**21.** $f(R_1,R_2,R_3)=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$.

**22.** $h(x,y,z)=\sin(2\pi x+y-3z)$.

**23.** $P(n,R,T,V)=\frac{vRT}{V}$(理想气体定律).

**24.** $f(r,l,T,w)=\frac{1}{2rl}\sqrt{\frac{T}{\pi w}}$.

在习题25～28中，求函数的二阶偏导数.

**25.** $g(x,y)=y+\frac{x}{y}$.

**26.** $g(x,y)=e^x+y\sin x$.

**27.** $f(x,y)=x+xy-5x^3+\ln(x^2+1)$.

**28.** $f(x,y)=y^2-3xy+\cos y+7e^y$.

**29.** 假设

$$w=\sin(xy+\pi),\quad x=e^t,\quad y=\ln(t+1)$$

求函数$w$在$t=0$的导数$dw/dt$.

**30.** 假设

$$w=xe^y+y\sin z-\cos z$$

$$x=2\sqrt{t},\ y=t-1+\ln t,\ z=\pi t$$

求函数$w$在$t=1$的导数$dw/dt$.

**31.** 假设

$$w=\sin(2x-y),\ x=r+\sin s,\ y=rs$$

求函数$w$当$r=\pi$和$s=0$时的偏导数$\partial w/\partial r$和$\partial w/\partial s$.

**32.** 假设

$$w=\ln\sqrt{1+x^2}-\tan^{-1}x,\quad x=2e^u\cos v$$

求函数$w$当$u=v=0$时的偏导数$\partial w/\partial u$和$\partial w/\partial v$.

**33.** 求函数

$$f(x,y,z)=xy+yz+xz$$

在曲线

$$x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad z=\cos 2t$$

上对于$t$的导数在$t=1$的值.

**34.** 证明：若$w=f(s)$是$s$的任意可微函数，且$s=y+5x$，则

$$\frac{\partial w}{\partial x}-5\frac{\partial w}{\partial y}=0$$

在习题35和36中，假定方程定义$y$为$x$的可微函数，求导数$dy/dx$在点$P$的值.

**35.** $1-x-y^2-\sin xy=0$，$P(0,1)$.

**36.** $2xy+e^{x+y}-2=0$，$P(0,\ln 2)$.

在习题37～40中，求函数$f$在点$P_0$增加最快和减少最快的方向，并且求$f$在每个方向的导数. 此外，求$f$在向量$\mathbf{v}$的方向在$P_0$的导数.

**37.** $f(x,y)=\cos x\cos y$，$P_0(\pi/4,\pi/4)$，$\mathbf{v}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$.

**38.** $f(x,y)=x^2e^{-2y}$，$P_0(1,0)$，$\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$.

**39.** $f(x,y,z)=\ln(2x+3y+6z)$，$P_0(-1,-1,1)$，$\mathbf{v}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+6\mathbf{k}$.

**40.** $f(x,y,z)=x^2+3xy-z^2+2y+z+4$，$P_0(0,0,0)$，$\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

**41. 在速度向量方向的导数** 求函数

$$f(x,y,z)=xyz$$

在螺旋线

$$\mathbf{r}(t)=(\cos 3t)\mathbf{i}+(\sin 3t)\mathbf{j}+3t\mathbf{k}$$

的速度向量方向在$t=\pi/3$的导数.

**42. 最大方向导数** 函数

$$f(x,y,z)=xyz$$

在点$(1,1,1)$的方向导数可能取的最大值是多少？

**43. 具有给定值的方向导数** 函数$f(x,y)$在点$(1,2)$在朝向$(2,2)$的方向具有导数2，而在朝向$(1,1)$的方向具有导数$-2$.

(a)求$f_x(1,2)$和$f_y(1,2)$.

(b)求$f$在$(1,2)$在朝向点$(4,6)$的方向的导数.

**44.** 假定$f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$是可微的，下述陈述中哪些是正确的？提出答案的理由.

(a)如果$\mathbf{u}$是单位向量，$f$在$(x_0,y_0)$在$\mathbf{u}$的方向的导数是

$$(f_x(x_0,y_0)\mathbf{i}+f_y(x_0,y_0)\mathbf{j})\cdot\mathbf{u}$$

(b)$f$在$(x_0,y_0)$在$\mathbf{u}$的方向的导数是一个向量.

(c)$f$在$(x_0,y_0)$的方向导数在$\nabla f$方向具有它的最大值.

(d)$\nabla f$在$(x_0,y_0)$同曲线$f(x,y)=f(x_0,y_0)$正交.

在习题45和46中，一起画出曲面$f(x,y,z)=c$和$\nabla f$在给定点的草图.

**45.** $x^2+y+z^2=0$；$(0,-1,\pm1)$，$(0,0,0)$.

**46.** $y^2+z^2=4$；$(2,\pm2,0)$，$(2,0,\pm2)$.

在习题47和48中，求同层曲面$f(x,y,z)=c$在点$P_0$相切的平面的方程. 此外，求同这个曲面在点$P_0$正交的直线的参数方程.

**47.** $x^2-y-5z=0$，$P_0(2,-1,1)$.

**48.** $x^2+y^2+z=4$，$P_0(1,1,2)$.

在习题49和50中，求同曲面$z=f(x,y)$在给定点相切的平面的方程.

49. $z=\ln(x^2+y^2)$，$(0,1,0)$.

50. $z=1/(x^2+y^2)$，$(1,1,1/2)$.

在习题 51 和 52 中，求同层曲线 $f(x,y)=c$ 在点 $P_0$ 相切和正交的直线的方程. 然后，一起画出在 $P_0$ 的这两条直线以及层曲线和 $\nabla f$ 的草图.

51. $y-\sin x=1$，$P_0(\pi,1)$.

52. $\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}=\frac{3}{2}$，$P_0(1,2)$.

在习题 53 和 54 中，求同曲面的相交曲线在给定点相切的直线的参数方程

53. 曲面：$x^2+2y+2z=4$，$y=1$；
点：$(1,1,1/2)$.

54. 曲面：$x+y^2+z=2$，$y=1$；
点：$(1/2,1,1/2)$.

在习题 55 和 56 中，求函数 $f(x,y)$ 在给定点 $P_0$ 的线性化 $L(x,y)$. 然后，求逼近 $f(x,y)\approx L(x,y)$ 的误差值 $E$ 在矩形区域 $R$ 上的一个上界.

55. $f(x,y)=\sin x\cos y$，$P_0(\pi/4,\pi/4)$；
$R$：$\left|x-\frac{\pi}{4}\right|\leqslant 0.1$，$\left|y-\frac{\pi}{4}\right|\leqslant 0.1$.

56. $f(x,y)=xy-3y^2+2$，$P_0(1,1)$；
$R$：$|x-1|\leqslant 0.1$，$|y-1|\leqslant 0.2$.

在习题 57 和 58 中，求函数 $f(x,y,z)$ 在给定点的线性化.

57. $f(x,y,z)=xy+2yz-3xz$ 在 $(1,0,0)$ 和 $(1,1,0)$.

58. $f(x,y,z)=\sqrt{2}\cos x\sin(y+z)$ 在 $(0,0,\pi/4)$ 和 $(\pi/4,\pi/4,0)$.

在习题 59 ~ 64 中，考察函数 $f(x,y)$ 取局部极大值和局部极小值的点以及鞍点. 求每个函数在这些点的值.

59. $f(x,y)=x^2-xy+y^2+2x+2y-4$.

60. $f(x,y)=5x^2+4xy-2y^2+4x-4y$.

61. $f(x,y)=2x^3+3xy+2y^3$.

62. $f(x,y)=x^3+y^3-3xy+15$.

63. $f(x,y)=x^3+y^3+3x^2-3y^2$.

64. $f(x,y)=x^4-8x^2+3y^2-6y$.

在习题 65 ~ 72 中，求函数 $f$ 在区域 $R$ 上的绝对极大值和绝对极小值.

65. $f(x,y)=x^2+xy+y^2-3x+3y$；
$R$：由直线 $x+y=4$ 在第一象限切割出的三角形区域.

66. $f(x,y)=x^2-y^2-2x+4y+1$；
$R$：第一象限内以坐标轴以及直线 $x=4$ 和 $y=2$ 为界的区域.

67. $f(x,y)=y^2-xy-3y+2x$；
$R$：由直线 $x=\pm 2$ 和 $y=\pm 2$ 包围的正方形区域.

68. $f(x,y)=2x+2y-x^2-y^2$；
$R$：第一象限内以坐标轴以及直线 $x=2$ 和 $y=2$ 为界的正方形区域.

69. $f(x,y)=x^2-y^2-2x+4y$；
$R$：下方以 $x$ 轴为界、上方以直线 $y=x+2$ 为界和右边以直线 $x=2$ 为界的三角形区域.

70. $f(x,y)=4xy-x^4-y^4+16$；
$R$：下方以直线 $y=-2$ 为界、上方以直线 $y=x$ 为界和右边以直线 $x=2$ 为界的三角形区域.

71. $f(x,y)=x^3+y^3+3x^2-3y^2$；
$R$：由直线 $x=\pm 1$ 和 $y=\pm 1$ 包围的正方形区域.

72. $f(x,y)=x^3+3xy+y^3+1$；
$R$：由直线 $x=\pm 1$ 和 $y=\pm 1$ 包围的正方形区域.

73. **圆上的极值** 求函数
$$f(x,y)=x^3+y^2$$
在圆 $x^2+y^2=1$ 上的极值.

74. **圆上的极值** 求函数
$$f(x,y)=xy$$
在圆 $x^2+y^2=1$ 上的极值.

75. **圆盘上的极值** 求函数
$$f(x,y)=x^2+3y^2+2y$$
在单位圆盘 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上的极值.

76. **圆盘上的极值** 求函数
$$f(x,y)=x^2+y^2-3x-xy$$
在圆盘 $x^2+y^2\leqslant 9$ 上的极值.

77. **球面上的极值** 求函数
$$f(x,y,z)=x-y+z$$
在单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的极值.

78. **到原点的最小距离** 求曲面
$$z^2-xy=4$$
上同原点最接近的点.

79. **箱体的最低成本** 假定闭长方形箱体的体积为 $V\ \mathrm{cm}^3$. 箱体制作材料的成本，顶面和底面为 $a$ 美分/$\mathrm{cm}^2$，前面和后面为 $b$ 美分/$\mathrm{cm}^2$，其余两面为 $c$ 美分/$\mathrm{cm}^2$. 使箱体材料总成本达到最小值的箱体尺寸是什么？

80. **最小体积** 求通过点 $(2,1,2)$ 的平面
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$
以及从第一卦限切割出的最小体积.

81. **曲面相交曲线上的极值** 求函数
$$f(x,y,z)=x(y+z)$$
在正圆柱面 $x^2+y^2=1$ 同双曲柱面 $xz=1$ 的相交

曲线上的极值.

**82. 平面同圆锥面的相交曲线到原点的最小距离** 求在平面 $x+y+z=1$ 同圆锥面 $z^2=2x^2+2y^2$ 的相交曲线上离原点最近的点.

**83.** 令

$$w=f(r,\theta),\quad r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

求函数 $w$ 的偏导数 $\partial w/\partial x$ 和 $\partial w/\partial y$，并且用 $r$ 和 $\theta$ 表示所得结果.

**84.** 令

$$z=f(u,v),\quad u=ax+by,\quad v=ax-by$$

用 $f_u$，$f_v$ 以及常数 $a$ 和 $b$ 表示函数 $z$ 的偏导数 $z_x$ 和 $z_y$.

**85.** 令

$$w=u^3+\tanh u+\cos u,\quad u=ax+by$$

其中 $a$ 和 $b$ 为常数. 证明

$$a\frac{\partial w}{\partial y}=b\frac{\partial w}{\partial x}$$

**86. 应用链式法则** 设

$$w=\ln(x^2+y^2+2z)$$

$$x=r+s,\quad y=r-s,\quad z=2rs$$

通过链式法则求函数 $w$ 的偏导数 $w_r$ 和 $w_s$. 然后用其他方法检验答案.

**87. 向量间的角** 方程

$$e^u\cos v-x=0 \text{ 和 } e^u\sin v-y=0$$

定义 $u$ 和 $v$ 为 $x$ 和 $y$ 的可微函数. 证明：向量

$$\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}\quad \text{和}\quad \frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

间的角为常数.

**88. 极坐标与二阶导数** 函数 $f(x,y)$ 在引入极坐标

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$$

后改变成 $g(r,\theta)$. 求函数 $g$ 的二阶导数 $\partial^2g/\partial\theta^2$ 在点 $(r,\theta)=(2,\pi/2)$ 的值，已知在这个点

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=1$$

**89. 平行于平面的法线** 求曲面

$$(y+z)^2+(z-x)^2=16$$

上的点，曲面在那些点的法线同 $yz$ 平面平行.

**90. 平行于 $xy$ 平面的切平面** 求曲面

$$xy+yz+zx-x-z^2=0$$

上的点，曲面在那些点的切平面同 $xy$ 平面平行.

**91. 当梯度同位置向量平行时的函数** 假定函数 $f(x,y,z)$ 的梯度 $\nabla f$ 始终同位置向量 $x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 平行. 证明：对于任何 $a$，

$$f(0,0,a)=f(0,0,-a)$$

**92. 在所有方向有单侧方向导数但是不存在梯度的函数** 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 函数 $f(x,y,z)$ 在方向 $\boldsymbol{u}=u_1\boldsymbol{i}+u_2\boldsymbol{j}+u_3\boldsymbol{k}$ 的单侧方向导数为

$$\lim_{s\to0^+}\frac{f(x_0+su_1,\ y_0+su_2,\ z_0+su_3)-f(x_0,y_0,z_0)}{s}$$

证明：在原点，函数

$$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

在任何方向的单侧导数等于1，但是 $f$ 在原点不存在梯度向量.

**93. 通过原点的法线** 证明：在点 $(1,1,1)$ 同曲面 $xy+z=2$ 正交的直线通过原点.

**94. 切平面与法线**

(a) 画出曲面 $x^2-y^2+z^2=4$ 的草图.

(b) 求在点 $(2,-3,3)$ 同这个曲面正交的向量. 在图中添加这个向量.

(c) 求这个曲面在 $(2,-3,3)$ 的切平面和法线的方程.

**95. 测量管道的容积** 计划计算一条直径大约为36英寸和长度为1英里的管道的内部容积. 应对长度和直径哪一个的测量更加细心？为什么？

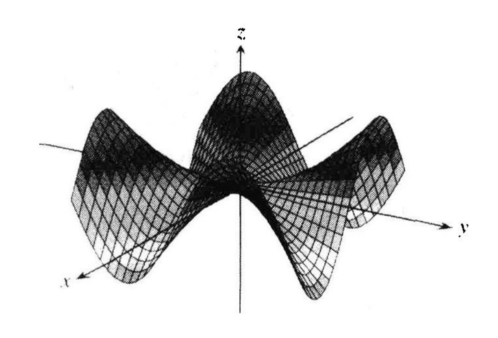
**96. 对改变的敏感度** 函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2-3$ 在点 $(1,2)$ 附近对自变量 $x$ 和 $y$ 之中哪一个的改变更敏感？你怎样知道？

## 第12章补充和提高习题

**1. 以原点为鞍点的函数** 如果在12.2节中作习题50时，知道函数

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(见右边的附图)在 $(0,0)$ 是连续的. 求 $f_{xy}(0,0)$ 和 $f_{yx}(0,0)$.




**2. 从一阶偏导数求函数** 求函数 $w=f(x,y)$，假定它的一阶偏导数为

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 1 + e^x \cos y, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 2y - e^x \sin y$$

并且它在点$(\ln 2,0)$的值是 $\ln 2$.

3. **莱布尼茨法则的一种证明** 莱布尼茨法则表明，若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上是连续的，并且$u(x)$和$v(x)$是在$[a,b]$内取值的可微函数，则有

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}$$

通过设置

$$g(u,v) = \int_u^v f(t)\,dt, \quad u = u(x), \quad v = v(x)$$

并且用链式法则计算 $dg/dx$，证明这个法则.

4. **求具有二阶偏导数约束的函数** 假定$f(r)$是$r$的二次可微函数，其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，并且

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$$

证明：对于某些常数$a$和$b$，

$$f(r) = \frac{a}{r} + b$$

5. **齐次函数** 如果函数$f(x,y)$对于所有的$t,x$和$y$满足$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$（$n$是非负整数），$f$称为$n$次齐次函数. 对于这样一个(充分可微的)函数，证明：

(a) $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = nf(x,y)$.

(b) $x^2\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) + 2xy\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + y^2\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = n(n-1)f$.

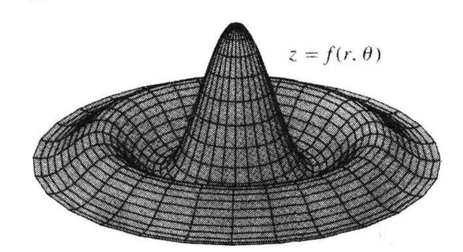
6. **极坐标中的曲面** 令

$$f(r,\theta) = \begin{cases} \dfrac{\sin 6r}{6r}, & r \neq 0 \\ 1, & r = 0 \end{cases}$$

其中$r$和$\theta$是极坐标. 求

(a) $\lim_{r\to 0} f(r,\theta)$； (b) $f_r(0,0)$；

(c) $f_\theta(r,\theta)$，$r\neq 0$.




7. **位置向量的特性** 令

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \quad r = |\boldsymbol{r}|$$

(a) 证明$\nabla r = \boldsymbol{r}/r$. (b) 证明$\nabla(r^n) = nr^{n-2}\boldsymbol{r}$.

(c) 求梯度等于$\boldsymbol{r}$的函数. (d) 证明 $\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r} = r\,dr$.

(e) 证明对于任何常向量$\boldsymbol{A}$有$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{A}$.

8. **同切线正交的梯度** 假定可微函数$f(x,y)$沿可微曲线$x=g(t)$，$y=h(t)$取常数值$c$；就是说，对于所有$t$值，

$$f(g(t), h(t)) = c$$

在这个方程的两端对$t$求微分，证明$\nabla f$同曲线上每个点的切向量正交.

9. **同曲面相切的曲线** 证明：曲线

$$\boldsymbol{r}(t) = (\ln t)\boldsymbol{i} + (t\ln t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$$

同曲面

$$xz^2 - yz + \cos xy = 1$$

在点$(0,0,1)$相切.

10. **同曲面相切的曲线** 证明：曲线

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\frac{t^3}{4} - 2\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{4}{t} - 3\right)\boldsymbol{j} + \cos(t-2)\boldsymbol{k}$$

同曲面

$$x^3 + y^3 + z^3 - xyz = 0$$

在点$(0,-1,1)$相切.

11. **曲面上的极值** 证明：在曲面

$$z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$$

上$z$的极大值和极小值仅可能出现在点$(0,0)$和$(3,3)$. 再证明：$z$在$(0,0)$既无极大值也无极小值. 最后确定$z$在$(3,3)$是否有一个极大值或者极小值.

12. **闭集的第一卦限内的极大值** 求函数

$$f(x,y) = 6xye^{-(2x+3y)}$$

在闭集的第一卦限(包含非负的坐标轴)内的极大值.

13. **从第一卦限切割的最小体积** 求以平面$x=0$，$y=0$，$z=0$以及同椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

在第一卦限内一点相切的平面为界的区域的最小体积.

14. **从 $xy$ 平面内的直线到抛物线的最小距离** 通过使函数

$$f(x,y,u,v) = (x-u)^2 + (y-v)^2$$

在约束条件

$$y = x + 1 \text{ 和 } u = v^2$$

下取极小值，求$xy$平面内从直线$y=x+1$到抛物线$y^2=x$的最小距离.

15. **一阶偏导数的有界性蕴涵连续性** 证明下述定理：若函数$f(x,y)$定义在$xy$平面的一个开区域$R$内，并且$f_x$和$f_y$在$R$上是有界的，则$f(x,y)$在$R$上是连续的.（一阶偏导数的有界性假设是必需的.）

16. 假定

$$r(t) = g(t)i + h(t)j + k(t)k$$

是在可微函数$f(x,y,z)$的定义域内的光滑曲线. 试描述 $df/dt$，$\nabla f$ 和 $v = dr/dt$ 之间的关系. 对于曲线上的内点，如果$f$具有相对于它在曲线上其他值的极值，那么在这些点关于$\nabla f$和 $v$ 可以得出什么结论？提出答案的理由.

17. **从偏导数求函数** 假定$f$和$g$是$x$和$y$的函数，并且满足

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \quad 和 \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$$

同时假定

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0,\quad f(1,2) = g(1,2) = 5,\quad f(0,0) = 4$$

求$f(x,y)$和$g(x,y)$.

18. **函数变化率的变化率** 我们知道，如果$f(x, y)$是二元函数，$u = ai + bj$是单位向量，那么

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b$$

是$f(x,y)$在点$(x,y)$在 $u$ 的方向的变化率. 对于$f(x,y)$在$(x,y)$在方向 $u$ 的变化率的变化率给出一个类似的公式.

19. **热探测粒子的路径** 热探测粒子具有这样的特性，它在 $xy$ 平面内任何点$(x,y)$的运动方向是最大的温度增加方向. 如果在点$(x,y)$的温度为 $T(x,y) = -e^{-2y}\cos x$，求热探测粒子在点$(\pi/4,0)$的路径的方程 $y=f(x)$.

20. **质点弹回的速度** 在直线上以常速度 $i+j-5k$ 运动的质点通过点$(0,0,30)$并且撞击曲面 $z = 2x^2+3y^2$. 质点从曲面弹回，其反射角等于入射角. 假定没有损失速度，质点弹回的速度是多大？简化你的答案.

21. **同曲面相切的方向导数** 令 $S$ 是曲面$f(x,y) = 10-x^2-y^2$ 的图形. 假定空间中每点$(x,y,z)$的温度是

$$T(x,y,z) = x^2y + y^2z + 4x + 14y + z$$

(a) 对于在点$(0,0,10)$同 $S$ 相切的所有可能的方向中，哪个方向将使温度在$(0,0,10)$的变化率取最大值？

(b) 在点$(1,1,8)$同 $S$ 相切的哪个方向将使温度的变化率取最大值？

22. **钻另外一眼井** 在平坦地面上，地质学家们垂直向下钻一眼井，并且在 1 000 英尺深处碰到矿床. 他们在第一眼井北面 100 英尺钻第二眼井，在 950 英尺深处碰到矿床. 在第一眼井东面 100 英尺钻第三眼井，在 1 025 英尺深处碰到矿床. 地质学家们有理由相信矿床呈圆顶形，并且出于经济上的考虑，他们将再寻找矿床离地面最近的地方钻井. 假定地面是 $xy$ 平面，你对地质学家们建议在第一眼井的什么方向钻他们的第四眼井？

# 第13章 多重积分

**概述** 我们在这一章讨论二元函数$f(x,y)$在平面区域上的积分，以及三元函数$f(x,y,z)$在空间区域上的积分. 把这两种多重积分定义为逼近黎曼和的极限，同第5章讲述的一元函数的积分非常相似.

## 13.1 矩形区域上的二重积分和累次积分

我们在第5章把连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分定义为黎曼和的极限. 在这一节，把这种思想扩展到定义二元连续函数$f(x,y)$在平面内有界矩形区域$R$上的二重积分. 在两种情况下，积分都是逼近黎曼和的极限. 一元函数$f(x)$的积分的黎曼和是通过下述步骤获得的：把有限区间划分成细小的子区间，用$f$在每个子区间内一点的值乘子区间的宽度，然后对所有乘积求和. 我们把类似的划分、计算乘积以及求和的方法用于构造二重积分.

### 13.1.1 二重积分

我们从考察矩形这种察简单的平面区域开始对二重积分的研究. 考虑定义在矩形区域

$$R:\quad a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d$$

上的函数$f(x,y)$. 我们用平行于$x$轴和$y$轴的直线网把$R$细分成细小的矩形（见图13.1）. 这些直线把$R$分成$n$个矩形块，这种矩形块的数目随着每个矩形块的长度和宽度减小而增大. 这些矩形块构成$R$的一个**划分**. 一个小矩形块的面积$\Delta A$是其宽度$\Delta x$和长度$\Delta y$的乘积：$\Delta A=\Delta x\Delta y$. 如果按某种顺序对划分$R$的小矩形块编号，那么它们的面积由数值$\Delta A_1$，$\Delta A_2$，$\cdots$，$\Delta A_n$给出，其中$\Delta A_k$是第$k$个小矩形块的面积.

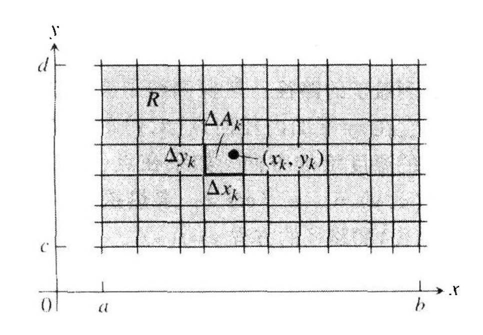



图13.1 把区域$R$划分成面积为$\Delta A_k=\Delta x_k\Delta y_k$的小矩形的网格

为了构成在区域$R$上的黎曼和，在第$k$个小矩形中选择一点$(x_r,y_k)$，用$f$在那个点的值乘面积$\Delta A_k$，然后把这些乘积加在一起：

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta A_k$$

对于$S_n$，我们可以获得不同的值，这取决于在第$k$个小矩形中如何选择$(x_k,y_k)$.

我们所关心的是，在$R$划分中当所有小矩形的长和宽趋近零时，这些黎曼和会发生什么情况. 一个划分$P$的**范数**是划分中任何小矩形的最大长度或宽度，$P$的范数记为$\|P\|$. 如果$\|P\|=0.1$，那么$R$划分中所有小矩形的长度和宽度至多为0.1. 在某些情况下，黎曼和当$P$的范数趋近零（记为$\|P\|\to0$）时收敛. 这时，把得到的极限记为

$$\lim_{\|P\|\to0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta A_k$$

随着$\|P\|\to0$并且小矩形变短和变窄，它们的数目增加，所以也可以把这个极限写成

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta A_k$$

并且理解为当 $n\to\infty$ 和 $\|P\|\to 0$ 时 $\Delta A_k\to 0$.

在这种类型的极限中，包含着许多选择. 首先，小矩形的集合是由确定 $R$ 的矩形划分的纵向直线和横向直线的网格决定的. 其次，在产生的每个小矩形内要选择计算 $f$ 函数值的任意点 $(x_k, y_k)$. 这些选择共同决定一个黎曼和. 为了构成极限，我们要一再重复这个完整的过程，选择使矩形长度和宽度同时趋近零以及矩形数目趋于无穷大的划分.

当黎曼和的极限存在时，对于无论作出的什么选择都给出同一极限值，那么就说函数 $f$ 是**可积的**，并且把这个极限称为 $f$ 在 $R$ 上的**二重积分**，记为

$$\iint_R f(x,y)\,dA \quad 或 \quad \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

可以证明，如果 $f(x,y)$ 是在整个区域 $R$ 上的连续函数，那么 $f$ 是可积的，同第 5 章讨论的一元函数的情形一样. 许多非连续函数也是可积的，其中包括只在有限多个点不连续的函数，或者在光滑曲线上不连续的函数. 我们把这些论断留到高等微积分教程证明.

### 13.1.2 二重积分作为体积

当 $f(x,y)$ 是 $xy$ 平面内区域 $R$ 上的正值函数时，可以把 $f$ 在 $R$ 上的二重积分解释为 $xy$ 平面上下方以 $R$ 为界和上方以曲面 $z=f(x,y)$ 为界的三维立体区域（见图 13.2）的体积. 黎曼和 $S_n=\sum f(x_k,y_k)\Delta A_k$ 中的每个项 $f(x_k,y_k)\Delta A_k$ 是直立长方形框体的体积，近似等于直立在底面积 $\Delta A_k$ 上那部分立体的体积. 因此，黎曼和 $S_n$ 逼近要计算的立体的总体积. 我们把这个体积定义为

$$体积 = \lim_{n\to\infty} S_n = \iint_R f(x,y)\,dA$$

其中当 $n\to\infty$ 时 $\Delta A_k\to 0$.

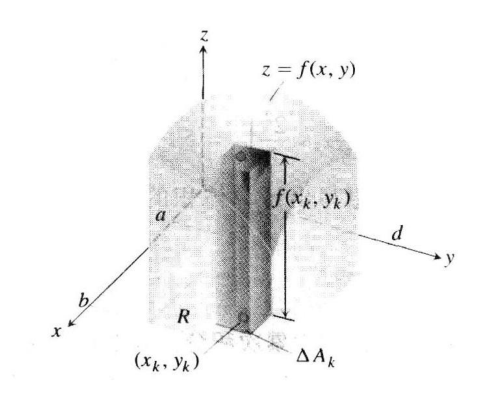
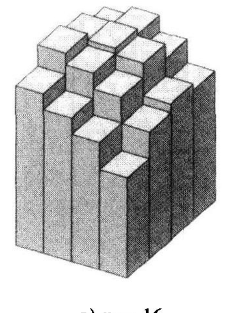
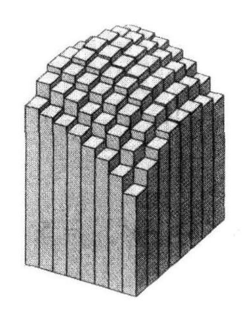



图 13.2 用长方形框体逼近立体，导致把一般形状的立体体积定义为二重积分，图中显示的立体体积是 $f(x,y)$ 在底部区域 $R$ 上的二重积分

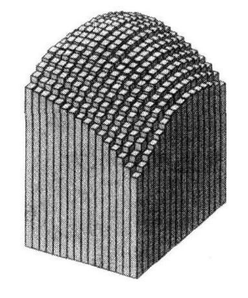
正如可以期待的那样，这种计算体积的更一般方法同第 6 章讨论的方法一致，但是这里我们不作证明. 图 13.3 显示，随着框体数目的增加，黎曼和对体积的逼近变得更加精确.



a) $n = 16$



b) $n = 64$



c) $n = 256$

图 13.3 当 $n$ 增加时，黎曼和逼近趋近图 13.2 中所示立体的总体积

### 13.1.3 求二重积分的傅比尼定理

假定我们要计算 $xy$ 平面内矩形区域

$$R:\quad 0 \leqslant x \leqslant 2,\quad 0 \leqslant y \leqslant 1$$

上在平面 $z=4-x-y$ 下方的体积. 如果应用 6.1 节的切片方法，取垂直于 $x$ 轴的切片(见图 13.4)，那么这个体积为

$$\int_{x=0}^{x=2} A(x)\,\mathrm{d}x \qquad (1)$$

其中 $A(x)$ 是在 $x$ 的横截面面积. 对于 $x$ 的每个值，可以把 $A(x)$ 作为积分

$$A(x) = \int_{y=0}^{y=1} (4-x-y)\,\mathrm{d}y \qquad (2)$$

计算，这是在 $x$ 的横截面平面内曲线 $z=4-x-y$ 下方的面积. 在计算 $A(x)$ 时，保持 $x$ 固定，求对 $y$ 的积分. 把式(1)和式(2)结合起来，可以看出整个立体的体积是

$$\begin{aligned}\text{体积} &= \int_{x=0}^{x=2} A(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=2}\left(\int_{y=0}^{y=1}(4-x-y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{x=2}\left[4y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1}\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=2}\left(\frac{7}{2} - x\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{7}{2}x - \frac{2^2}{2}\right]_0^2 = 5 \qquad (3)\end{aligned}$$

图 13.4 为了得到横截面面积 $A(x)$，保持 $x$ 固定并对 $y$ 积分

如果只想写出计算体积的公式而不进行任何积分，可以写成

$$\text{体积} = \int_0^2\int_0^1 (4-x-y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

右端的表达式称为**累次积分**，表明体积通过两次积分得到，首先保持 $x$ 固定，求 $4-x-y$ 对于 $y$ 从 $y=0$ 到 $y=1$ 的积分，然后对所得 $x$ 的表达式，求对于 $x$ 从 $x=0$ 到 $x=2$ 的积分. 积分限 0 和 1 同变量 $y$ 相联系，所以把它们置于积分中离 $\mathrm{d}y$ 最近的位置. 另外两个积分限 0 和 2 同变量 $x$ 相联系，所以把它们置于同 $\mathrm{d}x$ 配对的外层积分号上.

如果我们用垂直于 $y$ 轴的平面切片来计算体积(见图 13.5)，将会产生什么结果? 这时，典型的横截面面积作为 $y$ 的函数是

$$\begin{aligned}A(y) &= \int_{x=0}^{x=2}(4-x-y)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[4x - \frac{x^2}{2} - xy\right]_{x=0}^{x=2} = 6-2y \qquad (4)\end{aligned}$$

因此，整个立体的体积为

$$\text{体积} = \int_{y=0}^{y=1} A(y)\,\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{y=1}(6-2y)\,\mathrm{d}y = \left[6y - y^2\right]_0^1 = 5$$

同前面的计算结果一致.

我们可以用

$$\text{体积} = \int_0^1\int_0^2 (4-x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

再给出一个作为累次积分的体积计算公式. 右端的表达式表明，在求体积时，可以像在式(4)那样求 $4-x-y$ 对于 $x$ 从 $x=0$ 到 $x=2$ 的积分，再对所得结果求对于 $y$

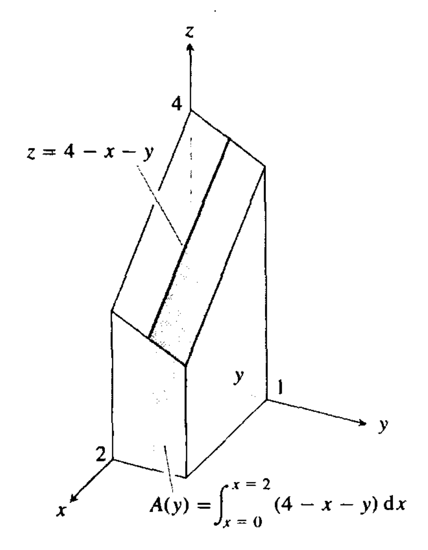



图 13.5 为了得到横截面面积 $A(y)$，保持 $y$ 固定并对 $x$ 积分

从 $y=0$ 到 $y=1$ 的积分. 在这个累次积分中，积分次序同式(3)的次序相反，先对 $x$ 积分，然后对 $y$ 积分.

这两个用累次积分的体积计算同矩形 $R$：$0\leqslant x\leqslant 2$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 上的二重积分

$$\iint_R (4-x-y)\,dA$$

有什么关系？答案是两个累次积分同样给出二重积分的值. 理所当然这是我们所期望的，因为二重积分计算体积的区域同这两个累次积分计算体积的区域相同.

**人物传记**

圭多·傅比尼

(Guido Fubini，1879—1943)

圭多·傅比尼于 1907 年发表的一个定理表明，任何连续函数在矩形区域上的二重积分，可以用累次积分按任何一种积分次序计算.

傅比尼是在更一般的形式下证明他的定理的，但是在我们的情况下这个定理表述如下.

> **定理 1（傅比尼定理第一种形式）** 若函数 $f(x,y)$ 在整个矩形区域
>
> $$R:\ a\leqslant x\leqslant b,\quad c\leqslant y\leqslant d$$
>
> 上连续，则
>
> $$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

傅比尼定理表明，函数在矩形区域上的积分可以作为累次积分计算. 因此，在计算二重积分时可以一次对一个变量求积分.

傅比尼定理还表明，可以按任何一种积分次序求二重积分，这为求积分提供真正的便利. 在我们用切片方法计算体积时既可以用垂直于 $x$ 轴的平面，也可以用垂直于 $y$ 轴的平面.

**例 1** 对于

$$f(x,y)=1-6x^2y \quad 和 \quad R:\ 0\leqslant x\leqslant 2,\ -1\leqslant y\leqslant 1$$

计算二重积分

$$\iint_R f(x,y)\,dA$$

**解** 由傅比尼定理，

$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_{-1}^1\int_0^2(1-6x^2y)\,dx\,dy=\int_{-1}^1\left[x-2x^3y\right]_{x=0}^{x=2}dy$$

$$=\int_{-1}^1(2-16y)\,dy=\left[2y-8y^2\right]_{-1}^1=4$$

颠倒积分顺序给出同样答案：

$$\int_0^2\int_{-1}^1(1-6x^2y)\,dy\,dx=\int_0^2\left[y-3x^2y^2\right]_{y=-1}^{y=1}dx=\int_0^2\left[(1-3x^2)-(-1-3x^2)\right]dx=\int_0^2 2\,dx=4$$ ■

**例 2** 求上方以椭圆抛物面 $z=x^2+3y^2$ 为界和下方以矩形 $R$：$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 2$ 为界的空间区域的体积.

**解** 空间区域的体积由二重积分给出：

$$V=\iint_R(x^2+3y^2)\,dA=\int_0^1\int_0^2(x^2+3y^2)\,dy\,dx=\int_0^1\left[x^2y+y^3\right]_{y=0}^{y=2}dx$$

$$=\int_0^1(2x^2+8)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^3+8x\right]_0^1=\frac{26}{3}$$ ■

## 习题 13.1

在习题 1 ~ 12 中，求累次积分.

1. $\int_1^2\int_0^4 2xy\,dy\,dx$.
2. $\int_0^2\int_{-1}^1 (x-y)\,dy\,dx$.
3. $\int_{-1}^0\int_{-1}^1 (x+y+1)\,dx\,dy$.
4. $\int_0^1\int_0^1\left(1-\frac{x^2+y^2}{2}\right)dx\,dy$.
5. $\int_0^3\int_0^2 (4-y^2)\,dy\,dx$.
6. $\int_0^3\int_{-2}^0 (x^2y-2xy)\,dy\,dx$.
7. $\int_0^1\int_0^1 \frac{y}{1+xy}dx\,dy$.
8. $\int_1^4\int_0^4\left(\frac{x}{2}+\sqrt{y}\right)dx\,dy$.
9. $\int_0^{\ln 2}\int_1^{\ln 5} e^{2x+y}dy\,dx$.
10. $\int_0^1\int_1^2 xye^x dy\,dx$.
11. $\int_{-1}^2\int_0^{\pi/2} y\sin x\,dx\,dy$.
12. $\int_{\pi}^{2\pi}\int_0^{\pi} (\sin x+\cos y)\,dx\,dy$.

在习题 13 ~ 20 中,求在给定区域 $R$ 上的二重积分.

13. $\iint_R (6y^2-2x)\,dA$; $R$: $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 2$.
14. $\iint_R \left(\frac{\sqrt{x}}{y^2}\right) dA$; $R$: $0\leqslant x\leqslant 4$, $1\leqslant y\leqslant 2$.
15. $\iint_R xy\cos y\,dA$; $R$: $-1\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant \pi$.
16. $\iint_R y\sin(x+y)\,dA$; $R$: $-\pi\leqslant x\leqslant 0$, $0\leqslant y\leqslant \pi$.
17. $\iint_R e^{x-y}dA$; $R$: $0\leqslant x\leqslant \ln 2$, $0\leqslant y\leqslant \ln 2$.
18. $\iint_R xye^{xy^2}dA$; $R$: $0\leqslant x\leqslant 2$, $0\leqslant y\leqslant 1$.
19. $\iint_R \frac{xy^3}{x^2+1}\,dA$; $R$: $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 2$.
20. $\iint_R \frac{y}{x^2y^2+1}\,dA$; $R$: $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$.

在习题 21 和 22 中，求函数 $f$ 在给定区域上的积分.

21. **正方形** 函数 $f(x,y)=1/(xy)$ 在正方形区域 $1\leqslant x\leqslant 2$，$1\leqslant y\leqslant 2$ 上.
22. **矩形** 函数 $f(x,y)=y\cos xy$ 在矩形区域 $0\leqslant x\leqslant\pi$，$d\leqslant y\leqslant 1$ 上.
23. 求上方以抛物面 $z=x^2+y^2$ 为界和下方以正方形 $R$: $-1\leqslant x\leqslant 1$, $-1\leqslant y\leqslant 1$ 为界的区域的体积.
24. 求上方以椭圆抛物面 $z=16-x^2-y^2$ 为界和下方以正方形 $R$:$0\leqslant x\leqslant 2$,$0\leqslant y\leqslant 2$ 为界的区域的体积.
25. 求上方以平面 $z=2-x-y$ 为界和下方以正方形 $R$:$0\leqslant x\leqslant 1$,$0\leqslant y\leqslant 1$ 为界的区域的体积.
26. 求上方以平面 $z=y/2$ 为界和下方以矩形 $R$: $0\leqslant x\leqslant 4$，$0\leqslant y\leqslant 2$ 为界的区域的体积.
27. 求上方以曲面 $z=2\sin x\cos y$ 为界和下方以矩形 $R$: $0\leqslant x\leqslant \pi/2$，$0\leqslant y\leqslant \pi/4$ 为界的区域的体积.
28. 求上方以曲面 $z=4-y^2$ 为界和下方以矩形 $R$: $0\leqslant x\leqslant 1$,$0\leqslant y\leqslant 2$ 为界的区域的体积.

## 13.2 一般区域上的二重积分

在这一节我们来定义和计算函数在平面内比矩形更为一般的有界区域上的二重积分. 这些二重积分也是作为累次积分计算的，所涉及的主要实际问题是如何确定积分限. 由于积分区域的边界可能具有同坐标轴不平行的线段，积分限通常包含变量而不只限于常数.

### 13.2.1 有界非矩形区域上的二重积分

为了定义函数 $f(x,y)$ 在像图 13.6 中那样的有界非矩形区域 $R$ 上的二重积分，我们再次从用小矩形单元的网格覆盖 $R$ 开始，单元的并集包含 $R$ 的所有点. 但是，这次不能恰好用位于 $R$ 内的有限多个小矩形填满 $R$，因为它的边界是弯曲的，网格中的某些小矩形部分越出 $R$ 的边界. $R$ 的划分由全部在 $R$ 内的矩形组成，其中不用任何部分或者全部在 $R$ 之外的矩形. 对于常见的区域而言，当划分的范数(任何所用矩形的最大宽度或高度)趋近零时，划分包含 $R$ 越来越多的部分.

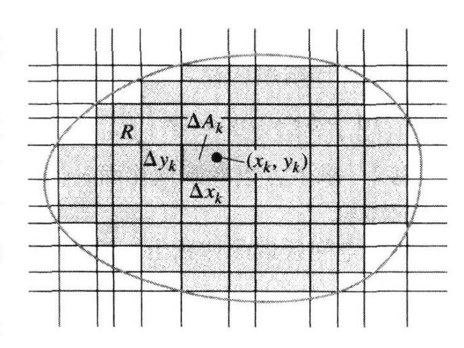



图 13.6 划分有界非矩形区域为矩形单元的矩形网格

一旦有了 $R$ 的划分，我们对划分中的单元按某种顺

序从 1 到 $n$ 编号，并且令第 $k$ 个矩形的面积为 $\Delta A_k$. 然后在第 $k$ 个矩形中选择一点$(x_k,y_k)$，并且构造黎曼和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta A_k$$

当构成 $S_n$ 的划分的范数 $\|P\|\to 0$ 时，包含在区域内的每个矩形的宽度和高度趋近零，它们的数目趋近无穷大. 如果$f(x,y)$是连续函数，那么这些黎曼和趋近一个同点的任何选择无关的极限值. 这个极限称为$f(x,y)$在 $R$ 上的**二重积分**：

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta A_k = \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A$$

$R$ 的边界特性引出在区间上的积分中没有出现过的问题. 当 $R$ 带有弯曲的边界时，划分的 $n$ 个矩形位于 $R$ 的内部，但是不能覆盖全部 $R$. 为了使划分充分地逼近 $R$，$R$ 中由部分在 $R$ 之外的小矩形所覆盖的那些部分，当范数趋近零时必须成为可以忽略的. 这种接近由很小范数的划分填满区域的性质，在我们将要遇到的所有区域中都是满足的. 对于由多边形、圆和椭圆组成的边界，以及由一个区间上首尾相连的连续图形组成的边界，这不会成为问题. 至于由“分形”形状的图形组成的边界，则会出现麻烦，但是在绝大多数应用中不涉及这样的曲线边界. 对于哪些类型的区域 $R$ 可以用于计算二重积分中的详细讨论，留给高等微积分教程.

连续函数在非矩形区域上的二重积分具有类似于单积分的代数性质(在后文概述). 定义域的可加性性质表明，如果 $R$ 可以分解成不交叠的区域 $R_1$ 和 $R_2$，而这两个区域具有由有限数目的线段或者光滑曲线组成的边界(一个例子见图 13.7)，那么

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A = \iint_{R_1} f(x,y)\,\mathrm{d}A + \iint_{R_2} f(x,y)\,\mathrm{d}A$$

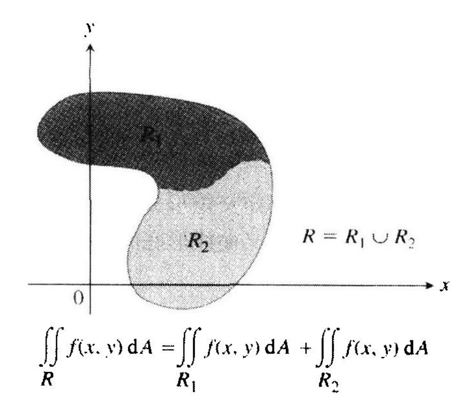



图 13.7 以连续曲线为边界的区域保持矩形区域的可加性性质

## 13.2.2 体积

如果$f(x,y)$是在 $R$ 上的正值连续函数，我们把介于 $R$ 和曲面 $z=f(x,y)$ 之间的立体区域的体积定义为

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A$$

同从前的定义一样(见图 13.8).

如果 $R$ 是如图 13.9 所示的 $xy$ 平面内的区域，“上方”以曲线 $y=g_2(x)$ 为界，“下方”以曲线 $y=g_1(x)$ 为界，两侧以直线 $x=a$ 和 $x=b$ 为界，那么我们可以再次用切片方法计算体积. 首先计算横截面面积

$$A(x) = \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

然后对 $A(x)$ 从 $x=a$ 到 $x=b$ 积分，得到作为累次积分的体积：

$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \quad (1)$$

同样，如果 $R$ 是像图 13.10 中所示的区域，以曲线 $x=h_2(y)$ 和 $x=h_1(y)$ 以及直线 $y=c$ 和 $y=d$ 为界，那么用切片计算的体积由累次积分给出：

$$体积 = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx dy \tag{2}$$

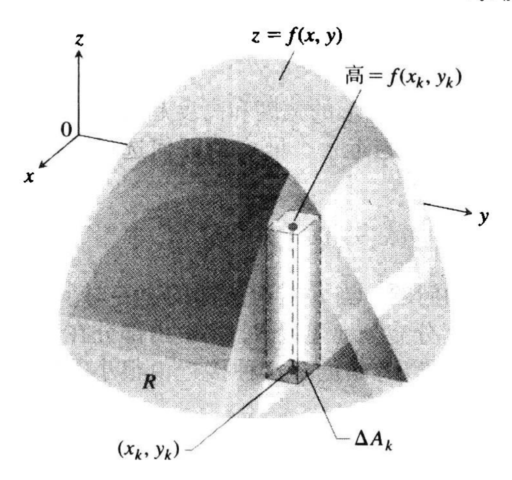



图 13.8 我们用定义矩形底面立体体积的同样方法，定义曲线形底面立体体积

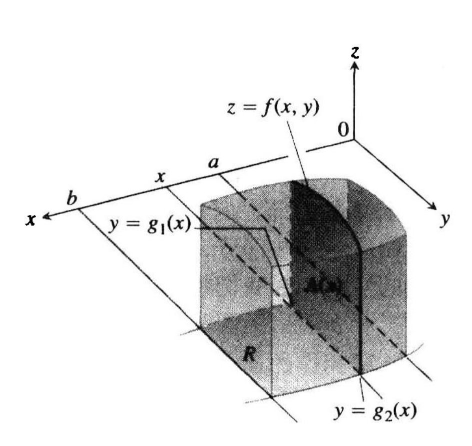



图 13.9 图中显示的垂直切片的面积是 $A(x)$，为了计算立体体积，对这个面积从 $x=a$ 到 $x=b$ 积分：

$$\int_a^b A(x)\,dx == \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

公式(1)和(2)中的累次积分都给出定义为函数 $f$ 在区域 $R$ 上的二重积分的体积，它们是下面更强的傅比尼定理的推论.

> **定理 2（傅比尼定理增强形式）** 令 $f(x,y)$ 是区域 $R$ 上的连续函数.
>
> **(1)** 若 $R$ 是由 $a \leqslant x \leqslant b$，$g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)$ 定义的，$g_1$ 和 $g_2$ 是区间 $[a, b]$ 的连续函数，则
>
> $$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$
>
> **(2)** 若 $R$ 是由 $c \leqslant y \leqslant d$，$h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y)$ 定义的，$h_1$ 和 $h_2$ 是区间 $[c, d]$ 上的连续函数，则
>
> $$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

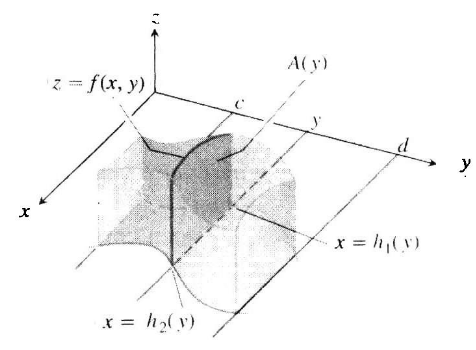



图 13.10 图中显示的立体的体积为

$$\int_c^d A(x)\,dy == \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

是在图 13.9 中计算的同样体积

**例 1** 一个棱柱的底面是 $xy$ 平面内以 $x$ 轴以及直线 $y=x$ 和 $x=1$ 为界的三角形，顶面在平面

$$z = f(x,y) = 3 - x - y$$

内，求它的体积.

**解** 请看图 13.11. 对于在 0 与 1 之间的任何 $x$ 值，$y$ 可以从 $y=0$ 变化到 $y=x$（见图 13.11b）. 因此，

$$V=\int_0^1\int_0^x(3-x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left[3y-xy-\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x}\mathrm{d}x$$

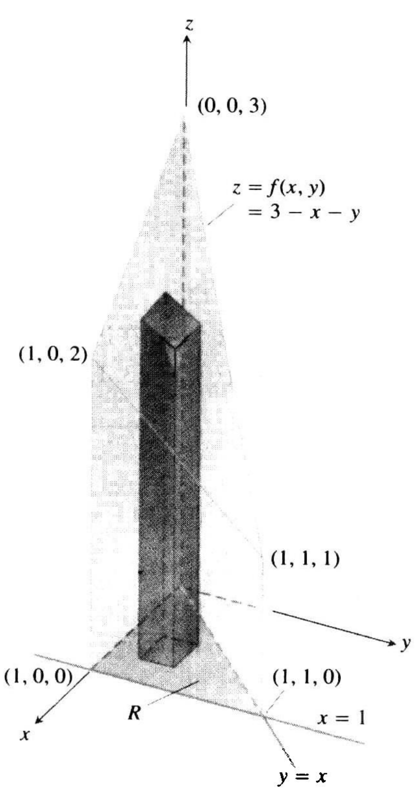
$$=\int_0^1\left(3x-\frac{3x^2}{2}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{2}\right]_{x=0}^{x=1}=1$$

在颠倒积分次序后(见图 13.11c)，棱柱体积的积分为

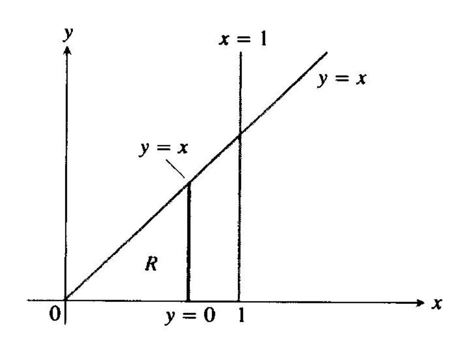
$$V=\int_0^1\int_y^1(3-x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\left[3x-\frac{x^2}{2}-xy\right]_{x=y}^{x=1}\mathrm{d}y=\int_0^1\left(3-\frac{1}{2}-y-3y+\frac{y^2}{2}+y^2\right)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left(\frac{5}{2}-4y+\frac{3}{2}y^2\right)\mathrm{d}y=\left[\frac{5}{2}y-2y^2+\frac{y^3}{2}\right]_{y=0}^{y=1}=1$$

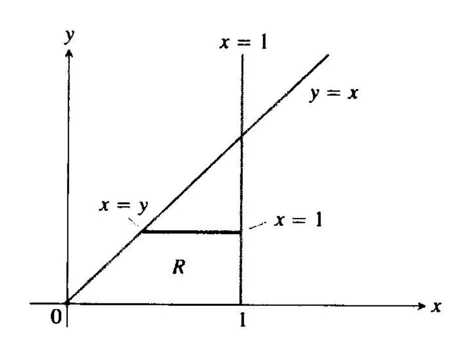
两个积分相等，这是应有的结果. ■




a) 这是以$xy$平面内的三角形为底面的棱柱，棱柱体积定义为$R$上的二重积分；为了把它作为累次积分计算，可以先对$y$积分，然后对$x$积分，或者用相反的次序积分(例1)




b) 累次积分 $\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x}f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$的积分限；如果先对$y$积分，我们沿一条通过$R$的垂直直线积分，然后从左至右对包含在$R$内的所有垂直直线积分




c) 累次积分 $\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=y}^{x=1}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$的积分限；如果先对$x$积分，我们沿一条通过$R$的水平直线积分，然后从下至上对包含在$R$内的所有水平直线积分

图 13.11

尽管傅比尼定理保证二重积分可以作为一个累次积分按照任何一种积分次序计算，但是用其中一种积分次序可能比用另一种积分次序更容易求值. 下面的例子说明怎么会出现这种情况.

**例 2** 计算

$$\iint_R\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}A$$

其中 $R$ 是 $xy$ 平面内以 $x$ 轴以及直线 $y=x$ 和 $x=1$ 为界的三角形.

**解** 积分区域 $R$ 显示在图 13.12 中. 如果先对 $y$ 积分，然后对 $x$ 积分，我们得到

$$\int_0^1\left(\int_0^x \frac{\sin x}{x}dy\right)dx = \int_0^1\left(y\,\frac{\sin x}{x}\Big|_{y=0}^{y=x}\right)dx = \int_0^1 \sin x\,dx$$
$$= -\cos(1)+1 \approx 0.46$$

如果颠倒积分次序并且试图计算

$$\int_0^1\int_y^1 \frac{\sin x}{x}\,dx\,dy$$

我们会陷入困境，因为 $\int((\sin x)/x)\,dx$ 不能用初等函数表示（不存在简单的反导数）

在这种情况下，没有预测用哪种积分次序更好的一般法则. 如果第一次选择的积分次序不适当，就试用另外一种次序. 有时，用两种积分次序都无济于事，那么就需要用数值逼近. ■

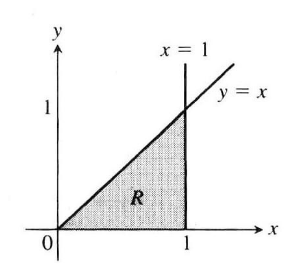


图 13.12 例 2 中的积分区域

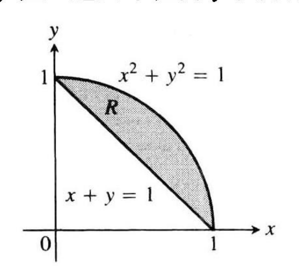
### 13.2.3 求积分限

我们在下面给出一种求积分限的过程，适用于许多平面区域. 对于更为复杂的区域，以及用这个过程失效的区域，通常可以把区域分成块，使得在那些块上可以执行这个过程.

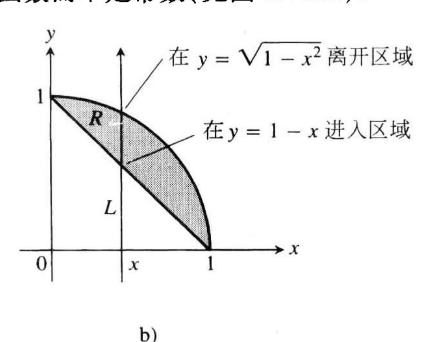
在求积分 $\iint_R f(x,y)\,dA$ 时，先对 $y$ 积分，然后对 $x$ 积分，执行下列步骤：

**(1) 画草图.** 画出积分区域的草图，并且标示边界曲线（见图 13.13a）.

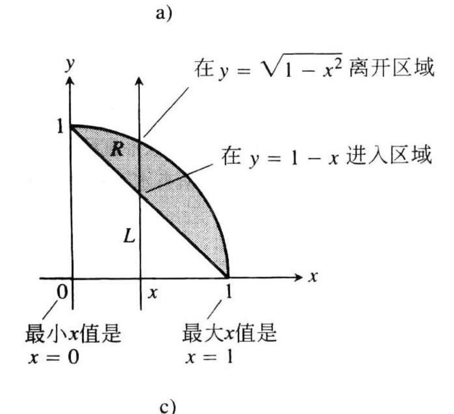
**(2) 求 $y$ 积分限.** 设想一条垂直直线 $L$ 在 $y$ 增加的方向穿过 $R$. 标出 $L$ 在进入区域和离开区域处的 $y$ 值. 这两个值为 $y$ 积分限，并且通常是 $x$ 的函数而不是常数（见图 13.13b）.



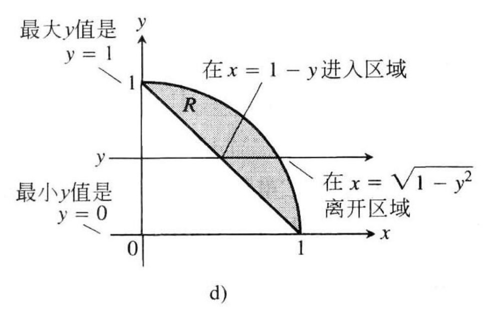
a)



b)



c)



d)

图 13.13 求先对 $y$ 积分然后对 $x$ 积分的积分限

(3) 求 $x$ 积分限. 选择 $x$ 积分限，其中包括所有穿过 $R$ 的垂直直线。图 13.13c 所示的积分是

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y$$

为了求同一个二重积分作为采用相反积分次序的累次积分，在第(2)步和第(3)步中用水平直线代替垂直直线(见图 13.13d)，这个积分是

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_0^1\int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y$$

**例 3**　对积分

$$\int_0^2\int_{x^2}^{2x}(4x+2)\,\mathrm{d}y\;\mathrm{d}x$$

画积分区域的草图，并且写出一个积分次序相反的等价积分.

**解**　积分区域由不等式

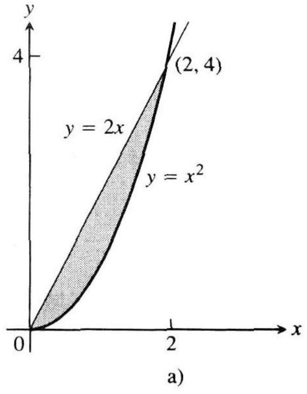
$$x^2 \leqslant y \leqslant 2x \quad 和 \quad 0 \leqslant x \leqslant 2$$

给出. 因此，积分区域以 $x=0$ 和 $x=2$ 之间的曲线 $y=x^2$ 和 $y=2x$ 为界(见图 13.14a).

为了求相反次序的积分限，设想一条从左至右穿过区域的水平直线. 它在 $x=y/2$ 进入区域而在 $x=\sqrt{y}$ 离开区域. 为了包括所有这样的直线在内，我们令 $y$ 从 $y=0$ 延伸到 $y=4$ (见图 13.14b). 这个积分是

$$\int_0^4\int_{y/2}^{\sqrt{y}}(4x+2)\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y$$

两个积分的共同积分值是 8.　■



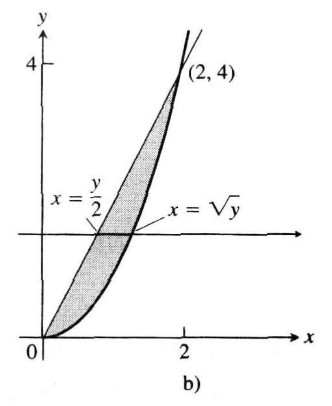




图 13.14　例 3 的积分区域

**利用技术工具求多重积分**

大多数 CAS(计算机代数系统)可以计算多重积分和累次积分. 典型的过程是按照你指定的积分次序以嵌套的叠加形式应用 CAS 积分命令. 例如，

| 积分 | 典型的 CAS 命令格式 |
|---|---|
| $\iint x^2y\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y$ | int (int (x^2 * y, x),y); |
| $\int_{-\pi/3}^{\pi/4}\int_0^1 x\cos y\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y$ | int (int(x * cos (y), x = 0..1), y = - Pi/3..Pi/4); |

如果 CAS 不能产生定积分的准确值，它通常可以求出近似数值. 建立 CAS 求多重积分的命令格式可能是一项困难的任务，需要了解如何描述积分区域的边界以及如何给出相应的积分.

### 13.2.4　二重积分的性质

像单积分那样，连续函数的二重积分有若干代数性质，这些性质在计算和应用中是很有用的.

如果$f(x,y)$和$g(x,y)$是连续函数，那么二重积分有下述代数性质：

(1) 常数倍 $\iint\limits_R cf(x,y)\,dA = c\iint\limits_R f(x,y)\,dA$ （任意数 $c$）

(2) 和与差 $\iint\limits_R (f(x,y) \pm g(x,y))\,dA = \iint\limits_R f(x,y)\,dA \pm \iint\limits_R g(x,y)\,dA$

(3) 优势积分

(a) $\iint\limits_R f(x,y)\,dA \geqslant 0$，如果在 $R$ 上 $f(x,y) \geqslant 0$

(b) $\iint\limits_R f(x,y)\,dA \geqslant \iint\limits_R g(x,y)\,dA$，如果在 $R$ 上 $f(x,y) \geqslant g(x,y)$

(4) 可加性 $\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \iint\limits_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\,dA$

其中 $R$ 是两个非交叠区域 $R_1$ 和 $R_2$ 的并集(见图 13.7).

隐含在这些性质中的思想是积分具有类似求和的性质. 如果函数$f(x,y)$用它的常数倍$cf(x,y)$代替，那么$f$的黎曼和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta A_k$$

由 $cf$ 的黎曼和

$$\sum_{k=1}^{n} cf(x_k,y_k)\Delta A_k = c\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta A_k = cS_n$$

代替. 取当 $n\to\infty$ 时的极限，证明

$$c\lim_{n\to\infty} S_n = c\iint\limits_R f\,dA \quad 和 \quad \lim_{n\to\infty} cS_n = \iint\limits_R cf\,dA$$

是相等的. 由此推出，常数倍性质由黎曼和转移到二重积分.

黎曼和的其他性质也容易证实，并且由于同样原因转移到二重积分. 这种讨论虽然指出二重积分代数性质中包含的思想，但是实际证明具备这些性质需要对黎曼和的收敛作更仔细的分析。

## 习题 13.2

在习题 1 ~ 6 中，画出积分区域的草图，并且求积分.

1. $\int_0^{\pi}\int_0^{x} x \sin y\, dy\, dx$.
2. $\int_0^{\pi}\int_0^{\sin x} y\, dy\, dx$.
3. $\int_1^{\ln 8}\int_0^{\ln y} e^{x+y} dx\, dy$.
4. $\int_1^{2}\int_y^{y^2} dx\, dy$.
5. $\int_0^{1}\int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy} dx\, dy$.
6. $\int_1^{4}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{3}{2} e^{y/\sqrt{x}} dy\, dx$.

在习题 7 ~ 10 中，求函数$f$在给定区域上的积分.

7. **四边形区域** $f(x,y) = x/y$ 在第一象限内以直线 $y=x$，$y=2x$，$x=1$，$x=2$ 为界的区域.
8. **三角形区域** $f(x,y) = x^2+y^2$ 在以$(0,0)$，$(1,0)$和$(0,1)$为顶点的三角形区域.
9. **三角形区域** $f(u,v) = v-\sqrt{u}$在 $uv$ 平面第一象限内由直线 $u+v=1$ 切出的三角形区域.
10. **曲线区域** $f(s,t) = e^s \ln t$ 在 $st$ 平面第一象限内位于曲线 $s=\ln t$ 之上从 $t=1$ 到 $t=2$ 的区域.

在习题 11 ~ 14 中，给出函数在笛卡儿坐标平面内一个区域上的积分. 画出区域的草图，并且求积分.

11. $\int_{-2}^{0}\int_v^{-v} 2\,dp\, dv$ （$pv$ 平面）.
12. $\int_0^{1}\int_0^{\sqrt{1-s^2}} 8t\, dt\, ds$ （$st$ 平面）.
13. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\int_0^{\sec t} 3 \cos t\, du\, dt$ （$tu$ 平面）.
14. $\int_0^{3}\int_1^{4-2u} \frac{4-2u}{v^2}\, dv du$ （$uv$ 平面）.

在习题 15 ~ 24 中，画出积分区域的草图，并

且以相反积分次序写出等价的二重积分.

**15.** $\int_0^1\int_2^{4-2x} dy\,dx$.

**16.** $\int_0^2\int_{y-2}^0 dx\,dy$.

**17.** $\int_0^1\int_y^{\sqrt{y}} dx\,dy$.

**18.** $\int_0^1\int_{1-x}^{1-x^2} dy\,dx$.

**19.** $\int_0^1\int_1^{e^x} dy\,dx$.

**20.** $\int_0^{\ln 2}\int_{e^x}^2 dx\,dy$.

**21.** $\int_0^{3/2}\int_0^{9-4x^2} 16x\,dy\,dx$.

**22.** $\int_0^2\int_0^{4-y^2} y\,dx\,dy$.

**23.** $\int_0^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 3y\,dx\,dy$.

**24.** $\int_0^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 6x\,dy\,dx$.

在习题 25 ~ 34 中，画出积分区域的草图，颠倒积分次序，并且求积分.

**25.** $\int_0^{\pi}\int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y}\,dy\,dx$.

**26.** $\int_0^2\int_x^2 2y^2\sin xy\,dy\,dx$.

**27.** $\int_0^1\int_y^1 x^2 e^{xy}\,dx\,dy$.

**28.** $\int_0^2\int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\,dy\,dx$.

**29.** $\int_0^{2\sqrt{\ln 3}}\int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2}\,dx\,dy$.

**30.** $\int_0^3\int_{\sqrt{x/3}}^1 e^{y^3}\,dy\,dx$.

**31.** $\int_0^{1/16}\int_{y^{1/4}}^{1/2} \cos(16\pi x^5)\,dx\,dy$.

**32.** $\int_0^8\int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\,dx}{y^4+1}$.

**33. 正方形区域** 积分

$$\iint_R (y-2x^2)\,dA$$

其中 $R$ 是以正方形 $|x|+|y|=1$ 为界的区域.

**34. 三角形区域** 积分

$$\iint_R xy\,dA$$

其中 $R$ 是以直线 $y=x$，$y=2x$ 和 $x+y=2$ 为界的区域.

**35.** 求上方以抛物面 $z=x^2+y^2$ 为界和下方以 $xy$ 平面内的直线 $y=x$，$x=0$ 和 $x+y=2$ 包围的三角形为界的区域的体积.

**36.** 求上方以柱面 $z=x^2$ 为界和下方以 $xy$ 平面内的抛物线 $y=2-x^2$ 和直线 $y=x$ 包围的区域为界的立体的体积.

**37.** 求底部是 $xy$ 平面内以抛物线 $y=4-x^2$ 和直线 $y=3x$ 为界的区域而顶部以平面 $z=x+4$ 为界的立体的体积.

**38.** 求第一卦限内以坐标平面以及圆柱面 $x^2+y^2=4$ 和平面 $z+y=3$ 为界的立体的体积.

**39.** 求第一卦限内以坐标平面以及平面 $x=3$ 和抛物柱面 $z=4-y^2$ 为界的立体的体积.

**40.** 求由曲面 $z=4-x^2-y$ 从第一卦限切出立体的体积.

**41.** 求由柱面 $z=12-3y^2$ 和平面 $x+y=2$ 从第一卦限切出的楔形体的体积.

**42.** 求由平面 $z=0$ 和 $3x+z=3$ 从正方形柱体 $|x|+|y|\leqslant 1$ 切出的立体的体积.

**43.** 求前后以平面 $x=2$ 和 $x=1$ 为界和两侧以柱面 $y=\pm 1/x$ 为界以及上下以平面 $z=x+1$ 和 $z=0$ 为界的立体的体积.

**44.** 求前后以平面 $x=\pm\pi/3$ 为界和两侧以柱面 $y=\pm\sec x$ 为界以及上方以柱面 $z=1+y^2$ 和下方以 $xy$ 平面为界的立体的体积.

反常二重积分经常可以采用类似单变量反常积分的方法计算. 下列反常积分的第一个累次积分完全按照正常积分进行，然后采用 7.7 节的方法，通过取相应的极限计算单变量的反常积分. 在习题 45 ~ 48 中，求作为累次积分的反常积分.

**45.** $\int_1^{\infty}\int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{x^3 y}\,dy\,dx$.

**46.** $\int_{-1}^1\int_{-1/\sqrt{1-x^2}}^{1/\sqrt{1-x^2}} (2y+1)\,dy\,dx$.

**47.** $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}\,dx\,dy$.

**48.** $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} xe^{-(x+2y)}\,dx\,dy$.

在习题 49 和 50 中，用

$$\iint_R f(x,y)\,dA \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta A_k$$

逼近函数 $f(x,y)$ 在由垂直线 $x=a$ 和水平线 $y=c$ 划分的区域 $R$ 上的二重积分. 在每个子矩形中，使用为逼近指定的 $(x_k,y_k)$.

**49.** $f(x,y)=x+y$ 在上方以半圆 $y=\sqrt{1-x^2}$ 为界和下方以 $x$ 轴为界的区域 $R$ 上，使用划分 $x=-1,-1/2,0,1/4,1/2,1$ 和 $y=0,1/2,1$，以第 $k$ 个子矩形的左下角顶点作为 $(x_k,y_k)$（只要子矩形位于区域 $R$ 内）.

**50.** $f(x,y)=x+2y$ 在圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 的内部区域 $R$ 上，使用划分 $x=1,3/2,2,5/2,3$ 和 $y=2,5/2,3,7/2,4$，以第 $k$ 个子矩形的中心（形心）作为 $(x_k,y_k)$（只要子矩形位于区域 $R$ 内）.

**51. 圆扇形区域** 求函数 $f(x,y)=\sqrt{4-x^2}$ 在由射线 $\theta=\pi/6$ 和 $\theta=\pi/2$ 从圆盘 $x^2+y^2\leqslant 4$ 切出的较小扇形区域上的积分.

**52. 无界区域** 求函数 $f(x,y)=1/[(x^2-x)(y^2-1)^{2/3}]$ 在无限矩形区域 $2\leqslant x<\infty$，$0\leqslant y\leqslant 2$ 上的积分.

**53. 非圆形柱体** 直立（非圆形）柱体以 $xy$ 平面内的区域 $R$ 为底面，上方以抛物面 $z=x^2+y^2$ 为

界. 柱体的体积为

$$V=\int_0^1\int_0^y(x^2+y^2)\,dx\,dy+\int_1^2\int_0^{2-y}(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

画出底部区域 $R$ 的草图，并且把柱体体积表示成用相反积分次序的累次积分. 然后计算积分求体积.

54. **转换成二重积分** 求积分

$$\int_0^2(\tan^{-1}\pi x-\tan^{-1}x)\,dx$$

（提示：把被积函数表示成一个积分.）

55. **使二重积分达到最大值** 在 $xy$ 平面内什么区域 $R$ 能使积分

$$\iint_R(4-x^2-2y^2)\,dA$$

达到最大值？提出答案的理由.

56. **使二重积分达到最小值** 在 $xy$ 平面内什么区域 $R$ 能使积分

$$\iint_R(x^2+y^2-9)\,dA$$

达到最小值？提出答案的理由.

57. 对于在 $xy$ 平面内的矩形区域上的连续函数 $f(x,y)$ 的二重积分，按不同的积分次序计算积分是否可能得到不同的结果？提出答案的理由.

58. 对于在 $xy$ 平面内由顶点 $(0,1)$，$(2,0)$ 和 $(1,2)$ 包围的三角形区域 $R$ 上的连续函数 $f(x,y)$，如何计算二重积分？提出答案的理由.

59. **无界区域** 证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b}\int_{-b}^{b}e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=4\left(\int_0^{\infty}e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

60. **反常二重积分** 求反常积分

$$\int_0^1\int_0^3\frac{x^2}{(y-1)^{2/3}}\,dy\,dx$$

**计算机探究**

在习题 61 ~ 64 中，用一种 CAS（计算机代数系统）二重积分计算器估计积分值.

61. $\int_1^3\int_1^x\frac{1}{xy}\,dy\,dx.$

62. $\int_0^1\int_0^1 e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx.$

63. $\int_0^1\int_0^1\tan^{-1}xy\,dy\,dx.$

64. $\int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}3\sqrt{1-x^2-y^2}\,dy\,dx.$

在习题 65 ~ 70 中，用一种 CAS 二重积分计算器求积分. 然后，颠倒积分次序，再用一种 CAS 求积分.

65. $\int_0^1\int_{2y}^4 e^{x^2}\,dx\,dy.$

66. $\int_0^3\int_{x^2}^9 x\cos(y^2)\,dy\,dx.$

67. $\int_0^2\int_{y^3}^{4\sqrt{2y}}(x^2y-xy^2)\,dx\,dy.$

68. $\int_0^2\int_0^{4-y^2}e^{xy}\,dx\,dy.$

69. $\int_1^2\int_0^{x^2}\frac{1}{x+y}\,dy\,dx.$

70. $\int_1^2\int_{y^3}^8\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy.$

## 13.3 用二重积分求面积

这一节讲述如何用二重积分计算平面内的有界区域的面积以及求二元函数的平均值.

### 13.3.1 平面内有界区域的面积

如果在前一节在区域 $R$ 上的二重积分定义中取 $f(x,y)=1$，黎曼和化简成

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(x_k,y_k)\Delta A_k=\sum_{k=1}^{n}\Delta A_k \tag{1}$$

这就是 $R$ 划分中的小矩形面积之和，并且逼近我们愿意称说的 $R$ 的面积. 当 $R$ 划分的范数趋近零时，划分中所有小矩形的高度和宽度趋近零，并且划分对 $R$ 的覆盖变得越来越完全（见图 13.6）. 我们把 $R$ 的面积定义为极限

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta A_k=\iint_R dA \tag{2}$$

**定义** 闭有界平面区域 $R$ 的面积是

$$A=\iint_R dA$$

同本章中其他定义一样，此处的定义同过去面积的单变量定义相比，适用于种类更繁多的

区域，但是在两种定义都适用的区域上同以前的定义一致. 为了求面积定义中的积分，我们计算常数函数 $f(x,y)=1$ 在 $R$ 上的积分.

**例 1**　求第一象限内以直线 $y=x$ 和抛物线 $y=x^2$ 为界的区域 $R$ 的面积.

**解**　我们画出区域 $R$ 的草图(见图 13.15)，注明直线和曲线的交点，并且计算面积：

$$A=\int_0^1\int_{x^2}^{x}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_0^1\Big[y\Big]_{x^2}^{x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1(x-x^2)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

请注意,从计算内层积分得到的单积分 $\int_0^1(x-x^2)\,\mathrm{d}x$,就是用 5.6 节的方法求直线和曲线之间的面积的积分. ■

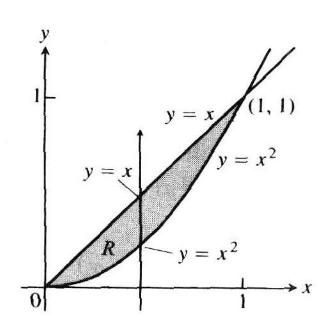



图 13.15　例 1 中的区域 R

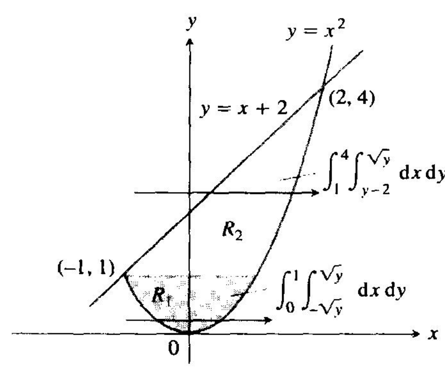
**例 2**　求由抛物线 $y=x^2$ 和直线 $y=x+2$ 包围的区域 $R$ 的面积.

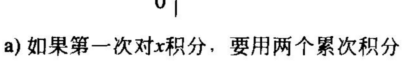
**解**　如果把 $R$ 分成图 13.16a 所示的两个区域 $R_1$ 和 $R_2$，可以用

$$A=\iint_{R_1}\mathrm{d}A+\iint_{R_2}\mathrm{d}A=\int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\int_1^4\int_{y-2}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

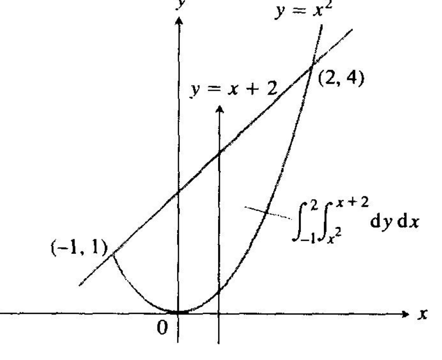
计算面积. 另一方面，颠倒积分次序(见图 13.16b)给出

$$A=\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$



a) 如果第一次对x积分，要用两个累次积分




b) 但是，如果第一次对y积分，只用一个累次积分

图 13.16　用两种积分次序计算这个面积

这个第二结果只需要计算一个累次积分，是比较简单的，也是我们在实践中力求采用的. 区域 $R$ 的面积为

$$A=\int_{-1}^{2}\Big[y\Big]_{x^2}^{x+2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$ ■

### 13.3.2　平均值

一元可积函数在闭区间上的平均值是函数在区间上的积分除以区间的长度. 对于定义在平面内的有界区域上的二元可积函数，平均值是函数在区域上的积分除以区域的面积. 可以把这个函数想象成水箱中某个时刻给出的水面晃动的高度，水箱的垂直内壁位于区域的边界上。水箱中水面的平均高度是让水沉静下来时的恒定高度. 于是，这个高度是水箱中水的容积除以底

面 $R$ 的面积. 由此导致可积函数 $f$ 在区域 $R$ 上的平均值定义如下：

$$f\text{在 }R\text{ 上的平均值} = \frac{1}{R\text{ 的面积}}\iint_R f\,\mathrm{d}A \tag{3}$$

如果 $f$ 是覆盖区域 $R$ 的薄板的温度，那么，$f$ 在 $R$ 上的二重积分用 $R$ 的面积相除就是薄板的平均温度. 如果 $f(x,y)$ 是从点 $(x,y)$ 到某个固定点 $P$ 的距离，$f$ 在 $R$ 上的平均值是从 $P$ 到 $R$ 中各点的平均距离.

**例 3** 求函数 $f(x,y)=x\cos xy$ 在矩形区域 $R$：$0\leqslant x\leqslant\pi$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 上的平均值.

**解** $f$ 在 $R$ 上的积分值是

$$\int_0^\pi\int_0^1 x\cos xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi\Big[\sin xy\Big]_{y=0}^{y=1}\mathrm{d}x \quad \left(\int x\cos xy\,\mathrm{d}y = \sin xy + C\right)$$

$$= \int_0^\pi(\sin x - 0)\,\mathrm{d}x = -\cos x\Big]_0^\pi = 1+1=2$$

$R$ 的面积为 $\pi$. $f$ 在 $R$ 上的平均值等于 $2/\pi$. ■

## 习题 13.3

在习题 1 ~ 8 中，画出以给定直线和曲线为界的区域的草图. 然后把区域的面积表示成累次二重积分，并且求积分.

1. 坐标轴和直线 $x+y=2$.
2. 直线 $x=0$，$y=2x$ 和 $y=4$.
3. 抛物线 $x=-y^2$ 和直线 $y=x+2$.
4. 抛物线 $x=y-y^2$ 和直线 $y=-x$.
5. 曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 以及直线 $y=0$，$x=0$ 和 $x=\ln 2$.
6. 第一象限内，曲线 $y=\ln x$ 和 $y=2\ln x$ 以及直线 $x=\mathrm{e}$.
7. 抛物线 $x=y^2$ 和 $x=2y-y^2$.
8. 抛物线 $x=y^2-1$ 和 $x=2y^2-2$.

在习题 9 ~ 14 中，积分或积分的和给出 $xy$ 平面内的区域的面积. 画出每个区域的草图，标明每条界曲线的方程，并且给出曲线交点的坐标. 然后求区域的面积.

9. $\int_0^6\int_{y^2/3}^{2y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
10. $\int_0^3\int_{-x}^{x(2-x)}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.
11. $\int_0^{\pi/4}\int_{\sin x}^{\cos x}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.
12. $\int_{-1}^2\int_{y^2}^{y+2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
13. $\int_{-1}^0\int_{-2x}^{1-x}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_0^2\int_{-x/2}^{1-x}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.
14. $\int_0^2\int_{x^2-4}^0\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_0^4\int_0^{\sqrt{x}}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.
15. 求函数 $f(x,y)=\sin(x+y)$ 在下列区域上的平均值：
    (a) 矩形 $0\leqslant x\leqslant\pi$，$0\leqslant y\leqslant\pi$；
    (b) 矩形 $0\leqslant x\leqslant\pi$，$0\leqslant y\leqslant\pi/2$.
16. 函数 $f(x,y)=xy$ 在正方形 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$ 上的平均值，或者 $f$ 在第一象限内四分之一圆 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上的平均值，你认为哪一个更大?求出它们的值.
17. 求抛物面 $z=x^2+y^2$ 在正方形 $0\leqslant x\leqslant 2$，$0\leqslant y\leqslant 2$ 上的平均高度.
18. 求函数 $f(x,y)=1/(xy)$ 在正方形 $\ln 2\leqslant x\leqslant 2\ln 2, \ln 2\leqslant y\leqslant 2\ln 2$ 上的平均值.
19. **细菌种群** 如果 $f(x,y)=(10\,000\,\mathrm{e}^y)/(1+|x|/2)$ 代表 $xy$ 平面上某种细菌的"种群密度"，其中 $x$ 和 $y$ 以厘米为度量单位，求细菌在矩形 $-5\leqslant x\leqslant 5$，$-2\leqslant y\leqslant 0$ 内的种群总数.
20. **区域人口** 如果 $f(x,y)=100(y+1)$ 代表地球上某个平面区域的人口密度，其中 $x$ 和 $y$ 以英里为度量单位，求在以曲线 $x=y^2$ 和 $x=2y-y^2$ 为界的区域内的人口数.
21. **得克萨斯州的平均温度** 按照《得克萨斯州年鉴》，得克萨斯州有 254 县，每县有一个国家气象站. 假定 254 个气象站在时间 $t_0$ 都记录本地的温度. 求能够给出得克萨斯州在时间 $t_0$ 的平均温度的合理逼近的公式. 在答案中应当包含可望从《得克萨斯州年鉴》容易获取的数据.
22. 如果 $f(x)$ 是在闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的非负连续函数，对于以 $f$ 的图形和垂直线 $x=a$，$x=b$ 以及 $x$ 轴为界的闭平面区域，证明区域面积的二重积分定义同 5.3 节对于曲线下方的面积定义一致.

## 13.4 极型二重积分

在某些情况下，如果我们变换到极坐标，那么更容易计算积分. 本节讲述如何作这种变换，以及如何在由极方程给出的边界区域上求积分.

### 13.4.1 极坐标中的积分

当定义函数在 $xy$ 平面内的区域 $R$ 上的二重积分时，我们是从把 $R$ 切割成小矩形开始的，而它们的边平行于坐标轴. 这些划分单元是利用自然形状，因为矩形的边具有不变的 $x$ 值和 $y$ 值. 在极坐标中，这种单元的自然形状是“极矩形”，它们的边具有不变的 $r$ 值和 $\theta$ 值.

假定函数 $f(r,\theta)$ 定义在以射线 $\theta=\alpha$ 和 $\theta=\beta$ 以及连续曲线 $r=g_1(\theta)$ 和 $r=g_2(\theta)$ 为界的区域 $R$ 上. 此外，假定对于 $\alpha$ 和 $\beta$ 之间的每个 $\theta$ 值有 $0\leqslant g_1(\theta)\leqslant g_2(\theta)\leqslant a$. 那么，$R$ 位于由不等式 $0\leqslant r\leqslant a$ 和 $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ 定义的扇形区域 $Q$ 内(参见图 13.17).

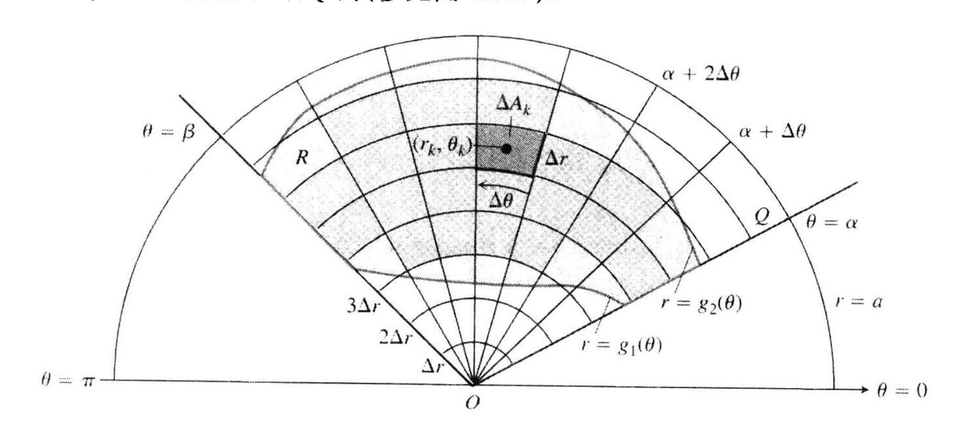



图 13.17 区域 $R$: $g_1(\theta)\leqslant r\leqslant g_2(\theta)$，$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ 包含在扇形区域 $Q$: $0\leqslant r\leqslant a$，$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ 内，由圆弧和射线构成的 $Q$ 的划分导致 $R$ 的一个划分

我们用圆弧和射线的网格覆盖区域 $Q$. 圆弧是从圆心在原点半径为 $\Delta r$，$2\Delta r$，…，$m\Delta r$ 的圆上切出的，其中 $\Delta r=a/m$. 射线由

$$\theta=\alpha,\quad \theta=\alpha+\Delta\theta,\quad \theta=\alpha+2\Delta\theta,\quad \cdots,\quad \theta=\alpha+m'\Delta\theta=\beta$$

给出，其中 $\Delta\theta=(\beta-\alpha)/m'$. 圆弧和射线把 $Q$ 划分成被称为“极矩形”的小拼片.

我们对位于 $R$ 内的极矩形编号(顺序无关紧要)，把它们的面积命名为 $\Delta A_1$，$\Delta A_2$，…，$\Delta A_n$. 令 $(r_k,\theta_k)$ 是面积为 $\Delta A_k$ 的极矩形中的任意点. 然后构成和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(r_k,\theta_k)\Delta A_k$$

如果 $f$ 在整个区域 $R$ 上是连续的，当细化网格使 $\Delta r$ 和 $\Delta\theta$ 趋近零时，这个和将趋近一个极限. 这个极限称为 $f$ 在 $R$ 上的二重积分. 用符号表示，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\iint_R f(r,\theta)\,\mathrm{d}A$$

为了求这个极限，首先必须以 $\Delta r$ 和 $\Delta\theta$ 表示 $\Delta A_k$ 的方式写出和 $S_n$. 为方便起见，我们选择 $r_k$ 为第 $k$ 个极矩形边界的内侧弧和外侧弧的半径的平均值. 于是，限定 $\Delta A_k$ 的内侧弧的半径是 $r_k-(\Delta r/2)$，外侧弧半径是 $r_k+(\Delta r/2)$(见图 13.18).

在一个半径为 $r$ 的圆中角为 $\theta$ 的楔形扇区的面积是

$$A=\frac{1}{2}\theta\cdot r^2$$

可以看出，这是圆面积 $\pi r^2$ 同楔形扇区包含的小部分面积 $\theta/2\pi$ 的乘积. 所以这些在原点的弧所对的圆扇区的面积为

$$\text{内侧弧扇区面积：}\frac{1}{2}\left(r_k-\frac{\Delta r}{2}\right)^2\Delta\theta$$

$$\text{外侧弧扇区面积：}\frac{1}{2}\left(r_k+\frac{\Delta r}{2}\right)^2\Delta\theta$$

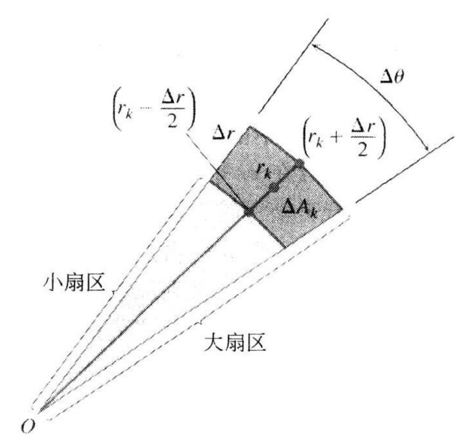



图 13.18 从观察结果 $\Delta A_k$ =（大扇区面积）-（小扇区面积）导出公式 $\Delta A_k = r_k\,\Delta r\,\Delta\theta$

因此，

$$\begin{aligned}\Delta A_k &= \text{大扇区面积} - \text{小扇区面积}\\ &=\frac{\Delta\theta}{2}\left[\left(r_k+\frac{\Delta r}{2}\right)^2-\left(r_k-\frac{\Delta r}{2}\right)^2\right]\\ &=\frac{\Delta\theta}{2}(2r_k\Delta r) = r_k\Delta r\Delta\theta\end{aligned}$$

把这个结果代入定义 $S_n$ 的和式中，给出

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(r_k,\theta_k)r_k\Delta r\Delta\theta$$

当 $n\to\infty$ 以及 $\Delta r$ 和 $\Delta\theta$ 的值趋近零时，这些和收敛于二重积分

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iint_R f(r,\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

傅比尼定理的一种表述形式说明，这些和趋近的极限可以通过对 $r$ 和 $\theta$ 的累次单积分求值：

$$\iint_R f(r,\theta)\,\mathrm{d}A = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}\int_{r=g_1(\theta)}^{r=g_2(\theta)} f(r,\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

### 13.4.2 求积分限

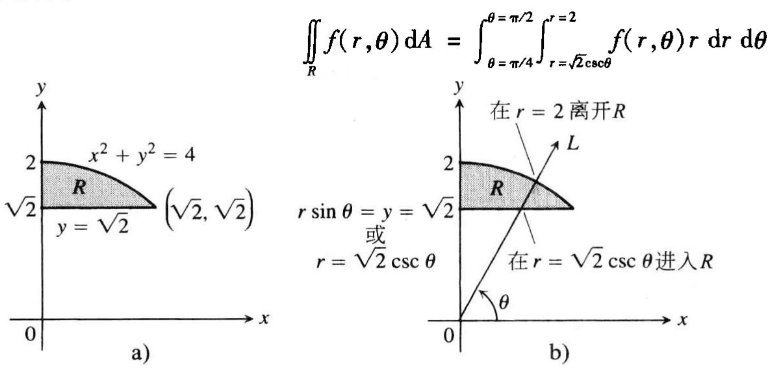
在直角坐标中求积分限采用的步骤同样适用于极坐标. 以图 13.19 的积分区域为例，在极坐标中为了在区域 $R$ 上求 $\iint_R f(r,\theta)\,\mathrm{d}A$，首先对 $r$ 积分，然后对 $\theta$ 积分，其步骤如下：

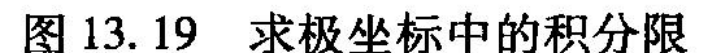
**(1) 画积分区域草图.** 画出积分区域的草图，并且标明限定区域的曲线（见图 13.19a).

**(2) 求 $r$ 积分限.** 设想一条从原点引出在 $r$ 增加方向穿过 $R$ 的射线 $L$. 分别标记 $L$ 在进入 $R$ 和离开 $R$ 处的 $r$ 值. 这就是 $r$ 的两个积分限. 它们通常依赖于 $L$ 与正 $x$ 轴构成的角 $\theta$（见图 13.19b).

**(3) 求 $\theta$ 积分限.** 求限定 $R$ 的最小 $\theta$ 值和最大 $\theta$ 值. 这两个值是 $\theta$ 积分限（见图 13.19c). 这个积分为

$$\iint_R f(r,\theta)\,\mathrm{d}A = \int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2}\int_{r=\sqrt{2}\csc\theta}^{r=2} f(r,\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$





图 13.19 求极坐标中的积分限

**例1** 求函数$f(r,\theta)$在区域$R$上的积分的积分限，$R$位于心脏线$r=1+\cos\theta$的内部和圆$r=1$的外部.

**解**

(1)首先画出积分区域$R$的草图，并且标明限定区域的曲线(见图13.20).

(2)其次求$r$积分限. 从原点引出的一条典型射线在$r=1$处进入$R$，在$r=1+\cos\theta$处离开$R$.

(3)最后求$\theta$积分限. 从原点引出同$R$相交的射线从$\theta=-\pi/2$延续到$\theta=\pi/2$. 函数$f$在$R$上的积分是

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{1}^{1+\cos\theta} f(r,\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \qquad \blacksquare$$

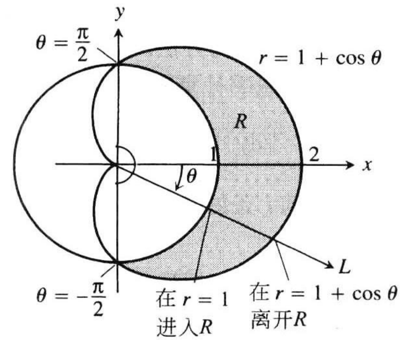



图13.20 对例1中的区域求极坐标的积分限

如果$f(r,\theta)$是取常数值1的函数，那么$f$在$R$上的积分是$R$的面积.

> **极坐标中的面积**
>
> 极坐标平面内的闭有界区域$R$的面积为
>
> $$A=\iint_R r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

这个面积公式同前面所有的公式一致，虽然我们对这个事实没有给出证明.

**例2** 求由双纽线$r^2=4\cos 2\theta$包围的面积.

**解** 我们画出用来确定积分限的双纽线图形(见图13.21). 从曲线包围区域的对称性看出，总面积为第一象限部分面积的4倍：

$$A=4\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{4\cos 2\theta}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=4\int_0^{\pi/4}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{4\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$=4\int_0^{\pi/4}2\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta=4\sin 2\theta\Big]_0^{\pi/4}=4 \qquad \blacksquare$$

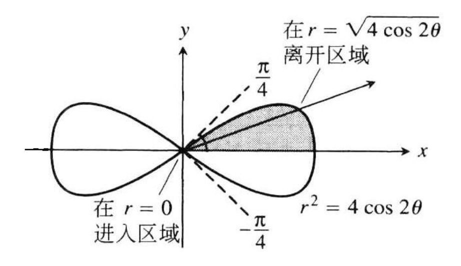



图13.21 为了在阴影区域上求积分，我们让$r$从0变到$\sqrt{4\cos 2\theta}$，$\theta$从0变到$\pi/4$(例2)

### 13.4.3 变换笛卡儿坐标积分为极坐标积分

变换笛卡儿坐标积分$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$为极坐标积分分两步进行. 第一步,在积分中代入$x=r\cos\theta$和$y=r\sin\theta$,并且用$r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$代替$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. 第二步,为$R$的边界提供极坐标积分限. 笛卡儿积分于是变成

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_G f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

其中$G$表示极坐标中的积分区域. 这个作法同第5章介绍的代换方法相似，只不过现在包含代换两个变量而不是一个变量. 请注意，$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$用$r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$而不用$\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$代替. 在13.8节给出多重积分变量变换(代换)的更一般讨论.

**例3** 求积分

$$\iint_R e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

其中$R$是以$x$轴和曲线$y=\sqrt{1-x^2}$为界的半圆区域(见图13.22).

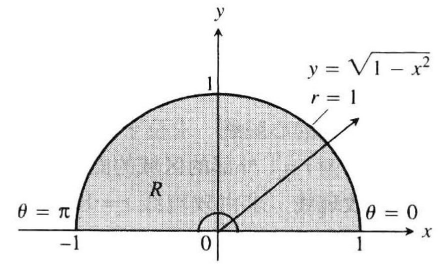



图13.22 例3中的半圆区域 $R$：$0\leqslant r\leqslant 1$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$

**解** 在笛卡儿坐标中，所求积分是非初等积分，设有用来求 $e^{x^2+y^2}$ 对 $x$ 积分或者对 $y$ 积分的直接方法. 然而，这个积分以及其他类似的积分在数学中——例如在统计学中——是很重要的，我们需要寻求计算它的方法. 用极坐标轻而易举. 代入 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，并且用 $r\,dr\,d\theta$ 代替 $dy\,dx$，使我们能够计算积分如下：

$$\iint_R e^{x^2+y^2}dy\,dx=\int_0^{\pi}\int_0^1 e^{r^2}r\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^1 d\theta=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(e-1)d\theta=\frac{\pi}{2}(e-1)$$

在 $r\,dr\,d\theta$ 中的 $r$ 正好是求 $e^{r^2}$ 的积分所需要的. 没有它我们不可能求这个积分. ■

## 习题 13.4

在习题 1 ~ 16 中，把笛卡儿坐标积分转换成等价的极坐标积分. 然后求极坐标积分.

1. $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}dy\,dx$.　　2. $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\,dx$.

3. $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}(x^2+y^2)dx\,dy$.

4. $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}(x^2+y^2)dy\,dx$.

5. $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}dy\,dx$.　　6. $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}}(x^2+y^2)dx\,dy$.

7. $\int_{0}^{6}\int_{0}^{y}x\,dx\,dy$.　　8. $\int_{0}^{2}\int_{0}^{x}y\,dy\,dx$.

9. $\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0}\frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}dy\,dx$.

10. $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0}\frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}dx\,dy$.

11. $\int_{0}^{\ln 2}\int_{0}^{\sqrt{(\ln 2)^2-y^2}}e^{\sqrt{x^2+y^2}}dx\,dy$.

12. $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}e^{-(x^2+y^2)}dy\,dx$.

13. $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{1-(x-1)^2}}\frac{x+y}{x^2+y^2}dy\,dx$.

14. $\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{0}xy^2dx\,dy$.

15. $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\ln(x^2+y^2+1)dx\,dy$.

16. $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}dy\,dx$.

17. 求由曲线 $r=2(2-\sin 2\theta)^{1/2}$ 从第一象限切出区域的面积.

18. **同圆交叠的心脏线** 求位于心脏线 $r=1+\cos\theta$ 内部和圆 $r=1$ 外部的区域的面积.

19. **一叶玫瑰线** 求由玫瑰线 $r=12\cos 3\theta$ 的一叶所包围区域的面积.

20. **蜗牛壳** 求由正 $x$ 轴和螺线 $r=4\theta/3$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 所包围区域的面积. 这个区域像一个蜗牛壳.

21. **第一象限内的心脏线** 求由心脏线 $r=1+\sin\theta$ 从第一象限切出的区域的面积.

22. **交叠的心脏线** 求心脏线 $r=1+\cos\theta$ 和 $r=1-\cos\theta$ 的公共区域的面积.

在极坐标中，函数在区域 $R$ 上的**平均值**（13.3 节）由

$$\frac{1}{\text{面积}(R)}\iint_R f(r,\theta)r\,dr\,d\theta$$

给出. 在习题 23 ~ 26 中，利用这个公式求平均值.

23. **半球面的平均高度** 求 $xy$ 平面内的半球形曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 在圆盘 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 之上的平均高度.

24. **圆锥面的平均高度** 求 $xy$ 平面内（单）圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在圆盘 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 之上的平均高度.

25. **从圆盘内部到中心的平均距离** 求从圆盘 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 内的点 $P(x,y)$ 到原点的平均距离.

26. **从圆盘内的点到圆盘边界上一点的平均平方距离** 求从圆盘 $x^2+y^2\leqslant 1$ 内的点 $P(x,y)$ 到边界点 $A(1,0)$ 的距离平方的平均值.

27. **转换为极坐标积分** 求函数

$$f(x,y)=\frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

在区域 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant e$ 上的积分.

28. **转换为极坐标积分** 求函数

$$f(x,y)=\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

在区域 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant e^2$ 上的积分.

29. **非圆形直立柱体的体积** 直立柱体的底面是位于心脏线 $r=1+\cos\theta$ 之内和圆 $r=1$ 之外的区域，柱体的顶部在平面 $z=x$ 内. 求柱体的体积.

30. **非圆形直立柱体的体积** 直立柱体的底部是由双纽线 $r^2=2\cos 2\theta$ 包围的区域，顶部以球面 $z=\sqrt{2-r^2}$ 为界. 求柱体的体积.

31. **转换为极坐标积分**

(a) 求反常积分

$$I=\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx$$

的常用方法是先计算它的平方：

$$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

用极坐标求最后的积分，并且从所得方程求解 $I$.

(b)求极限

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{erf}(x) = \lim_{n\to\infty}\int_0^x \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\,dt$$

**32. 转换为极坐标积分** 求积分

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$$

**33. 存在性** 求函数

$$f(x,y) = \frac{1}{1-x^2-y^2}$$

在圆盘 $x^2+y^2\leqslant 3/4$ 上的积分. $f(x,y)$ 在圆盘 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上的积分存在吗？提出答案的理由.

**34. 极坐标中的面积公式** 利用极坐标中的二重积分，推导在原点和极曲线 $r=f(\theta)$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 之间的扇形区域的面积公式

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2\,d\theta$$

**35. 到圆盘内给定点的平均距离** 令 $P_0$ 是半径为 $a$ 的圆内一点，$h$ 表示从 $P_0$ 到圆心的距离. 令 $d$ 表示从圆内任意点 $P$ 到 $P_0$ 的距离. 求 $d^2$ 在由圆包围的区域上的平均值.（提示：为了简化计算，把圆心置于原点，$P_0$ 置于 $x$ 轴上.）

**36. 面积** 假定在极坐标平面内一个区域的面积为

$$A = \int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_{\csc\theta}^{2\sin\theta} r\,dr\,d\theta$$

画出区域的草图并且求它的面积.

**计算机探究**

在习题 37 ~ 40 中，用一种 CAS（计算机代数系统）把笛卡儿坐标积分转换为等价的极坐标积分，并且求极坐标积分的值. 在每题中执行下列处理步骤：

(a)绘制 $xy$ 平面内积分区域的图形.

(b)从(a)得到的笛卡儿坐标区域的边界曲线中求解 $r$ 和 $\theta$，把边界曲线转换为极坐标表示.

(c)利用(b)中的结果，绘制 $r\theta$ 平面内极坐标积分区域的图形.

(d)把被积函数由笛卡儿坐标转换为极坐标. 从(c)中的积分区域图形确定积分限，并且利用 CAS 积分公用程序求极坐标积分.

**37.** $\displaystyle\int_0^1\int_x^1 \frac{y}{x^2+y^2}\,dy\,dx.$ **38.** $\displaystyle\int_0^1\int_0^{x/2} \frac{x}{x^2+y^2}\,dy\,dx.$

**39.** $\displaystyle\int_0^1\int_{-y/3}^{y/3} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy.$ **40.** $\displaystyle\int_0^1\int_y^{2-y} \sqrt{x+y}\,dx\,dy.$

## 13.5 直角坐标中的三重积分

正如二重积分比单积分使我们能够处理更一般的问题一样，三重积分能够求解甚至更为一般的问题. 用三重积分可以求三维形体的体积和函数在三维区域上的平均值. 三维积分也出现在三维空间的向量场和流体流动的问题中，我们在第 14 章将讨论这两类问题.

### 13.5.1 三重积分

如果 $F(x,y,z)$ 是定义在空间中闭有界区域 $D$ 上的函数，例如像固体球或者粘土堆所占据的区域，那么 $F$ 在 $D$ 上的积分可以采用下述方式定义. 我们把包含 $D$ 的长方形框体形状的区域用平行于坐标轴的平面划分成长方体单元（见图 13.23）. 对位于 $D$ 内的长方体单元按某种次序从 1 到 $n$ 编号，第 $k$ 个单元具有尺寸 $\Delta x_k$，$\Delta y_k$ 和 $\Delta z_k$ 和体积 $\Delta V_k = \Delta x_k\Delta y_k\Delta z_k$. 在每个单元中选择一点 $(x_k,y_k,z_k)$ 并且建立和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} F(x_k,y_k,z_k)\Delta V_k \qquad (1)$$

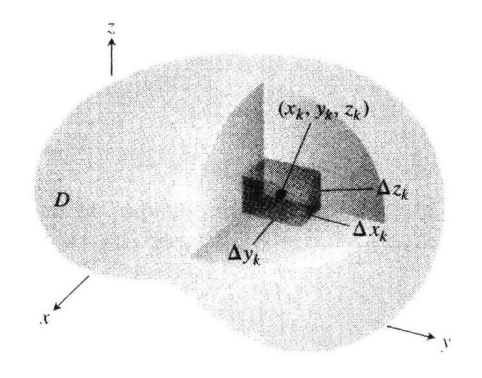



图 13.23 用体积为 $\Delta V_k$ 的长方体单元划分空间区域 $D$

我们所关注的问题是，当 $D$ 用越来越小的单元划分，以致在 $\Delta x_k$，$\Delta y_k$，$\Delta z_k$ 和划分的范数 $\|P\|$（$\Delta x_k,\Delta y_k,\Delta z_k$ 中的最大值）都趋近零时，会出现什么结果. 如果无论怎样选择划分和单元中的点 $(x_k,y_k,z_k)$，$S_n$ 都取得唯一的极限，我们就说 $F$ 在 $D$ 上是**可积的**. 同过去一样，可以证明，如果 $F$ 是连续

函数，而限定 $D$ 的曲面由有限数目的光滑曲面沿有限条光滑曲线连接而成，那么 $F$ 是可积的. 当 $\|P\|\to 0$ 和单元数 $n\to\infty$ 时，和 $S_n$ 趋近一个极限. 这个极限称为 **$F$ 在 $D$ 上的三重积分**，并且记为

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iiint_D f(x,y,z)\,dV$$

或

$$\lim_{\|P\|\to 0} S_n = \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

使连续函数成为可积的区域 $D$ 是那些具有“相当光滑”边界的区域.

### 13.5.2 空间区域的体积

如果 $F$ 是函数值为 1 的常值函数，那么式(1)中的和化简为

$$S_n = \sum F(x_k,y_k,z_k)\Delta V_k = \sum 1\cdot\Delta V_k = \sum \Delta V_k$$

当 $\Delta x_k,\Delta y_k$ 和 $\Delta z_k$ 趋近零时，单元 $\Delta V_k$ 变得越来越小和越来越多，并且越来越填满 $D$. 因此我们把 $D$ 的体积定义为三重积分

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Delta V_k = \iiint_D dV$$

**定义** 空间中闭有界区域 $D$ 的**体积**为

$$V = \iiint_D dV$$

这个定义同前面的体积定义一致，虽然我们略去对这个事实的证明. 立刻可以看到，这个积分使我们能够计算由曲面包围的空间区域的体积.

### 13.5.3 求积分限

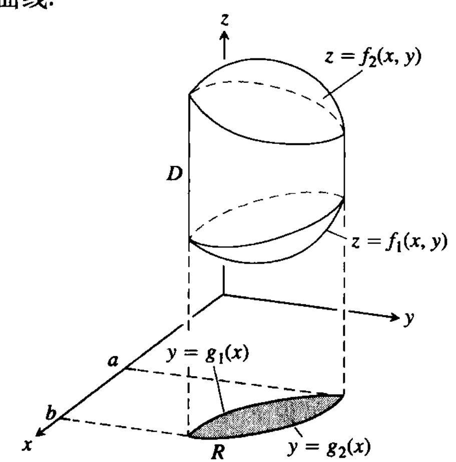
我们应用傅比尼定理的三维形式(13.2 节)通过三个累次单积分求三重积分. 同二重积分一样，对于求这三个单积分的积分限有一个几何上的步骤.

为了在区域 $D$ 上求积分

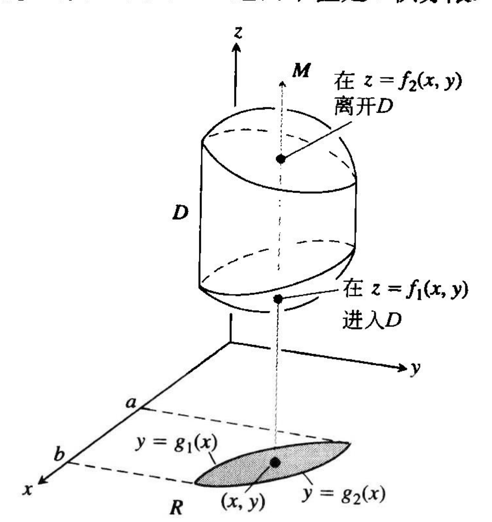
$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV$$

首先对 $z$ 积分，接着对 $y$ 积分，最后对 $x$ 积分.

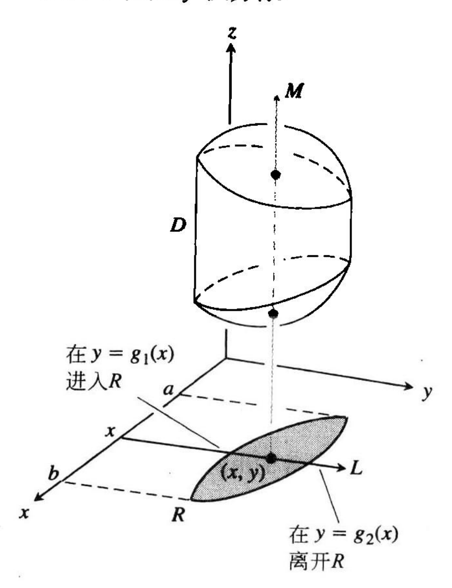
**(1) 画积分区域的草图**：画区域 $D$ 及其在 $xy$ 平面内的“影子”(垂直投影)$R$ 的草图. 标明 $D$ 的上下界曲面和 $R$ 的上下界曲线.



**(2) 求 $z$ 积分限**：在 $R$ 内引一条通过典型点 $(x,y)$ 同 $z$ 轴平行的直线 $M$. 随着 $z$ 的增加，$M$ 在 $z=f_1(x,y)$ 处进入 $D$，在 $z=f_2(x,y)$ 处离开 $D$. 这两个值是 $z$ 积分限.




**(3) 求 $y$ 积分限**：引一条通过点 $(x,y)$ 同 $y$ 轴平行的直线 $L$. 随着 $y$ 的增加，$L$ 在 $y=g_1(x)$ 处进入 $R$，在 $y=g_2(x)$ 处离开 $R$. 这两个值是 $y$ 积分限.




**(4) 求 $x$ 积分限**：选择包含所有穿过 $R$ 同 $y$ 轴平行的直线在内的 $x$ 积分限(上图中的 $x=a$ 和 $x=b$). 这两个值是 $x$ 积分限. 最后，积分为

$$\int_{x=a}^{x=b}\int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)}\int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} F(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

如果改变积分次序，采取类似的步骤. 区域 $D$ 的"影子"位于对变量求累次积分的后面两个变量的平面内.

上述过程适用于空间区域 $D$ 的上方和下方以曲面为界而其"影子"区域 $R$ 的上端和下端以曲线为界的积分. 这个过程不适用于带空洞的复杂区域，不过有时可以把这样的区域细分成一些更简单的能够采用这个过程的区域.

**例 1**　求由曲面

$$z = x^2 + 3y^2 \quad 和 \quad z = 8 - x^2 - y^2$$

包围区域 $D$ 的体积.

**解**　$D$ 的体积为 $F(x,y,z)=1$ 在 $D$ 上的积分

$$V = \iiint_D \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

为了确定求这个积分的积分限，首先画出积分区域的草图(见图 13.24). 两个曲面在椭圆柱面

$$x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2 \quad 或 \quad x^2 + 2y^2 = 4, \quad z > 0.$$

上相交. $D$ 在 $xy$ 平面上的投影区域 $R$ 的边界是具有同样方程 $x^2+2y^2=4$ 的椭圆. $R$ 的上端边界是曲线 $y=\sqrt{(4-x^2)/2}$，下端边界是曲线 $y=-\sqrt{(4-x^2)/2}$.

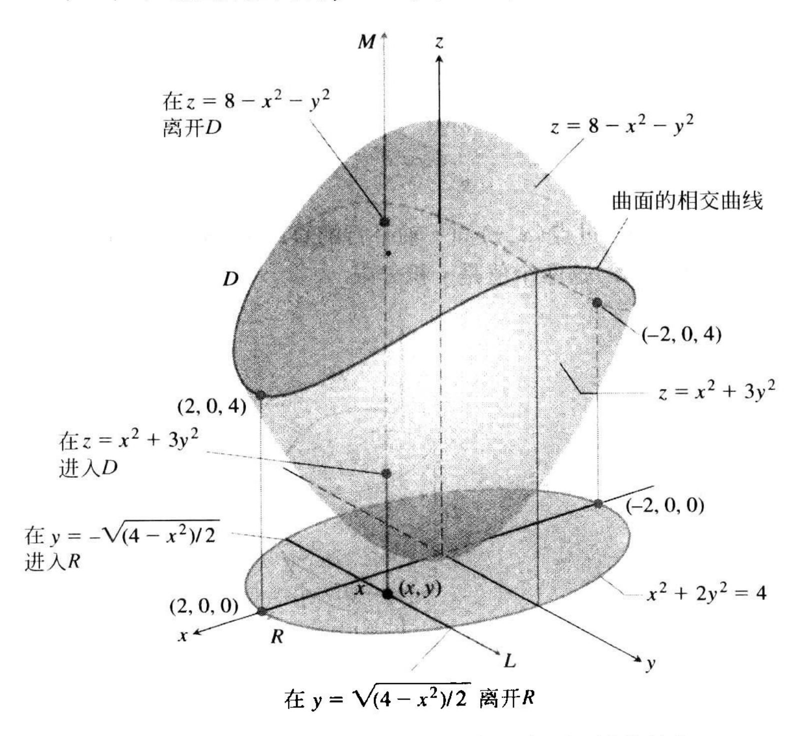



图 13.24　例 1 中计算的由两个抛物面包围区域的体积

现在来求 $z$ 积分限. 通过 $R$ 内的典型点 $(x,y)$ 同 $z$ 轴平行的直线 $M$ 在 $z=x^2+3y^2$ 进入 $D$，在 $z=8-x^2-y^2$ 离开 $D$.

其次求 $y$ 积分限. 通过 $(x,y)$ 同 $y$ 轴平行的直线 $L$ 在 $y=-\sqrt{(4-x^2)/2}$ 进入 $R$，在 $y=\sqrt{(4-x^2)/2}$ 离开 $R$.

最后求 $x$ 积分限. 当 $L$ 扫过 $R$ 时，$x$ 的值从 $x$ 在点 $(-2,0,0)$ 的 $x=-2$ 变化为在点 $(2,0,0)$ 的 $x=2$. 区域 $D$ 的体积为

$$V = \iiint_D \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} (8-2x^2-4y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-2}^{2}\left[(8-2x^2)y - \frac{4}{3}y^3\right]_{y=-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{y=\sqrt{(4-x^2)/2}} \mathrm{d}x = \int_{-2}^{2}\left(2(8-2x^2)\sqrt{\frac{4-x^2}{2}} - \frac{8}{3}\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{3/2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-2}^{2}\left[8\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{3/2} - \frac{8}{3}\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{3/2}\right]dx = \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{-2}^{2}(4-x^2)^{3/2}dx$$

$$= 8\pi\sqrt{2} \quad (\text{用代换 } x = 2\sin u \text{ 积分后})$$ ■

在下面例子中，把区域 $D$ 投影到 $xz$ 平面而不是 $xy$ 平面，说明如何使用不同的积分次序.

**例 2** 为求函数 $F(x,y,z)$ 在顶点为 $(0,0,0)$，$(1,1,0)$，$(0,1,0)$ 和 $(0,1,1)$ 的四面体 $D$ 上的三重积分确定积分限. 利用积分次序 $dy\,dz\,dx$.

**解** 画出区域 $D$ 及其在 $xz$ 平面的"影子"区域 $R$ 的草图(见图 13.25). $D$ 的(右)上方的边界曲面位于平面 $y=1$ 内，(左)下方的边界曲面位于平面 $y=x+z$ 内. $R$ 的上端边界是直线 $z=1-x$，下端边界是直线 $z=0$.

首先求 $y$ 积分限. 通过 $R$ 中的典型点 $(x, z)$ 同 $y$ 轴平行的直线 $M$ 在 $y=x+z$ 进入 $D$，在 $y=1$ 离开 $D$.

其次求 $z$ 积分限. 通过点 $(x,z)$ 同 $z$ 轴平行的直线 $L$ 在 $z=0$ 进入 $R$，在 $z=1-x$ 离开 $R$.

最后求 $x$ 积分限. 当 $L$ 扫过 $R$ 时，$x$ 的值从 $x=0$ 变化到 $x=1$. $F$ 在 $D$ 上的积分是 ■

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\int_{x+z}^{1} F(x,y,z)\,dy\,dz\,dx$$

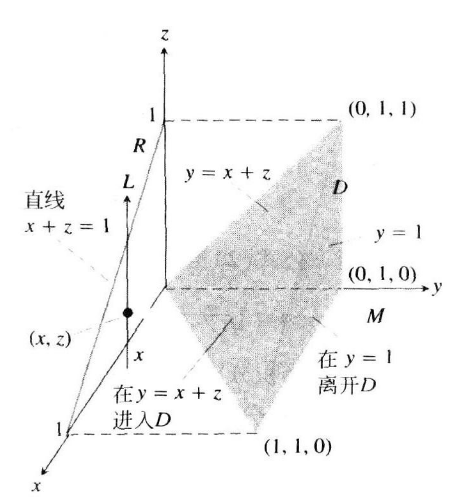



图 13.25 为求定义在四面体 $D$ 上的函数的三重积分确定积分限(例 2 和例 3)

**例 3** 按 $dz\,dy\,dx$ 的次序求 $F(x,y,z)$ 在例 2 中的四面体 $D$ 上的积分.

**解** 首先求 $z$ 积分限. 通过 $xy$ 平面内"影子"区域的典型点 $(x,y)$ 同 $z$ 轴平行的直线在 $z=0$ 进入 $D$，在通过上方平面 $z=y-x$ 的地方离开 $D$(见图 13.25).

其次求 $y$ 积分限. 在 $xy$ 平面 $z=0$ 上，四面体的斜面沿直线 $y=x$ 与这个平面相交. 通过点 $(x,y)$ 同 $y$ 轴平行的直线在 $y=x$ 进入 $xy$ 平面的影子区域，在 $y=1$ 离开这个区域.

最后求 $x$ 积分限. 在前面一步当同 $y$ 轴平行的直线扫过影子区域时，$x$ 的值从 $x=0$ 变化为在点 $(1, 1, 0)$ 的 $x=1$. 函数 $F$ 在 $D$ 上的积分是

$$\int_0^1\int_x^1\int_0^{y-x} F(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

例如，如果 $F(x,y,z)=1$，我们将求出这个四面的体积

$$V = \int_0^1\int_x^1\int_0^{y-x} dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_x^1 (y-x)\,dy\,dx = \int_0^1\left[\frac{1}{2}y^2 - xy\right]_{y=x}^{y=1}dx$$

$$= \int_0^1\left(\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}x^2\right)dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

我们得到按 $dy\,dz\,dx$ 次序积分的同样结果. 从例 2,

$$V = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_{x+z}^{1} dy\,dz\,dx = \frac{1}{6}$$ ■

## 13.5.4 空间中函数的平均值

函数 $F$ 在空间区域 $D$ 上的平均值由公式

$$F \text{ 在 } D \text{ 上的平均值} = \frac{1}{D\text{ 的体积}}\iiint_D f\,dV \tag{2}$$

定义. 例如，如果 $F(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，那么 $F$ 在 $D$ 上的平均值是从原点到 $D$ 中的点的平均

距离. 如果 $F(x, y, z)$ 是占据空间区域 $D$ 的立体的温度，那么 $F$ 在 $D$ 上的平均值是立体的平均温度.

**例 4** 求 $F(x,y,z)=xyz$ 在第一卦限内以坐标平面以及平面 $x=2$，$y=2$ 和 $z=2$ 为界的立方体上的平均值.

**解** 我们画出表示积分限的足够详细的立方体草图(见图 13.26). 然后利用公式(2)计算 $F$ 在立方体上的平均值.

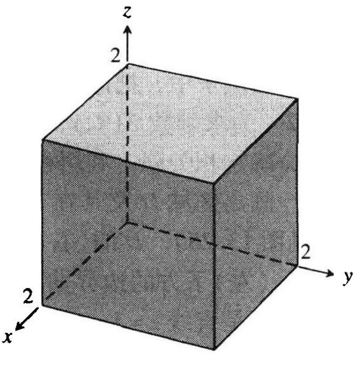



图 13.26 例 4 中的积分区域

立方体的体积是 $(2)(2)(2)=8$. $F$ 在立方体上的积分值为

$$\int_0^2\int_0^2\int_0^2 xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^2\int_0^2\left[\frac{x^2}{2}yz\right]_{x=0}^{x=2}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^2\int_0^2 2yz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^2\left[y^2z\right]_{y=0}^{y=2}\mathrm{d}z=\int_0^2 4z\,\mathrm{d}z-\left[2z^2\right]_0^2=8$$

取这两个值，公式(2)给出

$$xyz\text{ 在立方体上的平均值}=\frac{1}{\text{立方体体积}}\iiint\limits_{\text{立方体}} xyz\,\mathrm{d}V=\left(\frac{1}{8}\right)(8)=1$$

在求积分中选择积分次序 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，但是用其余五种积分次序中的任何一种将得到同样结果. ■

### 13.5.5 三重积分的性质

三重积分具有同二重积分和单积分一样的代数性质.

如果 $F=F(x, y, z)$ 和 $G=G(x, y, z)$ 是连续函数，那么存在下列性质：

**(1) 常数倍** $\displaystyle\iiint\limits_D kF\,\mathrm{d}V=k\iiint\limits_D F\,\mathrm{d}V$ （任意数 $k$）

**(2) 和与差** $\displaystyle\iiint\limits_D (F\pm G)\mathrm{d}V=\iiint\limits_D F\,\mathrm{d}V\pm\iiint\limits_D G\,\mathrm{d}V$

**(3) 优势积分**

(a) $\displaystyle\iiint\limits_D F\,\mathrm{d}V\geqslant 0$，如果在 $D$ 上 $F\geqslant 0$ (b) $\displaystyle\iiint\limits_D F\,\mathrm{d}V\geqslant\iiint\limits_D G\mathrm{d}V$，如果在 $D$ 上 $F\geqslant G$

**(4) 可加性**

$$\iiint\limits_D F\,\mathrm{d}V=\iiint\limits_{D_1} F\,\mathrm{d}V+\iiint\limits_{D_2} F\,\mathrm{d}V$$

如果 $D$ 是两个非交叠区域 $D_1$ 和 $D_2$ 的并集.

### 习题 13.5

1. 求例 2 中取 $F(x,y,z)=1$ 的积分，计算四面体的体积.
2. **长方体的体积** 对于第一卦限内以坐标平面以及平面 $x=1$，$y=2$ 和 $z=3$ 为界的长方体的体积，写出 6 个不同的累次三重积分. 求其中一个积分.
3. **四面体的体积** 对于由平面 $6x+3y+2z=6$ 从第一卦限切出的四面体的体积，写出 6 个不同的累次三重积分. 求其中一个积分.
4. **立体的体积** 对于第一卦限内由圆柱面 $x^2+y^2=4$ 和平面 $y=3$ 包围的区域，写出 6 个不同的累次三重积分. 求其中一个积分.
5. **由抛物面包围区域的体积** 令 $D$ 是以抛物面
$$z=8-x^2-y^2 \quad\text{和}\quad z=x^2+y^2$$
为界的区域. 对于 $D$ 的体积写出 6 个不同的累次三重积分. 求其中一个积分.

6. **抛物面内一个平面下方区域的体积** 令 $D$ 是以抛物面 $z=x^2+y^2$ 和平面 $z=2y$ 为界的区域. 写出按次序 dz dx dy 和 dz dy dx 求 $D$ 的体积的累次三重积分. 不必求这两个积分.

在习题 7 ~ 20 中求积分.

7. $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x^2+y^2+z^2)\,dz\,dy\,dx$.

8. $\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{3y}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\,dx\,dy$.

9. $\int_1^e\int_1^e\int_1^e \frac{1}{xyz}\,dx\,dy\,dz$.

10. $\int_0^1\int_0^{3-3x}\int_0^{3-3x-y} dz\,dy\,dx$.

11. $\int_0^1\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} y\sin z\,dx\,dy\,dz$.

12. $\int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_{-1}^1 (x+y+z)\,dy\,dx\,dz$.

13. $\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{\sqrt{9-x^2}} dz\,dy\,dx$.

14. $\int_0^2\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_0^{2x+y} dz\,dx\,dy$.

15. $\int_0^1\int_0^{2-x}\int_0^{2-x-y} dz\,dy\,dx$.

16. $\int_0^1\int_0^{1-x^2}\int_3^{4-x^2-y} x\,dz\,dy\,dx$.

17. $\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\cos(u+v+w)\,du\,dv\,dw$ （$uvw$ 空间）.

18. $\int_1^e\int_1^e\int_1^e \ln r\ln s\ln t\,dt\,dr\,ds$ （$rst$ 空间）.

19. $\int_0^{\pi/4}\int_0^{\ln\sec v}\int_{-\infty}^{2t} e^x\,dx\,dt\,dv$ （$tvx$ 空间）.

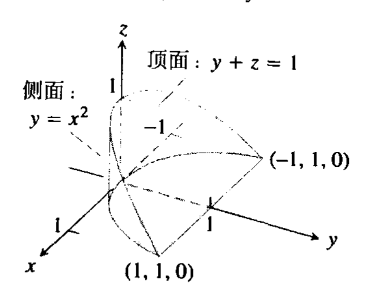
20. $\int_0^7\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-q^2}} \frac{q}{r+1}\,dp\,dq\,dr$ （$pqr$ 空间）.

21. 附图所示区域是积分

$$\int_{-1}^1\int_{x^2}^1\int_0^{1-y} dz\,dy\,dx$$

的积分区域. 按下列次序把积分重写成等价的累次积分:

(a) dy dz dx. (b) dy dx dz. (c) dx dy dz.
(d) dx dz dy. (e) dz dx dy.

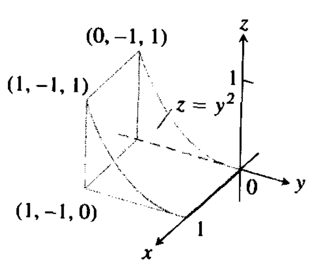



22. 附图所示区域是积分

$$\int_0^1\int_{-1}^0\int_0^{y^2} dz\,dy\,dx$$

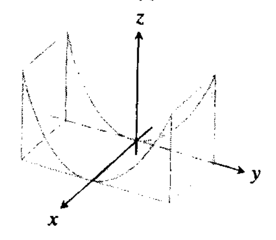
的积分区域. 按下列次序把积分重写成等价的累次积分:

(a) dy dz dx. (b) dy dx dz. (c) dx dy dz.
(d) dx dz dy. (e) dz dx dy.

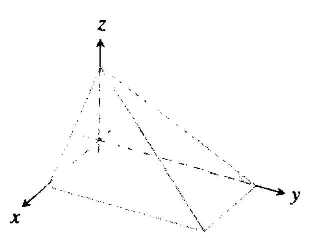



在习题 23 ~ 36 中, 求区域的体积.

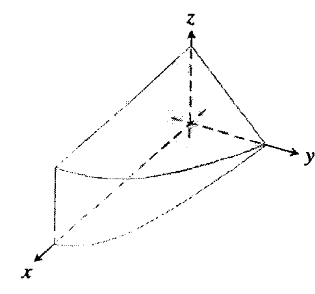
23. 柱面 $y=z^2$ 和 $xy$ 平面之间以平面 $x=0$, $x=1$, $y=-1$, $y=1$ 为界的区域.



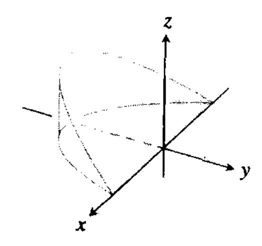

24. 第一卦限内以坐标平面和平面 $x+z=1$, $y+2z=2$ 为界的区域.



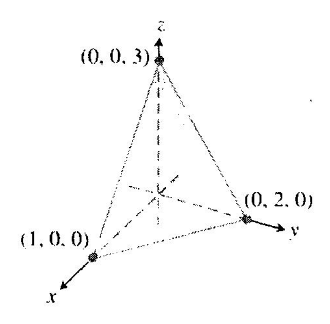

25. 第一卦限内以坐标平面和平面 $y+z=2$ 以及柱面 $x=4-y^2$ 为界的区域.



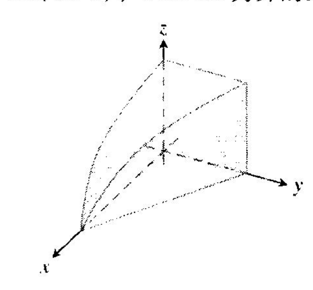

26. 由平面 $z=-y$ 和 $z=0$ 从圆柱面 $x^2+y^2=1$ 切割的楔形块.



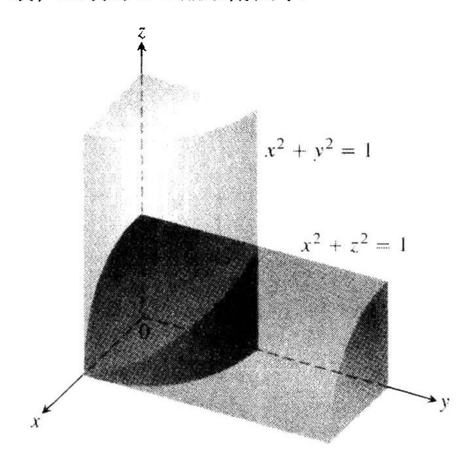
**27.** 第一卦限内以坐标平面以及通过点(1,0,0),(0,2,0)和(0,0,3)的平面为界的四面体.



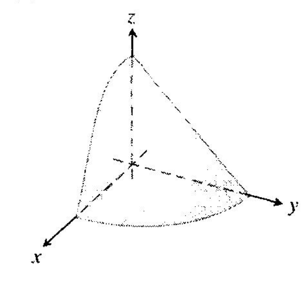

**28.** 第一卦限内以坐标平面和平面 $y=1-x$ 以及曲面 $z=\cos(\pi x/2)$, $0\leqslant x\leqslant 1$ 为界的区域.



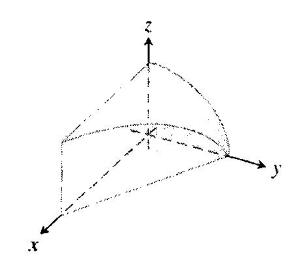

**29.** 圆柱面 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+z^2=1$ 内部的公共区域,区域的 1/8 显示附图中.



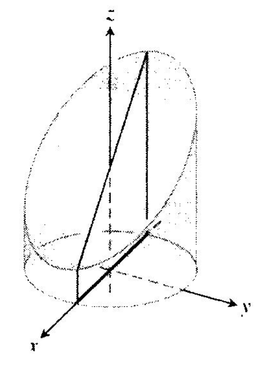

**30.** 第一卦限内以坐标平面和曲面 $z=4-x^2-y$ 为界的区域.




**31.** 第一卦限内以坐标平面和平面 $x+y=4$ 以及圆柱面 $y^2+4z^2=16$ 为界的区域.




**32.** 由平面 $z=0$ 和 $x+z=3$ 从圆柱面 $x^2+y^2=4$ 切割的区域.




**33.** 第一卦限内介于平面 $x+y+2z=2$ 和 $2x+2y+z=4$ 之间的区域.

**34.** 以平面 $z=x$, $x+z=8$, $z=y$, $y=8$ 和 $z=0$ 为界的有限区域.

**35.** 由 $xy$ 平面和平面 $z=x+2$ 从椭圆柱体 $x^2+4y^2\leqslant 4$ 切割的区域.

**36.** 背面以平 $x=0$ 为界,正面和侧面以抛物柱面 $x=1-y^2$ 为界,顶部以抛物面 $z=x^2+y^2$ 为界,以及底部以 $xy$ 平面为界的区域.

在习题 37 ~ 40 中,求函数 $F(x,y,z)$ 在给定区域上的平均值.

**37.** $F(x,y,z)=x^2+9$ 在第一卦限内以坐标平面以及平面 $x=2$, $y=2$ 和 $z=2$ 为界的立方体.

**38.** $F(x,y,z)=x+y-z$ 在第一卦限内以坐标平面以及平面 $x=1$, $y=1$ 和 $z=2$ 为界的长方体.

**39.** $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在第一卦限内以坐标平面以及平面 $x=1$, $y=1$ 和 $z=1$ 为界的立方体.

**40.** $F(x,y,z)=xyz$ 在第一卦限内以坐标平面以及平面 $x=2$, $y=2$ 和 $z=2$ 为界的立方体.

在习题 41 ~ 44 中,通过以适当方式改变积分次序求积分.

41. $\int_0^4\int_0^1\int_{2y}^2 \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz.$

42. $\int_0^1\int_0^1\int_{x^2}^1 12xze^{zy^2}\,dy\,dx\,dz.$

43. $\int_0^1\int_{\sqrt[3]{z}}^1\int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x}\sin \pi y^2}{y^2}\,dx\,dy\,dz.$

44. $\int_0^2\int_0^{4-x^2}\int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z}\,dy\,dz\,dx.$

45. **求累次积分的积分上限** 求解 $a$:

$$\int_0^1\int_0^{4-a-x^2}\int_a^{4-x^2-y} dz\,dy\,dx = \frac{4}{15}$$

46. **椭球面** 椭球面

$$x^2 + (y/2)^2 + (z/c)^2 = 1$$

的体积在 $c$ 取什么值时等于 $8\pi$?

47. **使三重积分达到最小值** 三重积分

$$\iiint_D (4x^2 + 4y^2 + z^2 - 4)\,dV$$

在空间中什么定义域 $D$ 上达到最小值? 提出答案的理由。

48. **使三重积分达到最大值** 三重积分

$$\iiint_D (1 - x^2 - y^2 - z^2)\,dV$$

在空间中什么定义域 $D$ 上达到最大值? 提出答案的理由.

**计算机探究**

在习题 49 ~52 中, 用一种 CAS(计算机代数系统)的积分公用程序, 求给定函数在指定立体区域上的积分.

49. $F(x,y,z) = x^2y^2z$ 在以 $x^2 + y^2 = 1$ 以及平面 $z = 0$ 和 $z = 1$ 为界的圆柱体上.

50. $F(x,y,z) = |xyz|$ 在下方以抛物面 $z = x^2 + y^2$ 为界和上方以平面 $z = 1$ 为界的立体上.

51. $F(x,y,z) = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ 在下方以圆锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 为界和上方以平面 $z = 1$ 为界的立体上.

52. $F(x,y,z) = x^4 + y^2 + z^2$ 在球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 上.

## 13.6 矩与质心

这一节讲述如何计算笛卡儿坐标中二维和三维物体的质量和矩. 13.7 节讨论柱面坐标和球面坐标中对质量和矩的计算.

### 13.6.1 质量与一阶矩

如果函数 $\delta(x,y,z)$ 是占据空间区域 $D$ 的物体的密度(每单位体积的质量), $\delta$ 在 $D$ 上的积分给出物体的**质量**. 为了明白原因, 设想把物体划分成如图 13.27 那样的 $n$ 个质量单元. 物体的质量是极限

$$M = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Delta m_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\delta(x_k,y_k,z_k)\Delta V_k = \iiint_D \delta(x,y,z)\,dV$$

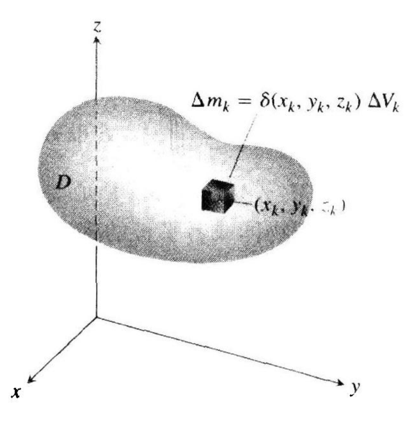


图 13.27 为了定义物体的质量, 设想把物体划分成有限数目的质量单元 $\Delta m_k$

我们把空间区域 $D$ 对一个坐标平面的一阶矩定义为从 $D$ 中一点$(x,y,z)$到平面的距离同物体在那个点的密度的乘积在 $D$ 上的三重积分. 例如, 区域 $D$ 对 $yz$ 平面的一阶矩是积分

$$M_{yz} = \iiint_D x\,\delta(x,y,z)\,dV$$

物体的质心是从一阶矩求出的. 例如, 质心的 $x$ 坐标是

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}$$

对于二维物体, 像一块薄板, 我们只需通过取消 $z$ 坐标计算对坐标轴的一阶矩. 所以对于 $y$ 轴的一阶矩是薄板区域 $R$ 中的点$(x,y)$到 $y$ 轴的距离同密度的乘积在 $R$ 上的二重积分:

$$M_y = \iint_R x\,\delta(x,y)\,dA$$

表 13.1 汇总质量和一阶矩的公式.

**表 13.1　质量和一阶矩的公式**

| (a)三维立体 | |
|---|---|
| 质量 | $M=\iiint_D \delta\,\mathrm{d}V$ ($\delta=\delta(x,y,z)$ 是在点 $(x,y,z)$ 的密度) |
| 对坐标平面的一阶矩 | $M_{yz}=\iiint_D x\,\delta\,\mathrm{d}V$,　$M_{xz}=\iiint_D y\,\delta\,\mathrm{d}V$,　$M_{xy}=\iiint_D z\,\delta\,\mathrm{d}V$ |
| 质心 | $\bar{x}=\dfrac{M_{yz}}{M}$,　$\bar{y}=\dfrac{M_{xz}}{M}$,　$\bar{z}=\dfrac{M_{xy}}{M}$ |
| (b)二　维　板 | |
| 质量 | $M=\iint_R \delta(x,y)\,\mathrm{d}A$　($\delta(x,y)$ 是在点 $(x,y)$ 的密度) |
| 对坐标轴的一阶矩 | $M_y=\iint_R x\,\delta(x,y)\,\mathrm{d}A$,　$M_x=\iint_R y\,\delta(x,y)\,\mathrm{d}A$ |
| 质心 | $\bar{x}=\dfrac{M_y}{M}$,　$\bar{y}=\dfrac{M_x}{M}$ |

**例 1**　求密度为常数 $\delta$ 的立体的质心，立体下方以平面 $z=0$ 内的圆盘 $R$: $x^2+y^2\leqslant 4$ 为界，上方以抛物面 $z=4-x^2-y^2$ 为界(见图 13.28).

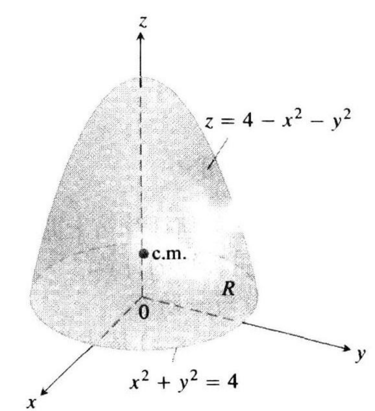


图 13.28　求立体的质心(c. m.)(例 1)

**解**　由对称性，$\bar{x}=\bar{y}=0$. 为了求 $\bar{z}$，首先计算

$$M_{xy}=\iint_R\int_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} z\,\delta\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\iint_R\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=4-x^2-y^2}\delta\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\delta}{2}\iint_R(4-x^2-y^2)^2\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\delta}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2(4-r^2)^2r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\quad\text{(用极坐标简化积分)}$$

$$=\frac{\delta}{2}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{6}(4-r^2)^3\right]_{r=0}^{r=2}\mathrm{d}\theta=\frac{16\delta}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=\frac{32\pi\delta}{3}$$

用相似的计算给出质量

$$M=\iint_R\int_0^{4-x^2-y^2}\delta\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=8\pi\delta$$

因此 $\bar{z}=(M_{xy}/M)=4/3$，质心是 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,4/3)$. ■

当空间物体或者平板的密度为常数时(像在例 1 中)，质心称为物体的**形心**. 为了求形心，我们设 $\delta$ 等于 1，并且像过去一样用质量除一阶矩求 $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$.

**例 2**　求第一象限内上方以直线 $y=x$ 为界和下方以抛物线 $y=x^2$ 为界的区域的形心. 这里的计算对于二维物物体也是有效的.

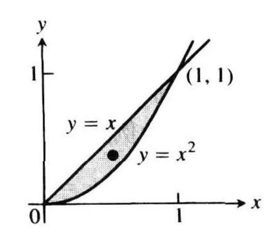


图 13.29　在例 2 中求这个区域的形心

**解**　为了确定积分限，画出足够详细的积分区域草图(见图 13.29). 然后设 $\delta$ 等于 1，并且计算表 13.1 中的相应公式：

$$M=\int_0^1\int_{x^2}^{x}1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_0^1\Big[y\Big]_{y=x^2}^{y=x}\mathrm{d}x=\int_0^1(x-x^2)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

$$M_x=\int_0^1\int_{x^2}^{x}y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=x}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{2}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{10}\right]_0^1=\frac{1}{15}$$

$$M_y = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[ xy \Big]_{y=x^2}^{y=x} \mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2 - x^3)\,\mathrm{d}x = \left[ \frac{x^3}{x} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

由 $M$，$M_x$ 和 $M_y$ 的这些值，求出

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1/12}{1/6} = \frac{1}{2}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{1/15}{1/6} = \frac{2}{5}$$

形心是点(1/2,2/5). ■

### 13.6.2 惯性矩

物体的一阶矩(见表 13.1)告诉我们重力场中有关物体平衡和对不同坐标轴产生的转矩. 但是，如果物体本身是旋转的轴，我们多半更关注有多少能量贮藏在轴中，或者需要耗费多少能量才能使轴加速到某个特定的角速度. 这是应用二阶矩或者惯性矩的地方.

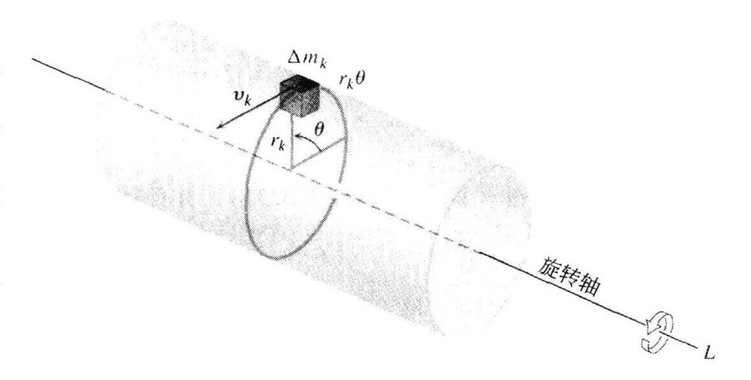



图 13.30 为了求贮藏在旋转轴中的能量的积分，首先设想把轴划分成小块，每块有它自身的动能；把各块包含的动能相加求出轴具有的动能

设想把轴划分成质量为 $\Delta m_k$ 的小块，并且用 $r_k$ 表示从第 $k$ 块的质心到旋转轴的距离(见图 13.30). 如果轴以每秒 $\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ 弧度的恒定角速度旋转，块的质心将沿它的轨道以线速率

$$v_k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r_k\theta) = r_k \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = r_k\omega$$

运动. 第 $k$ 块的动能近似为

$$\frac{1}{2}\Delta m_k v_k^2 = \frac{1}{2}\Delta m_k (r_k\omega)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 r_k^2 \Delta m_k$$

轴的动能近似为

$$\sum \frac{1}{2}\omega^2 r_k^2 \Delta m_k$$

当轴被划分成越来越小的块时，这些和趋近的积分给出轴的动能：

$$\mathrm{KE}_{轴} = \int \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \mathrm{d}m = \frac{1}{2}\omega^2 \int r^2 \mathrm{d}m \tag{1}$$

因子

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m$$

是轴对于它的旋转轴的*惯性矩*，并且从公式(1)看出轴的动能为

$$\mathrm{KE}_{轴} = \frac{1}{2} I\omega^2$$

轴的惯性矩同机车的惯性质量存在某些相似之处. 为了启动质量为 $m$ 的机车以线性速度 $v$ 行驶，我们需要提供 $\mathrm{KE} = (1/2)mv^2$ 的动能. 为了使机车停止下来，必须消除同样大小的动能. 为了启动惯性矩为 $I$ 的轴以角速度 $\omega$ 旋转，我们需要提供 $\mathrm{KE} = (1/2)I\omega^2$ 的动能. 为了使轴停止转动，必须消除同样大小的动能. 轴的惯性矩类似于机车的质量. 使机车难以启动或停止的原因在

于它的质量. 使轴难于转动或停止的原因是它的惯性矩. 惯性矩不仅依赖于轴的质量，也依赖于质量在轴上的分布.

现在来推导空间物体的惯性矩的公式. 如果 $r(x,y,z)$ 是从空间区域 $D$ 中的点 $(x,y,z)$ 到直线 $L$ 的距离，那么质量 $\Delta m_k=\delta(x_k,y_k,z_k)\Delta V_k$ 对直线 $L$ 的惯性矩（如图 13.30 所示）近似等于 $\Delta I_k=r^2(x_k,y_k,z_k)\Delta m_k$. 整个物体**对 $L$ 的惯性矩**是

$$I_L=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Delta I_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}r^2(x_k,y_k,z_k)\delta(x_k,y_k,z_k)\Delta V_k$$

$$=\iiint_D r^2\delta\,dV$$

如果 $L$ 是 $x$ 轴，那么 $r^2=y^2+z^2$（见图 13.31），并且

$$I_x=\iiint_D(y^2+z^2)\delta\,dV$$

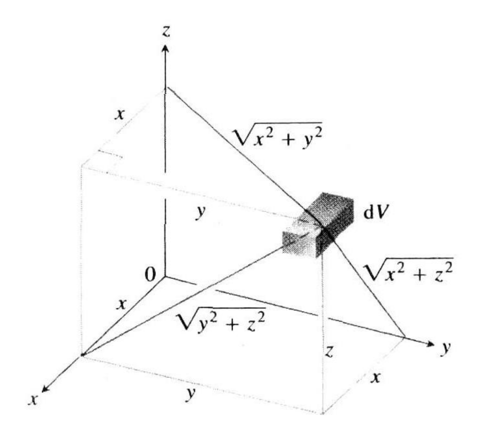


图 13.31　从 dV 到坐标平面和坐标轴的距离

同样，如果 $L$ 是 $y$ 轴或者 $z$ 轴，我们有

$$I_y=\iiint_D(x^2+z^2)\,\delta\,dV,\quad I_z=\iiint_D(x^2+y^2)\,\delta\,dV$$

表 13.2 汇总这些惯性矩的公式（称为二阶矩是由于它们引用了距离的二次方）. 表中也给出对原点的极矩的定义.

**表 13.2　惯性矩（二阶矩）公式**

| | |
|---|---|
| **(a) 三维立体** | |
| 对 $x$ 轴 | $I_x=\iiint(y^2+z^2)\,\delta\,dV\quad(\delta=\delta(x,y,z))$ |
| 对 $y$ 轴 | $I_y=\iiint(x^2+z^2)\,\delta\,dV$ |
| 对 $z$ 轴 | $I_z=\iiint(x^2+y^2)\,\delta\,dV$ |
| 对直线 $L$ | $I_L=\iiint r^2\delta\,dV\quad(r(x,y,z)=$ 从点 $(x,y,z)$ 到直线 $L$ 的距离$)$ |
| **(b) 二维板** | |
| 对 $x$ 轴 | $I_x=\iint y^2\delta\,dA\quad(\delta=\delta(x,y))$ |
| 对 $y$ 轴 | $I_y=\iint x^2\delta\,dA$ |
| 对直线 $L$ | $I_L=\iint r^2(x,y)\delta\,dA\quad(r(x,y)=$ 从点 $(x,y)$ 到 $L$ 的距离$)$ |
| 对原点（极矩） | $I_o=\iint(x^2+y^2)\,\delta\,dA=I_x+I_y$ |

**例 3**　求图 13.32 中显示的具有常数密度 $\delta$ 的长方体的惯性矩 $I_x$，$I_y$ 和 $I_z$.

**解**　$I_x$ 的公式给出

$$I_x=\int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2}(y^2+z^2)\delta\,dx\,dy\,dz$$

通过观察 $(y^2+z^2)\delta$ 是 $x$，$y$，$z$ 的偶函数，可以免除一些积分工作. 长方体由 8 个对称的块组成，在每个卦限有一块. 我们可在其中一块上求积分，然后乘 8 获得总积分值：

$$I_x = 8\int_0^{c/2}\int_0^{b/2}\int_0^{a/2}(y^2+z^2)\delta\,dx\,dy\,dz = 4a\delta\int_0^{c/2}\int_0^{b/2}(y^2+z^2)\,dy\,dz = 4a\delta\int_0^{c/2}\left[\frac{y^3}{3}+z^2y\right]_{y=0}^{y=b/2}dz$$

$$= 4a\delta\int_0^{c/2}\left(\frac{b^3}{24}+\frac{z^2b}{2}\right)dz = 4a\delta\left(\frac{b^3c}{48}+\frac{c^3b}{48}\right) = \frac{abc\delta}{12}(b^2+c^2) = \frac{M}{12}(b^2+c^2)$$

同样，

$$I_y = \frac{M}{12}(a^2+c^2) \quad 和 \quad I_z = \frac{M}{12}(a^2+b^2)$$ ■

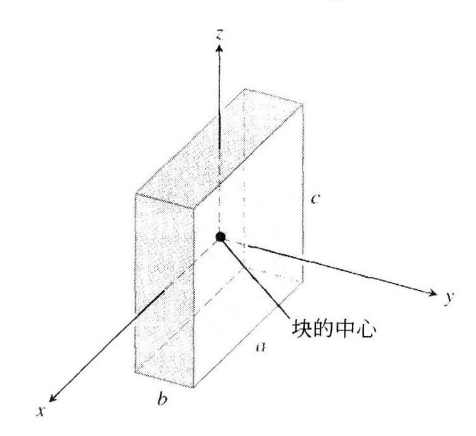



图 13.32 求这里显示的长方块的 $I_x$，$I_y$，$I_z$，原点位于长方块的中心(例 3)

图 13.33 例 4 中板覆盖的三角形区域

**例 4** 一块薄板覆盖第一象限内以 $x$ 轴以及直线 $x=1$ 和 $y=2x$ 为界的三角形区域. 薄板在点 $(x,y)$ 的密度为 $\delta(x,y)=6x+6y+6$. 求板对坐标轴和原点的惯性矩.

**解** 画出薄板的草图，并且加进我们对求积分确定积分限的足够细节(见图 13.33). 板对 $x$ 轴的惯性矩为

$$I_x = \int_0^1\int_0^{2x} y^2\delta(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{2x}(6xy^2+6y^3+6y^2)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1\left[2xy^3+\frac{3}{2}y^4+2y^3\right]_{y=0}^{y=2x}dx$$

$$= \int_0^1(40x^4+16x^3)\,dx = \left[8x^5+4x^4\right]_0^1 = 12$$

同样，对 $y$ 轴的惯性矩为

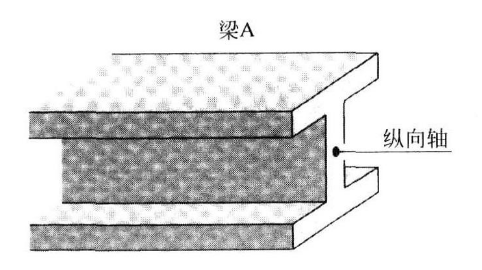
$$I_y = \int_0^1\int_0^{2x} x^2\delta(x,y)\,dy\,dx = \frac{39}{5}$$

请注意，我们在计算 $I_x$ 时求 $y^2$ 乘密度 $\delta$ 的积分，而在计算 $I_y$ 时求 $x^2$ 乘密度 $\delta$ 的积分.

由于已知 $I_x$ 和 $I_y$，无需用求积分来计算 $I_0$；我们可以改用表 13.2 中的公式 $I_o = I_x + I_y$：

$$I_o = 12 + \frac{39}{5} = \frac{60+39}{5} = \frac{99}{5}$$ ■

惯性矩在确定金属横梁在负荷下如何弯曲时也起着重要作用. 梁的刚度，是梁的典型横截面对梁的纵向轴的惯性矩 $I$ 的常数倍数. $I$ 的值越大，梁的刚度越强，在给定负荷下的弯曲越小. 这是为什么用工字梁取代横截面为正方形的梁的原因. 在梁的顶部和底部保持梁的大部分质量远离纵向轴，使 $I$ 的值达到最大限度(见图 13.34).



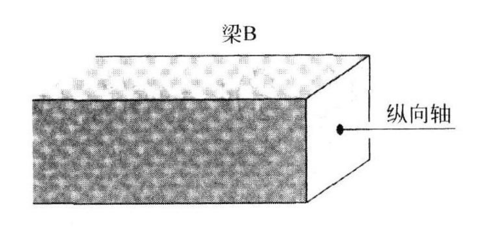
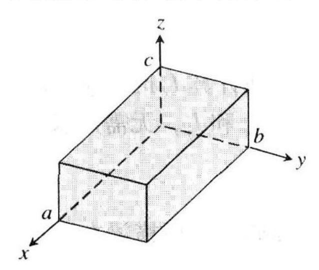



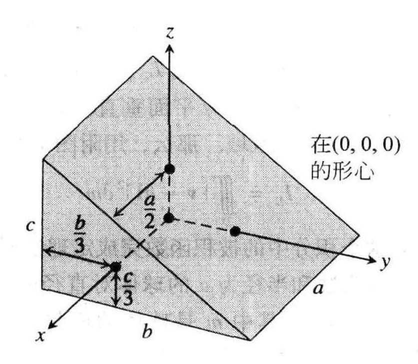

图 13.34 梁的横截面对梁纵向轴的惯性极矩越大，梁的刚度越强；
梁 $A$ 和梁 $B$ 的横截面相同，但是 $A$ 的刚度更强

## 习题 13.6

1. **求质心** 求第一象限内以直线 $x=0$，$y=x$ 和抛物线 $y=2-x^2$ 为界的密度 $\delta=3$ 的薄板的质心.
2. **求惯性矩** 求第一象限内以直线 $x=3$ 和 $y=3$ 为界的密度 $\delta$ 为常数的长方形板对坐标轴的惯性矩.
3. **求形心** 求第一象限内以 $x$ 轴及抛物线 $y^2=2x$ 和直线 $x+y=4$ 为界的区域的形心.
4. **求形心** 求用直线 $x+y=3$ 从第一象限切割的三角形区域的形心.
5. **求形心** 求用圆 $x^2+y^2=a^2$ 从第一象限切割的区域的形心.
6. **求形心** 求介于 $x$ 轴和拱形 $y=\sin x$，$0\leqslant x\leqslant\pi$ 之间的区域的形心.
7. **求惯性矩** 求以圆 $x^2+y^4=4$ 为界的密度 $\delta=1$ 的薄板对 $x$ 轴的惯性矩. 然后利用得到的结果求板的 $I_y$ 和 $I_o$.
8. **求惯性矩** 求以曲线 $y=(\sin^2 x)/x^2$ 和 $x$ 轴的区间 $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ 为界的密度 $\delta=1$ 的薄板对 $y$ 轴的惯性矩.
9. **求无限区域的形心** 求第二象限由内坐标轴和曲线 $y=e^x$ 包围区域的形心.（利用质量矩公式中的反常积分.）
10. **求无限板的一阶矩** 求覆盖第一象限内曲线 $y=e^{-x^2/2}$ 下方无限区域的薄板对 $y$ 轴的一阶矩，薄板的密度 $\delta(x,y)=1$.
11. **求惯性矩** 求以抛物线 $x=y-y^2$ 和直线 $x+y=0$ 为界的薄板对 $x$ 轴的惯性矩，如果薄板的密度 $\delta(x,y)=x+y$.
12. **求质量** 求占据由抛物线 $x=4y^2$ 从椭圆 $x^2+4y^2=12$ 切割的较小区域的薄板的质量，如果薄板的密度 $\delta(x,y)=5x$.
13. **求质心** 求以 $y$ 轴及直线 $y=x$ 和 $y=2-x$ 为界的三角形薄板的质心，如果薄板的密度 $\delta(x,y)=6x+3y+3$.
14. **求质心和惯性矩** 求以曲线 $x=y^2$ 和 $x=2y-y^2$ 为界的薄板的质心和对 $x$ 轴的惯性矩，如果薄板在点 $(x,y)$ 的密度为 $\delta(x,y)=y+1$.
15. **求质心和惯性矩** 求由直线 $x=6$ 和 $y=1$ 从第一象限切割的长方形薄板的质心和对 $y$ 轴的惯性矩，如果薄板密度 $\delta(x,y)=x+y+1$.
16. **求质心和惯性矩** 求以直线 $y=1$ 和抛物线 $y=x^2$ 为界的薄板的质心和对 $y$ 轴的惯性矩，如果薄板的密度 $\delta(x,y)=y+1$.
17. **求质心和惯性矩** 求以 $x$ 轴和直线 $x=\pm1$ 以及抛物线 $y=x^2$ 为界的薄板的质心和对 $y$ 轴的惯性矩，如果薄板的密度 $\delta(x,y)=7y+1$.
18. **求质心和惯性矩** 求以直线 $x=0$，$x=20$，$y=-1$ 和 $y=1$ 为界的长方形薄板的质心和对 $x$ 轴的惯性矩，如果薄板的密度 $\delta(x,y)=1+(x/20)$.
19. **求质心和惯性矩** 求以直线 $y=x$，$y=-x$ 和 $y=1$ 为界的三角形薄板的质心，以及对坐标轴的惯性矩和惯性极矩，如果薄板的密度 $\delta(x,y)=y+1$.
20. **求质心和惯性矩** 对于 $\delta(x,y)=3x^2+1$ 重做习题 19.
21. **求惯性矩** 通过计算附图所示长方体的 $I_x$，$I_y$ 和 $I_z$，求长方体对它的边的惯性矩.




22. **求惯性矩** 附图中的坐标轴通过楔形体的形心，同标明的边平行. 如果 $a=b=6$ 和 $c=4$，求 $I_x$，$I_y$ 和 $I_z$.



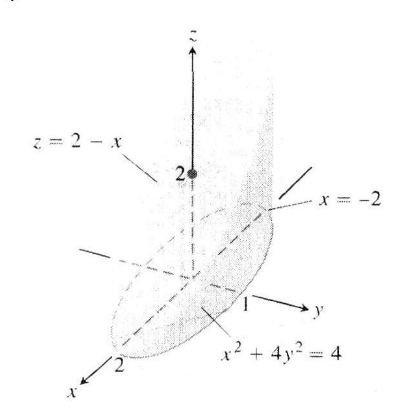

**23. 求质心和惯性矩** 密度为常数的“凹形”立体下方以曲面 $z=4y^2$ 为界，上方以平面 $z=4$ 为界，两侧以平面 $x=1$ 和 $x=-1$ 为界. 求质心和对三个坐标轴的惯性矩.

**24. 求质心** 密度为常数的物体下方以平面 $z=0$ 为界，侧面以椭圆柱面 $x^2+4y^2=4$ 为界，上方以平面 $z=2-x$ 为界(请见附图).

(a)求 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$. (b)求积分

$$M_{xy}=\int_{-2}^{2}\int_{-(1/2)\sqrt{4-x^2}}^{(1/2)\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{2-x}z\,dz\,dy\,dx$$

利用积分表完成对 $x$ 的最后积分. 然后用 $M$ 除 $M_{xy}$ 证实 $\bar{z}=5/4$.




**25.** (a) **求质心** 求下方以抛物面 $z=x^2+y^2$ 为界和上方以平面 $z=4$ 为界的立体的质心，立体的密度为常数.

(b)求把这个立体分成体积相等的两部分的平面 $z=c$. 这个平面不通过质心.

**26. 求质心和惯性矩** 边长为 2 单位的立方体以平面 $x=\pm1$，$z=\pm1$，$y=3$ 和 $y=5$ 为界. 求它的质心和对坐标轴的惯性矩.

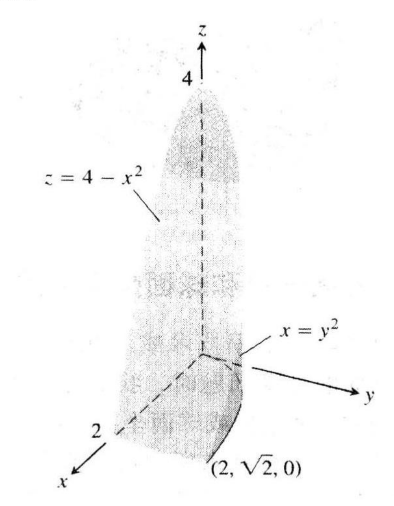
**27. 求对直线的惯性矩** 一个形状像习题 22 给出的楔形体，边长为 $a=4$，$b=6$，$c=3$. 画一幅简易草图，检验从楔形体中的典型点 $(x,y,z)$ 到直线 $L$：$z=0$，$y=6$ 的距离平方是 $r^2=(y-6)^2+z^2$. 然后计算楔形体对 $L$ 的惯性矩.

**28. 求对直线的惯性矩** 一个形状像习题 22 给出的楔形体，边长为 $a=4$，$b=6$，$c=3$. 画一幅简易草图，检验从楔形体中的典型点 $(x,y,z)$ 到直线 $L$：$x=4$，$y=0$ 的距离平方是 $r^2=(x-4)^2+y^2$. 然后计算楔形体对 $L$ 的惯性矩.

在习题 29 和 30 中，(a)求立体的质量；(b)求质心.

**29.** 立体在第一卦限内以坐标平面和平面 $x+y+z=2$ 为界的区域中. 立体的密度函数为 $\delta(x,y,z)=2x$.

**30.** 立体在第一卦限内以平面 $y=0$ 和 $z=0$ 以及曲面 $z=4-x^2$ 和 $x=y^2$ 为界的区域中(参见附图). 立体的密度函数为 $\delta(x,y,z)=kxy$，$k$ 是常数.




在习题 31 和 32 中，(a)求立体的质量；(b)求质心；(c)求对坐标轴的惯性矩.

**31.** 立方体在第一卦限内以坐标平面及平面 $x=1$，$y=1$ 和 $z=1$ 为界的区域中，立方体的密度为 $\delta(x,y,z)=x+y+z+1$.

**32.** 一个形状像习题 22 给出的楔形体，它的边长为 $a=2$，$b=6$，$c=3$. 楔形体的密度为 $\delta(x,y,z)=x+1$. 请注意，如果密度为常数，它的质心将是(0,0,0).

**33. 求质量** 求以平面 $x+z=1$，$x-z=-1$，$y=0$ 和曲面 $y=\sqrt{z}$ 为界的立体的质量. 立体的密度为 $\delta(x,y,z)=2y+5$.

**34. 求质量** 求以抛物面 $z=16-2x^2-2y^2$ 和 $z=2x^2+2y^2$ 为界的立体区域的质量，如果立体的密度为 $\delta(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$.

**平行轴定理** 令 $L_{c.m.}$ 是通过质量为 $m$ 的物体

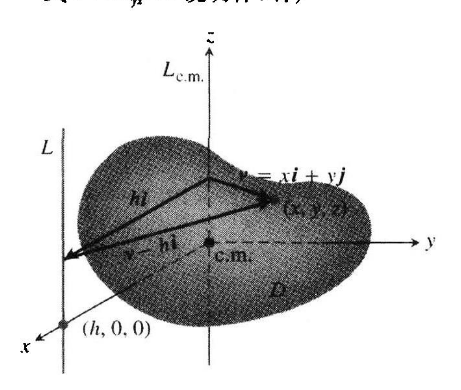
的质心的直线，$L$ 是同 $L_{c.m.}$ 相距 $h$ 个单位的平行线. 平行轴定理指出，物体对 $L_{c.m.}$ 和 $L$ 的惯性矩 $I_{c.m.}$ 和 $I_L$ 满足公式

$$I_L = I_{c.m.} + mh^2 \qquad (2)$$

像在二维的情形，当已知一个矩和质量时，定理给出计算另一个矩的快捷方法.

**35. 平行轴定理的证明**

(a) 证明：空间中的物体对通过质心的任何平面的一阶矩为零.（提示：把物体的质心置于原点，以 $yz$ 平面为求矩的平面. 这时公式 $\bar{x} = M_{yz}/M$ 说明什么?）




(b) 为了证明平行轴定理，把物体的质心置于原点，以 $z$ 轴为直线 $L_{c.m.}$，并且让直线 $L$ 在点 $(h,0,0)$ 同 $xy$ 平面垂直. 设 $D$ 是物体占据的空间区域. 那么，用附图中的记号，

$$I_L = \iiint_D |\mathbf{v} - h\mathbf{i}|^2 \mathrm{d}m$$

展开这个积分中的被积函数完成定理证明.

**36.** 密度为常数和半径为 $a$ 的球体对直径的惯性矩为 $(2/5)ma^2$，其中 $m$ 是球体的质量. 求球体对同球体相切的直线的惯性矩.

**37.** 习题 21 中的长方体对 $z$ 轴的惯性矩为

$$I_z = \frac{abc(a^2 + b^2)}{3}$$

(a) 利用公式(2)求长方体对通过质心同 $z$ 轴平行的直线的惯性矩.

(b) 利用公式(2)和(a)中的结果，求长方体对直线 $x=0$，$y=2b$ 的惯性矩.

**38.** 如果习题 22 中楔形体的边长为 $a=b=6$，$c=4$，楔形体对 $x$ 轴的惯性矩是 $I_x=208$. 求楔形体对直线 $y=4$，$z=-4/3$（楔形狭窄端的边）的惯性矩.

## 13.7 柱面坐标和球面坐标中的三重积分

在物理学、工程技术或者几何学中涉及柱面、锥面或球面的计算问题时，我们经常可以利用在这一节引进的柱面坐标或球面坐标，使问题得以简化. 变换到这两种坐标和求所得的三重积分的过程，同在 13.4 节讨论的在平面内变换到极坐标的过程相似.

### 13.7.1 柱面坐标中的积分

把 $xy$ 平面内的极坐标同常见的 $z$ 轴结合就得到空间中的柱面柱标. 这样对空间中每个点赋予一个或多个 $(r,\theta,z)$ 形式的三元组，如图 13.35 所示.

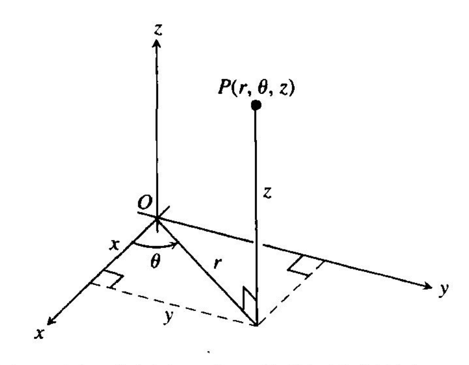



图 13.35 空间中一点 $P$ 的柱面坐标是 $(r,\theta,z)$

> **定义** **柱面坐标**用有序三元组 $(r,\theta,z)$ 表示空间中的一点 $P$，在这个表示中：
> (1) $r$ 和 $\theta$ 是点 $P$ 在 $xy$ 平面上的垂直投影的极坐标；
> (2) $z$ 是直角坐标的纵坐标.

在直角坐标和柱面坐标中 $x,y,r$ 和 $\theta$ 的值由下列公式联系：

> **联系直角坐标 $(x,y,z)$ 和柱面坐标 $(r,\theta,z)$ 的公式**
> $$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta,\quad z = z,\quad r^2 = x^2 + y^2,\quad \tan\theta = y/x$$

在柱面坐标中，方程 $r=a$ 不只是描绘 $xy$ 平面内的一个圆，而是环绕 $z$ 轴的整个圆柱（见图 13.36）．$z$ 轴由 $r=0$ 给出．方程 $\theta=\theta_0$ 描绘包含 $z$ 轴并且同正 $x$ 轴构成角 $\theta_0$ 的平面．同时，正如在直角坐标中那样，方程 $z=z_0$ 描绘同 $z$ 轴垂直的平面．

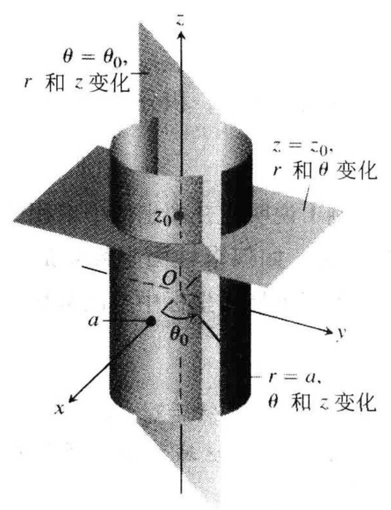


图 13.36　在柱面坐标中，常数坐标值的方程产生柱面和平面

柱面坐标适于描绘以 $z$ 轴为轴的柱面，以及包含 $z$ 轴或者同 $z$ 轴垂直的平面．这些曲面具有取常数坐标值的方程：

$$r=4 \quad （柱面,半径为4,以 z 轴为轴）$$

$$\theta=\frac{\pi}{3} \quad （包含 z 轴的平面）$$

$$z=2 \quad （垂直于 z 轴的平面）$$

在计算柱面坐标中区域 $D$ 上的三重积分时，我们把区域划分成 $n$ 个小柱面楔形块而不是长方块．在第 $k$ 个柱面楔形块中，$r,\theta,z$ 按 $\Delta r_k,\Delta\theta_k,\Delta z_k$ 改变，而在所有柱面楔形块中这些数的最大值称为划分的**范数**．我们把三重积分定义为使用这些楔形块的黎曼和的极限．这样一个柱面楔形块的体积 $\Delta V_k$ 通过取它在 $r\theta$ 平面内的底面积 $\Delta A_k$ 乘高 $\Delta z$ 获得（见图 13.37）．

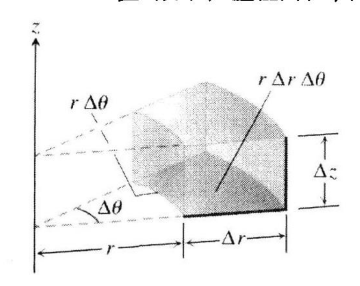


图 13.37　在柱面坐标中楔形块的体积近似等于乘积 $\Delta V=\Delta z\ r\ \Delta r\ \Delta\theta$

对于在第 $k$ 个楔块中心的一点 $(r_k,\theta_r,z_k)$，在极坐标中计算出 $\Delta A_k=r_k\,\Delta r_k\,\Delta\theta_k$．所以 $\Delta V_k=\Delta z_k\,r_k\,\Delta r_k\,\Delta\theta_k$，而函数 $f$ 在 $D$ 上的黎曼和的形式为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(r_k,\theta_k,z_k)\,\Delta z_k\,r_k\,\Delta r_k\,\Delta\theta_k$$

函数 $f$ 在 $D$ 上的三重积分通过对这样的黎曼和在划分的范数趋近零时取极限得到：

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\iiint\limits_D f\,\mathrm{d}V=\iiint\limits_D f\,\mathrm{d}z\ r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta .$$

于是，在柱面坐标中的三重积分作为累次积分计算，如下面的例子所示．

**例 1**　求柱面坐标中对于函数 $f(r,\theta,z)$ 在区域 $D$ 上的积分的积分限，区域 $D$ 下方以平面 $z=0$ 为界，侧面以圆柱面 $x^2+(y-1)^2=1$ 为界，上方以抛物面 $z=x^2+y^2$ 为界．

**解**　区域 $D$ 的底部也是区域在 $xy$ 平面上的投影 $R$．$R$ 的边界是圆 $x^2+(y-1)^2=1$．它的极坐标方程为

$$\begin{aligned} x^2+(y-1)^2&=1\\ x^2+y^2-2y+1&=1\\ r^2-2r\sin\theta&=0\\ r&=2\sin\theta \end{aligned}$$

区域草图在图 13.38 画出．

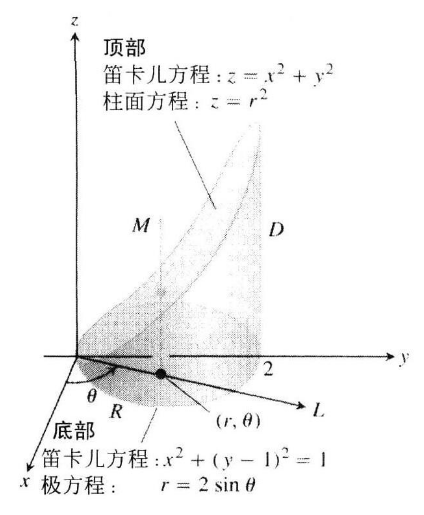


图 13.38　对于求柱面坐标中一个积分求积分限（例 1）

我们从求 $z$ 积分限开始：通过 $R$ 中的典型点 $(r,\theta)$ 同 $z$ 轴平行的直线 $M$ 在 $z=0$ 进入 $D$，在 $z=x^2+y^2=r^2$ 离开 $D$．这是 $z$ 的两个积分限．

其次求 $r$ 积分限：由原点引出通过 $(r,\theta)$ 的射线 $L$ 在 $r=0$ 进入 $R$，在 $r=2\sin\theta$ 离开 $R$. 这是 $r$ 的两个积分限.

最后求 $\theta$ 积分限：当 $L$ 扫过 $R$ 时，它同正 $x$ 轴构成的角 $\theta$ 从 $\theta=0$ 变化到 $\theta=\pi$. 这是 $\theta$ 的两个积分限. 所以，积分为

$$\iiint_D f(r,\theta,z)\,\mathrm{d}V = \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}\int_0^{r^2} f(r,\theta,z)\,\mathrm{d}z\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$ ■

例 1 说明在柱面坐标中求积分限的有效过程. 这个过程综述在下面小节中.

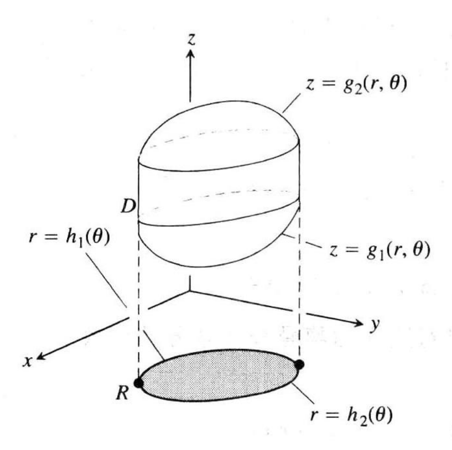
### 13.7.2 如何求柱面坐标中的积分

为了求柱面坐标中空间区域 $D$ 上的积分

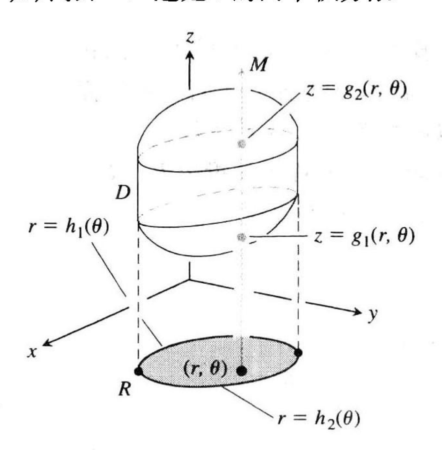
$$\iiint_D f(r,\theta,z)\,\mathrm{d}V$$

首先对 $z$ 积分，然后对 $r$ 积分，最后再对 $\theta$ 积分，采取下列步骤.

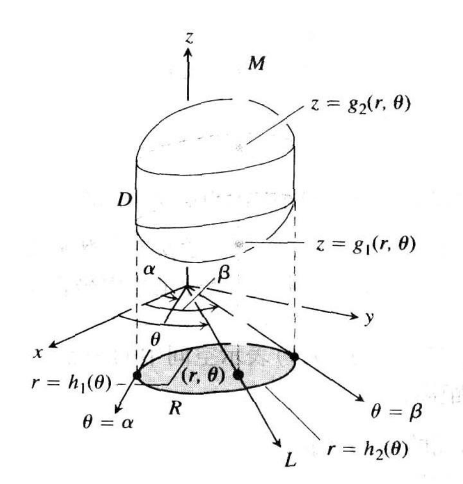
**(1) 画积分区域草图.** 画出区域 $D$ 及其在 $xy$ 平面上的投影 $R$ 的草图. 标明限定 $D$ 和 $R$ 的曲面和曲线.




**(2) 求 $z$ 积分限.** 画一条通过 $R$ 的典型点 $(r,\theta)$ 同 $z$ 轴平行的直线 $M$. 随着 $z$ 的增加，$M$ 在 $z=g_1(r,\theta)$ 进入 $D$，在 $z=g_2(r,\theta)$ 离开 $D$. 这是 $z$ 的两个积分限.




**(3) 求 $r$ 积分限.** 画一条从原点起通过点 $(r,\theta)$ 的射线 $L$. 射线在 $r=h_1(\theta)$ 进入 $R$，在 $r=h_2(\theta)$ 离开 $R$. 这是 $r$ 的两个积分限.




(4) 求 $\theta$ 积分限. 当 $L$ 扫过 $R$ 时, $L$ 同正 $x$ 轴构成的角 $\theta$ 从 $\theta=\alpha$ 变化到 $\theta=\beta$. 这是 $\theta$ 的两个积分限.

所以, 积分为

$$\iiint_D f(r,\theta,z)\,\mathrm{d}V = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}\int_{r=h_1(\theta)}^{r=h_2(\theta)}\int_{z=g_1(r,\theta)}^{z=g_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)\,\mathrm{d}z\; r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

**例 2** 求由圆柱面 $x^2+y^2=4$ 包围的上方以抛物面 $z=x^2+y^2$ 为界下方以 $xy$ 平面为界的立体的形心($\delta=1$).

**解** 画出圆柱面内上方以抛物面 $z=r^2$ 为界和下方以平面 $z=0$ 为界的立体的草图(见图 13.39). 它的底部是 $xy$ 平面内的圆盘 $0\leqslant r\leqslant 2$.

立体的形心$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$位于它的对称轴 $z$ 轴上. 这就使得 $\bar{x}=\bar{y}=0$. 为了求 $\bar{z}$, 用质量 $M$ 除一阶矩 $M_{xy}$.

为了求质量积分和矩积分的积分限, 我们继续执行四个基本步骤. 已经画出了初始草图. 剩余的步骤给出积分限.

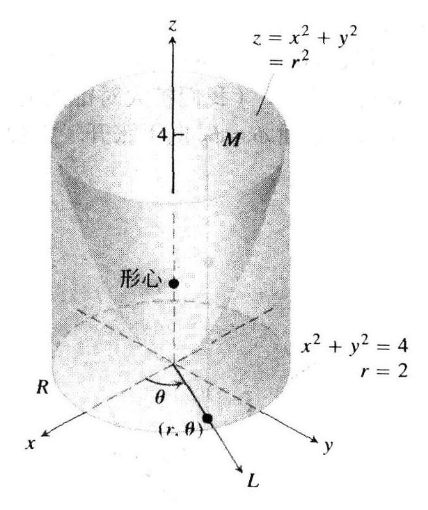



图 13.39 例 2 说明如何求这个立体的形心

$z$ 积分限: 通过底部内典型点$(r,\theta)$同 $z$ 轴平行的直线 $M$ 在 $z=0$ 进入立体, 在 $z=r^2$ 离开立体, 这是 $z$ 的两个积分限.

$r$ 积分限: 从原点引出通过点$(r,\theta)$的射线 $L$ 在 $r=0$ 进入区域 $R$, 在 $r=2$ 离开 $R$. 这是 $r$ 的两个积分限.

$\theta$ 积分限: 当 $L$ 像时针那样在底部上扫过时, $L$ 同正 $x$ 轴构成的角 $\theta$ 从 $\theta=0$ 变化到 $\theta=2\pi$. 这是 $\theta$ 的两个积分限.

所以, $M_{xy}$ 的值为

$$M_{xy} = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{r^2} z\,\mathrm{d}z\; r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{r^5}{2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^6}{12}\right]_0^2\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\frac{16}{3}\,\mathrm{d}\theta = \frac{32\pi}{3}$$

$M$ 的值为

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{r^2}\mathrm{d}z\; r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2\left[z\right]_0^{r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}4\,\mathrm{d}\theta = 8\pi$$

因此,

$$\bar{z}=\frac{M_{xy}}{M}=\frac{32\pi}{3}\frac{1}{8\pi}=\frac{4}{3}$$

而形心是(0,0,4/3). 注意这个形心位于立体之外. ■

### 13.7.3 球面坐标与积分

球面坐标用两个角和一段距离定位空间中的点，如图 13.40 所示. 第一个坐标 $\rho=|\overrightarrow{OP}|$ 是从原点到点 $P$ 的距离. 同柱面坐标的 $r$ 不一样，变量 $\rho$ 不会取负值. 第二个坐标 $\phi$ 是 $\overrightarrow{OP}$ 同正 $z$ 轴构成的角. 它的取值范围是区间 $[0,\pi]$. 第三个坐标是柱面坐标中度量的角 $\theta$.

**定义　球面坐标**用有序三元组 $(\rho,\phi,\theta)$ 表示空间中的一点 $P$，其中

(1) $\rho$ 是从 $P$ 到原点的距离；

(2) $\phi$ 是 $\overrightarrow{OP}$ 同正 $z$ 轴构成的角 $(0\leqslant\phi\leqslant\pi)$；

(3) $\theta$ 是柱面坐标中度量的角.

在地图上，$\theta$ 同地球上一点的子午线有关，$\phi$ 同地球的纬度有关，而 $\rho$ 同地球表面之上的高度有关.

方程 $\rho=a$ 描绘中心在原点半径为 $a$ 的球面(见图 13.41). 方程 $\phi=\phi_0$ 描绘顶点在原点以 $z$ 轴为轴的单锥面. (我们扩大对锥面的解释，把 $xy$ 平面也作为锥面 $\phi=\pi/2$ 包括在内.) 如果 $\phi_0$ 大于 $\pi/2$，锥面 $\phi=\phi_0$ 向下张开. 方程 $\theta=\theta_0$ 描绘包含 $z$ 轴并且同正 $x$ 轴构成角 $\theta_0$ 的半平面.

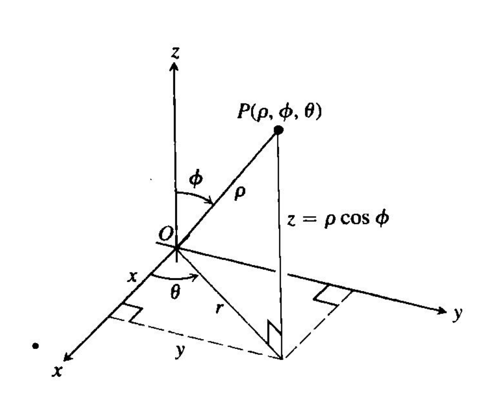



图 13.40　球面坐标 $\rho,\phi,\theta$ 以及它们同 $x$, $y$, $z$ 和 $r$ 的关系

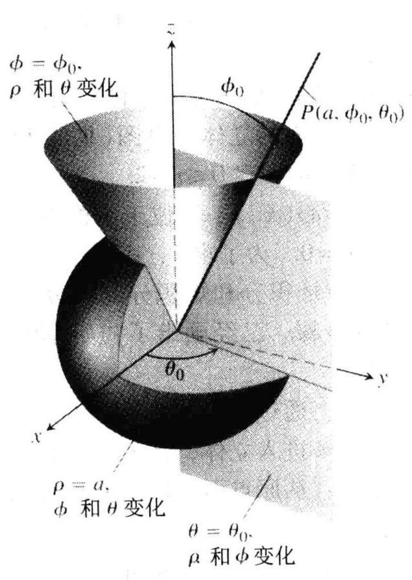



图 13.41　球面坐标中取常数坐标值的方程产生球面、单锥面和半平面

**球面坐标同笛卡儿坐标和柱面坐标的联系公式**

$$r=\rho\sin\phi,\quad x=r\cos\theta=\rho\sin\phi\cos\theta,$$
$$z=\rho\cos\phi,\quad y=r\sin\theta=\rho\sin\phi\sin\theta,\tag{1}$$
$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{r^2+z^2}$$

**例 3** 求球面

$$x^2+y^2+(z-1)^2=1$$

的球面坐标方程.

**解** 利用公式(1)代换 $x$, $y$, $z$:

$$x^2+y^2+(z-1)^2=1$$

$$\rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta+(\rho\cos\phi-1)^2=1 \quad (\text{公式(1)})$$

$$\rho^2\sin^2\phi\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1}+\rho^2\cos^2\phi-2\rho\cos\phi+1=1$$

$$\rho^2\underbrace{(\sin^2\phi+\cos^2\phi)}_{1}=2\rho\cos\phi$$

$$\rho^2=2\rho\cos\phi$$

$$\rho=2\cos\phi$$

(参见图 13.42). ■

**例 4** 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的球面坐标方程.

**解 1** 用几何方法. 锥面对 $z$ 轴对称, 并且在第一象限沿直线 $z=y$ 同 $yz$ 平面相交. 因此, 锥面同正 $z$ 轴之间的角为 $\pi/4$ 弧度. 锥面由球面坐标 $\phi$ 等于 $\pi/4$ 的点集构成, 所以它的方程为 $\phi=\pi/4$(参见图 13.43).

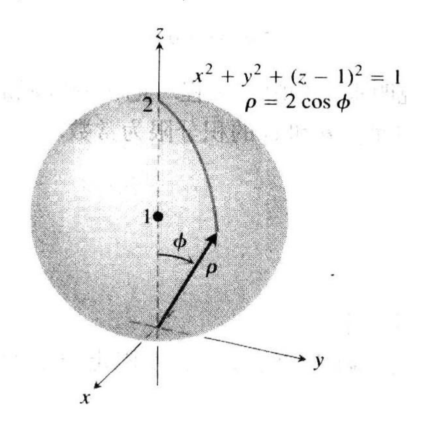



图 13.42 例 3 中的球面

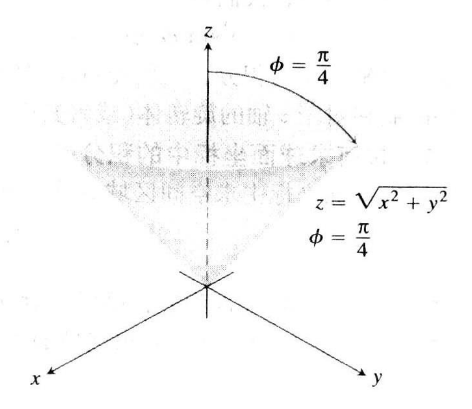



图 13.43 例 4 中的锥面

**解 2** 用代数方法. 如果利用公式(1)代换 $x$, $y$, $z$, 得到同样结果:

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\rho\cos\phi=\sqrt{\rho^2\sin^2\phi} \quad (\text{例 3})$$

$$\rho\cos\phi=\rho\sin\phi \quad (\rho\geqslant 0,\ \sin\phi\geqslant 0)$$

$$\cos\phi=\sin\phi$$

$$\phi=\frac{\pi}{4} \quad (0\leqslant\phi\leqslant\pi)$$

■

球面坐标非常适于表示中心在原点的球面, 同 $z$ 轴铰接的半平面, 以及顶点在原点和以 $z$ 轴为轴的锥面. 这些曲面具有常数坐标值的方程:

$\rho=4$ (中心在原点半径为 4 的球面)

$\phi=\dfrac{\pi}{3}$ (在原点向上张开的锥面,与正 $z$ 轴构成 $\pi/3$ 弧度角)

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$ （同 $z$ 轴铰接的半平面，与正 $x$ 轴构成 $\pi/3$ 弧度角）

在计算球面坐标中一个区域 $D$ 上的三重积分时，我们把区域划分成 $n$ 个球楔形块. 包含点 $(\rho_k,\phi_k,\theta_k)$ 的第 $k$ 个球楔形块的大小由坐标 $(\rho,\phi,\theta)$ 的改变量 $\Delta\rho_k$，$\Delta\phi_k$，$\Delta\theta_k$ 给出. 这样一个球楔形块的一边是长度为 $\rho_k\Delta\phi_k$ 的圆弧，另一边是长度为 $\rho_k\sin\phi_k\Delta\theta_k$ 的圆弧，厚度为 $\Delta\rho_k$. 这个球楔形块当 $\Delta\rho_k$，$\Delta\phi_k$，$\Delta\theta_k$ 都非常小时的大小近似等于具有同样尺寸的立方体的大小（见图 13.44）. 可以证明，对于在球楔形块内选择的点 $(\rho_k,\phi_k,\theta_k)$ 这个球楔形块的体积为 $\Delta V_k = \rho_k^2\sin\phi_k\,\Delta\rho_k\,\Delta\phi_k\,\Delta\theta_k$.

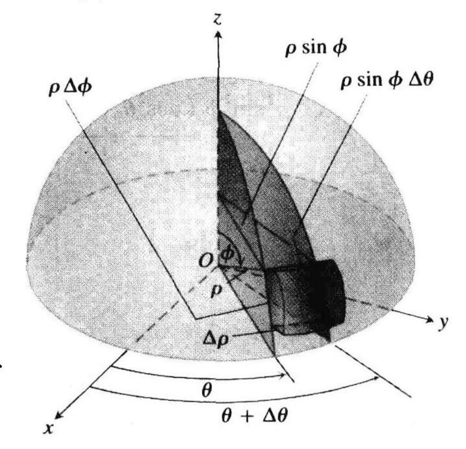



图 13.44 在球面坐标中
$dV = d\rho\cdot\rho d\phi\cdot\rho\sin\phi\,d\theta$
$= \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

对于函数 $f(\rho,\phi,\theta)$，对应的黎曼和是

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\rho_k,\phi_k,\theta_k)\rho_k^2\sin\phi_k\,\Delta\rho_k\,\Delta\phi_k\,\Delta\theta_k$$

随着划分的范数趋近零，球楔形块变得越来越小，当 $f$ 是连续函数时黎曼和具有极限：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iiint_D f(\rho,\phi,\theta)\,dV = \iiint_D f(\rho,\phi,\theta)\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

在球面坐标中，我们有

$$dV = \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

为了求球面坐标中的积分，一般先对 $\rho$ 积分. 在下面小节说明求积分限的过程. 把积分区域的范围严格限制在对于 $z$ 轴的旋转体（或者其中一部分），对它们而言 $\theta$ 和 $\phi$ 的积分限为常数.

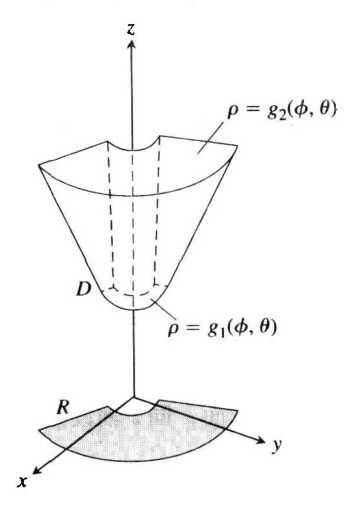
### 13.7.4 如何求球面坐标中的积分

为了在球面坐标中求空间区域 $D$ 上的积分

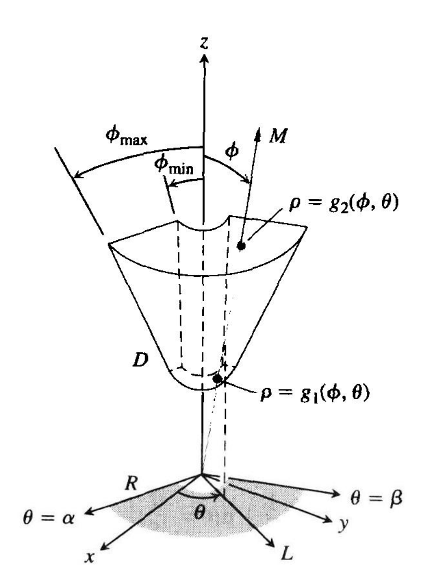
$$\iiint_D f(\rho,\phi,\theta)\,dV$$

首先对 $\rho$ 积分，然后对 $\phi$ 积分，最后再对 $\theta$ 积分，采取下列步骤.

（1）画积分区域的草图. 画出区域 $D$ 及其在 $xy$ 平面上的投影 $R$ 的草图. 标明限定 $D$ 的曲面.




（2）求 $\rho$ 积分限. 自原点画一条穿过 $D$ 的射线 $M$，同正 $z$ 轴构成角 $\phi$. 同时画出 $M$ 在 $xy$ 平面上的投影（称为投影 $L$）. 射线 $L$ 同正 $x$ 轴构成角 $\theta$. 随着 $\rho$ 的增加，$M$ 在 $\rho = g_1(\phi,\theta)$ 进入 $D$，在




$\rho = g_2(\phi,\theta)$ 离开 $D$. 这是 $\rho$ 的两个积分限.

(3) *求 $\phi$ 积分限.* 对于任何给定的 $\theta$, $M$ 同正 $z$ 轴构成的角 $\phi$ 从 $\phi = \phi_{min}$ 变化到 $\phi = \phi_{max}$. 这是 $\phi$ 的两个积分限.

(4) *求 $\theta$ 积分限.* 射线当 $\theta$ 从 $\theta = \alpha$ 变化到 $\theta = \beta$ 时扫过 $R$. 这是 $\theta$ 的两个积分限.

所以，积分为

$$\iiint_D f(\rho,\phi,\theta)\,\mathrm{d}V = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}\int_{\phi=\phi_{min}}^{\phi=\phi_{max}}\int_{\rho=g_1(\phi,\theta)}^{\rho=g_2(\phi,\theta)} f(\rho,\phi,\theta)\rho^2\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$$

**例 5**　求用圆锥面 $\phi = \pi/3$ 从球体 $\rho \leq 1$ 切割的"冰淇淋锥" $D$ 的体积.

**解**　这个体积是 $f(\rho,\phi,\theta) = 1$ 在 $D$ 上的积分

$$V = \iiint_D \rho^2 \sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$$

为了求计算积分的积分限，我们从画 $D$ 及其在 $xy$ 平面上的投影 $R$ 的草图开始(见图 13.45).

*求 $\rho$ 积分限.* 从原点画一条穿过 $D$ 同正 $z$ 轴构成角 $\phi$ 的射线 $M$. 再画 $M$ 在 $xy$ 平面上的投影 $L$, 使 $L$ 同正 $x$ 轴构成角 $\theta$. 射线 $M$ 在 $\rho = 0$ 进入 $D$, 在 $\rho = 1$ 离开 $D$. 这是 $\rho$ 的两个积分限.

*求 $\phi$ 积分限.* 锥面 $\phi = \pi/3$ 同正 $z$ 轴构成角 $\pi/3$. 对于给定的 $\theta$, $\phi$ 可以从 $\phi = 0$ 变化到 $\phi = \pi/3$. 这是 $\phi$ 的两个积分限.

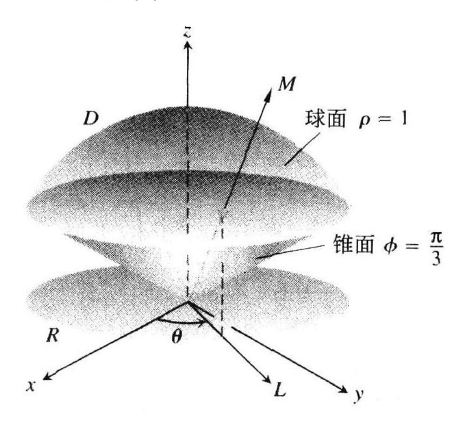



图 13.45　例 5 中的"冰淇淋锥"

*求 $\theta$ 积分限.* 射线 $L$ 当 $\theta$ 从 $\theta = 0$ 变化到 $\theta = 2\pi$ 时扫过 $R$. 这是 $\theta$ 的两个积分限.

所以，锥体的体积为

$$V = \iiint_D \rho^2\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^1 \rho^2\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 \sin\phi\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\frac{1}{3}\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}\cos\phi\right]_0^{\pi/3}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{6}(2\pi) = \frac{\pi}{3}$$ ■

**例 6**　一个具有常数密度 $\delta = 1$ 的立体占据例 5 中的区域 $D$. 求立体对 $z$ 轴的惯性矩.

**解** 在直角坐标中，这个矩为

$$I_z = \iiint (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}V$$

在球面坐标中，

$$x^2 + y^2 = (\rho \sin\phi \cos\theta)^2 + (\rho \sin\phi \sin\theta)^2 = \rho^2 \sin^2\phi$$

因此，

$$I_z = \iiint (\rho^2 \sin^2\phi)\rho^2 \sin\phi \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta = \iiint \rho^4 \sin^3\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$$

对于例 5 中的区域，这个矩变成

$$I_z = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^1 \rho^4 \sin^3\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 \sin^3\phi\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}(1 - \cos^2\phi)\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\left[-\cos\phi + \frac{\cos^3\phi}{3}\right]_0^{\pi/3}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{24} - \frac{1}{3}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\frac{5}{24}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{24}(2\pi) = \frac{\pi}{12}$$

■

---

**坐标变换公式**

| 从柱面坐标到直角坐标 | 从球面坐标到直角坐标 | 从球面坐标到柱面坐标 |
|---|---|---|
| $x = r\cos\theta$ | $x = \rho\sin\phi\cos\theta$ | $r = \rho\sin\phi$ |
| $y = r\sin\theta$ | $y = \rho\sin\phi\sin\theta$ | $z = \rho\cos\phi$ |
| $z = z$ | $z = \rho\cos\phi$ | $\theta = \theta$ |

在三重积分中 $\mathrm{d}V$ 的对应公式

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}z\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \rho^2\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$$

---

在下一节，我们提出在柱面坐标和球面坐标中确定 $\mathrm{d}V$ 的更一般过程. 自然，结果将是相同的.

## 习题 13.7

在习题 1 ~ 6 中，求柱面坐标中的积分.

**1.** $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{\sqrt{2-r^2}} \mathrm{d}z\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$ **2.** $\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{r^2/3}^{\sqrt{18-r^2}} \mathrm{d}z\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$

**3.** $\int_0^{2\pi}\int_0^{\theta/2\pi}\int_0^{3+24r^2} \mathrm{d}z\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$ **4.** $\int_0^{\pi}\int_0^{\theta/\pi}\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{3\sqrt{4-r^2}} z\,\mathrm{d}z\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$

**5.** $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{1/\sqrt{2-r^2}} 3\,\mathrm{d}z\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$

**6.** $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-1/2}^{1/2} (r^2\sin^2\theta + z^2)\,\mathrm{d}z\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$

迄今为止，我们所提出的柱面坐标的积分都取一般宁愿选择的积分次序，但是通常也可以用其他积分次序，并且有时更容易计算. 在习题 7 ~ 10 中，求柱面坐标的积分.

**7.** $\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{z/3} r^3\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta.$ **8.** $\int_{-1}^1\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} 4r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z.$

**9.** $\int_0^1\int_0^{\sqrt{z}}\int_0^{2\pi} (r^2\cos^2\theta + z^2)r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z.$

**10.** $\int_0^2\int_{r-2}^{\sqrt{4-r^2}}\int_0^{2\pi} (r\sin\theta + 1)r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r.$

**11.** 令 $D$ 是下方以平面 $z=0$ 为界、上方以球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 为界和侧面以圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 为界的区域. 在柱面坐标中按下列积分次序建立给出 $D$ 的体积的三重积分：

(**a**) $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$； (**b**) $\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta$； (**c**) $\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r$.

**12.** 令 $D$ 是下方以圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 为界和上方以抛物面 $z = 2 - x^2 - y^2$ 为界的区域. 在柱面坐标中按下列积分次序建立给出 $D$ 的体积的三重积分：

(**a**) $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$； (**b**) $\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta$； (**c**) $\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r$.

**13.** 在下方以平面 $z=0$ 为界、侧面以圆柱面 $r = \cos\theta$ 为界和顶部以抛物面 $z = 3r^2$ 为界的区域上，给出求积分

$$\iiint f(r,\theta,z)\,\mathrm{d}z\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

作为累次积分的积分限.

**14.** 把积分

$$\int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\int_0^x (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

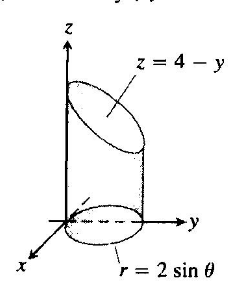
转换成柱面坐标中的等价积分，并且求出结果.

在习题 15 ~ 20 中，对于在给定区域 $D$ 上求积分

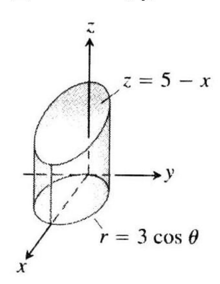
$$\iiint_D f(r,\theta,z)\,dz\,r\,dr\,d\theta$$

建立累次积分.

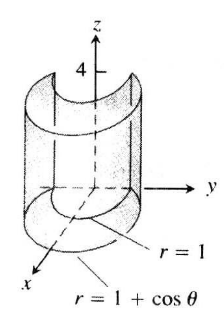
**15.** $D$ 是正圆柱体，底部为 $xy$ 平面内的圆 $r=2\sin\theta$，顶部位于平面 $z=4-y$ 内.




**16.** $D$ 是正圆柱体，底部为 $xy$ 平面内的圆 $r=3\cos\theta$，顶部位于平面 $z=5-x$ 内.



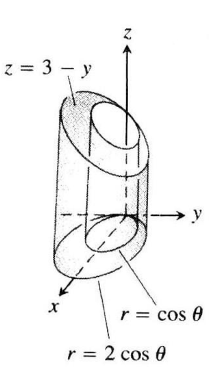

**17.** $D$ 是正柱体，底部为 $xy$ 平面的心脏线 $r=1+\cos\theta$ 之内和圆 $r=1$ 之外的区域，顶部位于平面 $z=4$ 内.

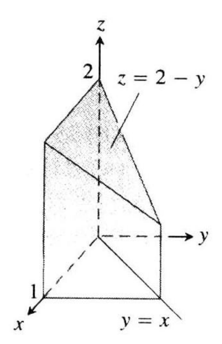


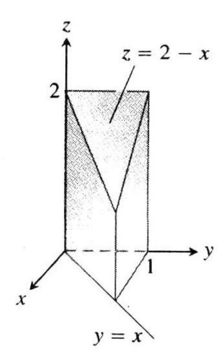

**18.** $D$ 是正柱体，底部为 $xy$ 平面内介于圆 $r=\cos\theta$ 和 $r=2\cos\theta$ 之间的区域，顶部位于平面 $z=3-y$ 内.

**19.** $D$ 是棱柱体，底部为 $xy$ 平面内以 $x$ 轴及直线 $y=x$ 和 $x=1$ 为界的三角形，顶部位于平面 $z=2-y$ 内.

**20.** $D$ 是棱柱体，底部为 $xy$ 平面内以 $y$ 轴及直线 $y=x$ 和 $y=1$ 为界的三角形，顶部位于平面 $z=2-x$ 内.




在习题 21 ~ 26 中，求球面坐标中的积分.

**21.** $\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\phi}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta.$

**22.** $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2}(\rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta.$

**23.** $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{(1-\cos\phi)/2}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta.$

**24.** $\int_0^{3\pi/2}\int_0^{\pi}\int_0^{1}5\,\rho^3\sin^3\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta.$

**25.** $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{\sec\phi}^{2}3\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta.$

**26.** $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\phi}(\rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta.$

前面的积分取球面坐标中一般宁愿选择的积分次序，但是其他积分次序给出同样的结果，并且有时更容易计算. 在习题 27 ~ 30 中，求积分.

27. $\int_0^2\int_{-\pi}^0\int_{\pi/4}^{\pi/2}\rho^3\sin 2\phi\ d\phi\ d\theta\ d\rho$.

28. $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\int_{\csc\phi}^{2\csc\phi}\int_0^{2\pi}\rho^2\sin\phi\ d\theta\ d\rho\ d\phi$.

29. $\int_0^1\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/4}12\rho\sin^3\phi\ d\phi\ d\theta\ d\rho$.

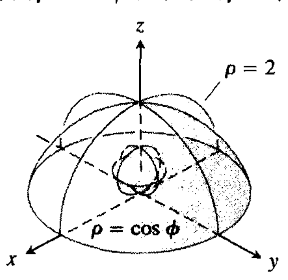
30. $\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{\csc\phi}^{2}5\rho^4\sin^3\phi\ d\rho\ d\theta\ d\phi$.

31. 令 $D$ 是习题 11 的区域. 在球面坐标中用下列积分次序建立给出 $D$ 的体积的三重积分：
(a) $d\rho\ d\phi\ d\theta$;　　(b) $d\phi\ d\rho\ d\theta$.

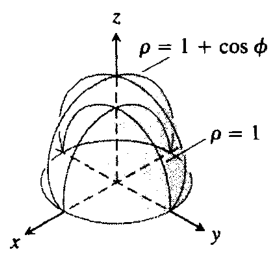
32. 令 $D$ 是下方以圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 为界和上方以平 $z=1$ 为界的区域. 在球面坐标中用下列积分次序建立给出 $D$ 的体积的三重积分：
(a) $d\rho\ d\phi\ d\theta$;　　(b) $d\phi\ d\rho\ d\theta$.

在习题 33～38 中，(a) 求计算给定立体体积的球面坐标积分限，(b) 然后求积分.

33. 立体在球面 $\rho=\cos\phi$ 和半球面 $\rho=2$，$z\geqslant 0$ 之间.



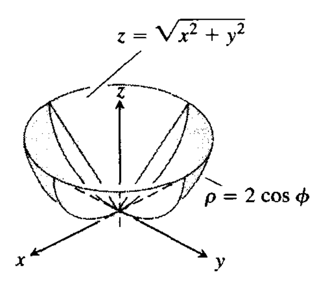

34. 立体下方以半球 $\rho=1$，$z\geqslant 0$ 为界，上方以心脏线 $\rho=1+\cos\phi$ 的旋转曲面为界.



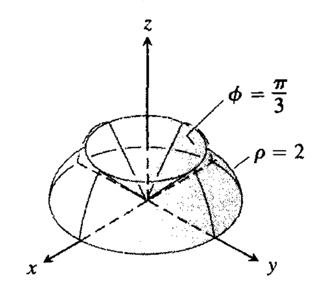

35. 立体由心脏线 $\rho=1-\cos\phi$ 的旋转曲面包围.

36. 由 $xy$ 平面从习题 35 的立体中切割的上面部分.

37. 立体下方以球面 $\rho=2\cos\phi$ 为界，上方以圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 为界.




38. 立体下方以 $xy$ 平面为界，侧面以球面 $\rho=2$ 为界，上方以圆锥面 $\phi=\pi/3$ 为界.




39. 在下列坐标中建立球面 $\rho=2$ 的体积的三重积分：
(a) 球面坐标；(b) 柱面坐标；(c) 直角坐标.

40. 令 $D$ 是第一卦限内下方以圆锥面 $\phi=\pi/4$ 为界和上方以球面 $\rho=3$ 为界的区域. 把 $D$ 的体积 $V$ 表示成 (a) 柱面坐标和 (b) 球面坐标中的累次三重积分. (c) 然后求 $V$.

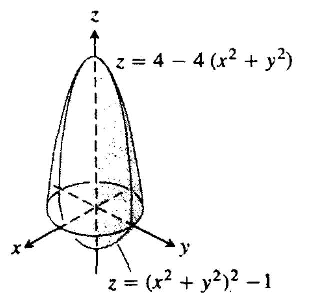
41. 令 $D$ 是在半径为 2 单位长的球体中用距离球心 1 单位的平面切割的较小顶盖. 把 $D$ 的体积表示成 (a) 球面坐标、(b) 柱面坐标和 (c) 直角坐标中的累次三重积分. (d) 然后通过计算其中一个三重积分求 $D$ 的体积.

42. 把半球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，$z\geqslant 0$ 的惯性矩 $I_z$ 表示成 (a) 柱面坐标和 (b) 球面坐标中的累次积分. (c) 然后求 $I_z$.

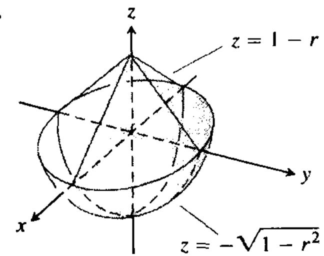
在习题 43～48 中，求立体的体积.



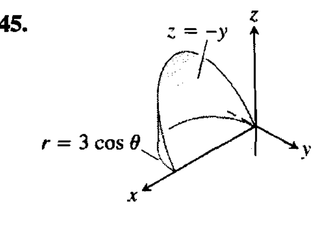
43.



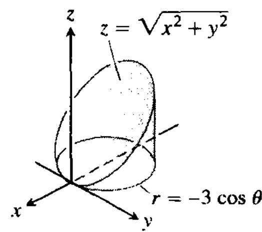

44.



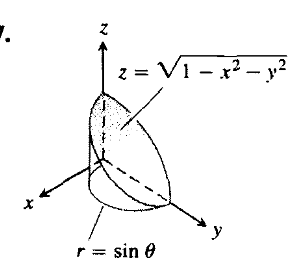

45.



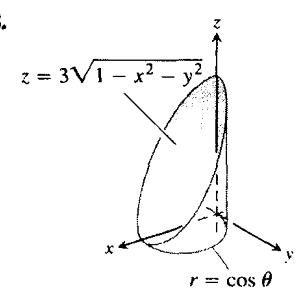
**46.**




**47.**




**48.**




**49. 球体与圆锥面** 求球体 $\rho \leqslant a$ 在圆锥面 $\phi = \pi/3$ 与 $\phi = 2\pi/3$ 之间部分的体积.

**50. 球体与半平面** 求球体 $\rho \leqslant a$ 在第一卦限内由半平面 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi/6$ 切割的区域的体积.

**51. 球体与平面** 求球体 $\rho \leqslant 2$ 由平面 $z = 1$ 切割的较小区域的体积.

**52. 圆锥面与平面** 求平面 $z = 1$ 和 $z = 2$ 之间由圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 包围的立体的体积.

**53. 圆柱面与抛物面** 求下方以平面 $z = 0$ 为界、侧面以圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 为界和上方以抛物面 $z = x^2 + y^2$ 为界的区域的体积.

**54. 圆柱面与抛物面** 求下方以抛物面 $z = x^2 + y^2$ 为界、侧面以圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 为界和上方以抛物面 $z = x^2 + y^2 + 1$ 为界的区域的体积.

**55. 环形柱与圆锥面** 求由圆锥面 $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ 从环形柱 $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2$ 切割的立体的体积.

**56. 球面与圆柱面** 求位于球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 之内和柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 之外的区域的体积.

**57. 圆柱面与平面** 求由圆柱面 $x^2 + y^2 = 4$ 以及平面 $z = 0$ 和 $y + z = 4$ 包围的区域的体积.

**58. 圆柱面与平面** 求由圆柱面 $x^2 + y^2 = 4$ 以及平面 $z = 0$ 和 $x + y + z = 4$ 包围的区域的体积.

**59. 由抛物面限定的区域** 求上方以抛物面 $z = 5 - x^2 - y^2$ 为界和下方以抛物面 $z = 4x^2 + 4y^2$ 为界的区域的体积.

**60. 抛物面与圆柱面** 求上方以抛物面 $z = 9 - x^2 - y^2$ 为界、下方以 $xy$ 平面为界并且位于圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 之外的区域的体积.

**61. 圆柱体与球面** 求由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 从圆柱体 $x^2 + y^2 \leqslant 1$ 中切割的区域的体积.

**62. 球面与抛物面** 求上方以球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 为界和下方以抛物面 $z = x^2 + y^2$ 为界的区域的体积.

**63.** 求函数 $f(r,\theta,z) = r$ 在平面 $z = -1$ 和 $z = 1$ 之间以柱面 $r = 1$ 为界的区域上的平均值.

**64.** 求函数 $f(r,\theta,z) = r$ 在以球面 $r^2 + z^2 = 1$（这是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$）为界的球体上的平均值.

**65.** 求函数 $f(\rho,\phi,\theta) = \rho$ 在球体 $\rho \leqslant 1$ 上的平均值.

**66.** 求函数 $f(\rho,\phi,\theta) = \rho\cos\phi$ 在上半球体 $\rho \leqslant 1$，$0 \leqslant \phi \leqslant \pi/2$ 上的平均值.

**67. 质心** 一个密度为常数的立体下方以平面 $z = 0$ 为界，上方以圆锥面 $z = r$，$r \geqslant 0$ 为界，侧面以圆柱面 $r = 1$ 为界. 求它的质心.

**68. 形心** 求第一卦限内上方以圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 为界、下方以平面 $z = 0$ 为界和侧面以圆柱面 $x^2 + y^2 = 4$ 及平面 $x = 0$ 和 $y = 0$ 为界的区域的形心.

**69. 形心** 求习题 38 中的立体的形心.

**70. 形心** 求上方以球面 $\rho = a$ 为界和下方以圆锥面 $\phi = \pi/4$ 为界的立体的形心.

**71. 形心** 求上方以曲面 $z = \sqrt{r}$ 为界、侧面以圆柱面 $r = 4$ 为界和下方以 $xy$ 平面为界的区域的形心.

**72. 形心** 求由半平面 $\theta = -\pi/3$，$r \geqslant 0$ 和 $\theta = \pi/3$，$r \geqslant 0$ 从球体 $r^2 + z^2 \leqslant 1$ 中切割的区域的形心.

**73. 圆锥体的惯性矩** 求底半径为 1 和高度为 1 的正圆锥体对于通过顶点同底面平行的轴的惯性矩.（取密度 $\delta = 1$.）

**74. 球体的惯性矩** 求半径为 $a$ 的球体对于一条直径的惯性矩.（取密度 $\delta = 1$.）

**75. 圆锥体的惯性矩** 求底半径为 $a$ 和高度为 $h$ 的正圆锥体对于它的轴的惯性矩.（提示：把锥体的顶点置于原点并且以 $z$ 轴为它的轴.）

**76. 可变密度** 立体的顶部以抛物面 $z = r^2$ 为界，底部以平面 $z = 0$ 为界，侧面以圆柱面 $r = 1$ 为界. 如果立体的密度为 (**a**) $\delta(r,\theta,z) = z$，(**b**) $\delta(r,\theta,z) = r$，求它的质心以及对于 $z$ 轴的惯性矩.

**77. 可变密度** 立体的下方以圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 为界，上方以平面 $z = 1$ 为界. 如果立体的密度为 (**a**) $\delta(r,\theta,z) = z$，(**b**) $\delta(r,\theta,z) = z^2$，求它的质

心以及对于 $z$ 轴的惯性矩.

**78. 可变密度** 球体以球面 $\rho=a$ 为界. 如果球体的密度为(a) $\delta(\rho,\phi,\theta)=\rho^2$, (b) $\delta(\rho,\phi,\theta)=r=\rho\sin\phi$, 求它对于 $z$ 轴的惯性矩.

**79. 半椭球体的形心** 证明：旋转半椭球体

$$\frac{r^2}{a^2}+\frac{z^2}{h^2}\leqslant 1,\ z\geqslant 0$$

的形心位于 $z$ 轴上从底端到顶端的 3/8 处. 取 $h=a$ 的特例给出一个半球体. 因此，半球体的形心位于对称轴上从底端到顶端的 3/8 处.

**80. 圆锥体的形心** 证明：正圆锥体的形心位于从底部到顶点路径上的 1/4 处.（一般说来，圆锥体或者棱柱体的形心位于从基底的形心到顶点路径上的 1/4 处.）

**81. 行星中心的密度** 一颗球状行星的半径为 $R$，总质量为 $M$，它的密度按球对称分布，在通向中心方向上线性增加. 如果这颗行星在边界(表面)的密度为零，那么它的中心的密度有多大?

**82. 行星的大气质量** 一颗半径为 $R$ 的球状行星的大气密度为 $\mu=\mu_0 e^{-ch}$，其中 $h$ 是行星表面上的高度，$\mu_0$ 是海平面上的大气密度，$c$ 是正常数. 求行星的大气质量.

**83. 柱面坐标中的垂直平面**

(a) 证明：柱面坐标中垂直于 $x$ 轴的平面具有形式为 $r=a\sec\theta$ 的方程.

(b) 证明：垂直于 $y$ 轴的平面具有形式为 $r=b\csc\theta$ 的方程.

**84.** (续习题 83) 在柱面坐标中，对于平面 $ax+by=c\,(c\neq0)$ 求形式为 $r=f(\theta)$ 的方程.

**85. 对称性** 在柱面坐标中，你从形式为 $r=f(z)$ 的曲面方程发现什么对称性? 提出答案的理由.

**86. 对称性** 在球面坐标中，你从形式为 $\rho=f(\phi)$ 的曲面方程发现什么对称性? 提出答案的理由.

## 13.8 多重积分内的代换

这一节讲述如何用代换方法求多重积分. 同在单积分中一样，代换的目标是用更容易计算的积分代替复杂的积分. 代换通过简化被积函数、积分限或者同时简化两者来实现这个目标.

### 13.8.1 二重积分内的代换

在 13.4 节讨论的极坐标代换是二重积分的更一般代换方法的特例，这种方法把变量的改变表示成积分区域的变换.

假定通过形式为

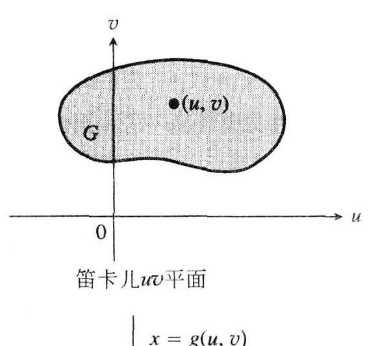
$$x=g(u,v),\ y=h(u,v)$$

的方程把 $uv$ 平面内的区域 $G$ 一对一变换成 $xy$ 平面内的区域 $R$，如图 13.46 所示. 我们把 $R$ 称为 $G$ 在变换下的**象**，$G$ 称为 $R$ 的**原象**. 对于定义在 $R$ 上的任何函数 $f(x,y)$，也可以视为定义在 $G$ 上的函数 $f(g(u,v),\ h(u,v))$. 那么，$f(x,y)$ 在 $R$ 上的积分同 $f((g(u,v),\ h(u,v))$ 在 $G$ 上的积分有何关系?

答案在于：如果 $g$，$h$ 和 $f$ 有连续偏导数，$J(u,v)$（在下面立刻讨论）只在弧立点(如果存在)为零，那么

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy=\iint_G f(g(u,v),h(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv \tag{1}$$

在公式(1)中以绝对值形式出现的因式 $J(u,v)$ 称为坐标变换的雅可比行列式，因德国数学家卡尔·雅可比得名. 当区域 $G$ 变换成 $R$ 时，它衡量变换对 $G$ 中一点周围的面积扩大或者缩小多少.



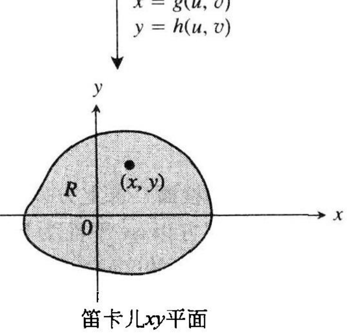




图 13.46 代换 $x=g(u,v)$ 和 $y=h(u,v)$ 把 $xy$ 平面内区 $R$ 上的积分变换成 $uv$ 平面内区域 $G$ 上的积分

> **定义** 坐标变换 $x = g(u,v), y = h(u,v)$ 的**雅可比行列式**为
> $$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \tag{2}$$

雅可比行列式也用

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

表示，帮助记忆式(2)中的行列式是如何从 $x$ 和 $y$ 的偏导数构造的. 公式(1)的推导是很复杂的，通常属于高等微积分学教程的范围. 在这里不作推导.

**人物传记**

卡尔·古斯塔夫·雅可·雅可比
(Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804—1851)

对于极坐标，我们以 $r$ 和 $\theta$ 代替 $u$ 和 $v$. 用 $x = r\cos\theta$ 和 $y = r\sin\theta$，雅可比行列式成为

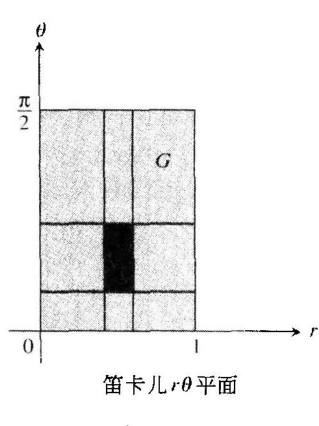
$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

因此，公式(1)变成

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,|r|\,dr\,d\theta$$
$$= \iint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta \quad (\text{如果 } r \geqslant 0) \tag{3}$$

这是在 13.4 节中求出的公式.

图 13.47 显示方程 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ 如何把矩形 $G$：$0 \leqslant r \leqslant 1$，$0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ 变换成 $xy$ 平面第一象限内以 $x^2 + y^2 = 1$ 为界的四分之一圆.



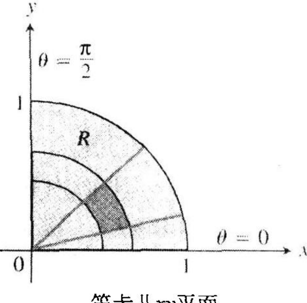




图 13.47 方程 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ 把区域 $G$ 变换成 $R$

请注意，公式(3)中右端的积分不是在极坐标平面内的区域上对函数 $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 的积分，而是在笛卡儿 $r\theta$ 平面内的区域上对 $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 同 $r$ 乘积的积分.

下面给出另外一个代换的例子.

**例 1** 对于积分

$$\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \frac{2x-y}{2}\,dx\,dy$$

应用变换

$$u = \frac{2x-y}{2}, \quad v = \frac{y}{2} \tag{4}$$

和 $uv$ 平面内相应区域上的积分求积分值.

**解** 画出 $xy$ 平面内的积分区域 $R$ 的草图，并且确定它的边界（见图 13.48）.

为了应用公式(1)，我们需要求变换所对应的 $uv$ 平面的区域 $G$ 和雅可比行列式. 为此，首先从方程(4)求解用 $u$，$v$ 表示的 $x$，$y$. 例行代数运算给出

$$x = u + v, \quad y = 2v \tag{5}$$

然后，通过把这两个表达式代入 $R$ 的边界方程求 $G$ 的边界(见图 13.48).

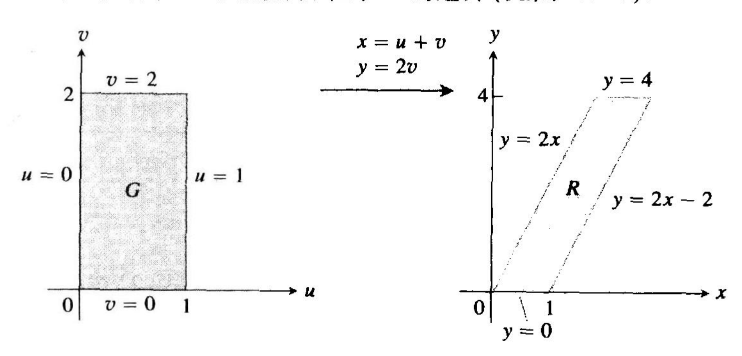



图 13.48 方程 $x=u+v$，$y=2v$ 把区域 $G$ 变换成 $R$；逆变换 $u=(2x-y)/2$，$v=y/2$ 把区域 $R$ 变换成 $G$(例 1)

| $R$ 的边界的 $xy$ 方程 | $G$ 的边界对应的 $uv$ 方程 | 化简后的 $uv$ 方程 |
|---|---|---|
| $x=y/2$ | $u+v=2v/2=v$ | $u=0$ |
| $x=(y/2)+1$ | $u+v=(2v/2)+1=v+1$ | $u=1$ |
| $y=0$ | $2v=0$ | $v=0$ |
| $y=4$ | $2v=4$ | $v=2$ |

变换的雅可比行列式(再次从方程(5)得到)为

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial u}(u+v) & \dfrac{\partial}{\partial v}(u+v)\\ \dfrac{\partial}{\partial u}(2v) & \dfrac{\partial}{\partial v}(2v)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2$$

现在我们具备了应用公式(1)所需的一切条件：

$$\int_0^4\int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1}\frac{2x-y}{2}\,dx\,dy=\int_{v=0}^{v=2}\int_{u=0}^{u=1}u\,|J(u,v)|\,du\,dv$$

$$=\int_0^2\int_0^1(u)(2)\,du\,dv=\int_0^2\Big[u^2\Big]_0^1dv$$

$$=\int_0^2 dv=2$$

■

**例 2** 求积分 $\int_0^1\int_0^{1-x}\sqrt{x+y}\,(y-2x)^2\,dy\,dx$ 的值.

**解** 画出 $xy$ 平面内积分区域的草图，并且确定它的边界(见图 13.49). 被积函数暗示采用变换公式 $u=x+y$ 和 $v=y-2x$. 例行代数运算得到 $x$ 和 $y$ 作为 $u$ 和 $v$ 的函数：

$$x=\frac{u}{3}-\frac{v}{3},\quad y=\frac{2u}{3}+\frac{v}{3} \tag{6}$$

从方程(6)可以求 $uv$ 区域 $G$ 的边界(见图 13.49).

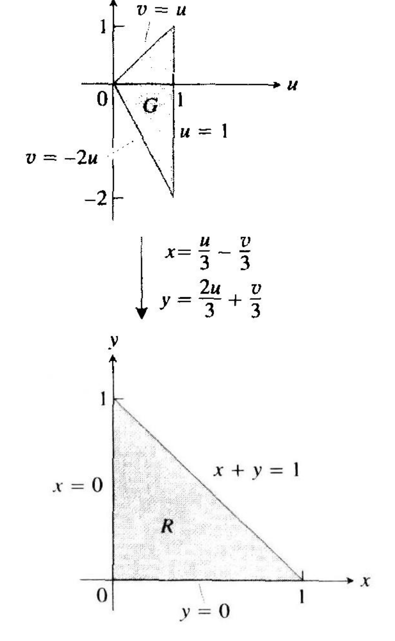



图 13.49 方程 $x=(u/3)-(v/3)$ 和 $y=(2u/3)+(v/3)$ 把区域 $G$ 变换成 $R$；逆变换 $u=x+y$ 和 $v=y-2x$ 把区域 $R$ 变换成 $G$(例 2)

| $R$ 的边界的 $xy$ 方程 | $G$ 的边界对应的 $uv$ 方程 | 化简后的 $uv$ 方程 |
| --- | --- | --- |
| $x+y=1$ | $\left(\frac{u}{3}-\frac{v}{3}\right)+\left(\frac{2u}{3}+\frac{v}{3}\right)=1$ | $u=1$ |
| $x=0$ | $\frac{u}{3}-\frac{v}{3}=0$ | $v=u$ |
| $y=0$ | $\frac{2u}{3}+\frac{v}{3}=0$ | $v=-2u$ |

方程(6)中变换的雅可比行列式为

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}$$

应用公式(1)，我们求积分的值：

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^{1-x}\sqrt{x+y}\,(y-2x)^2\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_{u=0}^{u=1}\int_{v=-2u}^{v=u}u^{1/2}v^2\,|J(u,v)|\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u\\ &=\int_0^1\int_{-2u}^{u}u^{1/2}v^2\left(\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u=\frac{1}{3}\int_0^1 u^{1/2}\left[\frac{1}{3}v^3\right]_{v=-2u}^{v=u}\mathrm{d}u\\ &=\frac{1}{9}\int_0^1 u^{1/2}(u^3+8u^3)\,\mathrm{d}u=\int_0^1 u^{7/2}\mathrm{d}u=\frac{2}{9}u^{9/2}\Big]_0^1=\frac{2}{9}\end{aligned}$$

■

## 13.8.2 三重积分内的代换

在 13.7 节讨论的柱面坐标和球面坐标代换是一种代换方法的特例，这种方法把三重积分中的变量改变描述成三维区域的变换. 这同二重积分的方法一样，只不过我们现在是处理三维区域而不是二维区域. 假定用形如

$$x=g(u,v,w),\quad y=h(u,v,w),\quad z=k(u,v,w)$$

的可微函数把 $uvw$ 空间中的区域 $G$ 一对一地变换成 $xyz$ 空间中的区域 $D$，如图 13.50 显示的那样. 那么，可以把定义在 $D$ 上的任何函数 $F(x,y,z)$ 看成是定义在 $G$ 上的函数

$$F(g(u,v,w),\,h(u,v,w),\,k(u,v,w))=H(u,v,w)$$

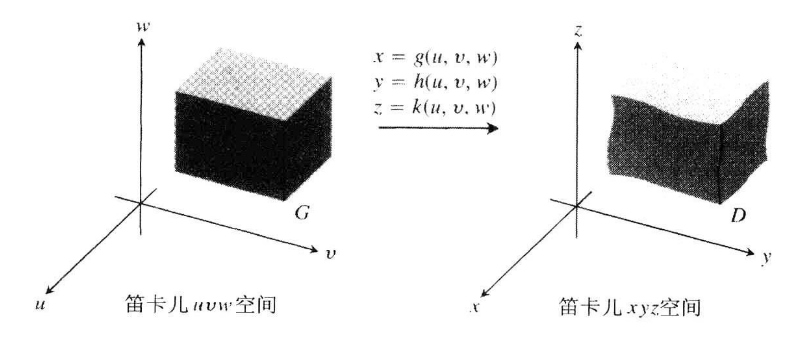



图 13.50　方程 $x=g(u,v,w)$，$y=h(u,v,w)$ 和 $z=k(u,v,w)$ 允许我们把笛卡儿 $xyz$ 空间区域 $D$ 上的积分变换成笛卡儿 $uvw$ 空间区域 $G$ 上的积分

如果 $g,h,k$ 有连续的一阶偏导数，那么 $F(x,y,z)$ 在 $D$ 上的积分同 $H(u,v,w)$ 在 $G$ 上的积分的关系由公式

$$\iiint_D F(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint_G H(u,v,w)\,|J(u,v,w)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \tag{7}$$

表示. 公式中以绝对值出现的因式 $J(u,v,w)$ 是**雅可比行列式**

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$$

这个行列式衡量从 $(u,v,w)$ 坐标变换到 $(x,y,z)$ 坐标时 $G$ 中一点邻近的体积被扩大或者缩小多少. 如在二维的情形一样，公式(7)中的变量变换公式的推导是很复杂的，在这里不作讨论.

对于柱面坐标，用 $r,\theta,z$ 代替 $u,v,w$，从笛卡儿 $r\theta z$ 空间到笛卡儿 $xyz$ 空间的变换由方程

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=z$$

给出(见图 13.51). 变换的雅可比行列式为

$$J(r,\theta,z)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r$$

公式(7)的对应形式为

$$\iiint_D F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_G H(r,\theta,z)\,|r|\,dr\,d\theta\,dz$$

当 $r\geqslant 0$ 时可以取消式中的绝对值符号.

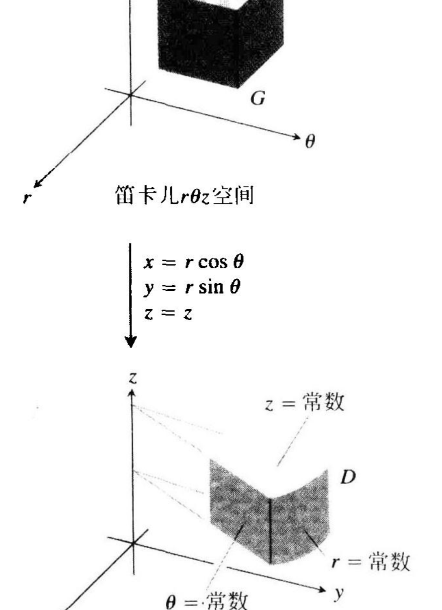



图 13.51 方程 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $z=z$ 把立方体 $G$ 变换成柱楔形体 $D$

对于球面坐标，用 $\rho,\phi,\theta$ 代替 $u,v,w$. 从笛卡儿 $\rho\phi\theta$ 空间到笛卡儿 $xyz$ 空间的变换由方程

$$x=\rho\sin\phi\cos\theta,\quad y=\rho\sin\phi\sin\theta,\quad z=\rho\cos\phi$$

给出(见图 13.52). 这个变换的雅可比行列式(参见习题 17)为

$$J(\rho,\phi,\theta)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\rho^2\sin\phi$$

公式(7)的对应形式为

$$\iiint_D F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_G H(\rho,\phi,\theta)\rho^2\,|\sin\phi|\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

我们可以取消式中的绝对值符号，因为 $\sin\phi$ 在区间 $0\leqslant\phi\leqslant\pi$ 不会为负. 注意这是我们在 13.7 节中得到的同一结果.

下面是另外一个代换的例子. 尽管在这个例子中可以直接求积分，我们还是把它用来说明在简单(和相当直观)的情况下的代换方法.

**例 3** 对于积分

$$\int_0^3\int_0^4\int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1}\left(\frac{2x-y}{2}+\frac{z}{3}\right)dx\,dy\,dz$$

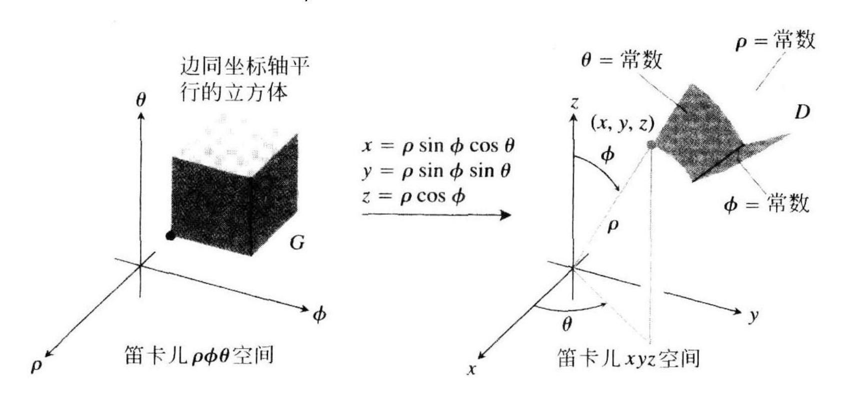



图 13.52　方程 $x=\rho\sin\phi\cos\theta$，$y=\rho\sin\phi\sin\theta$，$z=\rho\cos\phi$ 把立方体 $G$ 变换成球楔形体 $D$

应用变换

$$u=(2x-y)/2,\quad v=y/2,\quad w=z/3 \tag{8}$$

和在 $uvw$ 空间相应区域上的积分求积分值.

**解**　我们画出 $xyz$ 空间中积分区域 $D$ 的草图，并且确定它的边界(见图 13.53). 在本例中限定区域边界的曲面为平面.

为了应用公式(7)，我们需要求变换的对应 $uvw$ 区域 $G$ 和雅可比行列式. 为了求出它们，首先从方程(8)求解用 $u$，$v$，$w$ 表示的 $x$，$y$，$z$. 例行代数运算给出

$$x=u+v,\quad y=2v,\quad z=3w \tag{9}$$

然后把这三个表达式代入区域 $D$ 的边界方程求 $G$ 的边界：

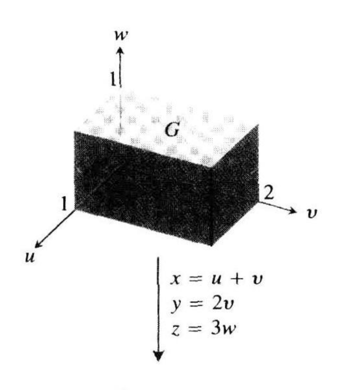
| $D$ 的边界的 $xyz$ 方程 | $G$ 的边界对应的 $uvw$ 方程 | 化简后的 $uvw$ 方程 |
|---|---|---|
| $x=y/2$ | $u+v=2v/2=v$ | $u=0$ |
| $x=(y/2)+1$ | $u+v=(2v/2)+1=v+1$ | $u=1$ |
| $y=0$ | $2v=0$ | $v=0$ |
| $y=4$ | $2v=4$ | $v=2$ |
| $z=0$ | $3w=0$ | $w=0$ |
| $z=3$ | $3w=3$ | $w=1$ |

再从方程(9)得到变换的雅可比行列式是

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}&\frac{\partial x}{\partial w}\\\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}&\frac{\partial y}{\partial w}\\\frac{\partial z}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial v}&\frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&0&3\end{vmatrix}=6$$

现在我们具备了应用公式(7)的一切条件：

$$\int_0^3\int_0^4\int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1}\left(\frac{2x-y}{2}+\frac{z}{3}\right)dx\,dy\,dz$$
$$=\int_0^1\int_0^2\int_0^1(u+w)\,|J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$



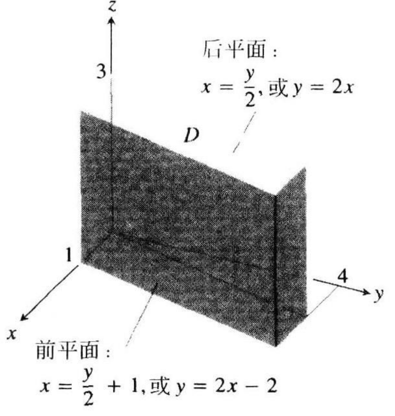




图 13.53　方程 $x=u+v$，$y=2v$，$z=3w$ 把区域 $G$ 变换成 $D$. 逆变换方程 $u=(2x-y)/2$，$v=y/2$，$w=z/3$ 把区域 $D$ 变换成 $G$(例 3)

$$= \int_0^1\int_0^2\int_0^1 (u + w)(6)\,du\,dv\,dw = 6\int_0^1\int_0^2 \left[\frac{u^2}{2} + uw\right]_0^1 dv\,dw$$

$$= 6\int_0^1\int_0^2 \left(\frac{1}{2} + w\right) dv\,dw = 6\int_0^1 \left[\frac{v}{2} + vw\right]_0^2 dw = 6\int_0^1 (1 + 2w)\,dw$$

$$= 6\left[w + w^2\right]_0^1 = 6(2) = 12$$ ■

本节的目标是介绍坐标变换中包含的思想. 对于坐标变换、雅可比行列式和多变量代换的详尽讨论，最好在学习线性代数后的高等微积分课程中进行.

## 习题 13.8

**1.** (a) 从方程组

$$u = x - y,\quad v = 2x + y$$

求解用 $u$ 和 $v$ 表示的 $x$ 和 $y$. 然后求雅可以行列式 $\partial(x,y)/\partial(u,v)$ 的值.

(b) 求 $xy$ 平面内以 $(0,0)$，$(1,1)$ 和 $(1,-2)$ 为顶点的三角形区域在变换 $u = x - y$，$v = 2x + y$ 下的象. 画出 $uv$ 平面内变换后的区域的草图.

**2.** (a) 从方程组

$$u = x + 2y,\quad v = x - y$$

求解用 $u$ 和 $v$ 表示的 $x$ 和 $y$. 然后求雅可比行列式 $\partial(x,y)/\partial(u,v)$ 的值.

(b) 求 $xy$ 平面内以直线 $y=0$，$y=x$ 和 $x+2y=2$ 为界的三角形区域在变换 $u=x+2y$，$v=x-y$ 下的象. 画出 $uv$ 平面内变换后的区域的草图.

**3.** (a) 从方程组

$$u = 3x + 2y,\quad v = x + 4y$$

求解用 $u$ 和 $v$ 表示的 $x$ 和 $y$. 然后求雅可比行列式 $\partial(x,y)/\partial(u,v)$ 的值.

(b) 求 $xy$ 平面内以 $x$ 轴、$y$ 轴和直线 $x+y=1$ 为界的三角形区域在变换 $u=3x+2y$，$v=x+4y$ 下的象. 画出 $uv$ 平面内变换后的区域的草图.

**4.** (a) 从方程组

$$u = 2x - 3y,\quad v = -x + y$$

求解用 $u$ 和 $v$ 表示的 $x$ 和 $y$. 然后求雅可比行列式 $\partial(x,y)/\partial(u,v)$ 的值.

(b) 求 $xy$ 平面内以直线 $x=-3$，$x=0$，$y=x$ 和 $y=x+1$ 为界的平行四边形区域 $R$ 在变换 $u=2x-3y$，$v=-x+y$ 下的象. 画出 $uv$ 平面内变换后的区域的草图.

**5.** 通过对 $x$ 和 $y$ 直接积分求例 1 中的积分

$$\int_0^4\int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \frac{2x-y}{2}\,dx\,dy$$

证实它的值等于 2.

**6.** 利用习题 1 中的变换，对于第一象限内以直线 $y=-2x+4$，$y=-2x+7$，$y=x-2$ 和 $y=x+1$ 为界的区域 $R$，求积分

$$\iint_R (2x^2 - xy - y^2)\,dx\,dy$$

的值.

**7.** 利用习题 3 中的变换，对于第一象限内以直线 $y=-(3/2)x+1$，$y=-(3/2)x+3$，$y=-(1/4)x$ 和 $y=-(1/4)x+1$ 为界的区域 $R$，求积分

$$\iint_R (3x^2 + 14xy + 8y^2)\,dx\,dy$$

的值.

**8.** 利用习题 4 中的变换和平行四边形区域 $R$ 求积分的值.

$$\iint_R 2(x-y)\,dx\,dy$$

**9.** 令 $R$ 是 $xy$ 平面第一象限内以双曲线 $xy=1$，$xy=9$ 和直线 $y=x$，$y=4x$ 为界的区域. 利用变换 $x=u/v$，$y=uv$ $(u>0,\ v>0)$ 把积分

$$\iint_R \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}\right) dxdy$$

重写成在 $uv$ 平面内相应区域 $G$ 上的积分. 然后求在 $G$ 上的 $uv$ 积分值.

**10.** (a) 求变换 $x=u$，$y=uv$ 的雅可比行列式，并且在 $uv$ 平面内画出区域 $G$：$1\le u\le 2$，$1\le uv\le 2$ 的草图.

(b) 然后利用公式(1)把积分

$$\int_1^2\int_1^2 \frac{y}{x}\,dy\,dx$$

变换成在 $G$ 上的积分，并且求这两个积分的值.

**11. 椭圆板的惯性极矩** 一块密度为常数的薄板覆盖 $xy$ 平面内以椭圆 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$，$a>0$，$b>0$ 为界的区域. 求板对原点的一阶矩.（提示：利用变换 $x = ar\cos\theta$，$y = br\sin\theta$.）

**12. 椭圆的面积** 通过在 $xy$ 平面内以椭圆 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ 为界的区域上对函数 $f(x,y)=1$ 积分，可以求出这个椭圆的面积 $\pi ab$. 直接求这个积

分需要用三角代换. 求这个积分的一种比较简单的方法是利用变换 $x = au$, $y = bv$ 和在 $uv$ 平面的圆盘 $G$: $u^2 + v^2 \leqslant 1$ 上求变换后的积分. 用这个方法求椭圆的面积.

**13.** 利用习题 2 中的变换求积分

$$\int_0^{2/3}\int_y^{2-2y}(x+2y)\mathrm{e}^{(x-y)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

的值, 通过首先把它写成在 $uv$ 平面内一个区域 $G$ 上的积分.

**14.** 利用变换 $x = u + (1/2)v$, $y = v$ 求积分

$$\int_0^2\int_{y/2}^{(y+4)/2}y^3(2x-y)\mathrm{e}^{(2x-y)^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

通过首先把它写成在 $uv$ 平面内一个区域 $G$ 上的积分.

**15.** 对于下列变换求雅可比行列式 $\partial(x,y)/\partial(u,v)$:

(**a**) $x = u\cos v$, $y = u\sin v$;

(**b**) $x = u\sin v$, $y = u\cos v$.

**16.** 对于下列变换求雅可比行列式 $\partial(x,y,z)/\partial(u,v,w)$:

(**a**) $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = w$;

(**b**) $x = 2u-1$, $y = 3v-4$, $z = (1/2)(w-4)$.

**17.** 求相应雅可比行列式的值, 证明从笛卡儿 $\rho\phi\theta$ 空间到笛卡儿 $xyz$ 空间的变换的雅可比行列式是 $\rho^2\sin\theta$.

**18. 单积分中的代换** 怎样才能把单定积分的代换看成区域的变换? 在这种情形雅可比行列式是什么? 举一个例子说明.

**19.** 通过对 $x$, $y$ 和 $z$ 积分求例 3 中的积分.

**20. 椭球的体积** 求椭球

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的体积. (提示: 令 $x = au$, $y = bv$, $z = cw$. 然后求 $uvw$ 空间中相应区域的体积.)

**21.** 求积分

$$\iiint |xyz|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

在椭球体

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$$

上的积分. (提示: 令 $x = au$, $y = bv$, $z = cw$. 然后求 $uvw$ 空间中相应区域上的积分).

**22.** 令 $D$ 是在 $xyz$ 空间中由不等式

$$1 \leqslant x \leqslant 2,\quad 0 \leqslant xy \leqslant 2,\quad 0 \leqslant z \leqslant 1$$

定义的区域. 应用变换

$$u = x,\quad v = xy,\quad w = 3z$$

和在 $uvw$ 空间中相应区域 $G$ 上积分求积分

$$\iiint_D (x^2y + 3xyz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

**23. 半椭球体的形心** 假定结果是半球体的形心位于对称轴上从底部到顶端的 3/8 处, 通过变换相应的积分证明, 半椭球体

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1, z \geqslant 0$$

的形心位于 $z$ 轴上的从底部到顶端的 3/8 处. (你可以不用求任何积分完成这个证明.)

**24. 圆柱壳** 我们在 6.2 节学过如何用圆柱壳方法求旋转体的体积; 即当曲线 $y = f(x)$ 同 $x$ 轴之间从 $a$ 到 $b$ $(0 < a < b)$ 的区域绕 $y$ 轴旋转时, 产生的旋转体的体积为 $\int_a^b 2\pi x f(x)\,\mathrm{d}x$. 证明: 用三重积分求体积给出同样结果. (提示: 用柱面坐标表示变化的 $y$ 和 $z$.)

# 第 13 章复习指导问题

**1.** 定义二元函数在坐标平面内的有界区域上的二重积分.

**2.** 怎样把二重积分作为累次积分求值? 累次积分的次序是重要的吗? 如何确定积分限? 举出一些例子.

**3.** 怎样用二重积分计算面积和平均值? 举出一些例子.

**4.** 怎样才能把直角坐标中的二重积分变换成极坐标中的二重积分? 作这种变换为什么可能是有价值的? 举一个例子.

**5.** 定义函数 $f(x,y,z)$ 在空间中有界区域上的三重积分.

**6.** 怎样求直角坐标中三重积分的值? 如何确定积分限? 举一个例子.

**7.** 怎样用直角坐标中的二重积分和三重积分计算体积、平均值、质量、矩和质心? 举出一些例子.

**8.** 怎样定义柱面坐标和球面坐标中三重积分? 为什么有人可能宁愿用这两种坐标系之一而不用直角坐标计算积分?

**9.** 怎样求柱面坐标和球面坐标中的三重积分? 如何求积分限? 举出一些例子.

**10.** 怎样把二重积分中的代换表示成二维区域的变换? 举一个计算实例.

**11.** 怎样把三重积分中的代换表示成三维区域的变换? 举一个计算实例.

## 第 13 章实习习题

在习题 1 ~ 4 中，画出积分区域的草图并且求二重积分的值.

1. $\int_1^{10}\int_0^{1/y} y e^{xy} dx\, dy$.
2. $\int_0^1\int_0^{x^3} e^{y/x} dy\, dx$.
3. $\int_0^{3/2}\int_{-\sqrt{9-4t^2}}^{\sqrt{9-4t^2}} t\, ds\, dt$.
4. $\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^{2-\sqrt{y}} xy\, dx\, dy$.

在习题 5 ~ 8 中，画出积分区域的草图，并且用相反的积分次序写出等价的积分. 然后求两个积分的值.

5. $\int_0^4\int_{-\sqrt{4-y}}^{(y-4)/2} dx\, dy$.
6. $\int_0^1\int_{x^2}^{x} \sqrt{x}\, dy\, dx$.
7. $\int_0^{3/2}\int_{-\sqrt{9-4y^2}}^{\sqrt{9-4y^2}} y\, dx\, dy$.
8. $\int_0^2\int_0^{4-x^2} 2x\, dy\, dx$.

在习题 9 ~ 12 中，求积分的值.

9. $\int_0^1\int_{2y}^{2} 4\cos(x^2)\, dx\, dy$.
10. $\int_0^2\int_{y/2}^{1} e^{x^2} dx\, dy$.
11. $\int_0^8\int_{\sqrt[3]{x}}^{2} \frac{dy\, dx}{y^4+1}$.
12. $\int_0^1\int_{\sqrt[3]{y}}^{1} \frac{2\pi \sin \pi x^2}{x^2} dx\, dy$.

13. **直线同抛物线之间的面积** 求 $xy$ 平内由直线 $y=2x+4$ 和抛物线 $y=4-x^2$ 包围的区域的面积.
14. **以直线和抛物线为界的区域的面积** 求 $xy$ 平面内右边以抛物线 $y=x^2$ 为界、左边以直线 $x+y=2$ 为界和上方以直线 $y=4$ 为界的"三角形"区域的面积.
15. **在抛物面之下的区域的体积** 求在抛物面 $z=x^2+y^2$ 之下和在 $xy$ 平面内由直线 $y=x$，$x=0$ 和 $x+y=2$ 包围的三角形区域之上的空间区域的体积.
16. **在抛物柱面之下的区域的体积** 求在抛物柱面 $z=x^2$ 之下和在 $xy$ 平面内由抛物线 $y=6-x^2$ 和直线 $y=x$ 包围的区域之上的空间区域的体积.

在习题 17 和 18 中，求 $f(x,y)=xy$ 在给定区域上的平均值.

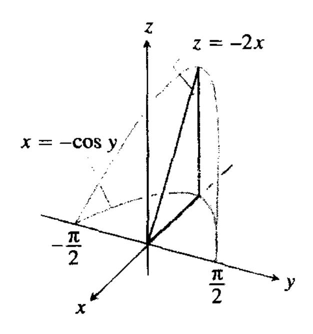
17. 在第一象限内以直线 $x=1$，$y=1$ 为界的正方形.
18. 在第一象限内的四分之圆 $x^2+y^2\leqslant 1$.

在习题 19 和 20 中，通过变换成极坐标求积分值.

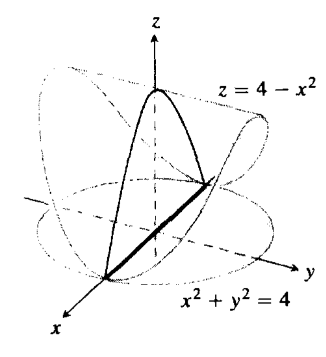
19. $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2\, dy\, dx}{(1+x^2+y^2)^2}$.
20. $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1)\, dx\, dy$.
21. **在双纽线上积分** 在由双纽线 $(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)=0$ 的一个环包围的区域上求函数 $f(x,y)=1/(1+x^2+y^2)^2$ 的积分。
22. 在下列区域上求函数 $f(x,y)=1/(1+x^2+y^2)^2$ 的积分：
 (a) **三角形区域** 以 $(0,0)$，$(1,0)$，$(1,\sqrt{3})$ 为顶点的三角形；
 (b) **第一象限** $xy$ 平面的第一象限.

在习题 23 ~ 26 中，求积分的值.

23. $\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x+y+z)\, dx\, dy\, dz$.
24. $\int_{\ln 6}^{\ln 7}\int_0^{\ln 2}\int_{\ln 4}^{\ln 5} e^{(x+y+z)} dz\, dy\, dx$.
25. $\int_0^1\int_0^{x^2}\int_0^{x+y} (2x-y-z)\, dz\, dy\, dx$.
26. $\int_1^e\int_1^x\int_0^z \frac{2y}{z^3} dy\, dz\, dx$.
27. **体积** 求侧面由柱面 $x=-\cos y$，$-\pi/2\leqslant y\leqslant \pi/2$、顶部由平面 $z=-2x$ 和下方由 $xy$ 平面包围的楔形区域的体积.




28. **体积** 求上方以圆柱面 $z=4-x^2$ 为界、侧面以圆柱面 $x^2+y^2=4$ 为界和下方以 $xy$ 平面为界的立体的体积.




29. **平均值** 求函数 $f(x,y,z)=30\, xz\sqrt{x^2+y}$ 在第一卦限内以坐标平面和平面 $x=1$，$y=3$，$z=1$ 为界的长方体上的平均值.
30. **平均值** 求 $\rho$ 在球体 $\rho\leqslant a$(球面坐标)上的平均值.

**31. 从柱面坐标到直角坐标和球面坐标** 把积分

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_r^{\sqrt{4-r^2}} 3\,dz\ r\ dr\ d\theta,\quad r \geqslant 0$$

变换到(**a**)直角坐标，采用积分次序 $dz\ dx\ dy$，(**b**)球面坐标. (**c**)然后求其中一个积分的值.

**32. 从直角坐标到柱面坐标** (**a**)把积分

$$\int_0^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-(x^2+y^2)}^{(x^2+y^2)} 21xy^2\,dz\ dy\ dx$$

变换到柱面坐标. (**b**)然后求新积分的值.

**33. 从直角坐标到球面坐标** (**a**)把积分

$$\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz\ dy\ dx$$

变换到球面坐标. (**b**)然后求新积分的值.

**34. 直角坐标、柱面坐标和球面坐标** 对于函数 $f(x,y,z)=6+4y$ 在第一卦限内以锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$、柱面 $x^2+y^2=1$ 和坐标平面为界的区域上的积分，在(**a**)直角坐标，(**b**)柱面坐标和(**c**)球面坐标中写出累次三重积分. (**d**)然后通过计算其中一个三重积分求积分值.

**35. 从柱面坐标到直角坐标** 对于积分

$$\int_0^{\pi/2}\int_1^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-r^2}} r^3(\sin\theta\cos\theta)z^2\,dz\ dr\ d\theta$$

建立在直角坐标中的等价积分. 把积分次序安排为先对 $z$ 积分，再对 $y$ 积分，最后对 $x$ 积分.

**36. 从直角坐标到柱面坐标** 一个立体的体积为

$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\ dy\ dx$$

(**a**)通过给出构成立体边界的曲面方程描述立体.

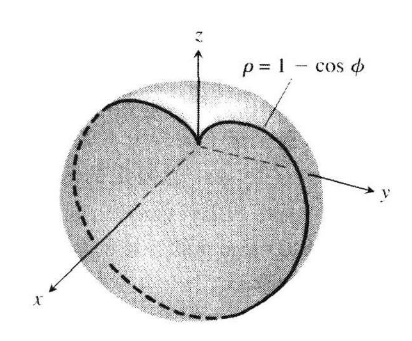
(**b**)把积分变换成柱面坐标中的积分，但是不求积分值.

**37. 球面坐标与柱面坐标** 对于涉及球形区域上的三重积分，为了计算上的方便，并非总是需要用球面坐标. 某些计算可能用柱面坐标更容易完成. 一个恰当的例子，就是用(**a**)柱面坐标和(**b**)球面坐标求上方以球面 $x^2+y^2+z^2=8$ 为界和下方以平面 $z=2$ 为界的区域的体积.

**38. 求球面坐标中的 $I_z$** 求上方以球面 $\rho=2$ 为界和下方以锥面 $\phi=\pi/3$(球面坐标)为界的密度 $\delta=1$ 的立体对 $z$ 轴的惯性矩.

**39. "厚层"球面的惯性矩** 求以半径 $a$ 和 $b(a<b)$ 的同心球面为界和密度 $\delta$ 为常数的立体对一条直径的惯性矩.

**40. 苹果的惯性矩** 求由球面坐标曲面 $\rho=1-\cos\phi$ 包围的密度 $\delta=1$ 的立体对 $z$ 轴的惯性矩. 这个立体是绕 $z$ 轴旋转附图中的曲线产生的.




**41. 形心** 求在 $xy$ 平面内以直线 $x=2$，$y=2$ 和双曲线 $xy=2$ 为界的"三角形"区域的形心.

**42. 形心** 求在 $xy$ 平面内界于抛物线 $x^2+y^2-2y=0$ 和直线 $x+2y=0$ 之间的区域的形心.

**43. 极矩** 求在 $xy$ 平面内以 $y$ 轴以及直线 $y=2x$ 和 $y=4$ 为界的密度为常数 $\delta=3$ 的三角形薄板对原点的惯性极矩.

**44. 极矩** 求密度为常数 $\delta=3$ 的矩形薄板对其中心的惯性极矩：

(**a**)薄板以 $xy$ 平面内的直线 $x=\pm 2$，$y=\pm 1$ 为界；

(**b**)薄板以 $xy$ 平面内的直线 $x=\pm a$，$y=\pm b$ 为界.

(提示：先求 $I_x$. 然后利用 $I_x$ 的公式求 $I_y$，最终把二者相加求 $I_0$).

**45. 惯性矩** 求薄板对 $x$ 轴的惯性矩，薄板覆盖 $xy$ 平面内以(0,0)，(3,0)和(3,2)为顶点的三角形区域，其密度 $\delta$ 为常数.

**46. 可变密度板** 求 $xy$ 平面内以直线 $x=\pm 1$，$y=\pm 1$ 为界的正方形薄板的质量和对坐标轴的一阶矩，如果板的密度 $\delta(x,y)=x^2+y^2+1/3$.

**47. 可变密度板** 求 $xy$ 平面以直线 $x=\pm 1$，$y=\pm 1$ 为界的正方形薄板的质量和对坐标轴的一阶矩，如果板的密度 $\delta(x,y)=x^2+y^2+1/3$.

**48. 具有相同惯性矩的三角形板** 求底边位于 $x$ 轴的区间 $[0,b]$ 上和顶点在 $x$ 轴上方的直线 $y=h$ 上的密度 $\delta$ 为常数的三角形板对 $x$ 轴的惯性矩. 正如你将会见到的那样，三角形顶点处在直线上什么位置并不重要. 所有这样的三角形对 $x$ 轴的惯性矩相同.

**49. 形心** 求极坐标平面内由不等式 $0\leqslant r\leqslant 3$，$-\pi/3\leqslant\theta\leqslant\pi/3$ 限定区域的形心.

**50. 形心** 求第一象限内以射线 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi/2$ 以及圆 $r=1$ 和 $r=3$ 为界的区域的形心.

**51.** (a) **形心** 求极坐标平面内位于心脏线 $r = 1 + \cos\theta$ 内部和圆 $r = 1$ 外部的区域的形心.

(b) 画出区域的草图，并且在草图中显示出形心.

**52.** (a) **形心** 求极坐标平面内由不等式 $0 \leqslant r \leqslant a$, $-\alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha (0 < \alpha \leqslant \pi)$ 限定的区域的形心. 形心当 $\alpha \to \pi^-$ 时怎样移动?

(b) 画出对于 $\alpha = 5\pi/6$ 的区域的草图，并且在图中显示出形心.

**53.** 证明：若 $u = x - y$ 和 $v = y$，则

$$\int_0^{\infty}\int_0^{x} e^{-sx} f(x-y,y)\,dy\,dx = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-s(u+v)} f(u,v)\,du\,dv$$

**54.** 为使

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\,dx\,dy = 1$$

常数 $a$, $b$, $c$ 之间必须满足什么关系?（提示：令 $s = \alpha x + \beta y$ 和 $t = \gamma x + \delta y$，其中 $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = ac - b^2$. 那么，$ax^2 + 2bxy + cy^2 = s^2 + t^2$.）

## 第 13 章补充和提高习题

**1. 沙堆：二重积分和三重积分** 沙堆的底部覆盖 $xy$ 平面内以抛物线 $x^2 + y = 6$ 和直线 $y = x$ 为界的区域. 沙堆在点 $(x, y)$ 之上的高度是 $x^2$. 把沙堆的体积表示成(a)二重积分和(b)三重积分. (c)然后求沙堆的体积.

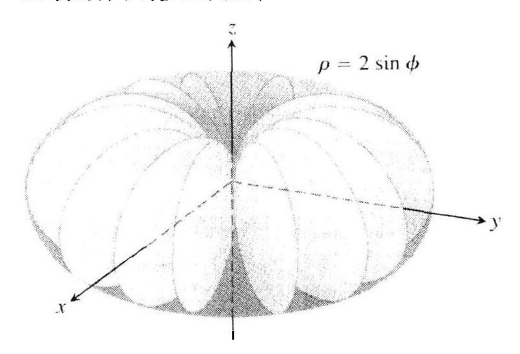
**2. 半球形碗中的水** 在半径为 5 cm 的半球形碗中注入离碗口差 3 cm 的水. 求碗中水的体积.

**3. 两个平面之间的圆柱体区域** 求圆柱体 $x^2 + y^2 \leqslant 1$ 位于平面 $z = 0$ 和 $x + y + z = 2$ 之间部分的体积.

**4. 球面和抛物面** 求上方以球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 为界和下方以抛物面 $z = x^2 + y^2$ 为界的区域的体积.

**5. 两个抛物面** 求上方以抛物面 $z = 3 - x^2 - y^2$ 为界和下方以抛物面 $z = 2x^2 + 2y^2$ 为界的区域的体积.

**6. 球面坐标** 求由球面坐标曲面 $\rho = 2\sin\phi$ 包围的区域的体积(参见附图).




**7. 球体中的洞** 穿过球体钻一个圆柱形洞，洞的轴是球体的直径. 球体剩余部分的体积为

$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-z^2}} r\,dr\,dz\,d\theta$$

(a) 求洞的半径和球体的半径.

(b) 求这个积分的值.

**8. 球体和柱面** 求用柱面 $r = 3\sin\theta$ 从球体 $r^2 + z^2 \leqslant 9$ 中切割的材料的体积.

**9. 两个抛物面** 求由抛物面 $z = x^2 + y^2$ 和 $z = (x^2 + y^2 + 1)/2$ 包围的区域的体积.

**10. 柱面和曲面 $z = xy$** 求第一卦限内介于柱面 $r = 1$ 和 $r = 2$ 之间以及下方以 $xy$ 平面为界和上方以曲面 $z = xy$ 为界的区域的体积.

**11.** 求积分

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx$$

的值.（提示：利用关系式

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy}\,dy$$

构成二重积分，并且通过改变积分次序求积分值.）

**12.** (a) **极坐标** 通过变换到极坐标，证明

$$\int_0^{a\sin\beta}\int_{y\cot\beta}^{\sqrt{a^2-y^2}} \ln(x^2 + y^2)\,dx\,dy = a^2\beta\left(\ln a - \frac{1}{2}\right)$$

其中 $a > 0$, $0 < \beta < \pi/2$.

(b) 用相反的积分次序重写笛卡儿坐标的积分.

**13. 把二重积分化简为单积分** 通过改变积分次序，证明可以把下面的二重积分化简为单积分：

$$\int_0^x\int_0^u e^{m(x-t)} f(t)\,dt\,du = \int_0^x (x-t)e^{m(x-t)} f(t)\,dt$$

同样，可以证明

$$\int_0^x\int_0^v\int_0^u e^{m(x-t)} f(t)\,dt\,du\,dv = \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} e^{m(x-t)} f(t)\,dt$$

**14. 变换二重积分获得常数积分限** 带变量积分限的多重积分，有时可以改变成具有常数积分限的积分. 通过改变积分次序，证明

$$\int_0^1 f(x)\left(\int_0^x g(x-y)f(y)\,dy\right)dx = \int_0^1 f(y)\left(\int_y^1 g(x-y)f(x)\,dx\right)dy = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 g(|x-y|)f(x)f(y)\,dx\,dy$$

**15. 使惯性极矩达到最小值** 一块密度为常数的薄板覆盖 $xy$ 平面的第一象限内以 $(0, 0)$,

$(a,0)$和$(a,1/a)$为顶点的三角形区域. $a$ 的什么值将使板对原点的惯性极矩达到最小值?

**16. 三角形板的惯性极矩** 求密为常数 $\delta=3$ 的以 $xy$ 平面内的 $y$ 轴以及直线 $y=2x$ 和 $y=4$ 为界的三角形薄板对原点的惯性极矩.

**17. 平衡锤的质量和惯性极矩** 惯性轮的平衡锤的密度为常数 1,其形状是从半径为 $a$ 的圆中由距离中心为 $b(b<a)$ 的弦切割的小圆缺. 求平衡锤的质量以及它对惯性轮中心的惯性极矩.

**18. 飞镖的形心** 求 $xy$ 平面内介于抛物线 $y^2=-4(x-1)$ 和 $y^2=-2(x-2)$ 之间的飞镖形区域的形心.

**19.** 求积分

$$\int_0^a\int_0^b e^{\max(b^2x^2,a^2y^2)}\,dy\,dx$$

的值,其中 $a$ 和 $b$ 为正数,

$$\max(b^2x^2,a^2y^2)=\begin{cases}b^2x^2, & b^2x^2\geqslant a^2y^2\\ a^2y^2, & b^2x^2<a^2y^2\end{cases}$$

**20.** 证明:在矩形区域 $x_0\leqslant x\leqslant x_1$, $y_0\leqslant y\leqslant y_1$ 上积分

$$\iint\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}\,dx\,dy$$

的值等于

$$F(x_1,y_1)-F(x_0,y_1)-F(x_1,y_0)+F(x_0,y_0)$$

**21.** 假定$f(x,y)$可以写成 $x$ 的函数和 $y$ 的函数的乘积,即 $f(x,y)=F(x)G(y)$. 那么 $f$ 在矩形 $R$: $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$ 上的积分也可以用公式

$$\iint_R f(x,y)\,dA=\left(\int_a^b F(x)\,dx\right)\left(\int_c^d G(y)\,dy\right)\quad(1)$$

当成乘积计算. 论据是

$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_c^d\left(\int_a^b F(x)G(y)\,dx\right)dy\quad(\text{i})$$

$$=\int_c^d\left(G(y)\int_a^b F(x)\,dx\right)dy\quad(\text{ii})$$

$$=\int_c^d\left(\int_a^b F(x)\,dx\right)G(y)\,dy\quad(\text{iii})$$

$$=\left(\int_a^b F(x)\,dx\right)\int_c^d G(y)\,dy\quad(\text{iv})$$

(a) 给出从第(i)步到第(iv)步的推理.

当应用公式(1)时,它可能是一个节省时间的算式. 用它计算下列积分:

(b) $\int_0^{\ln 2}\int_0^{\pi/2}e^x\cos y\,dy\,dx$; (c) $\int_1^2\int_{-1}^1\frac{x}{y^2}\,dx\,dy$.

**22.** 用 $D_uf$ 表示函数

$$f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2}$$

在单位向量 $\boldsymbol{u}=u_1\boldsymbol{i}+u_2\boldsymbol{j}$ 方向的导数.

(a) **求平均值** 求 $D_uf$ 在由直线 $x+y=1$ 从 $xy$ 平面第一象限切割的三角形区域上的平均值.

(b) **平均值和形心** 证明:通常情况下 $D_uf$ 在 $xy$ 平面内一个区域上的平均值等于 $D_uf$ 在这个区域的形心的值.

**23. $\Gamma(1/2)$的值** $\Gamma$ 函数

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

把阶乘函数从非负整数扩充到其他实数. 在微分方程理论中特别重要的数是

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty t^{(1/2)-1}e^{-t}dt=\int_0^\infty\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt\quad(2)$$

(a) 你若尚未作 13.4 节的习题 31,现在来作这道题,证明

$$I=\int_0^\infty e^{-y^2}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(b) 在公式(2)中代入 $y=\sqrt{t}$,证明

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2I=\sqrt{\pi}$$

**24. 圆形板上的总电荷** 在半径为 $R$ 米的圆形板上,电荷的分布为

$\sigma(r,\theta)=kr(1-\sin\theta)$ 库仑/米$^2$($k$ 为常数)

在板上对 $\sigma$ 积分求总电荷

**25. 抛物型雨量计** 一个器皿的形状为从 $z=0$ 到 $z=10$ 英寸的抛物面 $z=x^2+y^2$ 的图形. 计划在器皿上作刻度使其成为雨量计. 在器皿中同 1 英寸雨量对应的高度是多少? 同 3 英寸雨量对应的高度是多少?

**26. 人造卫星抛物面天线锅的储水量** 人造卫星抛物面天线锅的宽度为 2 米,深度为 1/2 米. 它的对称轴从垂直方向倾斜 30°.

(a) 在直角坐标中建立给出抛物面天线锅储水量的三重积分,但是不计算积分值.(提示:设置坐标系使抛物面天线锅处于"标准位置"而水平面是倾斜的.)(注意:积分限不是"优美的".)

(b) 使抛物面天线锅不能保存水时的最小倾斜度是多少?

**27.** 令 $D$ 是半径为 1 的直立半圆柱体的内部,半圆柱体的端面悬在原点之上 1 单位的位置,它的轴是从$(0,0,1)$到 $\infty$ 的射线. 用柱面坐标求积分

$$\iiint_D z(r^2+z^2)^{-5/2}dV$$

的值.

**28. 超体积** 我们已经学习过，$\int_a^b 1\mathrm{d}x$ 是数直线(一维空间) 上区间$[a,b]$ 的长度，$\iint\limits_R 1\ \mathrm{d}A$ 是 $xy$ 平面(二维空间) 内区域$R$的面积，$\iiint\limits_D 1\ \mathrm{d}V$ 是 $xyz$ 空间(三维空间) 中区域 $D$ 的体积。这种计算方式可以继续下去:加果 $Q$ 是 $xyzw$ 空间(四维空间) 中的区域，那么$\iiiint\limits_Q 1\ \mathrm{d}V$ 是 $Q$ 的"超体积". 运用你的推广能力和四维空间的笛卡儿坐标系，求三维单位球$x^2+y^2+z^2+w^2=1$ 内部的超体积.

# 第 14 章　向量场中的积分

**概述**　在这一章，我们把前面四章处理空间曲线、向量函数、偏导数以及多重积分的思想结合起来，建立线积分、向量场和面积分，为自然科学和工程技术提供强有力的数学工具. 线积分用于求力沿一条路径运动所作的功，以及求具有可变密度的金属线的质量. 面积分用于求流体流过一个曲面的速率. 我们还要介绍把这几种新工具联系起来的几个重要定理，同时提供用它们解决数学计算和实际应用问题的见解.

## 14.1　线积分

为了计算置于空间曲线位置的细杆或金属线的质量，或者求可变力沿这样的曲线所作的功，需要提出一种比第 5 章的定义更为一般的积分概念. 我们需要求在曲线 $C$ 上而不是在区间 $[a, b]$ 上的积分. 这种更一般的积分称为线积分(不过用"曲线"积分可能更贴切). 我们在给出空间曲线的定义时，记住 $xy$ 平面内的曲线只是 $z$ 坐标恒为零的特例.

假定 $f(x,y,z)$ 是要在处于 $f$ 定义域内的空间曲线

$$\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}, \quad a \leqslant t \leqslant b$$

上求积分的实值函数. $f$ 沿曲线的值由复合函数 $f(g(t), h(t), k(t))$ 给出. 将要进行的积分是这个复合函数对弧长从 $t=a$ 到 $t=b$ 的积分. 开始，先把曲线划分成有限的 $n$ 段子弧(见图 14.1). 典型子弧的长度为 $\Delta s_k$. 在每段子弧中选取一点 $(x_k, y_k, z_k)$，并且构造和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta s_k$$

如果 $f$ 是连续函数，并且 $f, h, k$ 有连续一阶导数，那么这些和当 $n$ 增加和长度 $\Delta s_k$ 趋近零时趋近一个极限. 这个极限称为 **$f$ 在曲线上从 $a$ 到 $b$ 的线积分**. 如果曲线用一个字母例如 $C$ 表示，积分记号为

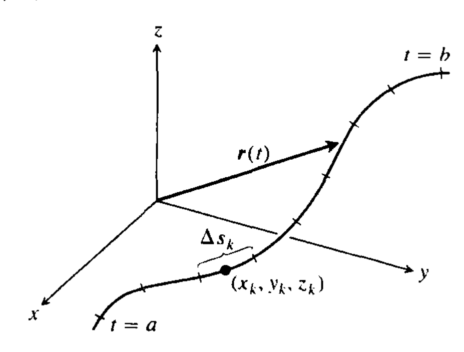



图 14.1　把曲线 $r(t)$ 划分成从 $t=a$ 到 $t=b$ 的小弧，典型子弧的长度为 $\Delta s_k$

$$\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s \quad (\text{“}f\text{ 在 }C\text{ 上的积分”}) \tag{1}$$

如果 $\boldsymbol{r}(t)$ 对于 $a \leqslant t \leqslant b$ 是光滑的$\left(\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\text{是连续的并且不会为}\boldsymbol{0}\right)$，就能在积分式(1)中用公式

$$s(t) = \int_a^t |\boldsymbol{v}(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \quad (\text{在 11.3 节公式(3) 中取 } t_0 = a)$$

把 $\mathrm{d}s$ 表示成 $\mathrm{d}s = |\boldsymbol{v}(t)|\mathrm{d}t$. 于是我们可以按下式求 $f$ 在 $C$ 上的积分：

$$\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(g(t), h(t), k(t))\,|\boldsymbol{v}(t)|\,\mathrm{d}t$$

请注意，最后这个公式右端的积分只是通常的(单变量)定积分，像在第 5 章定义的那样，其中我们是对参数 $t$ 积分. 公式正确地求出左端的线积分而不管用什么参数表示，只要参数化曲线是光滑的.

**如何求线积分**

求连续函数$f(x,y,z)$在曲线 $C$ 上的积分的步骤如下：

(1)求曲线 $C$ 的一个光滑的参数表示

$$\boldsymbol{r}(t)=g(t)\boldsymbol{i}+h(t)\boldsymbol{j}+k(t)\boldsymbol{k},\quad a\leqslant t\leqslant b$$

(2)按照

$$\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\int_a^b f(g(t),h(t),k(t))\,|\boldsymbol{v}(t)|\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

求积分.

如果$f$取常数值 1，那么$f$在 $C$ 上的积分给出 $C$ 的长度.

**例 1** 求函数$f(x,y,z)=x-3y^2+z$在连接原点和点(1,1,1)的线段 $C$ 上的积分(见图 14.2).

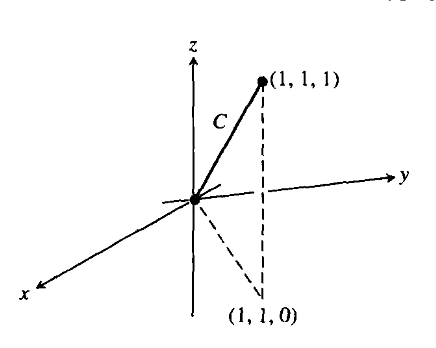


图 14.2 例 1 中的积分路径

**解** 我们选择线段 $C$ 可以想到的最简单参数表示：

$$\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k},\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

三个分量具有连续的一阶导数，并且$|\boldsymbol{v}(t)|=|\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$不会为 0，所以这个参数表示是光滑的. $f$在 $C$ 上的积分是

$$\begin{aligned}\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s&=\int_0^1 f(t,t,t)(\sqrt{3})\,\mathrm{d}t\quad(\text{公式}(2))\\&=\int_0^1(t-3t^2+t)\sqrt{3}\,\mathrm{d}t=\sqrt{3}\int_0^1(2t-3t^2)\,\mathrm{d}t=\sqrt{3}\left[t^2-t^3\right]_0^1=0\end{aligned}$$

■

### 14.1.1 可加性

线积分具有这样一种有用的性质，如果曲线 $C$ 是由有限的曲线段 $C_1$，$C_2$，…，$C_n$ 首尾连接构成的，那么函数$f$在 $C$ 上的积分等于$f$在各个曲线段上的积分之和：

$$\int_C f\,\mathrm{d}s=\int_{C_1}f\,\mathrm{d}s+\int_{C_2}f\,\mathrm{d}s+\cdots+\int_{C_n}f\,\mathrm{d}s \tag{3}$$

**例 2** 图 14.3 显示从原点到点(1,1,1)的另外一条路径，它是线段 $C_1$ 和 $C_2$ 的并集. 求函数$f(x,y,z)=x-3y^2+z$在 $C_1\cup C_2$ 上的积分.

图 14.3 例 2 中的积分路径

**解** 我们选择 $C_1$ 和 $C_2$ 可以想到的最简单参数表示，检查进行积分的速度向量的长度：

$C_1$： $\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}$，$0\leqslant t\leqslant 1$； $|\boldsymbol{v}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$C_2$： $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$，$0\leqslant t\leqslant 1$； $|\boldsymbol{v}|=\sqrt{0^2+0^2+1^2}=1$

用这两个参数表示求出

$$\begin{aligned}\int_{C_1\cup C_2}f(x,y,z)\,\mathrm{d}s&=\int_{C_1}f(x,y,z)\,\mathrm{d}s+\int_{C_2}f(x,y,z)\,\mathrm{d}s\quad(\text{公式}(3))\\&=\int_0^1 f(t,t,0)\sqrt{2}\,\mathrm{d}t+\int_0^1 f(1,1,t)(1)\,\mathrm{d}t\quad(\text{公式}(2))\\&=\int_0^1(t-3t^2+0)\sqrt{2}\,\mathrm{d}t+\int_0^1(1-3+t)(1)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{t^2}{2} - t^3\right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} - 2t\right]_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}$$ ■

关于例 1 和例 2 中的积分，请注意三件事情. 第一，只要把相应积分曲线的参数表示的分量代入$f$的公式，积分就变成对$t$的标准积分. 第二，$f$在$C_1 \cup C_2$上的积分，通过在每段曲线上对$f$积分并且把结果相加得到. 第三，如果$C$是$C_1$和$C_2$的并集，$f$在$C$上的积分和$f$在$C_1 \cup C_2$上的积分具有不同的值. 如果改变连接两点的路径，沿两点路径的积分值可能改变.

### 14.1.2 质量和矩的计算公式

我们来探讨像螺旋弹簧和金属线这样一些沿空间光滑曲线分布的质量问题. 这种质量分布用密度函数$\delta(x,y,z)$(每单位长度的质量)描述. 这时，弹簧和金属线的质量、质心和矩用表 14.1 中的公式计算. 这些公式也适用于细杆. 这些公式的推导类似于 6.7 节的公式推导.

**表 14.1 位于空间光滑曲线上的螺旋弹簧、细杆和金属线的质量和矩的公式**

(i) 质量

$$M = \int_C \delta(x,y,z)\,\mathrm{d}s \quad (\delta = \delta(x,y,z) \text{ 是在点}(x,y,z)\text{ 的密度})$$

(ii) 对坐标平面的一阶矩

$$M_{yz} = \int_C x\,\delta\,\mathrm{d}s, \quad M_{xz} = \int_C y\,\delta\,\mathrm{d}s, \quad M_{xy} = \int_C z\,\delta\,\mathrm{d}s$$

(iii) 质心的坐标

$$\bar{x} = M_{yz}/M, \quad \bar{y} = M_{xz}/M, \quad \bar{z} = M_{xy}/M$$

(iv) 对坐标轴和其他直线的惯性矩

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2)\delta\,\mathrm{d}s, \quad I_y = \int_C (x^2 + z^2)\delta\,\mathrm{d}s, \quad I_z = \int_C (x^2 + y^2)\delta\,\mathrm{d}s$$

$$I_L = \int_C r^2\delta\,\mathrm{d}s \quad (r(x,y,z) = \text{从点}(x,y,z)\text{ 到直线 } L \text{ 的距离})$$

注意，表中的质量元$\mathrm{d}m$等于$\delta\,\mathrm{d}s$，而不像在表 13.1 那样等于$\delta\,\mathrm{d}V$，并且积分是在曲线$C$上的积分.

**例 3** 一把位于$yz$平面的半圆$y^2+z^2=1$，$z \geqslant 0$上的细长金属弓，底端的密度大于弓顶的密度(见图 14.4). 如果在弓上的点$(x,y,z)$的密度是$\delta(x,y,z)=2-z$，求弓的质心.

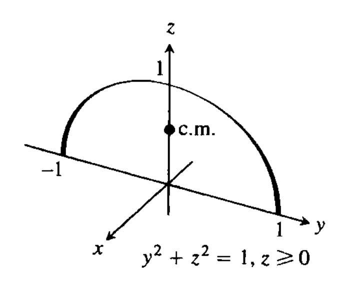



图 14.4 例 3 说明如何求可变密度的圆形弓的质心(c. m.)

**解** 我们知道$\bar{x}=0$和$\bar{y}=0$，因为弓处于$yz$平面内，而其质量对$z$轴对称分布. 为了求$\bar{z}$，用参数方程

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{j} + (\sin t)\boldsymbol{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$$

表示圆. 对于这个参数表示，

$$|\boldsymbol{v}(t)| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} = \sqrt{(0)^2 + (-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$$

于是表 14.1 中的公式给出

$$M = \int_C \delta\,\mathrm{d}s = \int_C (2-z)\,\mathrm{d}s = \int_0^{\pi}(2-\sin t)(1)\,\mathrm{d}t = 2\pi - 2$$

$$M_{xy} = \int_C z\,\delta\,\mathrm{d}s = \int_C z(2-z)\,\mathrm{d}s = \int_0^{\pi}(\sin t)(2-\sin t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}(2\sin t - \sin^2 t)\,\mathrm{d}t = \frac{8-\pi}{2}$$

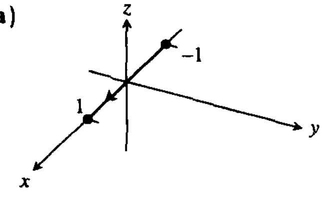
$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{8-\pi}{2}\cdot\frac{1}{2\pi-2} = \frac{8-\pi}{4\pi-4} \approx 0.57$$

取两位小数的质心是(0, 0, 0.57). ■

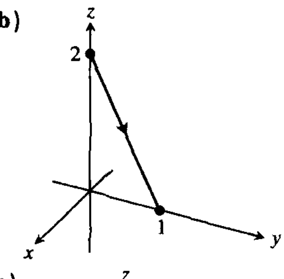
## 习题 14.1

在习题 1 ~ 8 中，确定向量方程同下面给出的图形(a) ~ (h)的匹配.

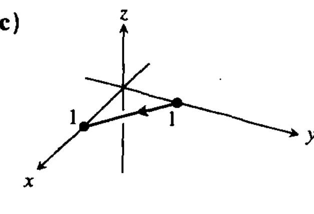
(a)



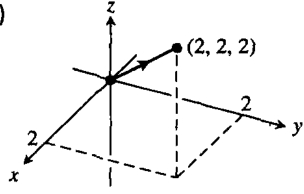

(b)



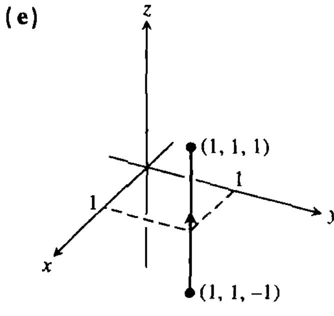

(c)



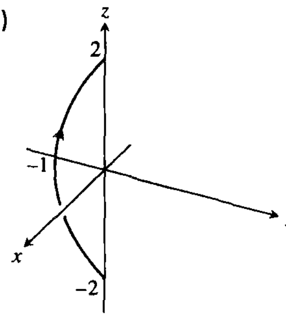

(d)



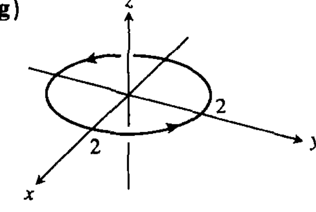

(e)



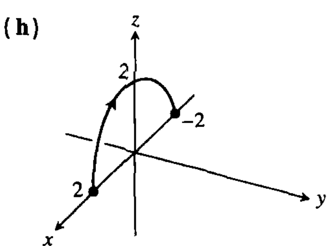

(f)




(g)




(h)




1. $\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i}+(1-t)\boldsymbol{j},\ 0\leqslant t\leqslant 1$.
2. $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k},\ -1\leqslant t\leqslant 1$.
3. $\boldsymbol{r}(t)=(2\cos t)\boldsymbol{i}+(2\sin t)\boldsymbol{j},\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$.
4. $\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i},\ -1\leqslant t\leqslant 1$.
5. $\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k},\ 0\leqslant t\leqslant 2$.
6. $\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{j}+(2-2t)\boldsymbol{k},\ 0\leqslant t\leqslant 1$.
7. $\boldsymbol{r}(t)=(t^2-1)\boldsymbol{j}+2t\boldsymbol{k},\ -1\leqslant t\leqslant 1$.
8. $\boldsymbol{r}(t)=(2\cos t)\boldsymbol{i}+(2\sin t)\boldsymbol{k},\ 0\leqslant t\leqslant \pi$.
9. 求积分

$$\int_C (x+y)\,\mathrm{d}s$$

其中 $C$ 是从点(0,1,0)到(1,0,0)的直线段 $x=t$, $y=1-t$, $z=0$.

10. 求积分

$$\int_C (x-y+z-2)\,\mathrm{d}s$$

其中 $C$ 是从点(0,1,1)到(1,0,1)的直线段 $x=t$, $y=1-t$, $z=1$.

11. 求沿曲线 $\boldsymbol{r}(t)=2t\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}+(2-2t)\boldsymbol{k},\ 0\leqslant t\leqslant 1$ 的积分

$$\int_C (xy+y+z)\,\mathrm{d}s$$

12. 求沿曲线 $\boldsymbol{r}(t)=(4\cos t)\boldsymbol{i}+(4\sin t)\boldsymbol{j}+3t\boldsymbol{k}$, $-2\pi\leqslant t\leqslant 2\pi$ 的积分

$$\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$$

13. 求函数 $f(x,y,z)=x+y+z$ 在从点(1,2,3)到(0,−1,1)的直线段上的积分.
14. 求函数 $f(x,y,z)=\sqrt{3}/(x^2+y^2+z^2)$ 在曲线 $\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k},\ 1\leqslant t\leqslant\infty$ 上的积分.
15. 求函数 $f(x,y,z)=x+\sqrt{y}-z^2$ 在图 14.5a 中给出的从点(0,0,0)到(1,1,1)的路径

$C_1$: $\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}, 0\leqslant t\leqslant 1$

$C_2$: $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}, 0\leqslant t\leqslant 1$

上的积分.

16. 求函数 $f(x,y,z)=x+\sqrt{y}-z^2$ 在图 14.5b 给出的从点(0,0,0)到(1,1,1)的路径

$C_1$: $\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{k},\quad 0\leqslant t\leqslant 1$

$C_2$: $\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\quad 0\leqslant t\leqslant 1$

$C_3$: $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

上的积分.

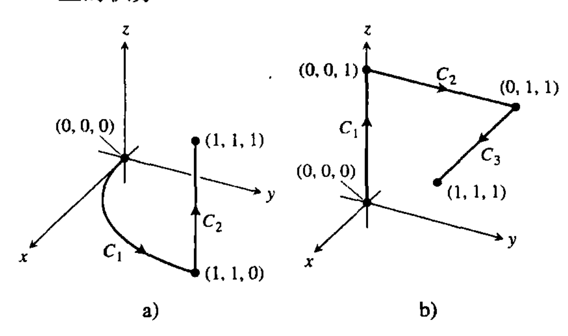



图 14.5 习题 15 和 16 中的积分路径

**17.** 求函数 $f(x,y,z) = (x+y+z)/(x^2+y^2+z^2)$ 在路径 $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$, $0 < a \leqslant t \leqslant b$ 上的积分.

**18.** 求函数 $f(x,y,z) = -\sqrt{x^2+z^2}$ 在圆

$\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{j} + (a\sin t)\boldsymbol{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

上的积分.

在习题 19 ~ 22 中，求函数 $f$ 在给定曲线 $C$ 上的积分.

**19.** $f(x,y) = x^3/y$, $C$: $y = x^2/2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

**20.** $f(x,y) = (x+y^2)/\sqrt{1+x^2}$, $C$: $y = x^2/2$ 从点 $(1,1/2)$ 到 $(0,0)$.

**21.** $f(x,y) = x+y$, $C$: $x^2+y^2=4$ 在第一象限内从点 $(2,0)$ 到 $(0,2)$.

**22.** $f(x,y) = x^2-y$, $C$: $x^2+y^2=4$ 在第一象限内从点 $(0,2)$ 到 $(\sqrt{2},\sqrt{2})$.

**23. 金属线的质量** 求位于曲线 $\boldsymbol{r}(t) = (t^2-1)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上的金属线的质量，设金属线的密度函数为 $\delta = (3/2)t$.

**24. 弯曲金属线的质心** 金属线位于曲线 $\boldsymbol{r}(t) = (t^2-1)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$ 上，它的密度为 $\delta(x,y,z) = 15\sqrt{y+2}$. 求它的质心. 然后一起画出曲线和质心的草图.

**25. 具有可变密度的金属线的质量** 求位于曲线 $\boldsymbol{r}(t) = \sqrt{2}t\boldsymbol{i} + \sqrt{2}t\boldsymbol{j} + (4-t^2)\boldsymbol{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上的细金属线的质量，假设它的密度为 (**a**) $\delta = 3t$, (**b**) $\delta = 1$.

**26. 具有可变密度的金属线的质心** 求位于曲线 $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + (2/3)t^{3/2}\boldsymbol{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 2$ 上的细金属线的质心，假设它的密度为 $\delta = 3\sqrt{5+t}$.

**27. 金属环的惯性矩** 一个圆形金属环位于 $xy$ 平面内的圆 $x^2+y^2=a^2$ 上，其密度 $\delta$ 为常数. 求金属环对 $z$ 轴的惯性矩.

**28. 细长杆的惯性矩** 一条细长的密度为常数的杆位于 $yz$ 平面内的线段 $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{j} + (2-2t)\boldsymbol{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上. 求杆对三个坐标平面的惯性矩.

**29. 两条常数密度的弹簧** 一条密度为常数 $\delta$ 的弹簧，位于螺旋线

$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

上.

(**a**) 求 $I_z$.

(**b**) 假定另有一条密度为常数 $\delta$ 的弹簧的长度是 (a) 中弹簧长度的两倍，并且位于 $0 \leqslant t \leqslant 4\pi$ 的同样螺旋线上. 你预料长弹簧的 $I_z$ 和短弹簧的 $I_z$ 相同还是应当不同？通过计算长弹簧的 $I_z$ 检验你的预料.

**30. 密度为常数的金属线** 密度为常数 $\delta = 1$ 的金属性位于曲线

$$\boldsymbol{r}(t) = (t\cos t)\boldsymbol{i} + (t\sin t)\boldsymbol{j} + (2\sqrt{2}/3)t^{3/2}\boldsymbol{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

上. 求 $\bar{z}$ 和 $I_z$.

**31. 例 3 中的金属弓** 求例 3 中金属弓的 $I_x$

**32. 具有可变密度的金属线的质心和惯性矩** 求位于曲线

$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\boldsymbol{j} + \frac{t^2}{2}\boldsymbol{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2$$

上的细金属线的质心和对坐标轴的惯性矩，假设金属线的密度为 $\delta = 1/(t+1)$.

**计算机探究**

在习题 33 ~ 36 中，用一种 CAS (计算机代数系统) 执行求线积分的下述处理步骤：

(**a**) 求对于路径

$$\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$$

的弧长元 $\mathrm{d}s = |\boldsymbol{v}(t)|\mathrm{d}t$.

(**b**) 把被积函数

$$f(g(t),h(t),k(t))\,|\boldsymbol{v}(t)|$$

表示成参数 $t$ 的函数.

(**c**) 用正文中的公式 (2) 求积分 $\int_C f\,\mathrm{d}s$.

**33.** $f(x,y,z) = \sqrt{1+30x^2+10y}$;

$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + 3t^2\boldsymbol{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 2$.

**34.** $f(x,y,z) = \sqrt{1+x^3+5y^3}$;

$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + \frac{1}{3}t^2\boldsymbol{j} + \sqrt{t}\boldsymbol{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 2$.

**35.** $f(x,y,z) = x\sqrt{y} - 3z^2$;

$\boldsymbol{r}(t) = (\cos 2t)\boldsymbol{i} + (\sin 2t)\boldsymbol{j} + 5t\boldsymbol{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

**36.** $f(x,y,z) = \left(1 + \frac{9}{4}z^{1/3}\right)^{1/4}$;

$\boldsymbol{r}(t) = (\cos 2t)\boldsymbol{i} + (\sin 2t)\boldsymbol{j} + t^{5/2}\boldsymbol{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

## 14.2 向量场、功、环流和通量

引力和电力都具有方向和大小. 它们由在它们的作用范围内每一点的向量表示，这些向量产生一个向量场. 在这一节，我们讲述如何用在向量场上的线积分计算移动物体通过这种场所作的功. 我们还要讨论速度场，例如表示流体在其流动区域内的速度的向量场. 可以用线积分求流体在流动区域内沿曲线或者越过曲线流动的速率.

### 14.2.1 向量场

假定在平面或者空间区域内充满流动的流体，像空气或水. 流体由大量的质点组成，在任意瞬间，一个质点具有速度 $\boldsymbol{v}$. 在给定的(同一)时刻，在不同位置的这些点的速度可能不同. 我们可以想象在流体的每个点上附着一个速度向量，代表在那个点的质点的速度. 这样一种流体的流动是向量场的例子. 图 14.6 显示空气流过风洞中的翼面产生的速度向量场. 图 14.7 显示水通过一段缩小的渠道流动时沿流线的速度向量的向量场. 向量场也同像重力这样的力有关(见图 14.8)，以及同磁力场、电场和单纯数学上的场有关.

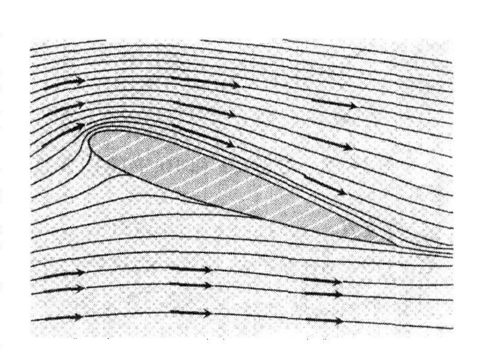


图 14.6 风洞中绕翼面流过的空气的速度向量

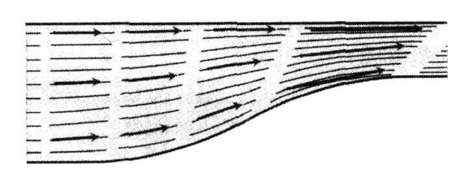


图 14.7 在缩小的渠道中的流线，水在渠道的狭窄地段加速且速度向量增加长度

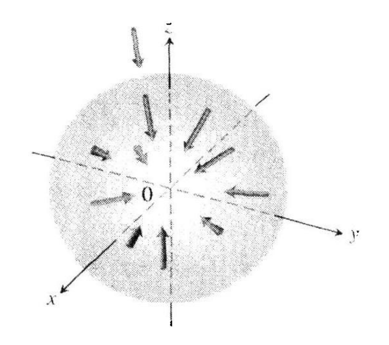



图 14.8 重力场中的向量指向提供场源的质心

一般说来，**向量场**是一个函数，它对其定义域中的每个点赋予一个向量. 在空间中的三维定义域上的向量场可能具有像

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\boldsymbol{i} + N(x,y,z)\boldsymbol{j} + P(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

这样的公式. 如果**分量函数** $M$, $N$, $P$ 是连续函数，向量场是**连续的**；如果每个分量函数是可微函数，向量场是**可微的**. 二维向量场的公式可能像

$$\boldsymbol{F}(x,y) = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$$

在第 11 章我们遇见过另一类向量场. 空间中一条曲线的切向量 $\boldsymbol{T}$ 和法向量 $\boldsymbol{N}$ 构成沿曲线的两个向量场. 沿曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 它们可能具有像

$$\boldsymbol{v}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$$

这样的公式.

如果在纯量函数 $f(x,y,z)$ 的层曲面的每一点附着函数的梯度向量 $\nabla f$，我们得到曲面上的三维向量场. 如果在流动流体的每个点附着一个速度向量，就有定义在空间区域上的三维向量场. 这些场以及其他的场在图 14.9 ~ 图 14.14 中说明. 为了画出这种场的草图，挑选出具有代表性的区域点

集，再画出附着在它们上面的向量. 画出的箭头以其尾端而不是头部附着到求向量函数的点上.

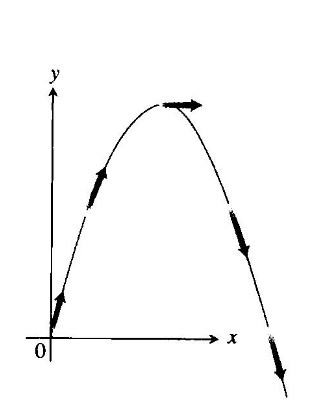



图 14.9 抛射体运动的速度向量 $\boldsymbol{v}(t)$ 构成沿轨道的向量场

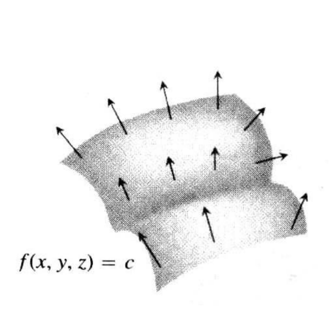



图 14.10 曲面 $f(x,y,z)=c$ 上的梯度向量 $\nabla f$ 的向量场

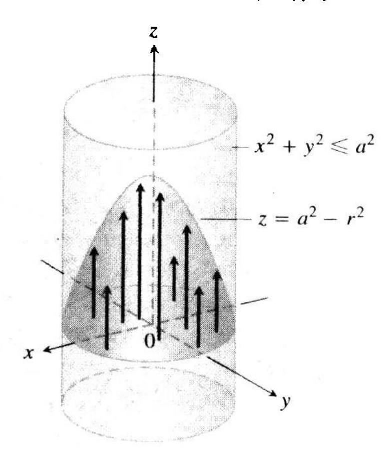



图 14.11 在长圆柱形管道内流动流体的速度向量 $\boldsymbol{v}=(a^2-r^2)\boldsymbol{k}$ 的尾端在 $xy$ 平面内，头部在抛物面 $z=a^2-r^2$ 上

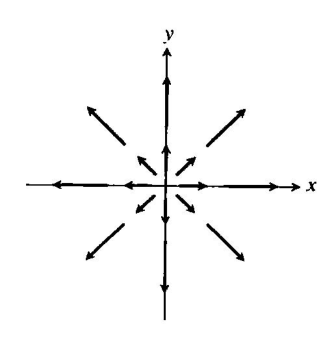



图 14.12 $xy$ 平面内点的位置向量的径向场 $\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，注意，习惯上把箭头的尾端而不是头部画在求 $\boldsymbol{F}$ 的点

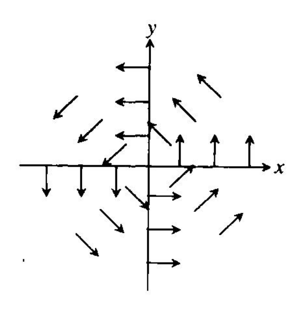



图 14.13 $xy$ 平面内单位向量

$$\boldsymbol{F}=(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j})/(x^2+y^2)^{1/2}$$

的环形场或者"旋转"场，这个场在原点无定义

### 14.2.2 梯度场

可微纯量值函数在一点的梯度向量给出函数最大增加的方向. 一种重要的向量场是由函数的全部梯度向量构成的场.

**定义** 可微函数 $f(x,y,z)$ 的**梯度场**是由梯度向量

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

构成的场.

**例 1** 假定在空间区域内每一点 $(x,y,z)$ 的温度由

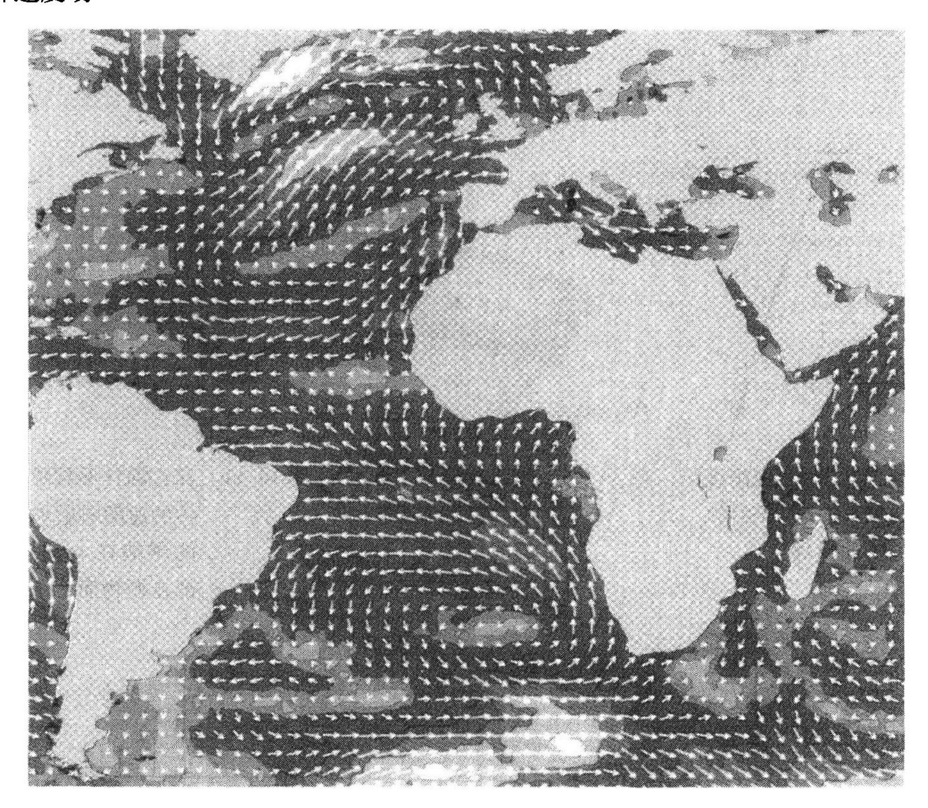
$$T=100-x^2-y^2-z^2$$

给出，并且 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 定义为 $T$ 的梯度. 求向量场 $\boldsymbol{F}$.

**解** 梯度场 $\boldsymbol{F}$ 是场 $\boldsymbol{F}=\nabla T=-2x\boldsymbol{i}-2y\boldsymbol{j}-2z\boldsymbol{k}$. ■

在空间中的每一点，例 1 中的向量场 $\boldsymbol{F}$ 给出温度增加最快的方向. 它既不是一种力场，也

不是一种速度场.



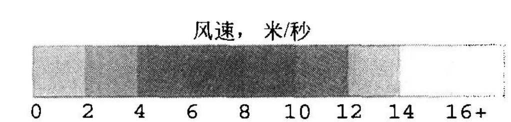



图 14.14 美国宇航局的海事卫星用雷达从世界洋面上获取的 3 500 000 处风速测量数据：箭头显示风向；它们的长度和颜色等值线指示风速(注意格陵兰岛南部的强风暴)

### 14.2.3 力沿空间曲线作的功

假定向量场 $\boldsymbol{F}=M(x,y,z)\boldsymbol{i}+N(x,y,z)\boldsymbol{j}+P(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 代表空间中遍布于一个区域的力(可能是重力或一种电磁力)，并且

$$\boldsymbol{r}(t)=g(t)\boldsymbol{i}+h(t)\boldsymbol{j}+k(t)\boldsymbol{k},\quad a\leqslant t\leqslant b$$

是区域内的光滑曲线. 由力沿曲线移动物体作功的公式的建立,受到我们在第 6 章推导由力沿直线移动物体作功的公式的同样推理的启发,那里大小为 $F(x)$ 朝向沿 $x$ 轴上一个区间的连续力所作功的公式为 $W=\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$. 我们把曲线划分成小段,应用(恒力)×(距离)求功公式逼近力在每小段曲线上所作的功,再对结果求和逼近力在整个曲线上所作的功,并且用逼近和在划分的曲线段越来越小和数目越来多时的极限计算这个功. 为了求这个取极限的积分应有的准确值,我们按通常的方式划分参数区间 $[a,b]$,并且在每个子区间 $[t_k,t_{k+1}]$ 内取一点 $c_k$. $[a,b]$ 的划分确定(我们说"导出")曲线的划分,其中 $P_k$ 是位置向量 $\boldsymbol{r}(t_k)$ 的顶端,$\Delta s_k$ 是曲线段 $P_kP_{k+1}$ 的长度(见图 14.15).

如果 $\boldsymbol{F}_k$ 表示力场 $\boldsymbol{F}$ 在曲线上同 $t=c_k$ 对应的点的值，$\boldsymbol{T}_k$ 表示曲线在这个点的单位切向量，

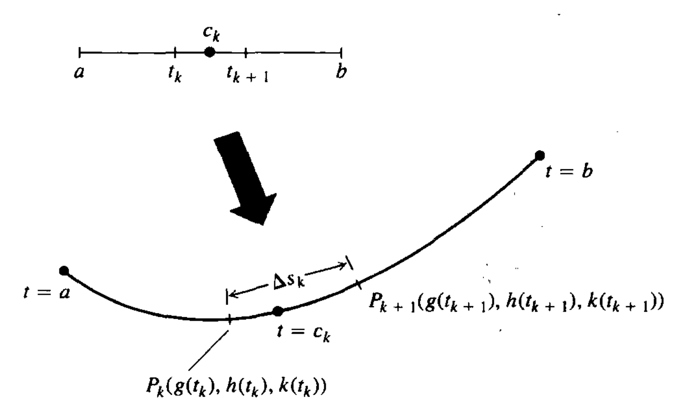



图 14.15 $[a,b]$ 的每个划分导出曲线 $\boldsymbol{r}(t)=g(t)\boldsymbol{i}+h(t)\boldsymbol{j}+k(t)\boldsymbol{k}$ 的一个划分

那么 $\boldsymbol{F}_k\cdot\boldsymbol{T}_k$ 是 $t=c_k$ 时 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{T}$ 方向的纯量分量(见图 14.16). 由 $\boldsymbol{F}$ 沿曲线段 $P_kP_{k+1}$ 作的功近似等于

$$(\text{力在运动方向的分量})\times(\text{移动的距离})=\boldsymbol{F}_k\cdot\boldsymbol{T}_k\Delta s_k$$

力 $\boldsymbol{F}$ 沿曲线从 $t=a$ 到 $t=b$ 移动物体所做的功近似等于

$$\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{F}_k\cdot\boldsymbol{T}_k\Delta s_k$$

当$[a,b]$的划分的范数趋近零时，曲线的导出划分的范数趋近零而这些和趋近线积分

$$\int_{t=a}^{t=b}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\mathrm{d}s$$

**定义** 由力 $\boldsymbol{F}=M\boldsymbol{i}+N\boldsymbol{j}+P\boldsymbol{k}$ 在光滑曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 上从 $t=a$ 到 $t=b$ 移动物体作的功为

$$W=\int_{t=a}^{t=b}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\mathrm{d}s \tag{1}$$

用这个积分计算的数值的符号取决于当 $t$ 增加时曲线遍历的方向. 如果颠倒运动的方向，也就颠倒 $\boldsymbol{T}$ 的方向，并且改变 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}$ 及其积分的符号(见图 14.17).

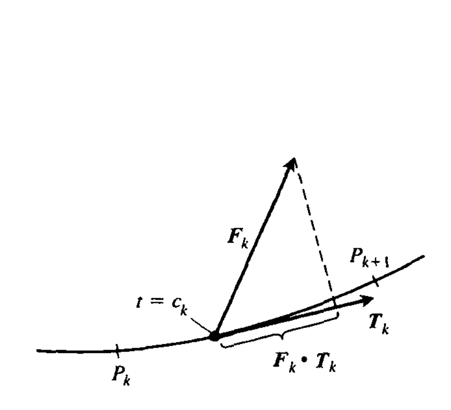



图 14.16 放大图 14.15 中的曲线段 $P_kP_{k+1}$，显示曲线上在 $t=c_k$ 的点的力和单位切向量

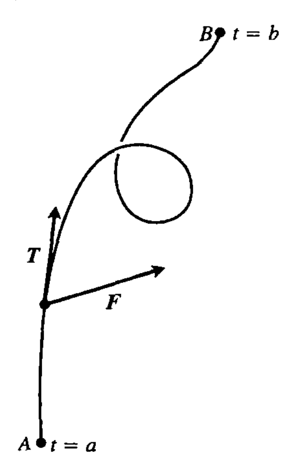



图 14.17 由力 $\boldsymbol{F}$ 作的功是纯量分量 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}$ 在光滑曲线上从 $A$ 到 $B$ 的线积分

表 14.2 显示公式(1)中功积分的 6 种表示形式. 虽然公式不一样，但是它们计算同样的功. 在表中，

$$\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

是光滑曲线，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \mathrm{d}g\,\boldsymbol{i} + \mathrm{d}h\,\boldsymbol{j} + \mathrm{d}k\,\boldsymbol{k}$$

是它的微分.

**表 14.2　表示功积分的 6 种不同形式**

| 功 $W$ | 说明 |
|---|---|
| $\int_{t=a}^{t=b} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\,\mathrm{d}s$ | 定义 |
| $\int_{t=a}^{t=b} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ | 紧凑的微分形式 |
| $\int_a^b \boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$ | 扩展到包含 $\mathrm{d}t$;强调参数 $t$ 和速度向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ |
| $\int_a^b \left(M\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} + N\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + P\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t$ | 强调 $\boldsymbol{F}$ 的分量函数 |
| $\int_a^b \left(M\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + N\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + P\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t$ | 简化 $\boldsymbol{r}$ 的分量 |
| $\int_a^b M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}z$ | 消去 $\mathrm{d}t$;最常用形式 |

为了求沿光滑曲线的功积分，采取下面三个步骤：

(1)求力 $\boldsymbol{F}$ 在曲线上作为参数 $t$ 的函数.

(2)求 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$.

(3)求 $\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ 从 $t=a$ 到 $t=b$ 的积分.

**例 2**　求由力

$$\boldsymbol{F} = (y - x^2)\boldsymbol{i} + (z - y^2)\boldsymbol{j} + (x - z^2)\boldsymbol{k}$$

在曲线

$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k},\quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

上从点(0,0,0)到(1,1,1)作的功(见图 14.18).

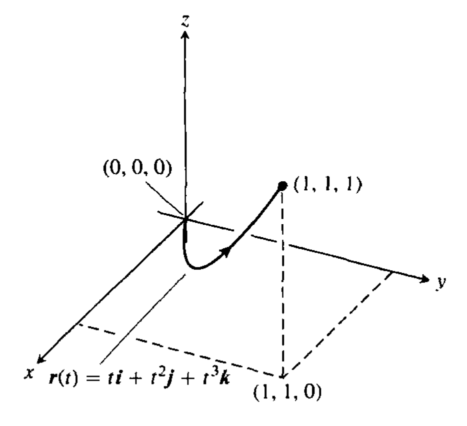



图 14.18　例 2 中的曲线

**解**　首先求 $\boldsymbol{F}$ 在曲线上作为 $t$ 的函数：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= (y - x^2)\boldsymbol{i} + (z - y^2)\boldsymbol{j} + (x - z^2)\boldsymbol{k}\\ &= \underbrace{(t^2 - t^2)}_{0}\boldsymbol{i} + (t^3 - t^4)\boldsymbol{j} + (t - t^6)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

然后求 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + 3t^2\boldsymbol{k}$$

最后求 $\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$，并且求从 $t=0$ 到 $t=1$ 的积分：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= [(t^3 - t^4)\boldsymbol{j} + (t - t^6)\boldsymbol{k}]\cdot(\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + 3t^2\boldsymbol{k})\\ &= (t^3 - t^4)(2t) + (t - t^6)(3t^2) = 2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8\end{aligned}$$

所以

$$\text{功} = \int_0^1 (2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{6}t^6 + \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{9}t^9\right]_0^1 = \frac{29}{60}$$ ■

### 14.2.4 速度场的流量积分和环流

假定 $\boldsymbol{F}$ 代表流体流过一个空间区域(例如潮汐海湾或者水力发电机的涡轮腔)的速度场. 在这些环境下, $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}$ 沿区域内曲线的积分给出流体沿曲线的流量.

> **定义** 如果 $\boldsymbol{r}(t)$ 是连续速度场 $\boldsymbol{F}$ 的区域内的光滑曲线, 流体沿曲线从 $t=a$ 到 $t=b$ 的**流量**为
> $$\text{流量} = \int_a^b \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\,\mathrm{d}s \qquad (2)$$
> 这种情形的积分称为**流量积分**. 如果曲线是闭环, 流量称为围绕曲线的**环流**.

求流量积分的方法和求功积分的方法相同.

**例 3** 设流体的速度场为 $\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k}$. 求沿螺旋线

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\quad 0\leqslant t\leqslant \pi/2$$

的流量.

**解** 先求曲线上的 $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k} = (\cos t)\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}+(\sin t)\boldsymbol{k}\quad (\text{在 } \boldsymbol{r}(t) \text{ 上}, x=\cos t,\ z=t,\ y=\sin t)$$

然后求 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (-\sin t)\boldsymbol{i}+(\cos t)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

最后求 $\boldsymbol{F}\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t)$ 从 $t=0$ 到 $t=\frac{\pi}{2}$ 的积分:

$$\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (\cos t)(-\sin t)+(t)(\cos t)+(\sin t)(1) = -\sin t\cos t+t\cos t+\sin t$$

所以,

$$\text{流量} = \int_{t=a}^{t=b}\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}(-\sin t\cos t+t\cos t+\sin t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \left[\frac{\cos^2 t}{2}+t\sin t\right]_0^{\pi/2} = \left(0+\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+0\right) = \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$$ ■

**例 4** 求场

$$\boldsymbol{F} = (x-y)\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$$

围绕圆

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j},\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

的环流.

**解** 在圆上,

$$\boldsymbol{F} = (x-y)\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j} = (\cos t-\sin t)\boldsymbol{i}+(\cos t)\boldsymbol{j}$$
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (-\sin t)\boldsymbol{i}+(\cos t)\boldsymbol{j}$$

于是

$$\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -\sin t\cos t+\underbrace{\sin^2 t+\cos^2 t}_{1}$$

给出

$$\text{环流} = \int_0^{2\pi}\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}(1-\sin t\cos t)\,\mathrm{d}t = \left[t-\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi$$ ■

### 14.2.5 穿过平面曲线的通量

为了求流体流进或者流出 $xy$ 平面内由光滑曲线 $C$ 包围的区域的速率, 我们计算流体的速度

场在曲线指向外的法向量方向的纯量分量 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$ 在 $C$ 上的线积分. 这个积分值是 $\boldsymbol{F}$ 穿过 $C$ 的通量. 通量在拉丁文中就是流量，但是许多通量的计算完全不涉及运动. 例如，如果 $\boldsymbol{F}$ 是电场或者磁场，$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$的积分仍然称为场穿过曲线 $C$ 的通量.

**定义** 如果 $C$ 是 $xy$ 平面内连续向量场 $\boldsymbol{F}=M(x,y)\boldsymbol{i}+N(x,y)\boldsymbol{j}$ 区域内的光滑闭曲线，$\boldsymbol{n}$ 是 $C$ 上指向外的单位法向量，$\boldsymbol{F}$ 穿过 $C$ 的通量公式为

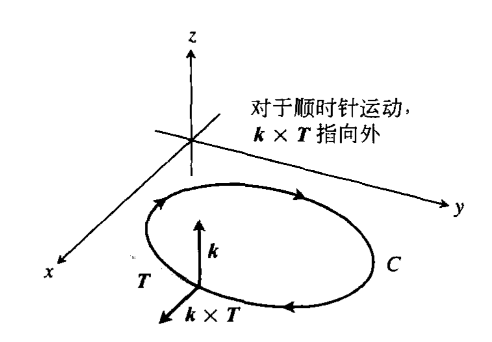
$$\boldsymbol{F}\text{ 穿过 }C\text{ 的通量 } = \int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s \tag{3}$$

请注意通量和环流之间的区别. $\boldsymbol{F}$ 穿过 $C$ 的通量是 $\boldsymbol{F}$ 在向外法线方向的纯量分量 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$ 对弧长的线积分. $\boldsymbol{F}$ 围绕 $C$ 的环流是 $\boldsymbol{F}$ 在单位切向量方向的纯量分量 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}$ 对弧长的积分. 通量是 $\boldsymbol{F}$ 的法线分量的积分；环流是 $\boldsymbol{F}$ 的切线分量的积分.

为了求公式(3)中的积分，从求曲线的光滑参数表示

$$x=g(t),\ y=h(t),\ a\leqslant t\leqslant b$$

开始，这个参数方程当 $t$ 从 $a$ 增加到 $b$ 时恰好描绘曲线 $C$ 一次. 我们可以用曲线的单位切向量 $\boldsymbol{T}$ 同向量 $\boldsymbol{k}$ 的向量积求单位向外法向量 $\boldsymbol{n}$. 但是在 $\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{T}$ 中应选择哪一种次序的向量积? 哪一种向量积是指向外的? 这取决于当 $t$ 增加时遍历 $C$ 的方式. 如果按顺时针方向经过 $C$，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{T}$ 是指向外的；如果按反时针方向经过 $C$，$\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{k}$ 是指向外的(见图 14.19). 通常选择 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{k}$，这是假定经过 $C$ 时按反时针方向运动的选择. 这样一来，尽管在公式(3)的通量定义中弧长积分的值不依赖于遍历 $C$ 的方式，但是我们在推导求公式(3)的积分公式时假定按反时针方向运动.



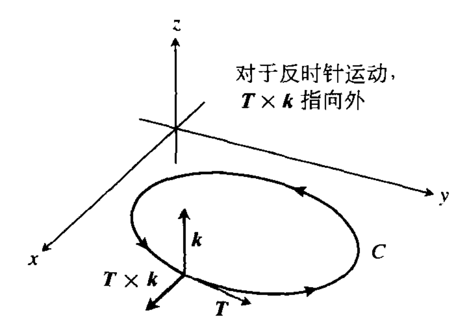




图 14.19 为了对 $xy$ 平面内当 $t$ 增加时按反时针方向遍历的光滑曲线 $C$ 求指向外的单位法向量，我们取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{k}$；对于按顺时针方向的运动，取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{T}$

用分量表示，

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{k}=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}\right)\times\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i}-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}$$

如果 $\boldsymbol{F}=M(x,y)\boldsymbol{i}+N(x,y)\boldsymbol{j}$，那么

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}=M(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-N(x,y)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$$

因此，

$$\int_C\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s=\int_C\left(M\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-N\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s=\oint_C M\mathrm{d}y-N\mathrm{d}x$$

我们在上面的积分号上加一个小的有向圆圈○，作为按反时针方向围绕闭曲线 $C$ 积分的标记. 为了求这个积分，用 $t$ 表示 $M$，$\mathrm{d}y$，$N$ 和 $\mathrm{d}x$ 并且从 $t=a$ 到 $t=b$ 积分. 我们在求通量时无需知道 $\boldsymbol{n}$ 或者 $\mathrm{d}s$.

**计算穿过 $xy$ 平面内光滑闭曲线的通量**

$$F \text{ 的通量} = Mi + Nj \text{ 穿过 } C \text{ 的通量} = \oint_C M\,\mathrm{d}y - N\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

可以从任意光滑曲线的参数表示 $x = g(t)$，$y = h(t)$，$a \leqslant t \leqslant b$ 求这个积分，这个参数表示在 $t$ 从 $a$ 增加到 $b$ 时恰好按反时针方向描绘曲线 $C$ 一次.

**例 5** 求 $\boldsymbol{F} = (x-y)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$ 通过 $xy$ 平面内圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的通量.

**解** 参数表示 $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j}$，$a \leqslant t \leqslant b$ 恰好按反时针方向描绘这个圆一次. 因此，可以在公式(4)中用这个参数表示. 从

$$M = x - y = \cos t - \sin t, \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}(\sin t) = \cos t\,\mathrm{d}t$$

$$N = x = \cos t, \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}(\cos t) = -\sin t\,\mathrm{d}t$$

求出

$$\text{通量} = \int_C M\,\mathrm{d}y - N\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin t\cos t + \cos t\sin t)\,\mathrm{d}t \quad (\text{公式}(4))$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

$\boldsymbol{F}$ 穿过圆的通量为 $\pi$. 由于答案是正数，穿过曲线的净流量是向外的. 向内的净流量应由取负值的通量给出. ■

## 习题 14.2

在习题 1 ~ 4 中，求函数的梯度场.

1. $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$.
2. $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
3. $g(x,y,z) = \mathrm{e}^z - \ln(x^2 + y^2)$.
4. $g(x,y,z) = xy + yz + xz$.
5. 给出 $xy$ 平面内具有如下特性的向量场公式 $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$：$\boldsymbol{F}$ 指向原点，其大小同从 $(x,y)$ 到原点的距离平方成反比.（这个场在原点无定义.）
6. 给出 $xy$ 平面内具有如下特征的向量场公式 $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$：在点 $(0,0)$，$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$；在其他任何点 $(a,b)$，$\boldsymbol{F}$ 同圆 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 相切并且指向顺时针方向，大小 $|\boldsymbol{F}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

在习题 7 ~ 12 中，求由力 $\boldsymbol{F}$ 在从点 $(0,0,0)$ 到 $(1,1,1)$ 的下列每条路径上作的功(见图 14.20)：

(a) 直线路径 $C_1$：$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$，$0 \leqslant t \leqslant 1$.

(b) 曲线路径 $C_2$：$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^4\boldsymbol{k}$，$0 \leqslant t \leqslant 1$.

(c) 从点 $(0,0,0)$ 到 $(1,1,0)$ 的线段 $C_3$ 跟随从点 $(1,1,0)$ 到 $(1,1,1)$ 的线段 $C_4$ 的路径 $C_3 \cup C_4$.

7. $\boldsymbol{F} = 3y\boldsymbol{i} + 2x\boldsymbol{j} + 4z\boldsymbol{k}$.
8. $\boldsymbol{F} = [1/(x^2+1)]\boldsymbol{j}$.
9. $\boldsymbol{F} = \sqrt{z}\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} + \sqrt{y}\boldsymbol{k}$.
10. $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$.
11. $\boldsymbol{F} = (3x^2 - 3x)\boldsymbol{i} + 3z\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.
12. $\boldsymbol{F} = (y+z)\boldsymbol{i} + (z+x)\boldsymbol{j} + (x+y)\boldsymbol{k}$.

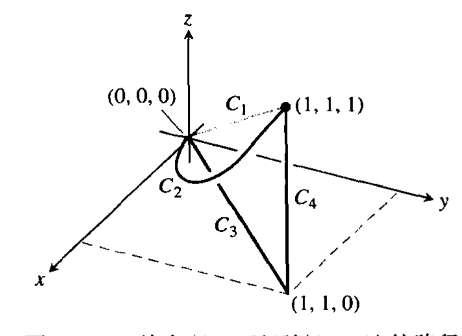



图 14.20 从点 $(0,0,0)$ 到 $(1,1,1)$ 的路径

在习题 13 ~ 16 中，求由力 $\boldsymbol{F}$ 在 $t$ 增加方向在曲线上作的功.

13. $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - yz\boldsymbol{k}$；$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$，$0 \leqslant t \leqslant 1$.
14. $\boldsymbol{F} = 2y\boldsymbol{i} + 3x\boldsymbol{j} + (x+y)\boldsymbol{k}$；
    $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + (t/6)\boldsymbol{k}$，$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.
15. $\boldsymbol{F} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$；
    $\boldsymbol{r}(t) = (\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$，$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.
16. $\boldsymbol{F} = 6z\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + 12x\boldsymbol{k}$；
    $\boldsymbol{r}(t) = (\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j} + (t/6)\boldsymbol{k}$，$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.
17. 求沿曲线 $y = x^2$ 从点 $(-1,1)$ 到 $(2,4)$ 的积分 $\int_C xy\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y$.
18. 求依反时针方向环绕顶点为 $(0,0)$，$(1,0)$，$(0,1)$ 的三角形的积分 $\int_C (x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y$.

**19.** 对于向量场$\boldsymbol{F}=x^2\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}$求沿曲线$x=y^2$从点(4,2)到(1,-1)的积分$\int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\,\mathrm{d}s$.

**20.** 对于向量场$\boldsymbol{F}=y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}$求依反时针方向沿单位圆从点(1,0)到(0,1)的积分$\int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$.

**21. 功** 求由力$\boldsymbol{F}=xy\boldsymbol{i}+(y-x)\boldsymbol{j}$在直线上从点(1,1)到(2,3)作的功.

**22. 功** 求由$f(x,y)=(x+y)^2$的梯度在依反时针方向环绕从点(2,0)到它自身的圆$x^2+y^2=4$上作的功.

**23. 环流与通量** 求场

$$\boldsymbol{F}_1=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}\text{ 和 }\boldsymbol{F}_2=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$$

环绕和穿过下列每条曲线的环流和通量:

(a) 圆$\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j},\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$;

(b) 椭圆$\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(4\sin t)\boldsymbol{j},\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

**24. 穿过圆的通量** 求场

$$\boldsymbol{F}_1=2x\boldsymbol{i}-3y\boldsymbol{j}\text{ 和 }\boldsymbol{F}_2=2x\boldsymbol{i}+(x-y)\boldsymbol{j}$$

穿过圆

$$\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t)\boldsymbol{i}+(a\sin t)\boldsymbol{j},\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

的通量.

在习题25~28中,求场$\boldsymbol{F}$环绕和穿过闭半圆路径的环流和通量,这条路径由半圆拱

$$\boldsymbol{r}_1(t)=(a\cos t)\boldsymbol{i}+(a\sin t)\boldsymbol{j},\ 0\leqslant t\leqslant\pi$$

和跟随的线段

$$\boldsymbol{r}_2(t)=t\boldsymbol{i},\ -a\leqslant t\leqslant a$$

组成.

**25.** $\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$. **26.** $\boldsymbol{F}=x^2\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}$.

**27.** $\boldsymbol{F}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$. **28.** $\boldsymbol{F}=-y^2\boldsymbol{i}+x^2\boldsymbol{j}$.

**29. 流量积分** 求$xy$平面内速度场$\boldsymbol{F}=(x+y)\boldsymbol{i}-(x^2+y^2)\boldsymbol{j}$沿下列每条路径从点(1,0)到(-1,0)的流量:

(a) 圆$x^2+y^2=1$的上半部分;

(b) 从点(1,0)到(-1,0)的线段;

(c) 从点(1,0)到(0,-1)的线段跟随从点(0,-1)到(-1,0)的线段.

**30. 穿过三角形的通量** 求习题29中的场$\boldsymbol{F}$向外穿过顶点为(1,0),(0,1),(-1,0)的三角形的通量.

**31. 螺旋场** 绘制螺旋场

$$\boldsymbol{F}=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{i}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{j}$$

(参见图14.13)以及它在圆$x^2+y^2=4$上的典型点集的水平分量和垂直分量的图形.

**32. 径向场** 绘制径向场

$$\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$$

(参见图14.12)以及它在圆$x^2+y^2=1$上的典型点集的水平分量和垂直分量的图形.

**33. 切向量的场**

(a) 求$xy$平面内具有如下特性的场$\boldsymbol{G}=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$:在任何点$(a,b)\neq(0,0)$,$\boldsymbol{G}$是大小为$\sqrt{a^2+b^2}$和同圆$x^2+y^2=a^2+b^2$相切的单位向量,并且指向反时针方向.(这个场在(0,0)无定义.)

(b) $\boldsymbol{G}$同图14.13的螺旋场$\boldsymbol{F}$有何关系?

**34. 切向量的场**

(a) 求$xy$平面内具有如下特性的场$\boldsymbol{G}=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$:在任何点$(a,b)\neq(0,0)$,$\boldsymbol{G}$是同圆$x^2+y^2=a^2+b^2$相切的单位向量,并且指向顺时针方向.

(b) $\boldsymbol{G}$同图14.13中的螺旋场$\boldsymbol{F}$有何关系?

**35. 指向原点的单位向量场** 求$xy$平面内具有如下特性的场$\boldsymbol{F}=M(x,y)\boldsymbol{i}+N(x,y)\boldsymbol{j}$:在每个点$(x,y)\neq(0,0)$,$\boldsymbol{F}$是指向原点的单位向量.(这个场在(0,0)无定义.)

**36. 双"中心"场** 求$xy$平面内具有如下特性的场$\boldsymbol{F}=M(x,y)\boldsymbol{i}+N(x,y)\boldsymbol{j}$:在每个点$(x,y)\neq(0,0)$,$\boldsymbol{F}$指向原点,并且(a) $|\boldsymbol{F}|$是从点$(x,y)$到原点的距离,(b) $|\boldsymbol{F}|$同从$(x,y)$到原点的距离成反比.(这个场在(0,0)无定义.)

在习题37~40中,$\boldsymbol{F}$是流体流过一个空间区域的速度场.求沿给定曲线在$t$增加方向的流量.

**37.** $\boldsymbol{F}=-4xy\boldsymbol{i}+8y\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\ 0\leqslant t\leqslant 2$.

**38.** $\boldsymbol{F}=x^2\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}+y^2\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{r}(t)=3t\boldsymbol{j}+4t\boldsymbol{k},\ 0\leqslant t\leqslant 1$.

**39.** $\boldsymbol{F}=(x-z)\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{k}$;

$\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{k},\ 0\leqslant t\leqslant\pi$.

**40.** $\boldsymbol{F}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$;

$\boldsymbol{r}(t)=(-2\cos t)\boldsymbol{i}+(2\sin t)\boldsymbol{j}+2t\boldsymbol{k}$,

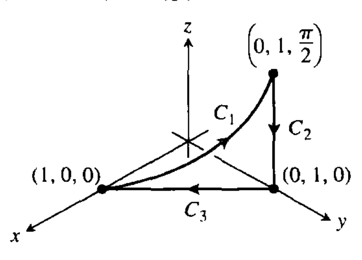
$0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

**41. 环流** 求$\boldsymbol{F}=2x\boldsymbol{i}+2z\boldsymbol{j}+2y\boldsymbol{k}$环绕由下列三条曲线组成的在$t$增加方向经过的闭路径的环流:

$C_1$: $\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k},\ 0\leqslant t\leqslant\pi/2$

$C_2$: $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{j}+(\pi/2)(1-t)\boldsymbol{k},\ 0\leqslant t\leqslant 1$

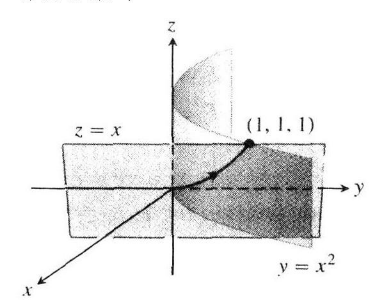
$C_3$: $\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i}+(1-t)\boldsymbol{j},\ 0\leqslant t\leqslant 1$




**42. 零环流** 令$C$是平面$2x+3y-z=0$同圆柱面$x^2+y^2=12$相交的椭圆.不用求线积分,直接证明场$\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$围绕$C$在两个方向上的环流都是零.

**43. 沿曲线的流量** 设$\boldsymbol{F}=xy\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}-yz\boldsymbol{k}$是空间中流

体的速度场. 求沿柱面 $y=x^2$ 和平面 $z=x$ 的交线从点(0,0,0)到(1,1,1)的流量. (提示: 用 $t=x$ 作为参数.)




**44. 梯度场的流量** 求场 $\boldsymbol{F}=\nabla(xy^2z^3)$ 沿下列路径的流量:

(a) 沿从上方看的顺时针方向围绕习题 42 中的曲线一圈.

(b) 沿从点(1,1,1)到(2,1,-1)的线段.

**45. 功与面积** 假定 $f(t)$ 是区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的可微正值函数. 令 $C$ 是路径 $\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i}+f(t)\boldsymbol{j}$, $a\leqslant t\leqslant b$, $\boldsymbol{F}=y\boldsymbol{i}$. 功积分

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

的值同以 $t$ 轴和 $f$ 的图形以及直线 $t=a$ 和 $t=b$ 为界的区域的面积之间存在任何关系吗?

**46. 由大小为常数的径向力作的功** 质点沿光滑曲线 $y=f(x)$ 从点 $(a,f(a))$ 到 $(b,f(b))$ 运动. 使质点运动的力的大小为常数 $k$, 并且总是指向离开原点的方向. 证明这个力所作的功为

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\mathrm{d}s=k[(b^2+(f(b))^2)^{1/2}-(a^2+(f(a))^2)^{1/2}]$$

**计算机探究**

在习题47 ~ 52 中,用一种 CAS(计算机代数系统) 执行下列处理步骤,求由力 $\boldsymbol{F}$ 在给定路径上作的功:

(a) 对于路径 $\boldsymbol{r}(t)=g(t)\boldsymbol{i}+h(t)\boldsymbol{j}+k(t)\boldsymbol{k}$ 求 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$;

(b) 求沿这条路径的力 $\boldsymbol{F}$;

(c) 求积分 $\int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$.

**47.** $\boldsymbol{F}=xy^6\boldsymbol{i}+3x(xy^5+2)\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{r}(t)=(2\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j}$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

**48.** $\boldsymbol{F}=\dfrac{3}{1+x^2}\boldsymbol{i}+\dfrac{2}{1+y^2}\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j}$, $0\leqslant t\leqslant\pi$.

**49.** $\boldsymbol{F}=(y+yz\cos xyz)\boldsymbol{i}+(x^2+xz\cos xyz)\boldsymbol{j}+(z+xy\cos xyz)\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{r}(t)=(2\cos t)\boldsymbol{i}+(3\sin t)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

**50.** $\boldsymbol{F}=2xy\boldsymbol{i}-y^2\boldsymbol{j}+ze^x\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{r}(t)=-t\boldsymbol{i}+\sqrt{t}\boldsymbol{j}+3t\boldsymbol{k}$, $1\leqslant t\leqslant 4$.

**51.** $\boldsymbol{F}=(2y+\sin x)\boldsymbol{i}+(z^2+(1/3)\cos y)\boldsymbol{j}+x^4\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{r}(t)=(\sin t)\boldsymbol{i}+(\cos t)\boldsymbol{j}+(\sin 2t)\boldsymbol{k}$, $-\pi/2\leqslant t\leqslant\pi/2$.

**52.** $\boldsymbol{F}=(x^2y)\boldsymbol{i}+\dfrac{1}{3}x^3\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j}+(2\sin^2 t-1)\boldsymbol{k}$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

## 14.3 路径独立性、势函数和守恒场

**重力场 $\boldsymbol{g}$** 是表示作用在置于场中物体上的重力的向量场. 在重力场中, 作用于质量为 $m$ 的物体上的重力由 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{g}$ 给定. 同样, **电场 $\boldsymbol{E}$** 是空间中的向量场, 表示作用在置于场中的带电质点的电力. 在电场中, 作用于带电 $q$ 的物体上的电力由 $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}$ 给定. 在重力场和电场中, 移动包含质量或者电荷的物体从一点到另外一点, 所作的功依赖于物体的初始位置和最终位置——同在两个位置之间所取的路径无关. 在这一节, 我们讨论具有这种性质的场以及同它们有关的功积分的计算.

### 14.3.1 路径独立性

如果 $A$ 和 $B$ 是空间中开区域 $D$ 内的两点,由在 $D$ 上定义的场 $\boldsymbol{F}$ 移动质点从 $A$ 到 $B$ 所作的功 $\int \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 通常依赖于所取的路径. 然而,对于某些特殊的场,功积分的值对于从 $A$ 到 $B$ 的所有路径是相同的.

> **定义** 令 $\boldsymbol{F}$ 是定义在空间中开区域 $D$ 上的场,并且假定对于 $D$ 中的任何两点 $A$ 和 $B$,移动质点从 $A$ 到 $B$ 的所有路径上作的功 $\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 是相同的. 那么积分 $\int \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 是**独立于路径 $D$ 的**,并且场 $\boldsymbol{F}$ 在 $D$ 上是**守恒的**.

守恒一词来源于物理学，在物理学中它是指在场中保持能量守恒原理.

在实际应用中通常满足的可微性条件下，我们将证明，$\boldsymbol{F}$ 是保守场，当且仅当它是一个纯量函数 $f$ 的梯度场，就是说，当且仅当对于某个 $f$ 有 $\boldsymbol{F}=\nabla f$. 在这种情况下，函数 $f$ 有一个特殊的名称.

> **定义** 如果 $\boldsymbol{F}$ 是定义在 $D$ 上的场，并且对于 $D$ 上的某个函数 $f$ 有 $\boldsymbol{F}=\nabla f$，那么 $f$ 称为 $\boldsymbol{F}$ 的**势函数**.

电势是一个纯量函数，它的梯度场是电场. 重力势是一个纯量函数，它的梯度场是重力场，等等. 我们将会看到，一旦求出一个场 $\boldsymbol{F}$ 的一个势函数 $f$，就能在 $\boldsymbol{F}$ 定义域上两点 $A$ 和 $B$ 之间的任何路径上求所有功积分，这种积分由公式

$$\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_A^B \nabla f\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=f(B)-f(A) \tag{1}$$

给出.

如果把多元函数的梯度 $\nabla f$ 想象成像一元函数的导数 $f'$ 那样的函数，那么可看出公式(1)是同微积分基本定理的公式

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$$

类似的向量微积分的公式.

守恒场还有其他重要特性. 例如，说 $\boldsymbol{F}$ 在 $D$ 上是守恒的，同说 $\boldsymbol{F}$ 围绕 $D$ 中每条闭合路径的积分为零等价. 为使公式(1)成立，关于曲线、场和定义域的某些条件必须得到满足. 下面我们来讨论这些条件.

### 14.3.2 关于曲线、向量场和定义域的假定

为了使下面的计算和推导的结果有效，对于考虑的曲线、曲面、定义域和向量场的性质必须作某些假定. 我们用定理陈述的方式给出这些假定，并且如果不另作说明，提出的假定也适用于例子和习题.

我们考虑的曲线是**分段光滑的**. 像在 11.1 节中讨论的那样，这种曲线由有限段光滑曲线首尾连接而成. 我们将要讨论的向量场 $\boldsymbol{F}$ 的分量具有连续的一阶偏导数.

我们考虑的定义域 $D$ 是空间中的开区域，所以 $D$ 中的每个点是完全位于 $D$ 内的某个开球的中心(参见 12.1 节). 我们还要假定 $D$ 是**连通的**. 对开区域而言，这意味着在 $D$ 中的任何两点可以用一条位于区域内的光滑曲线连接. 最后，假定 $D$ 是**单连通的**，这表示 $D$ 中的每个环可以在不脱离 $D$ 的情况下收缩到 $D$ 中的一点. 例如，平面在挖去一个圆盘后的二维区域就不是单连通的. 在这个平面中，围绕圆盘的环不能在不进入挖去圆盘所遗留“空洞”的情况下收缩到一点. 同样，如果在空间中挖去一根无限长的柱体，剩余的区域 $D$ 不是单连通的. 围绕柱体的曲线不能保留在区域 $D$ 的内部收缩到一点.

连通性和单连通性是不同的，每一种特性不蕴涵另外一种特性. 可以把连通区域想象成连成“一片”而单连通区域不带任何“有空洞的环”. 整个空间本身既是连通的也是单连通的. 图 14.21 说明某些这样的性质.

**注意** 如果我们提出的条件在应用环境中不成立，那么本章导出的某些结果可能无效. 特别是，本节后面给出的守恒场的分量检验法对于非单连通的定义域是无效的.

### 14.3.3 守恒场中的线积分

梯度场 $\boldsymbol{F}$ 是由微分纯量函数 $f$ 得到的. 一个同微积分的基本定理类似的定理给出求梯度场的

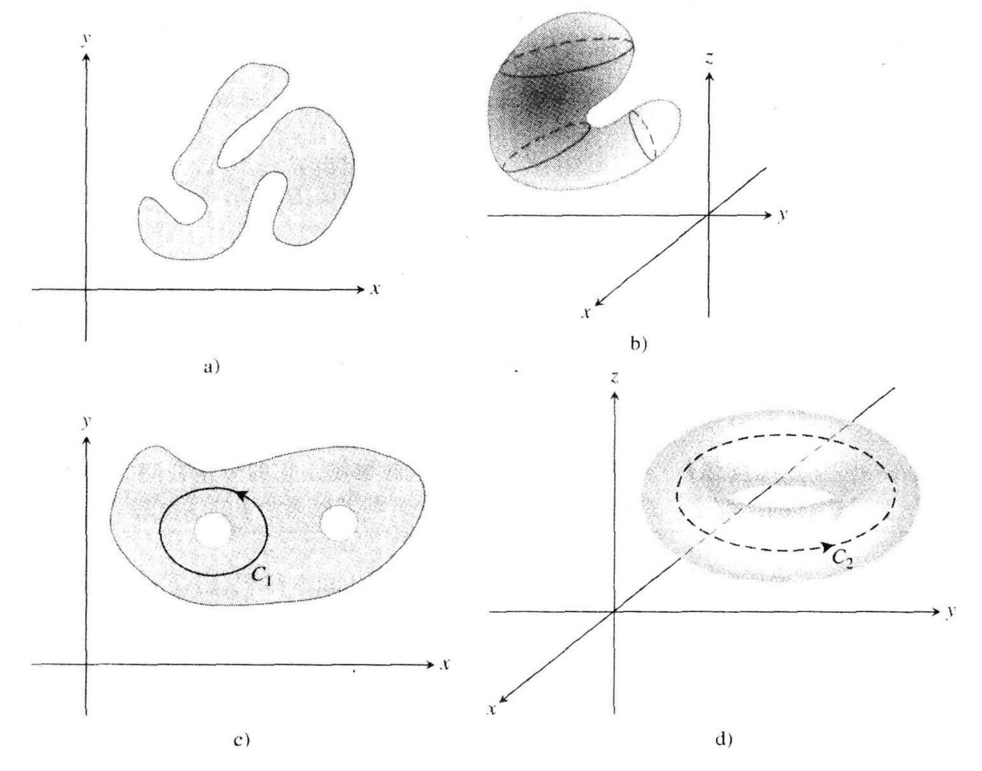



图 14.21　四种连通区域：在 a) 和 b) 中，区域是单连通的；在 c) 和 d) 中，区域不是单连通的，因为曲线 $C_1$ 和 $C_2$ 不能在包含它们的区域内部收缩到一点

线积分的一种方法.

> **定理 1（线积分基本定理）**　令 $C$ 是在平面内或者空间中连接点 $A$ 和 $B$ 的光滑曲线，并且由 $\boldsymbol{r}(t)$ 给出. 令 $f$ 是可微函数，具有在包含 $C$ 的定义域上连续的梯度向量 $\boldsymbol{F}=\nabla f$. 那么
>
> $$\int_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = f(B) - f(A)$$

像微积分的基本定理一样，定理 1 给出一种求线积分的方法，这种方法无需求黎曼和的极限，或者直接用 14.1 节的方法求线积分. 在证明定理 1 之前，先举一个例子.

**例 1**　假定向量场 $\boldsymbol{F}=\nabla f$ 是函数

$$f(x,y,z) = -\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

的梯度场. 求由 $\boldsymbol{F}$ 沿连接点 $(1,0,0)$ 和 $(0,0,2)$ 的光滑曲线 $C$ 移动质点所作的功.

**解**　不需要直接计算线积分. 应用定理 1，看出由 $\boldsymbol{F}$ 沿连接这两点的任何光滑曲线 $C$ 移动质点作的功是

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = f(0,0,2) - f(1,0,0) = -\frac{1}{4} - (-1) = -\frac{3}{4} \qquad \blacksquare$$

一颗行星具有的重力，以及同带电质点相关的电力，两者都以例 1 中给出的场 $\boldsymbol{F}$ 作为模型，其间相差一个依赖于测量单位的常量.

**定理 1 的证明** 假定 $A$ 和 $B$ 是区域 $D$ 中的两个点，$C$：$\boldsymbol{r}(t)=g(t)\boldsymbol{i}+h(t)\boldsymbol{j}+k(t)\boldsymbol{k}$，$a\leqslant t\leqslant b$ 是在 $D$ 中连接 $A$ 和 $B$ 的光滑曲线. 沿曲线 $C$，$f$ 是 $t$ 的可微函数，并且

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\quad(\text{关于 } x=g(t),\ y=h(t),\ z=k(t)\text{ 的链式法则})$$

$$=\nabla f\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\right)=\nabla f\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\quad(\text{因为 }\boldsymbol{F}=\nabla f)$$

因此，

$$\int_C\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{t=a}^{t=b}\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t=\int_a^b\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t=f(g(t),h(t),k(t))\Big]_a^b=f(B)-f(A)$$ ■

所以，从定理 1 看出，在知道函数 $f$ 后，梯度场 $\boldsymbol{F}=\nabla f$ 的线积分是直接计算的. 在自然界中出现的许多重要的向量场确实是梯度场. 从定理 1 推出的下述结果，说明任何守恒场都是这种类型的场. 所以，守恒场沿光滑曲线的线积分的值仅取决于曲线的两个端点.

> **定理 2（守恒场是梯度场）** 令 $\boldsymbol{F}=M\boldsymbol{i}+N\boldsymbol{j}+P\boldsymbol{k}$ 是向量场，它的分量在空间中整个一个开连通区域 $D$ 上是连续的. 那么，$\boldsymbol{F}$ 是守恒的当且仅当 $\boldsymbol{F}$ 是可微函数 $f$ 的梯度场 $\nabla f$.

定量 2 表明：$\boldsymbol{F}=\nabla f$，当且仅当对于区域 $D$ 中任何两点 $A$ 和 $B$ 线积分 $\int_C\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的值独立于 $D$ 中连接 $A$ 和 $B$ 的路径.

**定理 2 的证明** 如果 $\boldsymbol{F}$ 是梯度场，那么对于某个可微函数 $f$ 有 $\boldsymbol{F}=\nabla f$，而定理 1 证明 $\int_C\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=f(B)-f(A)$. 线积分的值不依赖于 $C$ 而仅取决于它的端点 $A$ 和 $B$. 所以线积分是独立于路径的，$\boldsymbol{F}$ 满足守恒场的定义.

另一方面，如果 $\boldsymbol{F}$ 是守恒的，我们可以在 $D$ 上定义一个纯量函数 $f$ 如下：在 $D$ 中挑选一点 $A$，并且设置 $f(A)=$ 常数 $k$. 然后定义 $f(B)$ 等于 $f(A)+\int_C\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，其中 $C$ 是从 $A$ 到 $B$ 的任意光滑路径. 注意 $f(B)$ 不依赖于 $C$ 的选择，因为 $\boldsymbol{F}$ 是守恒的. 在这种情况下可以证明 $\boldsymbol{F}=\nabla f$，但是我们在这里省略这个更高深的证明. ■

**例 2** 求由守恒场

$$\boldsymbol{F}=yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}=\nabla(xyz)$$

沿连接点 $A(-1,3,9)$ 和 $B(1,6,-4)$ 的任意光滑曲线所作的功.

**解** 取 $f(x,y,z)=xyz$，我们有

$$\begin{aligned}\int_A^B\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}&=\int_A^B\nabla f\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\quad(\boldsymbol{F}=\nabla f)\\&=f(B)-f(A)\quad(\text{定理 1})\\&=xyz\big|_{(1,6,-4)}-xyz\big|_{(-1,3,9)}=(1)(6)(-4)-(-1)(3)(9)\\&=-24+27=3\end{aligned}$$ ■

> **定理 3（守恒场的闭环性质）** 下面两个命题是等价的：
>
> (1) 围绕 $D$ 中的每个闭环 $\int\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0$.
>
> (2) 场 $\boldsymbol{F}$ 在 $D$ 上是守恒的.

**由 (1) 推导 (2) 的证明** 我们要证明，对于 $D$ 中的任意两点 $A$ 和 $B$，$\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 在从 $A$ 到 $B$ 的任意两条路径 $C_1$ 和 $C_2$ 上有相同的积分值. 我们改变 $C_2$ 的方向构成从 $B$ 到 $A$ 的路径 $-C_2$（见

图 14.22). 把 $C_1$ 和 $-C_2$ 合成一个闭环 $C$，由假设，

$$\int_{C_1}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}-\int_{C_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{C_1}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{-C_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{C}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0$$

因此，$\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 在 $C_1$ 和 $C_2$ 上的积分给出相同的值. 注意，线积分的定义表明，改变沿曲线的方向将改变线积分的符号.

**由(2)推导(1)的证明** 我们要证明，$\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 在任意闭环 $C$ 上的积分为零. 在 $C$ 上选取两点 $A$ 和 $B$，用它们把 $C$ 分成两段：$C_1$ 从 $A$ 到 $B$，后接 $C_2$ 从 $B$ 返回到 $A$(见图 14.23). 于是

$$\oint_{C}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{C_1}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{C_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{A}^{B}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}-\int_{A}^{B}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0$$ ■

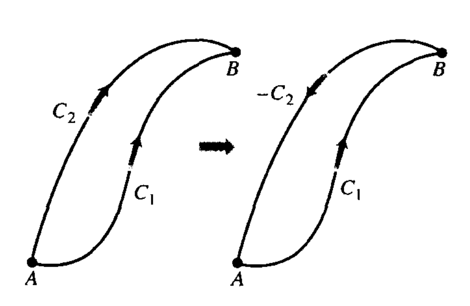



图 14.22 如果从 $A$ 到 $B$ 有两条路径，可以改变其中一条路径的方向构成一个环

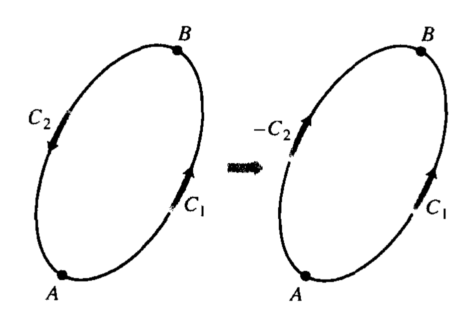



图 14.23 如果点 $A$ 和 $B$ 在一个环上，可以改变其中一段环的方向构成从 $A$ 到 $B$ 的两条路径

下面的图解概述定理 2 和定理 3 的结果：

$$\text{在 } D \text{ 上 } \boldsymbol{F}=\nabla f \overset{\text{定理2}}{\Longleftrightarrow} \text{在 } D \text{ 上 } \boldsymbol{F} \text{ 守恒} \overset{\text{定理3}}{\Longleftrightarrow} \text{在 } D \text{ 中的任何闭路径上} \oint_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0$$

这里提出两个问题：

(1)我们怎样知道一个给定的场 $\boldsymbol{F}$ 是否守恒?

(2)如果 $\boldsymbol{F}$ 确实是守恒的，如何求势函数 $f$(所以 $\boldsymbol{F}=\nabla f$)?

### 14.3.4 求守恒场的势函数

守恒场的检验法如下：

**守恒场的分量检验法**

令 $\boldsymbol{F}=M(x,y,z)\boldsymbol{i}+N(x,y,z)\boldsymbol{j}+P(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 是连通的和单连通的定义域上的场，它的分量函数具有连续的一阶偏导数. 那么，$\boldsymbol{F}$ 是守恒的，当且仅当

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial z},\quad \frac{\partial M}{\partial z}=\frac{\partial P}{\partial x},\quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y} \tag{2}$$

**证明：若 $\boldsymbol{F}$ 是守恒的，则式(2)成立** 存在这样的势函数 $f$，使得

$$\boldsymbol{F}=M\boldsymbol{i}+N\boldsymbol{j}+P\boldsymbol{k}=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

因此，

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\quad(\text{连续性蕴涵混合偏导数相等})$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial z}$$

式(2)中其他等式的证明是类似的. ■

证明的后半部分，即证明等式(2)蕴涵 **F** 是守恒的，是 14.7 节中讨论的斯托克斯定理的一个推论，并且需要假定 **F** 的定义域是单连通的.

一旦知道 **F** 是守恒的，通常我们需要求 **F** 的势函数. 这就需要从方程$\nabla f = \boldsymbol{F}$ 或者

$$\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$$

求解$f$. 我们用下面的例子说明，通过对三个方程

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = P$$

求积分来完成这项工作.

**例 3** 证明

$$\boldsymbol{F} = (\mathrm{e}^x\cos y + yz)\boldsymbol{i} + (xz - \mathrm{e}^x\sin y)\boldsymbol{j} + (xy + z)\boldsymbol{k}$$

是守恒场，并且求它的势函数.

**解** 对

$$M = \mathrm{e}^x\cos y + yz, \quad N = xz - \mathrm{e}^x\sin y, \quad P = xy + z$$

应用式(2)的检验法，并且计算

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = y = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\mathrm{e}^x\sin y + z = \frac{\partial M}{\partial y}$$

这些等式共同表明存在一个函数$f$满足$\nabla f = \boldsymbol{F}$.

我们通过对方程

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^x\cos y + yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz - \mathrm{e}^x\sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy + z \tag{3}$$

积分求$f$. 在第一个方程中保持$y$和$z$固定，求它对$x$的积分，得到

$$f(x,y,z) = \mathrm{e}^x\cos y + xyz + g(y,z)$$

在其中把积分常数表示成$y$和$z$的函数，因为它的值在$y$和$z$改变时可能改变. 然后从这个方程计算$\partial f/\partial y$，并且把它同方程(3)中的$\partial f/\partial y$对比. 这样给出

$$-\mathrm{e}^x\sin y + xz + \frac{\partial g}{\partial y} = xz - \mathrm{e}^x\sin y$$

所以$\partial g/\partial y = 0$. 因此，$g$单独是$z$的函数，并且

$$f(x,y,z) = \mathrm{e}^x\cos y + xyz + h(z)$$

现在从这个方程计算$\partial f/\partial z$，并且把它同式(3)中$\partial f/\partial z$的公式对比. 这样给出

$$xy + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z} = xy + z \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z} = z$$

所以

$$h(z) = \frac{z^2}{2} + C$$

因此，

$$f(x,y,z) = \mathrm{e}^x\cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + C$$

我们有 **F** 的无穷多个势函数，对于每个 $C$ 值有一个函数. ■

**例 4** 证明 $\mathbf{F}=(2x-3)\mathbf{i}-z\mathbf{j}+(\cos z)\mathbf{k}$ 不是守恒场.

**解** 应用式(2)中的分量检验法，并且直接求出

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\cos z)=0,\quad \frac{\partial N}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}(-z)=-1$$

这两个偏导数不相等，所以 $\mathbf{F}$ 不是守恒场. 无需作进一步检验. ■

### 14.3.5 恰当微分形式

正如我们在下一小节和以后会看到的那样，把功积分和环流积分表示成在 14.2 节提出的“微分”形式

$$\int_A^B M\,\mathrm{d}x+N\,\mathrm{d}y+P\,\mathrm{d}z$$

经常是很方便的. 如果 $M\,\mathrm{d}x+N\,\mathrm{d}y+P\,\mathrm{d}z$ 是一个函数 $f$ 的全微分，上面这样的积分很容易计算. 对于那种情形，

$$\int_A^B M\,\mathrm{d}x+N\,\mathrm{d}y+P\,\mathrm{d}z=\int_A^B \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z=\int_A^B \nabla f\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$$

$$=f(B)-f(A)\quad(\text{定理 }1)$$

于是

$$\int_A^B \mathrm{d}f=f(B)-f(A)$$

同单变量可微函数的积分完全一样.

> **定义** 任何表达式
>
> $$M(x,y,z)\,\mathrm{d}x+N(x,y,z)\,\mathrm{d}y+P(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$
>
> 是一个**微分形式**. 一个微分形式是**恰当微分形式**，是指对于空间定义域 $D$ 上的某个纯量函数 $f$，在整个 $D$ 上有
>
> $$M\,\mathrm{d}x+N\,\mathrm{d}y+P\,\mathrm{d}z=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z=\mathrm{d}f$$

请注意，如果在 $D$ 上 $M\,\mathrm{d}x+N\,\mathrm{d}y+P\,\mathrm{d}z=\mathrm{d}f$，那么 $\mathbf{F}=M\mathbf{i}+N\mathbf{j}+P\mathbf{k}$ 是 $f$ 在 $D$ 上梯度场. 反之，如果 $\mathbf{F}=\nabla f$，那么 $M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y+P\mathrm{d}z$ 是恰当微分形式. 因此，恰当微分形式的检验法和 $\mathbf{F}$ 是守恒场的检验法相同.

> **微分形式 $M\,\mathrm{d}x+N\,\mathrm{d}y+P\,\mathrm{d}z$ 恰当性的分量检验法**
>
> 微分形式 $M\,\mathrm{d}x+N\,\mathrm{d}y+P\,\mathrm{d}z$ 在连通定义域和单连通定义域上是恰当的，当且仅当
>
> $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial z},\quad \frac{\partial M}{\partial z}=\frac{\partial P}{\partial x},\quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$$
>
> 这同说 $\mathbf{F}=M\mathbf{i}+N\mathbf{j}+P\mathbf{k}$ 是守恒场等价.

**例 5** 证明 $y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+4\,\mathrm{d}z$ 是恰当微分，并且在从点(1,1,1)到(2,3,-1)的线段上求积分

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+4\,\mathrm{d}z$$

的值.

**解** 令 $M=y$，$N=x$，$P=4$，并且应用微分形式恰当性检验法：

$$\frac{\partial P}{\partial y}=0=\frac{\partial N}{\partial z},\quad \frac{\partial M}{\partial z}=0=\frac{\partial P}{\partial x},\quad \frac{\partial N}{\partial x}=1=\frac{\partial M}{\partial y}$$

这些等式说明 $y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+4\mathrm{d}z$ 是恰当微分，所以对于某个函数 $f$，

$$y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+4\mathrm{d}z=\mathrm{d}f$$

并且积分的值为 $f(2,3,-1)-f(1,1,1)$.

我们对方程

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=4 \tag{4}$$

积分求 $f$ 达到相差一个常数. 从第一个方程得到

$$f(x,y,z)=xy+g(y,z)$$

第二个方程表明

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x+\frac{\partial g}{\partial y}=x \quad 或 \quad \frac{\partial g}{\partial y}=0$$

因此，$g$ 单独是 $z$ 的函数，而有

$$f(x,y,z)=xy+h(z)$$

方程(4)中第三个方程表明

$$\frac{\partial f}{\partial z}=0+\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z}=4 \quad 或 \quad h(z)=4z+C$$

所以，

$$f(x,y,z)=xy+4z+C$$

所求积分值为

$$f(2,3,-1)-f(1,1,1)=2+C-(5+C)=-3$$

■

### 习题 14.3

在习题 1 ~ 6 中，哪些场是守恒的，哪些场不是守恒的？

**1.** $\boldsymbol{F}=yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$.

**2.** $\boldsymbol{F}=(y\sin z)\boldsymbol{i}+(x\sin z)\boldsymbol{j}+(xy\cos z)\boldsymbol{k}$.

**3.** $\boldsymbol{F}=y\boldsymbol{i}+(x+z)\boldsymbol{j}-y\boldsymbol{k}$.

**4.** $\boldsymbol{F}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$.

**5.** $\boldsymbol{F}=(z+y)\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+(y+x)\boldsymbol{k}$.

**6.** $\boldsymbol{F}=(\mathrm{e}^x\cos y)\boldsymbol{i}-(\mathrm{e}^x\sin y)\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

在习题 7 ~ 12 中，求场 $\boldsymbol{F}$ 的一个势函数 $f$.

**7.** $\boldsymbol{F}=2x\boldsymbol{i}+3y\boldsymbol{j}+4z\boldsymbol{k}$.

**8.** $\boldsymbol{F}=(y+z)\boldsymbol{i}+(x+z)\boldsymbol{j}+(x+y)\boldsymbol{k}$.

**9.** $\boldsymbol{F}=\mathrm{e}^{y+2z}(\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+2x\boldsymbol{k})$.

**10.** $\boldsymbol{F}=(y\sin z)\boldsymbol{i}+(x\sin z)\boldsymbol{j}+(xy\cos z)\boldsymbol{k}$.

**11.** $\boldsymbol{F}=(\ln x+\sec^2(x+y))\boldsymbol{i}+\left(\sec^2(x+y)+\frac{y}{y^2+z^2}\right)\boldsymbol{j}+\frac{z}{y^2+z^2}\boldsymbol{k}$.

**12.** $\boldsymbol{F}=\frac{y}{1+x^2y^2}\boldsymbol{i}+\left(\frac{x}{1+x^2y^2}+\frac{z}{\sqrt{1-y^2z^2}}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2z^2}}+\frac{1}{z}\right)\boldsymbol{k}$.

在习题 13 ~ 17 中，证明积分中的微分形式是恰当微分形式. 然后求积分.

**13.** $\int_{(0,0,0)}^{(2,3,-6)}2x\,\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+2z\,\mathrm{d}z$.

**14.** $\int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)}yz\,\mathrm{d}x+xz\,\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}z$.

**15.** $\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)}2xy\,\mathrm{d}x+(x^2-z^2)\mathrm{d}y-2yz\,\mathrm{d}z$.

**16.** $\int_{(0,0,0)}^{(3,3,1)}2x\,\mathrm{d}x-y^2\mathrm{d}y-\frac{4}{1+z^2}\mathrm{d}z$.

**17.** $\int_{(1,0,0)}^{(0,1,1)}\sin y\cos x\,\mathrm{d}x+\cos y\sin x\,\mathrm{d}y+\mathrm{d}z$.

在习题 18 ~ 22 中，相关的场虽然不是定义在整个空间 $R^3$ 上，但是它们定义在单连通区域上，并且可以用分量检验法证明这些场是守恒的. 对于每个场求一个势函数，并且像在例 5 中那样求积分.

**18.** $\int_{(0,2,1)}^{(1,\pi/2,2)}2\cos y\,\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{y}-2x\sin y\right)\mathrm{d}y+\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$.

**19.** $\int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)}3x^2\mathrm{d}x+\frac{z^2}{y}\mathrm{d}y+2z\ln y\,\mathrm{d}z$.

**20.** $\int_{(1,2,1)}^{(2,1,1)}(2x\ln y-yz)\mathrm{d}x+\left(\frac{x^2}{y}-xz\right)\mathrm{d}y-xy\,\mathrm{d}z$.

**21.** $\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)}\frac{1}{y}\,\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{z}-\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}x-\frac{y}{z^2}\,\mathrm{d}z$.

**22.** $\int_{(-1,-1,-1)}^{(2,2,2)}\frac{2x\,\mathrm{d}x+2y\,\mathrm{d}y+2z\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$.

**23. 重作例 5** 求例 5 的积分 $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} y\,dx + x\,dy + 4\,dz$：求从点(1,1,1)到(2,3,-1)的线段的参数方程，并且求 $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ 沿这条线段的线积分. 由于 $\boldsymbol{F}$ 是守恒场，积分是独立于路径的.

**24.** 沿连接点(0,0,0)和(0,3,4)的线段 $C$ 求积分

$$\int_C x^2 dx + yz\,dy + (y^2/2)\,dz$$

**路径的独立性** 在习题 25 和 26 中，证明积分的值不依赖于从点 $A$ 到 $B$ 所取的路径.

**25.** $\int_A^B z^2 dx + 2\,y dy + 2xz\,dz$.

**26.** $\int_A^B \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

在习题 27 和 28 中，求 $\boldsymbol{F}$ 的一个势函数.

**27.** $\boldsymbol{F} = \frac{2x}{y}\boldsymbol{i} + \left(\frac{1-x^2}{y^2}\right)\boldsymbol{j}$，$\{(x,y): y>0\}$.

**28.** $\boldsymbol{F} = (e^x \ln y)\boldsymbol{i} + \left(\frac{e^x}{y} + \sin z\right)\boldsymbol{j} + (y\cos z)\boldsymbol{k}$.

**29. 沿不同路径作的功** 求由 $\boldsymbol{F} = (x^2+y)\boldsymbol{i} + (y^2+x)\boldsymbol{j} + ze^z\boldsymbol{k}$ 在从点(1,0,0)到(1,0,1)的下列路径上作的功：

(a) 线段 $x=1$，$y=0$，$0\leqslant z\leqslant 1$；

(b) 螺旋线 $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + (t/2\pi)\boldsymbol{k}$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$；

(c) 从点(1,0,0)到(0,0,0)的 $x$ 轴跟随从点(0,0,0)到(1,0,1)的抛物线 $z=x^2$，$y=0$.

**30. 沿不同路径作的功** 求由 $\boldsymbol{F} = e^{yz}\boldsymbol{i} + (xze^{yz} + z\cos y)\boldsymbol{j} + (xye^{yz} + \sin y)\boldsymbol{k}$ 在从点(1,0,1)到(1,π/2,0)的下列路径上作的功：

(a) 线段 $x=1$，$y=\pi t/2$，$z=1-t$，$0\leqslant t\leqslant 1$；

(b) 从点(1,0,1)到原点的线段，跟随从原点到(1,π/2,0)的线段；

(c) 从点(1,0,1)到(1,0,0)的线段，跟随从点(1,0,0)到原点的 $x$ 轴，再跟随从那里到(1,π/2,0)的抛物线 $y=\pi x^2/2$，$z=0$.

**31. 用两种方法求功积分** 令 $\boldsymbol{F} = \nabla(x^3y^2)$，$C$ 是 $xy$ 平面内从点(-1,1)到(1,1)的路径，由从点(-1,1)到(0,0)的线段跟随从点(0,0)到(1,1)的线段组成. 用下面两种方法求功积分 $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$：

(a) 求组成 $C$ 的线段的参数表示并且求积分；

(b) 用 $f(x,y) = x^3y^2$ 作为 $\boldsymbol{F}$ 的势函数.

**32. 沿不同路径的积分** 沿 $xy$ 平面内的下列路径 $C$ 求积分 $\int_C 2x\cos y\,dx - x^2\sin y\,dy$：

(a) 从点(1,0)到(0,1)的抛物线 $y=(x-1)^2$；

(b) 从点(-1,π)到(1,0)的线段；

(c) 从点(-1,0)到(1,0)的 $x$ 轴.

(d) 星状线 $\boldsymbol{r}(t) = (\cos^3 t)\boldsymbol{i} + (\sin^3 t)\boldsymbol{j}$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$，依反时针方向从点(1,0)回到(1,0).

**33. (a) 恰当微分形式** 如果微分形式

$$(ay^2 + 2czx)\,dx + y(bx+cz)\,dy + (ay^2 + cx^2)\,dz$$

是恰当微分形式，常数 $a,b,c$ 有何关系?

**(b) 梯度场** 场

$$\boldsymbol{F} = (y^2 + 2czx)\boldsymbol{i} + y(bx+cz)\boldsymbol{j} + (y^2 + cx^2)\boldsymbol{k}$$

在 $b$ 和 $c$ 取什么值时为梯度场?

**34. 线积分的梯度** 假定 $\boldsymbol{F} = \nabla f$ 是守恒向量场，并且

$$g(x,y,z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

证明 $\nabla g = \boldsymbol{F}$.

**35. 作最小功的路径** 要求你求一条路径，使力场 $\boldsymbol{F}$ 沿路径在两点之间移动质点所作的功为最小. 你的任务是快速计算证明 $\boldsymbol{F}$ 是守恒场. 你应如何回答? 提出答案的理由.

**36. 揭示性试验** 你通过试验发现力场 $\boldsymbol{F}$ 沿路径 $C_1$ 从 $A$ 到 $B$ 移动物体所作的功，仅为沿路径 $C_2$ 从 $A$ 到 $B$ 移动物体所作功的一半. 对于 $\boldsymbol{F}$ 可以得出什么结论? 提出答案的理由.

**37. 由恒力作的功** 证明：由恒力 $\boldsymbol{F} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ 沿任何路径从 $A$ 到 $B$ 移动质点作的功为 $W = \boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}$.

**38. 重力场**

(a) 求重力场

$$\boldsymbol{F} = -GmM\frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \quad (G,m,M \text{ 为常数})$$

的一个势函数.

(b) 令 $P_1$ 和 $P_2$ 是距离原点 $s_1$ 和 $s_2$ 的点. 证明：由(a)中的重力场从 $P_1$ 移动质点到 $P_2$ 作的功为

$$GmM\left(\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1}\right)$$

## 14.4 平面内的格林定理

如果 $\boldsymbol{F}$ 是守恒场，那么我们知道对于一个可微函数 $f$ 有 $\boldsymbol{F} = \nabla f$，并且可以在连接点 $A$ 和 $B$ 的任

意路径上按$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=f(B)-f(A)$计算功积分. 在这一节,我们导出一种积分方法,在$\boldsymbol{F}$不是守恒场时用于计算在平面内的闭曲线$C$上的功积分或者通量积分. 这个方法以格林定理著称,使我们能够把线积分转换成在由$C$包围的区域上的二重积分.

讨论以流体流动的速度场展开,因为这种场容易观察. 但是,格林定理适用于任何向量场,同对场的任何特定解释无关,只要定理的假设得到满足.

### 14.4.1 散度

对于格林定理,我们需要用到两种新概念. 第一种概念是向量场在一点的*散度*,物理学家和工程师们有时把它称为向量场的*通量密度*. 我们从下述途径获得这个概念.

假定$\boldsymbol{F}(x,y)=M(x,y)\boldsymbol{i}+N(x,y)\boldsymbol{j}$是流体在平面内流动的速度场,其中$M$和$N$的一阶偏导数在区域$R$内的每个点是连续的. 令$(x,y)$是$R$内的一点,$A$是一个顶点在$(x,y)$的小矩形,$A$及其内部整个位于$R$内(见图 14.24). 矩形的边平行于坐标轴,长度为$\Delta x$和$\Delta y$. 流体穿过底边流出矩形的速率近似等于

$$\boldsymbol{F}(x,y)\cdot(-\boldsymbol{j})\Delta x=-N(x,y)\Delta x$$

这是在$(x,y)$的速度在向外法线方向的纯量分量乘线段的长度. 例如,如果速度以米每秒为单位,流体流出的速率将以米每秒乘米为单位,或者以平方米每秒为单位. 流体在其他三边的向外法线方向穿过各边的速率可用同样方法估计. 总之,我们有



图 14.24 定义向量场在点$(x,y)$的散度(通量密度)的矩表

**流出速率** 顶边: $\boldsymbol{F}(x,y+\Delta y)\cdot\boldsymbol{j}\Delta x=N(x,y+\Delta y)\Delta x$

底边: $\boldsymbol{F}(x,y)\cdot(-\boldsymbol{j})\Delta x=-N(x,y)\Delta x$

右边: $\boldsymbol{F}(x+\Delta x,y)\cdot\boldsymbol{i}\Delta y=M(x+\Delta x,y)\Delta y$

左边: $\boldsymbol{F}(x,y)\cdot(-\boldsymbol{i})\Delta y=-M(x,y)\Delta y$

综合两对相对边的速率给出

$$\text{顶边和底边:}\quad (N(x,y+\Delta y)-N(x,y))\Delta x\approx\left(\frac{\partial N}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x$$

$$\text{右边和左边:}\quad (M(x+\Delta x,y)-M(x,y))\Delta y\approx\left(\frac{\partial M}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y$$

把上面这两个近似公式相加,得到

$$\text{穿过矩形边界的通量}\approx\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y$$

现在用$\Delta x\Delta y$相除来估计矩形的每单位面积总通量或者矩形的通量密度:

$$\frac{\text{穿过矩形边界的通量}}{\text{矩形面积}}\approx\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)$$

最后,令$\Delta x$和$\Delta y$趋近零定义$\boldsymbol{F}$在点$(x,y)$的**通量密度**. 在数学中我们把通量密度称为$\boldsymbol{F}$的*散度*. 散度用符号 div $\boldsymbol{F}$ 表示,读作"$\boldsymbol{F}$的散度"或者"div $\boldsymbol{F}$".

> **定义** 向量场$\boldsymbol{F}=M\boldsymbol{i}+N\boldsymbol{j}$在点$(x,y)$的散度为
>
> $$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\qquad(1)$$

在直观上,如果一种气体在点$(x_0,y_0)$膨胀,流线将在那里发散(因此得名),并且由于气体

将流出围绕$(x_0,y_0)$的小矩形，$\boldsymbol{F}$在$(x_0,y_0)$的散度将取正值. 如果气体收缩而非膨胀，散度将取负值(见图 14.25).

源点：

$\operatorname{div}\boldsymbol{F}(x_0,y_0)>0$

气体在点$(x_0,y_0)$膨胀

汇点：

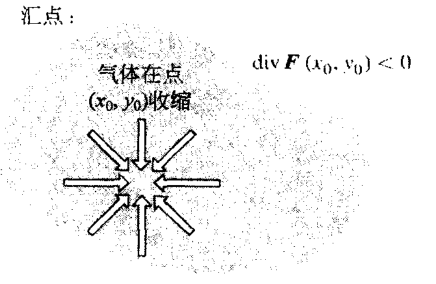



图 14.25 如果气体在点$(x_0,y_0)$膨胀，流线具有正值散度；如果气体收缩，散度取负值

**例 1** 求$\boldsymbol{F}(x,y)=(x^2-y)\boldsymbol{i}+(xy-y^2)\boldsymbol{j}$的散度.

**解** 利用公式(1)：

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2-y)+\frac{\partial}{\partial y}(xy-y^2)=2x+x-2y=3x-2y \qquad \blacksquare$$

### 14.4.2 绕轴旋转：旋度的 $k$ 分量

对于格林定理，我们需要涉及的第二个概念是如何度量叶片轮在平面区域内流体流动中一点的旋转. 这个概念对于流体在不同点如何环绕同区域垂直的轴流动给出某些观念. 物理学家有时把这个量称为向量场$\boldsymbol{F}$在一点的*环流密度*. 为了得到它，我们回到速度场

$$\boldsymbol{F}(x,y)=M(x,y)\boldsymbol{i}+N(x,y)\boldsymbol{j}$$

和矩形$A$. 把这个矩形重新画在图 14.26 中.

$\boldsymbol{F}$围绕$A$的边界依反时针方向的环流是流体速率沿这四条边的和. 对于底边，流体速率近似等于

$$\boldsymbol{F}(x,y)\cdot\boldsymbol{i}\Delta x=M(x,y)\Delta x$$

这是速度向量$\boldsymbol{F}(x,y)$在切向量$\boldsymbol{i}$的方向上的纯量分量同线段长度的乘积. 流体沿其他边依反时针方向的速率用同样的方式表示. 总之，我们有

$(x,y+\Delta y)$ $\Delta x$ $(x+\Delta x,y+\Delta y)$

$\Delta y$ $\Delta y$ $A$

$(x,y)$ $\Delta x$ $(x+\Delta x,y)$

图 14.26 定义向量场在点$(x,y)$的旋度(环流密度)的矩形

$$\begin{aligned}
&\text{顶边：}\quad \boldsymbol{F}(x,y+\Delta y)\cdot(-\boldsymbol{i})\Delta x=-M(x,y+\Delta y)\Delta x\\
&\text{底边：}\quad \boldsymbol{F}(x,y)\cdot\boldsymbol{i}\Delta x=M(x,y)\Delta x\\
&\text{右边：}\quad \boldsymbol{F}(x+\Delta x,y)\cdot\boldsymbol{j}\Delta y=N(x+\Delta x,y)\Delta y\\
&\text{左边：}\quad \boldsymbol{F}(x,y)\cdot(-\boldsymbol{j})\Delta y=-N(x,y)\Delta y
\end{aligned}$$

对于两个对边的速率求和，得到

$$\text{顶边和底边：}\quad -(M(x,y+\Delta y)-M(x,y))\Delta x\approx-\left(\frac{\partial M}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x$$

$$\text{右边和左边：}\quad (N(x+\Delta x,y)-N(x,y))\Delta y\approx\left(\frac{\partial N}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y$$

把最后这两个近似等式相加，再用$\Delta x\,\Delta y$相除，给出对于矩形的环流密度的估计：

$$\frac{\text{围绕矩形的环流}}{\text{矩形面积}}\approx\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}$$

令$\Delta x$和$\Delta y$趋近零，确定$\boldsymbol{F}$在点$(x,y)$的*环流密度*.

平面环流密度的正方向，是当在 $xy$ 平面上从(垂直的)单位向量 $\boldsymbol{k}$ 的顶端朝下看时，围绕垂直轴旋转的反时针方向(见图 14.27)．环流值实际上是我们将在 14.7 节定义的更一般环流向量场的 $\boldsymbol{k}$ 分量，这种场称为向量场 $\boldsymbol{F}$ 的旋度．对于格林定理而言，我们所需要的仅仅是这个 $\boldsymbol{k}$ 分量．$\boldsymbol{F}$ 的旋度用符号"curl $\boldsymbol{F}$"表示．

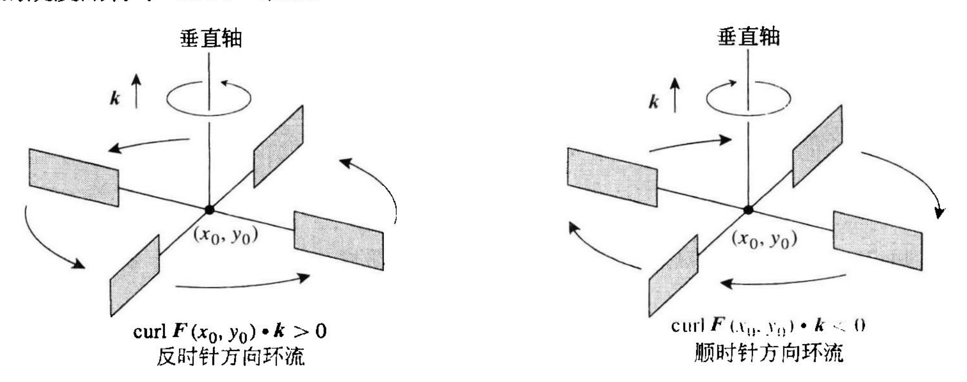



图 14.27 在不可压缩流体在平面区域的流动中，旋度的 $\boldsymbol{k}$ 分量度量流体在一点的旋转的速率；在反时针方向旋转的点上旋度的 $\boldsymbol{k}$ 分量为正值，在顺时针方向旋转的点上旋度的 $\boldsymbol{k}$ 分量为负值

**定义** 向量场 $\boldsymbol{F}=M\boldsymbol{i}+N\boldsymbol{j}$ 在点$(x,y)$的**旋度(环流密度)**的 $\boldsymbol{k}$ 分量是纯量

$$(\text{curl } \boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{k} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \tag{2}$$

如果一片薄水层环绕 $xy$ 平面内一个区域流动，在水中的点$(x_0,y_0)$放置一个小叶片轮，使其轴垂直于 $xy$ 平面并且同 $\boldsymbol{k}$ 平行，那么水在点$(x_0,y_0)$的环流或者旋度的 $\boldsymbol{k}$ 分量，给出测定小叶片轮以多快速度旋转和在什么方向上旋转的一种方法．

**例 2** 求向量场

$$\boldsymbol{F}(x,y) = (x^2-y)\boldsymbol{i} + (xy-y^2)\boldsymbol{j}$$

的旋度的 $\boldsymbol{k}$ 分量．

**解** 利用公式(2)：

$$(\text{curl } \boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{k} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(xy-y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2-y) = y+1$$

■

### 14.4.3 格林定理的两种形式

格林定理的一种形式表明，在适当的条件下，向量场穿过平面内简单闭曲线(见图 14.28)的向外通量，等于向量场的散度在曲线所包围区域上的二重积分．请回忆 14.2 节中式(2)和式(3)的通量公式．

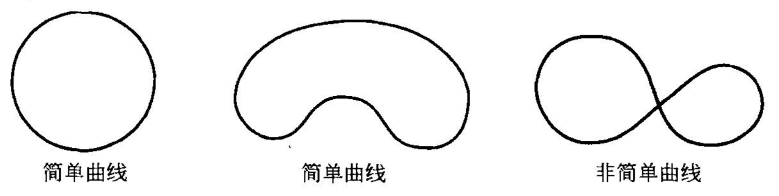



图 14.28 在证明格林定理时我们区分两种闭曲线，一种是不自交叉的简单闭曲线(例如圆)，另一种是非简单闭曲线(例如 8 字形曲线)

**定理 4（格林定理的通量-散度形式或法向形式）** 令 $C$ 是在 $xy$ 平面内包围区域 $R$ 的分段光滑的简单闭曲线. 令 $\boldsymbol{F}=M\boldsymbol{i}+N\boldsymbol{j}$ 是 $M$ 和 $N$ 在包含 $R$ 的开区域内具有连续一阶偏导数的向量场. 那么 $\boldsymbol{F}$ 穿过 $C$ 的向外通量等于 $\operatorname{div}\boldsymbol{F}$ 在由 $C$ 包围的区域 $R$ 上的二重积分:

$$\underbrace{\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s}_{\text{向外通量}} = \oint_C M\,\mathrm{d}y - N\,\mathrm{d}x = \underbrace{\iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}_{\text{散度积分}} \tag{3}$$

格林定理的另外一种形式表明，向量场围绕简单闭曲线依反时针方向的环流，是向量场的旋度的 $\boldsymbol{k}$ 分量在由曲线包围的区域上的二重积分. 请回忆 14.2 节中定义环流的公式(2).

**定理 5（格林定理的环流-旋度形式或切向形式）** 令 $C$ 是在 $xy$ 平面内包围区域 $R$ 的分段光滑的简单闭曲线. 令 $\boldsymbol{F}=M\boldsymbol{i}+N\boldsymbol{j}$ 是 $M$ 和 $N$ 在包含 $R$ 的开区域内具有连续一阶偏导数的向量场. 那么 $\boldsymbol{F}$ 环绕 $C$ 依反时针方向的环流等于 $(\operatorname{curl}\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{k}$ 在 $R$ 上的二重积分:

$$\underbrace{\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\mathrm{d}s}_{\text{反时针方向的环流}} = \oint_C M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \underbrace{\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}_{\text{旋度积分}} \tag{4}$$

格林定理的这两种形式是等价的. 把公式(3)应用于向量场 $\boldsymbol{G}_1=N\boldsymbol{i}-M\boldsymbol{j}$，推出公式(4)；把公式(4)应用于向量场 $\boldsymbol{G}_2=-N\boldsymbol{i}+M\boldsymbol{j}$，推出公式(3).

**例 3** 对于向量场

$$\boldsymbol{F}(x,y)=(x-y)\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$$

和以单位圆

$$C:\quad \boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j},\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

为界的区域 $R$，证实格林定理的两种形式.

**解** 我们有

$$M=\cos t-\sin t,\quad \mathrm{d}x=\mathrm{d}(\cos t)=-\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$N=\cos t,\quad \mathrm{d}y=\mathrm{d}(\sin t)=\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{\partial M}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial M}{\partial y}=-1,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial N}{\partial y}=0$$

公式(3)的两端为

$$\oint_C M\,\mathrm{d}y-N\,\mathrm{d}x=\int_{t=0}^{t=2\pi}(\cos t-\sin t)(\cos t\,\mathrm{d}t)-(\cos t)(-\sin t\,\mathrm{d}t)=\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\pi$$

$$\iint_R\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_R(1+0)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_R\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\text{单位圆内部的面积}=\pi$$

公式(4)的两端为

$$\oint_C M\,\mathrm{d}x+N\,\mathrm{d}y=\int_{t=0}^{t=2\pi}(\cos t-\sin t)(-\sin t\,\mathrm{d}t)+(\cos t)(\cos t\,\mathrm{d}t)=\int_0^{2\pi}(-\sin t\cos t+1)\mathrm{d}t=2\pi$$

$$\iint_R\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_R(1-(-1))\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint_R\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\pi$$ ■

### 14.4.4 利用格林定理求线积分

如果通过用首尾连接若干不同曲线段的方法构造闭曲线 $C$，那么求 $C$ 上的线积分的过程可能是冗长的，因为需要计算许多不同的积分. 但是，如果曲线 $C$ 限定一个适用格林定理的区域 $R$，

那么我们可以利用格林定理把环绕 $C$ 的线积分变换成在 $R$ 上的二重积分.

**例 4** 求积分

$$\oint_C xy\,\mathrm{d}y - y^2\mathrm{d}x$$

其中 $C$ 是由直线 $x=1$ 和 $y=1$ 从第一象限切割的正方形的边界.

**解** 我们可以用格林定理两种形式的每一种把线积分变换成正方形上的二重积分.

(1)用法向形式公式(3): 取 $M=xy$, $N=y^2$, 并且以 $C$ 和 $R$ 作为正方形的边界和内部区域, 给出

$$\oint_C xy\,\mathrm{d}y - y^2\mathrm{d}x = \iint_R (y+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^1 3y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\left[3xy\right]_{x=0}^{x=1}\mathrm{d}y = \int_0^1 3y\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}y^2\Big]_0^1 = \frac{3}{2}$$

(2)用切向形式公式(4): 取 $M=-y^2$ 和 $N=xy$, 给出同样的结果:

$$\oint_C -y^2\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y = \iint_R (y-(-2y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3}{2}$$ ■

**例 5** 计算场 $\boldsymbol{F}(x,y)=x\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}$ 穿过以直线 $x=\pm1$ 和 $y=\pm1$ 为界的正方形的向外通量.

**解** 用线积分计算这个通量需要求四个积分, 对于正方形的每条边求一个积分. 用格林定理, 可以把线积分变换成一个二重积分. 取 $M=x$, $N=y^2$, 以正方形的边界为 $C$, 正方形的内部为 $R$, 我们有

$$\begin{aligned}\text{通量} &= \oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \oint_C M\,\mathrm{d}y - N\,\mathrm{d}x \\ &= \iint_R\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad (\text{格林定理}) \\ &= \int_{-1}^1\int_{-1}^1 (1+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^1\left[x+2xy\right]_{x=-1}^{x=1}\mathrm{d}y = \int_{-1}^1(2+4y)\,\mathrm{d}y = \left[2y+2y^2\right]_{-1}^1 = 4\end{aligned}$$ ■

### 14.4.5 对特殊区域的格林定理的证明

令 $C$ 是 $xy$ 平面内光滑的简单闭曲线, 它具有这样的特性, 平行于坐标轴的直线同曲线的交点不超出两点. 令 $R$ 是由 $C$ 包围的区域并且假定 $M$, $N$ 和它们的一阶偏导数在包含 $C$ 和 $R$ 的某个开区域的每个点是连续的. 我们需要证明格林定理的环流-旋度形式:

$$\oint_C M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint_R\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{5}$$

图 14.29 显示曲线 $C$ 由两段有向曲线组成:

$$C_1: y=f_1(x),\quad a\leqslant x\leqslant b,\quad C_2: y=f_2(x),\quad b\geqslant x\geqslant a$$

对于 $a$ 和 $b$ 之间的任何 $x$, 可以求 $\partial M/\partial y$ 对于 $y$ 从 $y=f_1(x)$ 到 $y=f_2(x)$ 的积分, 并且得到

$$\int_{f_1(x)}^{f_2(x)}\frac{\partial M}{\partial y}\mathrm{d}y = M(x,y)\Big]_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} = M(x,f_2(x)) - M(x,f_1(x))$$

于是可以求这个表达式对 $x$ 从 $a$ 到 $b$ 的积分:

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_{f_1(x)}^{f_2(x)}\frac{\partial M}{\partial y}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_a^b[M(x,f_2(x))-M(x,f_1(x))]\mathrm{d}x = -\int_b^a M(x,f_2(x))\mathrm{d}x - \int_a^b M(x,f_1(x))\mathrm{d}x \\ &= -\int_{C_2}M\,\mathrm{d}x - \int_{C_1}M\,\mathrm{d}x = -\oint_C M\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因此

$$\oint_C M\,\mathrm{d}x = \iint_R\left(-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{6}$$

公式(6)给出我们需要的公式(5)的一半结果. 通过首先求$\partial N/\partial x$对$x$的积分，然后对$y$的积分，如图14.30暗示，推出另外一半结果. 这显示图14.29的曲线$C$分解成了两段有向曲线，一段是$C_1'$：$x=g_1(y)$，$d\geqslant y\geqslant c$，另外一段是$C_2'$：$x=g_2(y)$，$c\leqslant y\leqslant d$. 这个二重积分的结果是

$$\oint_C N\,\mathrm{d}y=\iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{7}$$

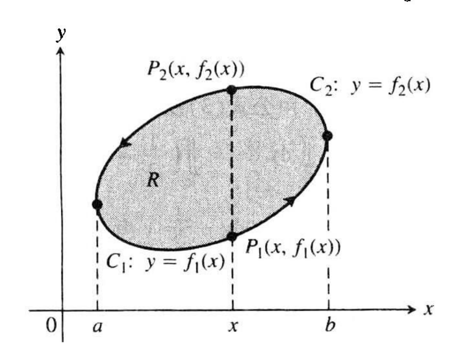



图14.29 边界曲线$C$由$C_1$和$C_2$组成，$C_1$是$y=f_1(x)$的图形，$C_2$是$y=f_2(x)$的图形

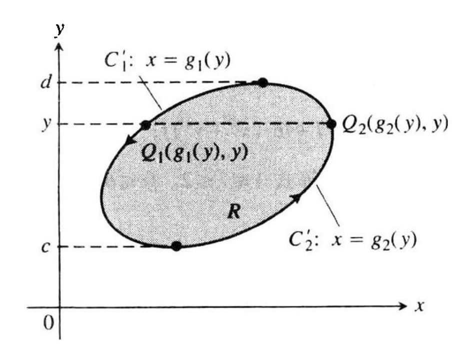



图14.30 边界曲线$C$由曲线$C'_1$和$C'_2$组成，$C'_1$是$x=g_1(y)$的图形，$C'_2$是$x=g_2(y)$的图形

对公式(6)和(7)求和，给出公式(5). 证明完毕. ■

格林定理对于更为一般的区域也成立，像图14.31和图14.32所示的区域，不过我们在这里对这个结果不予证明. 请注意，图14.32中的区域不是单连通的. 区域边界上的曲线是有方向的，当按图中所示方向遍历曲线时，区域$R$始终处于左侧. 采用这个约定，格林定理对于非单连通区域成立.

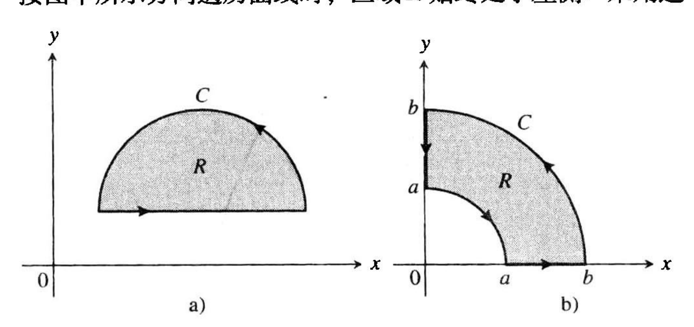



图14.31 格林定理适用的其他区域

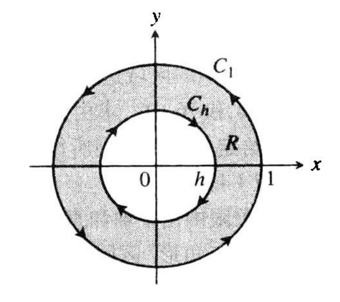



图14.32 格林定理通过沿所示边界的积分可以用于环形区域

虽然我们是在$xy$平面内提出格林定理，但是这个定理适用于空间中包含在一个平面内以曲线$C$为界的任何区域$R$. 在14.7节将会看到，格林定理这种更一般的形式如何表示在区域$R$上的二重积分.

## 习题14.4

在习题1~4中，通过求公式(3)和(4)两端对于场$\boldsymbol{F}=M\boldsymbol{i}+N\boldsymbol{j}$的积分，证实格林定理的结论. 在每一种情形，取圆盘$R$：$x^2+y^2\leqslant a^2$和它的边界圆$C$：$\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t)\boldsymbol{i}+(a\sin t)\boldsymbol{j}$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$作为积分区域.

**1.** $\boldsymbol{F}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$.　　**2.** $\boldsymbol{F}=y\boldsymbol{i}$.

**3.** $\boldsymbol{F}=2x\boldsymbol{i}-3y\boldsymbol{j}$.　　**4.** $\boldsymbol{F}=-x^2y\boldsymbol{i}+xy^2\boldsymbol{j}$.

在习题5~10中，利用格林定理对于场$\boldsymbol{F}$和曲线$C$求依反时针方向的环流和向外通量.

**5.** $\boldsymbol{F}=(x-y)\boldsymbol{i}+(y-x)\boldsymbol{j}$;

$C$：以$x=0$，$x=1$，$y=0$，$y=1$为界的正方形.

6. $\boldsymbol{F}=(x^2+4y)\boldsymbol{i}+(x+y^2)\boldsymbol{j}$;
   $C$：以 $x=0$，$x=1$，$y=0$，$y=1$ 为界的正方形.
7. $\boldsymbol{F}=(y^2-x^2)\boldsymbol{i}+(x^2+y^2)\boldsymbol{j}$;
   $C$：以 $y=0$，$x=3$，$y=x$ 为界的三角形.
8. $\boldsymbol{F}=(x+y)\boldsymbol{i}-(x^2+y^2)\boldsymbol{j}$;
   $C$：以 $y=0$，$x=1$，$y=x$ 为界的三角形.
9. $\boldsymbol{F}=(x+e^x\sin y)\boldsymbol{i}+(x+e^x\cos y)\boldsymbol{j}$;
   $C$：双纽线 $r^2=\cos 2\theta$ 的右环.
10. $\boldsymbol{F}=\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)\boldsymbol{i}+\ln(x^2+y^2)\boldsymbol{j}$;
   $C$：由极坐标不等式 $1\leqslant r\leqslant 2$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 定义的区域的边界.
11. 对于第一象限内由曲线 $y=x^2$ 和 $y=x$ 包围的区域，求场 $\boldsymbol{F}=xy\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}$ 围绕区域边界和边界上依反时针方向的环流和向外通量.
12. 对于第一象限内由直线 $x=\pi/2$ 和 $y=\pi/2$ 切割的正方形区域，求场 $\boldsymbol{F}=(-\sin y)\boldsymbol{i}+(x\cos y)\boldsymbol{j}$ 围绕区域边界和边界上依反时针方向的环流和向外通量.
13. 求场

$$\boldsymbol{F}=\left(3xy-\frac{x}{1+y^2}\right)\boldsymbol{i}+(e^x+\tan^{-1}y)\boldsymbol{j}$$

   穿过心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$，$a>0$ 的向外通量.
14. 求场

$$\boldsymbol{F}=(y+e^x\ln y)\boldsymbol{i}+(e^x/y)\boldsymbol{j}$$

   围绕上方以曲线 $y=3-x^2$ 为界和下方以曲线 $y=x^4+1$ 为界的区域边界依反时针方向的环流.

在习题 15 和 16 中，求由力 $\boldsymbol{F}$ 移动质点依反时针方向环绕给定的曲线一周所作的功.

15. $\boldsymbol{F}=2xy^3\boldsymbol{i}+4x^2y^2\boldsymbol{j}$;
   $C$：第一象限内由 $x$ 轴和直线 $x=1$ 以及曲线 $y=x^3$ 包围的“三角形”区域的边界.
16. $\boldsymbol{F}=(4x-2y)\boldsymbol{i}+(2x-4y)\boldsymbol{j}$;
   $C$：圆 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$.

在习题 17 ~ 20 中,应用格林定理求积分.

17. $\oint_C(y^2\,dx+x^2\,dy)$;
   $C$： 以 $x=0,x+y=1,y=0$ 为界的三角形.
18. $\oint_C(3y\,dx+2x\,dy)$;
   $C$： $0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\sin x$ 的边界.
19. $\oint_C(6y+x)\,dx+(y+2x)\,dy$;
   $C$： 圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=4$.
20. $\oint_C(2x+y^2)\,dx+(2xy+3y)\,dy$;
   $C$： $xy$ 平面内格林定理成立的任何简单闭曲线.

**用格林定理计算面积** 如果 $xy$ 平面内的简单闭曲线 $C$ 和它围住的区域 $R$ 满足格林定理的假设，那么 $R$ 的面积由

> **格林定理面积公式**
>
> $$R\text{ 的面积}=\frac{1}{2}\oint_C x\,dy-y\,dx$$

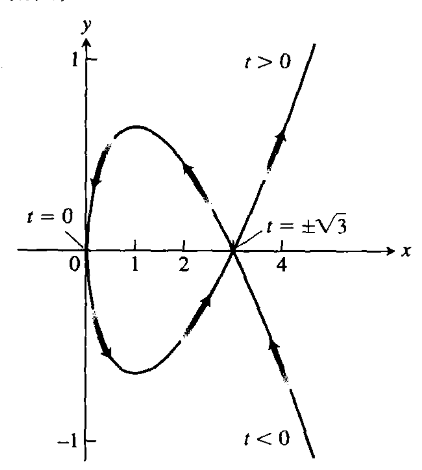
给出. 原因在于，由公式(3)反推，得到

$$R\text{ 的面积}=\iint_R dy\,dx=\iint_R\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)dy\,dx$$

$$=\oint_C\frac{1}{2}x\,dy-\frac{1}{2}y\,dx$$

在习题 21 ~ 24 中，用上面给出的格林定理面积公式求由曲线包围区域的面积.

21. 圆 $\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t)\boldsymbol{i}+(a\sin t)\boldsymbol{j}$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$.
22. 椭圆 $\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t)\boldsymbol{i}+(b\sin t)\boldsymbol{j}$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$.
23. 星状线 $\boldsymbol{r}(t)=(\cos^3 t)\boldsymbol{i}+(\sin^3 t)\boldsymbol{j}$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$.
24. 曲线 $\boldsymbol{r}(t)=t^2\boldsymbol{i}+((t^3/3)-t)\boldsymbol{j}$，$-\sqrt{3}\leqslant t\leqslant\sqrt{3}$（参见附图）.




25. 令 $C$ 是一个区域的边界，格林定理在区域上成立. 利用格林定理求积分：
   (a) $\oint_C f(x)\,dx+g(y)\,dy$.
   (b) $\oint_C ky\,dx+hx\,dy$ （$k$ 和 $h$ 为常数）.
26. **只依赖于面积的积分** 证明：围绕任何正方形的积分

$$\oint_C xy^2\,dx+(x^2y+2x)\,dy$$

   只依赖于正方形的面积而同它在 $xy$ 平面内的位置无关.
27. 关于积分

$$\oint_C 4x^3y\,dx + x^4\,dy$$

存在什么特殊性？提出答案的理由.

**28.** 关于积分

$$\oint_C -y^3dy + x^3dx$$

存在什么特殊性？提出答案的理由.

**29. 把面积作为线积分** 证明：若 $R$ 是 $xy$ 平面内以分段光滑的简单闭曲线 $C$ 为界的区域，则

$$R\text{ 的面积} = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx$$

**30. 把定积分作为线积分** 假定非负函数 $y=f(x)$ 在区间$[a,b]$上有连续的一阶偏导数. 令 $C$ 是 $xy$ 平面内下方以 $x$ 轴为界、上方以 $f$ 的图形为界和两侧以直线 $x=a$ 和 $x=b$ 为界的区域. 证明

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\oint_C y\,dx$$

**31. 面积与形心** 设 $R$ 是 $xy$ 平面内以分段光滑的简单闭曲线 $C$ 为界的区域. 令 $A$ 是 $R$ 的面积，$\bar{x}$ 是 $R$ 的形心的 $x$ 坐标. 证明

$$\frac{1}{2}\oint_C x^2dy = -\oint_C xy\,dx = \frac{1}{3}\oint_C x^2dy - xy\,dx = A\bar{x}$$

**32. 惯性矩** 令 $I_y$ 是习题31中的区域对 $y$ 轴的惯性矩. 证明

$$\frac{1}{3}\oint_C x^3dy = -\oint_C x^2y\,dx = \frac{1}{4}\oint_C x^3dy - x^2y\,dx = I_y$$

**33. 格林定理与拉普拉斯方程** 假设函数 $f(x,y)$ 存在全部所需的导数并且是连续的. 证明：若 $f$ 满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

则对于格林定理适用的所有闭曲线 $C$ 有

$$\oint_C \frac{\partial f}{\partial y}\,dx - \frac{\partial f}{\partial x}\,dy = 0$$

(逆命题也成立：若这个线积分恒为零，则 $f$ 满足拉普拉斯方程.)

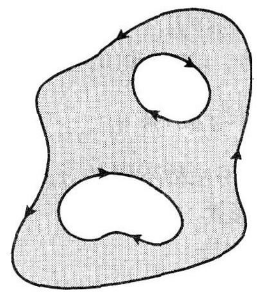
**34. 达到最大值的功** 在 $xy$ 平面内取向为反时针方向的所有光滑的简单闭曲线中求一条曲线，使其由

$$\boldsymbol{F} = \left(\frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{3}y^3\right)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$$

沿曲线所作的功达到最大值.

(提示：$(\text{curl }\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{k}$ 在何处为正值?)

**35. 带多个空洞的区域** 格林定理对于带有限个空洞的区域 $R$ 成立，只要边界曲线是光滑的简单闭曲线，并且沿每段边界积分时保持 $R$ 靠积分路径的左边(参见附图).



(a) 令 $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$，$C$ 为圆 $x^2+y^2=a^2$. 求通量积分

$$\oint_C \nabla f\cdot\boldsymbol{n}\,ds$$

(b) 令 $K$ 是 $xy$ 平面内不通过(0,0)的任何光滑的简单闭曲线. 应用格林定理证明

$$\oint_K \nabla f\cdot\boldsymbol{n}\,ds$$

具有两个可能的值，取决于(0,0)是在 $K$ 的内部还是在 $K$ 的外部.

**36. 本迪克松准则** 流体在平面流动的流线是流体个别质点经过的光滑曲线. 流动的速度场向量 $\boldsymbol{F}=M(x,y)\boldsymbol{i}+N(x,y)\boldsymbol{j}$ 是流线的切向量. 证明：若流动出现在单连通区域(没有洞或缺失点的区域) $R$ 内，并且在整个 $R$ 上 $M_x+N_y\neq 0$，则在 $R$ 内没有闭合的流线. 换句话说，流体的质点在 $R$ 内不会有闭合轨线. 判别不存在闭合轨线的准则 $M_x+M_y\neq 0$ 称为**本迪克松准则**.

**37.** 证实公式(7)，最终完成对于特殊区域的格林定理的证明.

**38. 守恒场的旋度分量** 关于守恒的二维向量场的旋度分量，可以得出什么结论？提出答案的理由.

**计算机探究**

在习题 39 ~ 42 中，用一种 CAS(计算机代数系统)和格林定理，求场 $\boldsymbol{F}$ 依反时针方向围绕简单闭曲线 $C$ 的环流. 执行 CAS 的下列操作步骤：

(a) 绘制 $xy$ 平面内 $C$ 的图形；

(b) 确定格林定理旋度形式的被积函数 $\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$.

(c) 从(a)中的图形确定(二重积分的)积分限，并求环流的旋度积分.

**39.** $\boldsymbol{F}=(2x-y)\boldsymbol{i}+(x+3y)\boldsymbol{j}$； $C$：椭圆 $x^2+4y^2=4$.

**40.** $\boldsymbol{F}=(2x^3-y^3)\boldsymbol{i}+(x^3+y^3)\boldsymbol{j}$； $C$：椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

**41.** $\boldsymbol{F}=x^{-1}e^y\boldsymbol{i}+(e^y\ln x+2x)\boldsymbol{j}$；

$C$：位于 $y=1+x^4$ 下方和 $y=2$ 上方的区域的边界.

**42.** $F = xe^y\boldsymbol{i} + 4x^2\ln y\,\boldsymbol{j}$;

$C$：以(0,0)，(2,0)和(0,4)为顶点的三角形.

## 14.5 曲面与面积

我们已经用三种不同的方式定义了平面内的曲线：

(i)显式形式 $y = f(x)$

(ii)隐式形式 $F(x,y) = 0$

(iii)参数向量形式 $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j},\quad a \leqslant t \leqslant b$

对于空间中的曲面我们有类似的定义：

(i)显式形式 $z = f(x,y)$

(ii)隐式形式 $F(x,y,z) = 0$

(iii)也有一种参数形式，以两个变量的向量函数给出曲面上一点的位置. 在这一节我们讨论这种新的定义形式，并用应用这种形式获得作为二重积分的曲面面积.

### 14.5.1 曲面的参数表示

令

$$\boldsymbol{r}(u,v) = f(u,v)\boldsymbol{i} + g(u,v)\boldsymbol{j} + h(u,v)\boldsymbol{k} \qquad (1)$$

是定义在 $uv$ 平面内一个区域 $R$ 上的连续向量函数，并且在 $R$ 的内部上是一对一的(见图 14.33). 我们称 $\boldsymbol{r}$ 的值域是由 $\boldsymbol{r}$ 定义的或者描绘的**曲面** $S$. 方程(1)和和定义域 $R$ 一起构成曲面的参数表示. 变量 $u$ 和 $v$ 是**参数**，$R$ 是**参数定义域**. 为简化讨论，取 $R$ 为用不等式 $a \leqslant u \leqslant b, c \leqslant v \leqslant d$ 定义的矩形. 要求 $\boldsymbol{r}$ 在 $R$ 的内部上是一对一的，保证 $S$ 不自交叉. 请注意，方程(1)是同三个参数方程

$$x = f(u,v),\quad y = g(u,v),\quad z = h(u,v)$$

等价的向量方程.

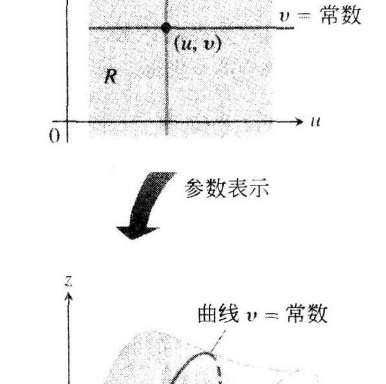



图 14.33 曲面的参数形式把曲面 $S$ 表示成定义在区域 $R$ 上的二元向量函数

**例 1** 求圆锥面

$$z = \sqrt{x^2 + y^2},\quad 0 \leqslant z \leqslant 1$$

的参数表示.

**解** 本例用柱面坐标提供参数表示. 在圆锥面上，典型点$(x,y,z)$(见图 14.34)的坐标为$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，$z = \sqrt{x^2+y^2} = r$，其中$0 \leqslant r \leqslant 1$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. 在方程(1)中取 $u = r$，$v = \theta$ 给出参数表示

$$\boldsymbol{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\boldsymbol{i} + (r\sin\theta)\boldsymbol{j} + r\boldsymbol{k},$$
$$0 \leqslant r \leqslant 1,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

这个参数表示在定义域 $R$ 内部上是一对一的，不过在 $R$ 的边界 $r = 0$ 上不是如此. ■

**例 2** 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的参数表示.

**解** 球面坐标提供我们所需要的表示. 在球面上典型点$(x,y,z)$(见图 14.35)的坐标为 $x = a\sin\phi\cos\theta$，$y = a\sin\phi\sin\theta$，$z = a\cos\phi$，其中$0 \leqslant \phi \leqslant \pi$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. 在方程(1)中取 $u = \phi$，$v = \theta$ 给出参数表示

$$\boldsymbol{r}(\phi,\theta) = (a\sin\phi\cos\theta)\boldsymbol{i} + (a\sin\phi\sin\theta)\boldsymbol{j} + (a\cos\phi)\boldsymbol{k},$$
$$0 \leqslant \phi \leqslant \pi,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$
■

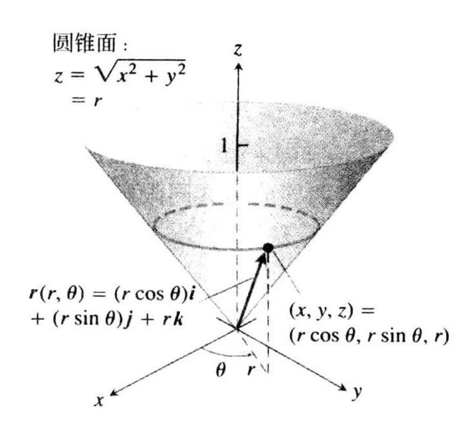



图 14.34 例 1 中的圆锥面可以用柱面坐标给出参数表示

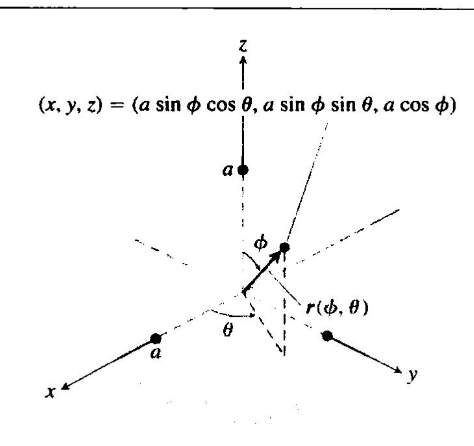



图 14.35 例 12 中的球面可以用球面坐标给出参数表示

**例 3** 求圆柱面

$$x^2+(y-3)^2=9,\quad 0\leqslant z\leqslant 5$$

的参数表示.

**解** 在柱面坐标中，点$(x,y,z)$的坐标为$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$z=z$. 对于圆柱面$x^2+(y-3)^2=9$上的点(见图 14.36)，其方程和 $xy$ 平面内柱面底部的极方程相同：

$$x^2+(y^2-6y+9)=9$$

$$r^2-6r\sin\theta=0\quad (x^2+y^2=r^2,\ y=r\sin\theta)$$

或

$$r=6\sin\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi$$

因此，柱面上典型点的坐标为

$$x=r\cos\theta=6\sin\theta\cos\theta=3\sin 2\theta$$

$$y=r\sin\theta=6\sin^2\theta$$

$$z=z$$

在方程(1)中取$u=\theta$，$v=z$给出参数表示

$$\boldsymbol{r}(\theta,z)=(3\sin 2\theta)\boldsymbol{i}+(6\sin^2\theta)\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

$$0\leqslant\theta\leqslant\pi,\quad 0\leqslant z\leqslant 5$$

■

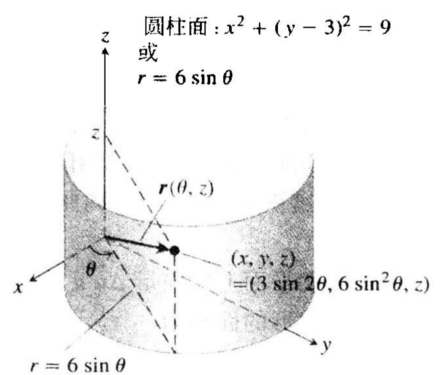



图 14.36 例 3 中的圆柱面可以用柱面坐标给出参数表示

### 14.5.2 曲面面积

我们的目标是求计算基于参数表示

$$\boldsymbol{r}(u,v)=f(u,v)\boldsymbol{i}+g(u,v)\boldsymbol{j}+h(u,v)\boldsymbol{k},\quad a\leqslant u\leqslant b,\quad c\leqslant v\leqslant d$$

的曲面 $S$ 的面积的二重积分. 为了我们打算实现的构造，要求 $S$ 是光滑的. 光滑性的定义涉及 $\boldsymbol{r}$ 对 $u$ 和 $v$ 的偏导数：

$$\boldsymbol{r}_u=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial u}\boldsymbol{i}+\frac{\partial g}{\partial u}\boldsymbol{j}+\frac{\partial h}{\partial u}\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r}_v=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial v}\boldsymbol{i}+\frac{\partial g}{\partial v}\boldsymbol{j}+\frac{\partial h}{\partial v}\boldsymbol{k}$$

**定义** 在曲面的参数表示

$$\boldsymbol{r}(u,v)=f(u,v)\boldsymbol{i}+g(u,v)\boldsymbol{j}+h(u,v)\boldsymbol{k}$$

中，如果偏导数 $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 是连续的，并且在参数定义域内部上不会为零向量，那么曲面是光滑的.

光滑性定义中 $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ 不会为零向量的条件，意味着 $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 是非零向量，并且这两个向量不会在同一条直线上，所以它们总是决定一个同曲面相切的平面. 我们在定义域的边界上放宽这个条件，但是这样并不影响面积的计算.

现在考虑 $R$ 中的一个小的矩形 $\Delta A_{uv}$，它的边在直线 $u=u_0$，$u=u_0+\Delta u$，$v=v_0$，$v=v_0+\Delta v$ 上(见图 14.37). $\Delta A_{uv}$ 的每条边映射到曲面 $S$ 上的一段曲线，而这四段曲线共同限定一个"曲面面积元"$\Delta\sigma_{uv}$. 按照图中的记号，边 $v=v_0$ 映射到曲线段 $C_1$，边 $u=u_0$ 映射到 $C_2$，它们的公共顶点 $(u_0,v_0)$ 映射到 $P_0$.

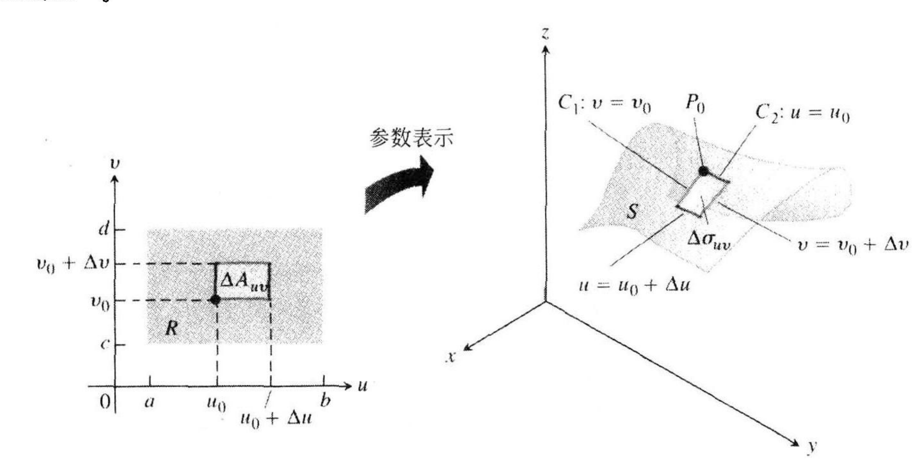



图 14.37 $uv$ 平面内矩形面积元 $\Delta A_{uv}$ 映射到 $S$ 上的曲面面积元 $\Delta\sigma_{uv}$

图 14.38 显示 $\Delta\sigma_{uv}$ 放大后的图形. 向量 $\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)$ 在 $P_0$ 同 $C_1$ 相切. 同样，$\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)$ 在 $P_0$ 同 $C_2$ 相切. 向量积 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$ 在 $P_0$ 同曲面正交.(这里开始用到 $S$ 是光滑曲面的假设. 我们必须保证 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq 0$.)

下面用切平面上以向量 $\Delta u\,\boldsymbol{r}_u$ 和 $\Delta v\,\boldsymbol{r}_v$ 为边的平行四边形逼近曲面面积元 $\Delta\sigma_{uv}$(见图 14.39). 这个平行四边形的面积为

$$|\Delta u\,\boldsymbol{r}_u\times\Delta v\,\boldsymbol{r}_v| = |\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,\Delta u\,\Delta v \tag{2}$$

$uv$ 平面内由矩形区域 $\Delta A_{uv}$ 构成的区域 $R$ 的一个划分，导致曲面 $S$ 上由曲面面积元 $\Delta\sigma_{uv}$ 构成的一个划分. 我们用公式(2)中的平行四边形的面积逼近每个曲面面积元 $\Delta\sigma_{uv}$ 的面积，并且把这些面积加在一起获得 $S$ 面积的逼近：

$$\sum_n |\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,\Delta u\,\Delta v \tag{3}$$

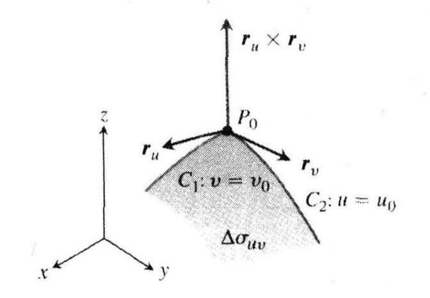



图 14.38 曲面面积元 $\Delta\sigma_{uv}$ 放大后的图形

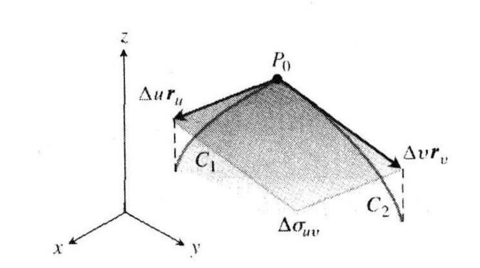



图 14.39 由向量 $\Delta u\,\boldsymbol{r}_u$ 和 $\Delta v\,\boldsymbol{r}_v$ 决定的平行四边形逼近曲面面积元 $\Delta\sigma_{uv}$

当 $\Delta u$ 和 $\Delta v$ 独立地趋近零时，面积元的数目 $n$ 趋近$\infty$，而 $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 的连续性保证式(3)中的和趋近二重积分

$$\int_c^d\int_a^b |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$$

在区域 $R$ 上的这个二重积分定义曲面 $S$ 的面积.

**定义** 光滑曲面

$$\boldsymbol{r}(u,v) = f(u,v)\boldsymbol{i} + g(u,v)\boldsymbol{j} + h(u,v)\boldsymbol{k},\quad a \leqslant u \leqslant b,\quad c \leqslant v \leqslant d$$

的面积为

$$A = \iint_R |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, \mathrm{d}A = \int_c^d\int_a^b |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \tag{4}$$

用曲面面积微分 $\mathrm{d}\sigma$ 代替 $|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$，可以简化公式(4)中的积分. 曲面面积微分 $\mathrm{d}\sigma$ 类似于 11.3 节中的弧长微分 $\mathrm{d}s$.

**参数化曲面的面积微分**

$$\mathrm{d}\sigma = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \qquad \iint_S \mathrm{d}\sigma \tag{5}$$

（曲面面积微分） （曲面面积的微分公式）

**例 4** 求例 1 中的圆锥面的曲面面积(见图 14.34).

**解** 在例 1 中，我们求出了圆锥面的参数表示

$$\boldsymbol{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\boldsymbol{i} + (r\sin\theta)\boldsymbol{j} + r\boldsymbol{k},\quad 0 \leqslant r \leqslant 1,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

为了应用公式(4)，首先求 $\boldsymbol{r}_r\times\boldsymbol{r}_\theta$:

$$\boldsymbol{r}_r \times \boldsymbol{r}_\theta = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = -(r\cos\theta)\boldsymbol{i} - (r\sin\theta)\boldsymbol{j} + \underbrace{(r\cos^2\theta + r\sin^2\theta)}_{r}\boldsymbol{k}$$

因此，

$$|\boldsymbol{r}_r \times \boldsymbol{r}_\theta| = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + r^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r$$

圆锥面的面积为

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^1 |\boldsymbol{r}_r \times \boldsymbol{r}_\theta|\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta \quad (\text{公式(4) 取 } u = r,\ v = \theta)$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2}r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{2}\, \mathrm{d}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(2\pi) = \pi\sqrt{2} \text{ 平方单位}$$

■

**例 5** 求半径为 $a$ 的球面的面积.

**解** 利用例 2 中的参数表示：

$$\boldsymbol{r}(\phi,\theta) = (a\sin\phi\cos\theta)\boldsymbol{i} + (a\sin\phi\sin\theta)\boldsymbol{j} + (a\cos\phi)\boldsymbol{k},$$
$$0 \leqslant \phi \leqslant \pi,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

对于 $\boldsymbol{r}_\phi\times\boldsymbol{r}_\theta$，我们得到

$$\boldsymbol{r}_\phi \times \boldsymbol{r}_\theta = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi\sin\theta & -a\sin\phi \\ -a\sin\phi\sin\theta & a\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (a^2\sin^2\phi\cos\theta)\boldsymbol{i} + (a^2\sin^2\phi\sin\theta)\boldsymbol{j} + (a^2\sin\phi\cos\phi)\boldsymbol{k}$$

因此，

$$|\boldsymbol{r}_\phi \times \boldsymbol{r}_\theta| = \sqrt{a^4\sin^4\phi\cos^2\theta + a^4\sin^4\phi\sin^2\theta + a^4\sin^2\phi\cos^2\phi}$$

$$= \sqrt{a^4\sin^4\phi + a^4\sin^2\phi\cos^2\phi} = \sqrt{a^4\sin^2\phi(\sin^2\phi+\cos^2\phi)} = a^2\sqrt{\sin^2\phi} = a^2\sin\phi$$

由于对于$0 \leqslant \phi \leqslant \pi$，$\sin\phi \geqslant 0$. 所以，球面的面积为

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\Big[-a^2\cos\phi\Big]_0^{\pi}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}2a^2\mathrm{d}\theta = 4\pi a^2 \text{ 平方单位}$$

这个结果同我们熟知的球面面积公式相符. ■

### 14.5.3 隐式曲面

曲面经常表示成函数的层曲面集合，由

$$F(x,y,z) = c$$

这样的方程描述，其中$c$是某个常数. 这样的层曲面不用显式的参数表示，称为*隐式定义曲面*. 这种隐式曲面，例如在电场或者重力场中以等势面的形式出现. 图 14.40 显示一块这样的曲面. 对于这种曲面，可能很难求出函数$f,g,h$的显式公式，借以把曲面表示成

$$\boldsymbol{r}(u,v) = f(u,v)\boldsymbol{i} + g(u,v)\boldsymbol{j} + h(u,v)\boldsymbol{k}$$

的形式. 现在我们说明如何计算隐式曲面的面积微分$\mathrm{d}\sigma$.

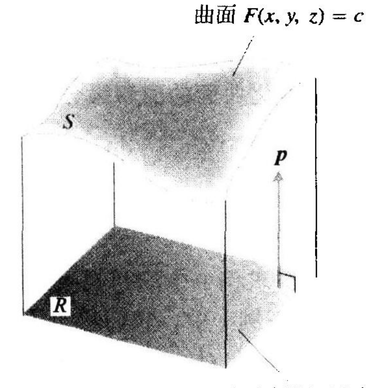



图 14.40 立刻会看到，空间中曲面$S$的面积，可以通过在坐标平面内$S$的垂直投影或"影子"上求相关的二重积分来计算；单位向量$\boldsymbol{p}$同平面正交

图 14.40 显示一块隐式曲面$S$，它位于它下面的平面"影子"区域$R$之上. 曲面由方程$F(x,y,z)=c$定义，而$\boldsymbol{p}$是同平面区域$R$正交的单位向量. 我们假定曲面是**光滑的**($F$是可微的，$\nabla F$在$S$上不为零并且是连续的)，同时$\nabla F \cdot \boldsymbol{p} \neq 0$，所以曲面不会自折叠.

假设法向量$\boldsymbol{p}$是单位向量$\boldsymbol{k}$，所以图 14.40 中的区域$R$位于$xy$平面内. 依据假设，这时在$S$上有$\nabla F \cdot \boldsymbol{p} = \nabla F \cdot \boldsymbol{k} = F_z \neq 0$. 高等微积分有一个称为隐函数定理的定理，指出这种情况下$S$是某个可微函数$z=h(x,y)$的图形，虽然不知道函数$h(x,y)$的显式表示. 用$u=x$和$v=y$定义参数. 于是$z=h(u,v)$，并且

$$\boldsymbol{r}(u,v) = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + h(u,v)\boldsymbol{k} \tag{6}$$

给出曲面$S$的参数表示. 我们利用公式(4)求$S$的面积.

计算$\boldsymbol{r}$的偏导数，得到

$$\boldsymbol{r}_u = \boldsymbol{i} + \frac{\partial h}{\partial u}\boldsymbol{k} \quad 和 \quad \boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{j} + \frac{\partial h}{\partial v}\boldsymbol{k}$$

对$F(x,y,z)=c$应用隐式微分法的链式法则(12.4 节定理 8)，其中$x=u$，$y=v$，$z=h(u,v)$，得到偏导数

$$\frac{\partial h}{\partial u} = -\frac{F_x}{F_z} \quad 和 \quad \frac{\partial h}{\partial v} = -\frac{F_y}{F_z}$$

把$h$的这两个偏导数代入$\boldsymbol{r}$的偏导数，给出

$$\boldsymbol{r}_u = \boldsymbol{i} - \frac{F_x}{F_z}\boldsymbol{k} \quad 和 \quad \boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{j} - \frac{F_y}{F_z}\boldsymbol{k}$$

由向量积的例行计算求出

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v &= \frac{F_x}{F_z}\boldsymbol{i} + \frac{F_y}{F_z}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \qquad (F_z \neq 0) \\ &= \frac{1}{F_z}(F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}) = \frac{\nabla F}{F_z} = \frac{\nabla F}{\nabla F \cdot \boldsymbol{k}} \\ &= \frac{\nabla F}{\nabla F \cdot \boldsymbol{p}} \qquad (\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}) \end{aligned}$$

因此，曲面面积微分由

$$\mathrm{d}\sigma = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad (u = x \text{ 和 } v = y)$$

给出.

如果不用 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{k}$ 而用 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{j}$ 为 $S$ 上当 $F_y \neq 0$ 时同 $xz$ 平面正交的向量，或者用 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{i}$ 为 $S$ 上当 $F_x \neq 0$ 时同 $yz$ 平面正交的向量，我们得到类似的计算结果. 把这些结果同公式(4)结合起来，就给出下面的一般公式.

**隐式曲面的面积公式**

在闭有界平面区域 $R$ 上，曲面 $F(x,y,z)=c$ 的面积公式为

$$\text{曲面面积} = \iint_R \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{p}$ 是同 $R$ 正交的单位向量，并且 $\nabla F \cdot \boldsymbol{p} \neq 0$.

这样，曲面面积是 $\nabla F$ 的值除以 $\nabla F$ 同 $R$ 正交的纯量分量的值在 $R$ 上的二重积分.

曲面的面积公式(7)是在两个假定下得到的：在整个 $R$ 上 $\nabla F \cdot \boldsymbol{p} \neq 0$，并且 $\nabla F$ 是连续的. 但是，只要公式中的积分存在，我们就把它的值定义为曲面 $F(x, y, z)=c$ 在区域 $R$ 上的部分的面积.（回忆一下，假定投影是一对一的.）

**例 6** 求从抛物面 $x^2+y^2-z=0$ 的底部用平面 $z=4$ 切割的曲面面积.

**解** 画出曲面 $S$ 和 $xy$ 平面内在它下面的区域 $R$ 的草图(见图 14.41). 曲面 $S$ 是层面 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z=0$ 的一部分，$R$ 是 $xy$ 平面内的圆盘 $x^2+y^2 \leq 4$. 为了获得同 $R$ 的平面正交的单位向量，可以取 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{k}$.

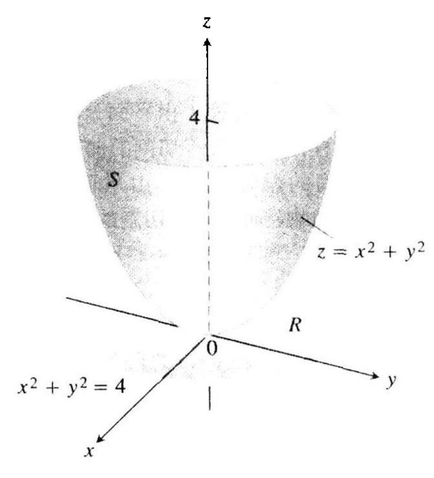



图 14.41 这个抛物面是例 6 中计算的面积

在曲面上的任何点 $(x,y,z)$，我们有

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= x^2+y^2-z \\ \nabla F &= 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} \\ |\nabla F| &= \sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(-1)^2} \\ &= \sqrt{4x^2+4y^2+1} \\ |\nabla F \cdot \boldsymbol{p}| &= |\nabla F, \boldsymbol{k}| = |-1| = 1 \end{aligned}$$

在区域 $R$ 内，$\mathrm{d}A=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. 因此，

$$\begin{aligned} \text{曲面面积} &= \iint_R \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A \quad (\text{公式(7)}) \\ &= \iint_{x^2+y^2\leq 4} \sqrt{4x^2+4y^2+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{4r^2+1}\ r\,dr\,d\theta \quad (极坐标)$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{12}(4r^2+1)^{3/2}\right]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{12}(17^{3/2}-1)\,d\theta = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1)$$ ■

对于在 $xy$ 平面内的区域 $R$ 上 $z=f(x,y)$ 的图形，曲面面积公式为

$$A = \iint_R \sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\ dx\,dy$$

(参见习题49 ~ 55.)

## 习题 14.5

在习题 1 ~ 16 中，求曲面的参数表示.（存在多种求曲面参数表示的正确方法，所以你的答案可能同本书给出的答案不一样.）

**1.** 抛物面 $z=x^2+y^2$，$z\leqslant 4$.

**2.** 抛物面 $z=9-x^2-y^2$，$z\geqslant 0$.

**3. 圆锥平截头** 圆锥面 $z=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$ 在第一卦限内介于平面 $z=0$ 和 $z=3$ 之间的部分.

**4. 圆锥平截头** 圆锥面 $z=2\sqrt{x^2+y^2}$ 在平面 $z=2$ 和 $z=4$ 之间的部分.

**5. 球形盖** 由圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 从球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 切割的顶盖.

**6. 球形盖** 球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 在第一卦限内介于 $xy$ 平面和圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 之间的部分.

**7. 球形带** 球面 $x^2+y^2+z^2=3$ 在平面 $z=\sqrt{3}/2$ 和 $z=-\sqrt{3}/2$ 之间的部分.

**8. 球形盖** 由平面 $z=-2$ 从球面 $x^2+y^2+z^2=8$ 切割的上半部分.

**9. 平面之间的抛物柱面** 由平面 $x=0$，$x=2$ 和 $z=0$ 从抛物柱面 $z=4-y^2$ 切割的曲面.

**10. 平面之间的抛物柱面** 由平面 $z=0$，$z=3$ 和 $y=2$ 从抛物柱面 $y=x^2$ 切割的曲面.

**11. 圆柱形带** 圆柱面 $y^2+z^2=9$ 在平面 $x=0$ 和 $x=3$ 之间的部分.

**12. 圆柱形带** 圆柱面 $x^2+z^2=4$ 在 $xy$ 平面之上介于平面 $y=-2$ 和 $y=2$ 之间的部分.

**13. 圆柱面内的倾斜平面** 平面 $x+y+z=1$ 的以下部分：

(a) 在圆柱面 $x^2+y^2=9$ 的内部；

(b) 在圆柱面 $y^2+z^2=9$ 的内部.

**14. 圆柱面内的倾斜平面** 平面 $x-y+2z=2$ 的以下部分：

(a) 在圆柱面 $x^2+z^2=3$ 的内部；

(b) 在圆柱面 $y^2+z^2=2$ 的内部.

**15. 圆柱形带** 圆柱面 $(x-2)^2+z^2=4$ 在平面 $y=0$ 和 $y=3$ 之间的部分.

**16. 圆柱形带** 圆柱面 $y^2+(z-5)^2=25$ 在平面 $x=0$ 和 $x=10$ 之间的部分.

在习题 17 ~ 26 中，利用参数表示把曲面的面积表示成二重积分. 然后求积分.（存在多种建立积分的正确方法，所以你得到的积分可能同本书给出的答案不一样. 但是，它们应具有相同的值.）

**17. 圆柱面内的倾斜平面** 平面 $y+2z=2$ 在圆柱面 $x^2+y^2=1$ 内部的部分.

**18. 圆柱面内的平面** 平面 $z=-x$ 在圆柱面 $x^2+y^2=4$ 内部的部分.

**19. 圆锥平截头** 圆锥面 $z=2\sqrt{x^2+y^2}$ 在平面 $z=2$ 和 $z=6$ 之间的部分.

**20. 圆锥平截头** 圆锥面 $z=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}$ 在平面 $z=1$ 和 $z=\dfrac{4}{3}$ 之间的部分.

**21. 圆柱形带** 圆柱面 $x^2+y^2=1$ 在平面 $z=1$ 和 $z=4$ 之间的部分.

**22. 圆柱形带** 圆柱面 $x^2+z^2=10$ 在平面 $y=-1$ 和 $y=1$ 之间的部分.

**23. 抛物形盖** 由圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 从抛物面 $z=2-x^2-y^2$ 中切割的顶盖.

**24. 抛物形带** 抛物面 $z=x^2+y^2$ 在平面 $z=1$ 和 $z=4$ 之间的部分.

**25. 锯下的球面** 由圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 从球面 $x^2+y^2+z^2=2$ 切割的下半部分.

**26. 球形带** 球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 在平面 $z=-1$ 和 $z=\sqrt{3}$ 之间的部分.

**同参数化曲面相切的平面** 在参数化曲面

$$\boldsymbol{r}(u,v) = f(u,v)\boldsymbol{i} + g(u,v)\boldsymbol{j} + h(u,v)\boldsymbol{k}$$

上一点 $P_0(f(u_0,v_0),\ g(u_0,v_0),\ h(u_0,v_0))$ 的切平面，是通过 $P_0$ 同在 $P_0$ 的切向量 $\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)$ 和 $\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)$ 的向量积向量 $\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)\times\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)$ 正交的平面. 在习题27 ~ 30 中，求在 $P_0$ 同曲面相切的平面的方

程. 然后求曲面的笛卡儿方程，并且一起绘制曲面和切平面的草图.

**27. 圆锥面** 圆锥面

$\boldsymbol{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\boldsymbol{i} + (r\sin\theta)\boldsymbol{j} + r\boldsymbol{k}, r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

在对应于$(r,\theta)=(2,\pi/4)$的点$P_0(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$.

**28. 半球面** 半球面

$\boldsymbol{r}(\phi,\theta) = (4\sin\phi\cos\theta)\boldsymbol{i} + (4\sin\phi\sin\theta)\boldsymbol{j} + (4\cos\phi)\boldsymbol{k},$
$0 \leq \phi \leq \pi/2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

在对应于$(\phi,\theta)=(\pi/6,\pi/4)$的点$P_0(\sqrt{2},\sqrt{2},2\sqrt{3})$.

**29. 圆柱面** 圆柱面

$\boldsymbol{r}(\theta,z) = (3\sin 2\theta)\boldsymbol{i} + (6\sin^2\theta)\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, 0 \leq \theta \leq \pi$

在对应于$(\theta,z)=(\pi/3,0)$的点$P_0(3\sqrt{3}/2, 9/2, 0)$(参见例1).

**30. 抛物柱面** 抛物柱面

$$\boldsymbol{r}(x,y) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - x^2\boldsymbol{k},$$
$$-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$$

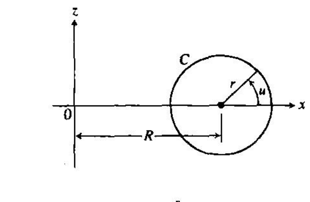
在对应于$(x,y)=(1,2)$的点$P_0(1,2,-1)$.

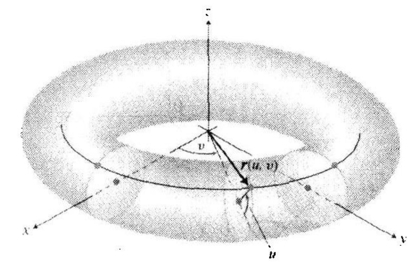
**31.** (**a**)旋转环形面(环形壳)是在空间中$z$平面内绕$z$轴旋转一个圆$C$获得的(参见附图). 如果$C$有半径$r>0$和以$(R,0,0)$为圆心，证明环形面的参数表示为

$$\boldsymbol{r}(u,v) = ((R + r\cos u)\cos v)\boldsymbol{i} + ((R + r\cos u)\sin v)\boldsymbol{j} + (r\sin u)\boldsymbol{k}$$

其中$0\leq u\leq 2\pi$和$0\leq v\leq 2\pi$是图形中的角.

(**b**)证明环形面的面积等于$A=4\pi^2 Rr$.



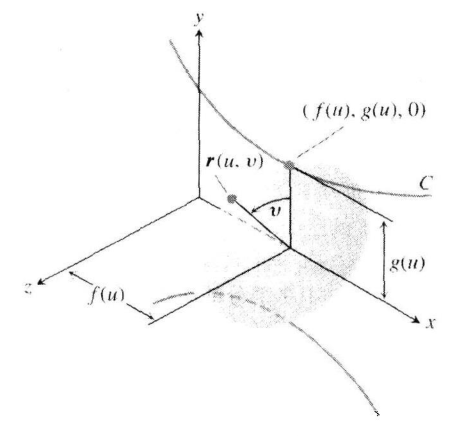




**32. 旋转曲面的参数表示** 假定参数化曲线$C$: $(f(u), g(u))$是绕$x$轴旋转，其中$g(u)>0$, $a\leq u\leq b$.

(**a**)证明:

$$\boldsymbol{r}(u,v) = f(u)\boldsymbol{i} + (g(u)\cos v)\boldsymbol{j} + (g(u)\sin v)\boldsymbol{k}$$

是所产生旋转曲面的参数表示，其中$0\leq v\leq 2\pi$是从$xy$平面到曲面上点$\boldsymbol{r}(u,v)$的角(参见附图). 注意，$f(u)$度量沿旋转轴的距离，$g(u)$度量离旋转轴的距离。




(**b**)求绕$x$轴旋转曲线$x=y^2$, $y\geq 0$所得曲面的参数表示.

**33.** (**a**)**椭球面的参数表示** 回忆椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的参数表示$x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$, $0\leq\theta\leq 2\pi$(见3.5节例11). 利用球面坐标中的角$\theta$和$\phi$证明:

$$\boldsymbol{r}(\theta,\phi) = (a\cos\theta\cos\phi)\boldsymbol{i} + (b\sin\theta\cos\phi)\boldsymbol{j} + (c\sin\phi)\boldsymbol{k}$$

是椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的参数表示.

(**b**)写出椭球面面积的积分，但是不求积分值.

**34. 单叶双曲面**

(**a**)求单叶双曲面$x^2+y^2-z^2=1$的参数表示，用同圆$x^2+y^2=r^2$相关的角$\theta$以及同双曲函数$r^2-z^2=1$相关的双曲参数$u$作为参数. (提示: $\cosh^2 u-\sinh^2 u=1$.)

(**b**)把(a)中的结果推广到双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

**35.** (续习题34)求同双曲面$x^2+y^2-z^2=25$在点$(x_0, y_0, 0)$相切的平面的笛卡儿方程，其中$x_0^2+y_0^2=25$.

**36. 双叶双曲面** 求双叶双曲面$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的参数表示.

**37.** 求由平面$z=2$从抛物面$x^2+y^2-z=0$切割的曲面的面积.

**38.** 求由平面$z=2$和$z=6$从抛物面$x^2+y^2-z=0$切割的抛物形带的面积.

**39.** 求由柱壁为 $x=y^2$ 和 $x=2-y^2$ 的柱面从平面 $x+2y+2z=5$ 切割的区域的面积.

**40.** 求曲面 $x^2-2z=0$ 位于 $xy$ 平面内以直线 $x=\sqrt{3}$，$y=0$ 和 $y=x$ 为界的三角形之上部分的面积.

**41.** 求曲面 $x^2-2y-2z=0$ 位于 $xy$ 平面内以直线 $x=2$，$y=0$ 和 $y=3x$ 为界的三角形之上部分的面积.

**42.** 求由圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 从球面 $x^2+y^2+z^2=2$ 切割的顶盖的面积.

**43.** 求由圆柱面从平面 $z=cx$（$c$ 为常数）切割的椭圆 $x^2+y^2=1$ 的面积.

**44.** 求圆柱面 $x^2+z^2=1$ 位于平面 $x=\pm 1/2$ 和 $y=\pm 1/2$ 之间的上半部分的面积.

**45.** 求抛物面 $x=4-y^2-z^2$ 位于 $yz$ 平面内圆环 $1\leqslant y^2+z^2\leqslant 4$ 之上部分的面积.

**46.** 求由平面 $y=0$ 从抛物面 $x^2+y+z^2=2$ 切割的曲面的面积.

**47.** 求曲面 $x^2-2\ln x+\sqrt{15}y-z=0$ 在 $xy$ 平面内正方形 $R$：$1\leqslant x\leqslant 2$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 之上部分的面积.

**48.** 求曲面 $2x^{3/2}+2y^{3/2}-3z=0$ 在 $xy$ 平面内正方形 $R$：$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 之上部分的面积.

**显式曲面的面积** 如果 $S$ 是由函数 $z=f(x,y)$ 定义的曲面，$f$ 在 $xy$ 平面内一个完整区域 $R_{xy}$ 上有连续的一阶偏导数（见图 14.42），那么 $S$ 也是函数 $F(x,y,z)=f(x,y)-z$ 的层曲面 $F(x,y,z)=0$. 取 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{k}$ 为同 $R_{xy}$ 正交的单位向量，于是给出

$$|\nabla F|=|f_x\boldsymbol{i}+f_y\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}|=\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}$$

$$|\nabla F\cdot\boldsymbol{p}|=|(f_x\boldsymbol{i}+f_y\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{k}|=|-1|=1$$

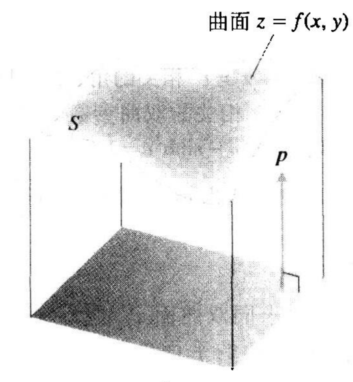



图 14.42 对于曲面 $z=f(x,y)$，曲面面积公式(7)的形式为

$$A=\iint\limits_{R_{xy}}\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

和面积公式

$$A=\iint\limits_{R_{xy}}\frac{|\nabla F|}{|\nabla F\cdot\boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A=\iint\limits_{R_{xy}}\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \quad (8)$$

同样，光滑曲面 $x=f(y,z)$ 在 $yz$ 平面内区域 $R_{yz}$ 之上的面积为

$$A=\iint\limits_{R_{yz}}\sqrt{f_y^2+f_z^2+1}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z \quad (9)$$

光滑曲面 $y=f(x,z)$ 在 $xz$ 平面内区域 $R_{xz}$ 之上的面积为

$$A=\iint\limits_{R_{xz}}\sqrt{f_x^2+f_z^2+1}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}z \quad (10)$$

在习题 49 ~ 54 中，利用公式(8) ~ (10)求曲面的面积.

**49.** 由平面 $z=3$ 从抛物面 $z=x^2+y^2$ 底部切割的曲面.

**50.** 由 $yz$ 平面从抛物面 $x=1-y^2-z^2$ 的“鼻子”切割的曲面.

**51.** 圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 位于 $xy$ 平面内的圆 $x^2+y^2=1$ 和椭圆 $9x^2+4y^2=36$ 之间的区域之上的部分.（提示：利用几何公式求区域面积.）

**52.** 由第一卦限的界平面从平面 $2x+6y+3z=6$ 切割三角形. 用三种方法计算面积，一次用一个面积公式.

**53.** 由平面 $x=1$ 和 $y=16/3$ 从柱面 $y=(2/3)z^{3/2}$ 在第一卦限切割的曲面.

**54.** 平面 $y+z=4$ 位于由抛物线 $x=4-z^2$ 从 $xz$ 平面内第一象限切割的区域之上的部分.

**55.** 利用参数表示

$$\boldsymbol{r}(x,y)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+f(x,y)\boldsymbol{k}$$

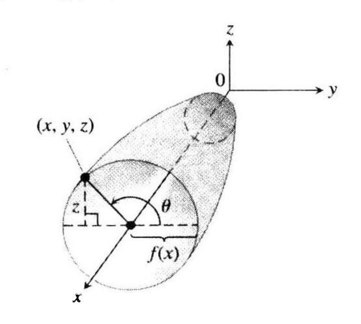
和公式(5)推导公式(8)中对于 $\mathrm{d}\sigma$ 的二重积分公式.

**56.** 令 $S$ 是由光滑曲线 $y=f(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$ 绕 $x$ 轴旋转得到的曲面，其中 $f(x)\geqslant 0$.

**(a)** 证明：向量函数

$$\boldsymbol{r}(x,\theta)=x\boldsymbol{i}+f(x)\cos\theta\,\boldsymbol{j}+f(x)\sin\theta\,\boldsymbol{k}$$

是 $S$ 的参数表示，其中 $\theta$ 是绕 $x$ 轴的旋转角（参见附图）.




**(b)** 利用公式(4)证明：这个旋转曲面的面积由

$$A=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\ \mathrm{d}x$$

给出.

## 14.6 面积分与通量

为了计算像流体穿过弯曲形状的薄膜的流量或者作用于降落伞的向上力这样的量，我们需要求函数在空间中的曲面上的积分. 这种*面积分*的概念是在曲线上求积分的线积分概念的推广.

### 14.6.1 面积分

例如，假定有一片分布在曲面 $S$ 上的电荷，由函数 $G(x,y,z)$ 给出在 $S$ 上每个点的电荷密度(每单位面积上的电荷量). 那么，我们可以用下面的方法把分布在 $S$ 上的总电荷作为一个积分来计算.

像在 14.5 节那样，假定曲面 $S$ 以参数形式

$$\boldsymbol{r}(u,v)=f(u,v)\boldsymbol{i}+g(u,v)\boldsymbol{j}+h(u,v)\boldsymbol{k},\quad (u,v)\in R$$

定义在 $uv$ 平面内的区域 $R$ 上. 在图 14.37 中，我们已经见过 $R$ 的一个细分(为简单起见考虑的细分为矩形)如何把曲面 $S$ 分成面积为

$$\Delta\sigma_{u,v}\approx|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

的对应的曲面元或者拼片.

当我们在 13.1 节定义二重积分作细分时，对曲面元拼片用某种顺序编号，以 $\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$，$\cdots$，$\Delta\sigma_n$ 给出它们的面积. 为了建立在 $S$ 上的黎曼和，我们在第 $k$ 个拼片中选取一点$(x_k,y_k,z_k)$，用面积 $\Delta\sigma_k$ 乘函数 $G$ 在这个点的值，然后把这些乘积加在一起：

$$\sum_{k=1}^{n}G(x_k,y_k,z_k)\Delta\sigma_k$$

依赖于在第 $k$ 个拼片中对点$(x_k,y_k,z_k)$的不同选择，我们可能得到这个黎曼和的不同值. 然后当曲面拼片的数目增加以及它们的面积缩小为零时，取黎曼和的极限. 这个极限只要存在，就把 **$G$ 在曲面 $S$ 上的面积分**定义为

$$\iint_S G(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}G(x_k,y_k,z_k)\Delta\sigma_k \tag{1}$$

注意，这个积分定义同二重积分的定义(13.1 节)和线积分的定义(14.1 节)类似. 如果 $S$ 是分片光滑的曲面，$G$ 在 $S$ 上连续，那么可以证明由公式(1)定义的面积分存在.

求面积分的公式取决于用参数方式或者显式方式描述曲面 $S$，像在 14.5 节中讨论的那样.

**计算面积分的公式**

**(1)** 对于用参数方式定义为 $\boldsymbol{r}(u,v)=f(u,v)\boldsymbol{i}+g(u,v)\boldsymbol{j}+h(u,v)\boldsymbol{k}$，$(u,v)\in R$ 的曲面 $S$，以及在 $S$ 上定义的连续函数 $G(x,y,z)$，$G$ 在 $S$ 上的面积分由 $R$ 上的二重积分给出：

$$\iint_S G(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_R G(f(u,v),g(u,v),h(u,v))\,|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{2}$$

**(2)** 对于用隐式方式以 $F(x,y,z)=c$ 给出的曲面 $S$，其中 $F$ 是连续的可微函数，如果 $S$ 位于它下方坐标平面内的闭有界阴影区域 $R$ 之上，连续函数 $G$ 在 $S$ 上的面积分由它在 $R$ 上的二重积分给出：

$$\iint_S G(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_R G(x,y,z)\,\frac{|\nabla F|}{|\nabla F\cdot\boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{p}$ 是同 $R$ 正交的单位向量，并且 $\nabla F\cdot\boldsymbol{p}\neq0$.

公式(1)中的面积分在不同的应用领域有不同的含义. 如果 $G$ 取常数值 1，积分给出曲面 $S$ 的面积. 如果 $G$ 是取曲面 $S$ 形状的壳体的质量密度，积分给出壳体的质量.

**例 1** 求 $G(x,y,z)=x^2$ 在圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$0\leqslant z\leqslant 1$ 上的积分.

**解** 利用公式(2)和 14.5 节中的计算步骤，得到 $|\boldsymbol{r}_r\times\boldsymbol{r}_\theta|=\sqrt{2}r$ 和

$$\iint_S x^2\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\int_0^1(r^2\cos^2\theta)(\sqrt{2}r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\qquad(x=r\cos\theta)$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos^2\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\qquad\blacksquare$$

面积分具有其他二重积分的同样特性，例如，两个函数之和的积分等于它们的积分之和，等等. 积分区域可加性的形式为

$$\iint_S G\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{S_1}G\,\mathrm{d}\sigma+\iint_{S_2}G\,\mathrm{d}\sigma+\cdots+\iint_{S_n}G\,\mathrm{d}\sigma$$

意思是如果把光滑曲面划分成有限个非交叠的光滑拼片(即是说，如果 $S$ 是**分片光滑的**)，那么函数在曲面 $S$ 上的积分等于在拼片上的积分之和. 因此，函数在立方体曲面上的积分是它在立方体上各个面上的积分之和. 为了求函数在龟壳曲面上的积分，我们一次求在一片龟甲上的积分，然后对结果求和.

**例 2** 求 $G(x,y,z)=xyz$ 在由平面 $x=1$，$y=1$ 和 $z=1$ 从第一卦限切出的立方体表面上的积分(见图 14.43).

**解** 我们求 $G(x,y,z)=xyz$ 在立方体六个侧面的每个面上的积分，然后对结果求和. 由于在三个坐标平面的侧面上 $xyz=0$，在立方体表面上的积分化简成

图 14.43 例 2 中的立方体

$$\iint_{\text{立方体表面}}xyz\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{\text{侧面}A}xyz\,\mathrm{d}\sigma+\iint_{\text{侧面}B}xyz\,\mathrm{d}\sigma+\iint_{\text{侧面}C}xyz\,\mathrm{d}\sigma$$

侧面 $A$ 是在 $xy$ 平面内的正方形区域 $R_{xy}$：$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 上的曲面 $f(x,y,z)=z=1$. 对于这个曲面和区域，

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{k},\quad\nabla f=\boldsymbol{k},\quad|\nabla f|=1,\quad|\nabla f\cdot\boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}|=1$$

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot\boldsymbol{p}|}\mathrm{d}A=\frac{1}{1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$xyz=xy(1)=xy$$

并且

$$\iint_{\text{侧面}A}xyz\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{R_{xy}}xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^1 xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{y}{2}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{4}$$

对称性表明，$G(x,y,z)=xyz$ 在侧面 $B$ 和 $C$ 上的积分也是 1/4. 因此，

$$\iint_{\text{立方体表面}}xyz\,\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\qquad\blacksquare$$

### 14.6.2 定向

我们称光滑曲面 $S$ 是**可定向的**或者**双侧的**，如果可能在 $S$ 上定义一个随位置连续变化的单位法向量场 $\boldsymbol{n}$. 可定向曲面的任何拼片或者子曲面是可定向的. 空间中的球面和其他闭光滑曲面(包围立体的光滑曲面)是可定向的. 按照约定，我们在闭曲面上选取指向外的法向量 $\boldsymbol{n}$.

一旦选定了 $\boldsymbol{n}$，就说曲面已经**定向**，并且把曲面及其法向量场 $\boldsymbol{n}$ 合称为**有向曲面**. 在任意点的向量 $\boldsymbol{n}$ 称为在那个点的**正方向**(见图 14.44).

图 14.45 中的默比乌斯带是不可定向的. 无论从何处开始建立连续的单位法向量场(在图中显

示为图钉的钉尖)，以所示方式绕曲面连续地移动向量，将以它出发时的反方向回到起点. 在那个点向量不能同时指向两个方向而向量场又必须是连续的. 我们得出不存在这样的场的结论.

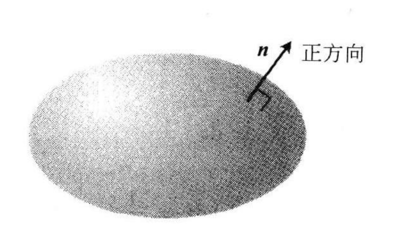



图 14.44 空间中的光滑闭曲面是可定向的，向外单位法向量定义每个点的正方向

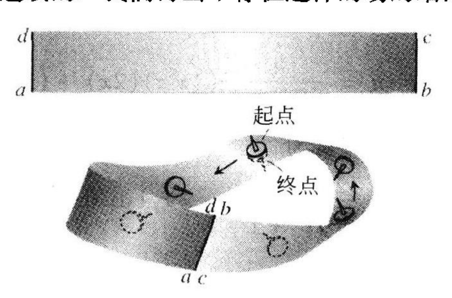



图 14.45 为了构造默比乌斯带，取一条矩形纸带 $abcd$，让 $bc$ 端作一次扭转，然后把纸带两端粘贴在一起，使 $a$ 与 $c$ 和 $b$ 与 $d$ 耦合；默比乌斯带是不可定向曲面或单侧曲面

### 14.6.3 关于通量的面积分

假定 $\boldsymbol{F}$ 是在有向曲面 $S$ 上定义的连续向量场，而 $\boldsymbol{n}$ 是在曲面上选定的单位法向量场. 我们把$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$在 $S$ 上的积分称为 $\boldsymbol{F}$ 在正方向穿过 $S$ 的通量. 因此，通量是 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 方向的纯量分量在 $S$ 上的积分.

**定义** 三维向量场 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 方向穿过曲面 $S$ 的**通量**公式是

$$\text{通量} = \iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma \tag{4}$$

这个定义类似于二维场 $\boldsymbol{F}$ 穿过平面曲线 $C$ 的通量. 在平面内(14.2 节)，通量为

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s$$

这是 $\boldsymbol{F}$ 在曲线法方向的纯量分量的积分.

如果 $\boldsymbol{F}$ 是三维流体流动的速度场，$\boldsymbol{F}$ 穿过 $S$ 的通量是流体在选取的正方向穿过 $S$ 的净速率. 在 14.7 节我们对这样的流动作更详细的讨论.

**例 3** 求 $\boldsymbol{F}=yz\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}-z^2\boldsymbol{k}$ 向外穿过抛物柱面 $y=x^2$，$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant z\leqslant 4$ 的通量(见图 14.46).

**解** 在抛物柱面上，$x=x$，$y=x^2$，$z=z$，所以自然有抛物柱面的参数表示

$$\boldsymbol{r}(x,z)=x\boldsymbol{i}+x^2\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant z\leqslant 4$$

两个切向量的向量积为

$$\boldsymbol{r}_x\times\boldsymbol{r}_z=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 2x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=2x\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$$

从柱面指向外的单位法向量是

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_x\times\boldsymbol{r}_z}{|\boldsymbol{r}_x\times\boldsymbol{r}_z|}=\frac{2x\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}}{\sqrt{4x^2+1}}$$

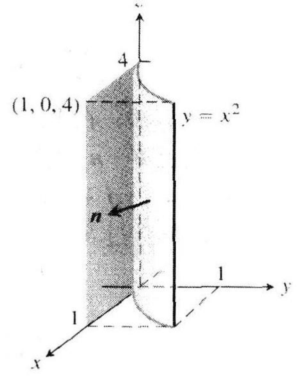



图 14.46 求穿过抛物柱面表面的通量(例 3)

在柱面上，$y=x^2$，所以向量场为

$$\boldsymbol{F} = yz\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} - z^2\boldsymbol{k} = x^2z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} - z^2\boldsymbol{k}$$

因此，

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}((x^2z)(2x)+(x)(-1)+(-z^2)(0)) = \frac{2x^3z-x}{\sqrt{4x^2+1}}$$

$\boldsymbol{F}$ 向外穿过柱面的流量为

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^4\int_0^1 \frac{2x^3z-x}{\sqrt{4x^2+1}}|\boldsymbol{r}_x\times\boldsymbol{r}_z|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \int_0^4\int_0^1 \frac{2x^3z-x}{\sqrt{4x^2+1}}\sqrt{4x^2+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^4\int_0^1(2x^3z-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \int_0^4\left[\frac{1}{2}x^4z-\frac{1}{2}x^2\right]_{x=0}^{x=1}\mathrm{d}z = \int_0^4\frac{1}{2}(z-1)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4}(z-1)^2\bigg]_0^4$$

$$= \frac{1}{4}(9) - \frac{1}{4}(1) = 2$$

■

如果 $S$ 是层曲面 $g(x,y,z)=c$ 的一部分，那么 $\boldsymbol{n}$ 可能取两个场

$$\boldsymbol{n} = \pm\frac{\nabla g}{|\nabla g|} \tag{5}$$

之中的一个，这取决于哪一个是喜欢选择的方向. 对应的通量是，

$$通量 = \iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iint_R\left(\boldsymbol{F}\cdot\frac{\pm\nabla g}{|\nabla g|}\right)\frac{|\nabla g|}{|\nabla g\cdot\boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A \quad (公式(5)和(3))$$

$$= \iint_R \boldsymbol{F}\cdot\frac{\pm\nabla g}{|\nabla g\cdot\boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A \tag{6}$$

**例 4** 求 $\boldsymbol{F}=yz\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$ 向外穿过由平面 $x=0$ 和 $x=1$ 从圆柱面 $y^2+z^2=1$，$z\geqslant 0$ 中切割的曲面 $S$ 的通量.

**解** 在 $S$ 上可以从 $g(x,y,z)=y^2+z^2$ 的梯度计算的外法向量场(见图 14.47)是

$$\boldsymbol{n} = +\frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}}{\sqrt{4y^2+4z^2}} = \frac{2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}}{2\sqrt{1}} = y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

取 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{k}$，又有

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{|\nabla g|}{|\nabla g\cdot\boldsymbol{k}|}\,\mathrm{d}A = \frac{2}{|2z|}\,\mathrm{d}A = \frac{1}{z}\,\mathrm{d}A$$

由于在 $S$ 上 $z\geqslant 0$，在上式中可以取消绝对值符号.

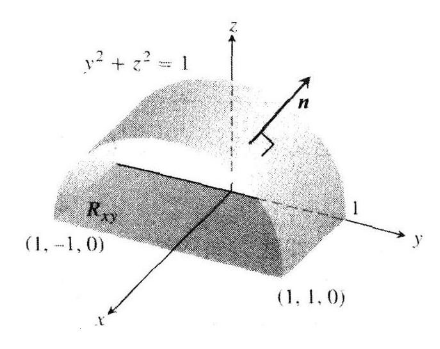



图 14.47 计算向量场向外穿过这个曲面的通量；阴影区域 $R_{xy}$ 的面积为 2(例 4)

在曲面上 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$ 的值为

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} = (yz\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k})\cdot(y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}) = y^2z+z^3 = z(y^2+z^2) = z \quad (在 S 上 y^2+z^2=1)$$

因此，$\boldsymbol{F}$ 向外穿过 $S$ 的通量为

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iint_S(z)\left(\frac{1}{z}\,\mathrm{d}A\right) = \iint_{R_{xy}}\mathrm{d}A = 面积(R_{xy}) = 2$$

■

### 14.6.4 薄壳的矩和质量

形状像碗、金属桶和圆屋顶这样的薄壳物体，用曲面作为模型. 它们的矩和质量用表 14.3 列出的公式计算. 推导过程同在 6.7 节中推导薄板的矩和质量的公式相似.

**表 14.3 计算薄壳的质量和矩的公式**

**(i) 质量**

$$M = \iint_S \delta(x,y,z)\,d\sigma \qquad (\delta(x,y,z) = \text{在}(x,y,z)\text{的密度，即每单位面积的质量})$$

**(ii) 对坐标平面的一阶矩**

$$M_{yz} = \iint_S x\,\delta\,d\sigma,\quad M_{xz} = \iint_S y\,\delta\,d\sigma,\quad M_{xy} = \iint_S z\,\delta\,d\sigma$$

**(iii) 质心坐标**

$$\bar{x} = M_{yz}\big/M,\quad \bar{y} = M_{xz}\big/M,\quad \bar{z} = M_{xy}\big/M$$

**(iv) 对坐标轴的惯性矩**

$$I_x = \iint_S (y^2+z^2)\,\delta\,d\sigma,\quad I_y = \iint_S (x^2+z^2)\,\delta\,d\sigma,\quad I_z = \iint_S (x^2+y^2)\,\delta\,d\sigma$$

$$I_L = \iint_S r^2\,\delta\,d\sigma \qquad (r(x,y,z) = \text{从点}(x,y,z)\text{到直线}L\text{的距离})$$

**例 5** 求半径为 $a$ 的半球面薄壳的质心，设壳体的质量密度 $\delta$ 为常数.

**解** 用半球面

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = a^2,\quad z \geqslant 0$$

作为薄壳的模型(见图 14.48). 球面对 $z$ 轴的对称性，说明 $\bar{x} = \bar{y} = 0$. 余下只需从公式 $\bar{z} = M_{xy}\big/M$ 求 $\bar{z}$.

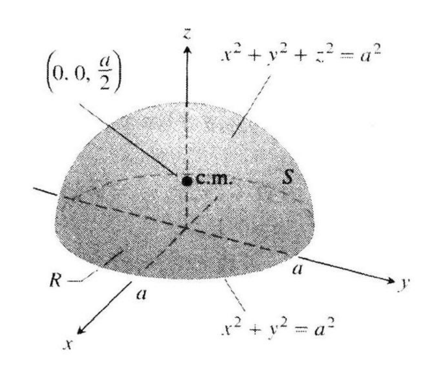



图 14.48 具有常数密度的半球面薄壳的质心(c. m.)位于半球面从底部到顶端的对称轴的中点(例 5)

薄壳的质量为

$$M = \iint_S \delta\,d\sigma = \delta\iint_S d\sigma = (\delta)(S\text{ 的面积}) = 2\pi a^2\delta$$

为了求 $M_{xy}$ 的积分，取 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}$，并且计算

$$|\nabla f| = |2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}| = 2\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2a$$

$$|\nabla f\cdot\boldsymbol{p}| = |\nabla f\cdot\boldsymbol{k}| = |2z| = 2z$$

$$d\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot\boldsymbol{p}|}\,dA = \frac{a}{z}\,dA$$

于是

$$M_{xy} = \iint_S z\,\delta\,d\sigma = \delta\iint_R z\frac{a}{z}\,dA = \delta a\iint_R dA = \delta a(\pi a^2) = \delta\pi a^3$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\pi a^3\delta}{2\pi a^2\delta} = \frac{a}{2}$$

薄壳的质心在点 $(0,0,a/2)$. ■

**例 6** 求由平面 $z=1$ 和 $z=2$ 从圆锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 切割的薄壳的质心，设壳体的质量密度为常数 $\delta$(见图 14.49).

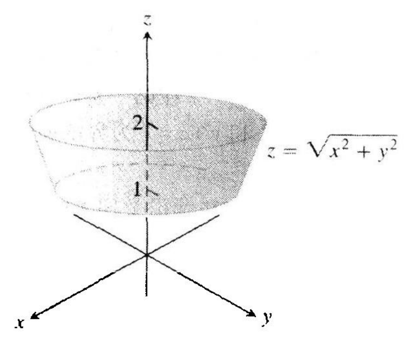



图 14.49 由平面 $z=1$ 和 $z=2$ 从圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 切割的圆锥平截头(例 6)

**解** 曲面对于 $z$ 轴的对称性，说明 $\bar{x} = \bar{y} = 0$. 我们来求 $\bar{z} = M_{xy}\big/M$. 采用 14.5 节例 4 的计算步骤，得到

$$\boldsymbol{r}(r,\theta) = r\cos\theta\,\boldsymbol{i} + r\sin\theta\,\boldsymbol{j} + r\,\boldsymbol{k},\quad 1\leqslant r\leqslant 2,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

和

$$|\boldsymbol{r}_r\times\boldsymbol{r}_\theta|=\sqrt{2}r$$

因此，

$$M=\iint_S\delta\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\int_1^2\delta\sqrt{2}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\delta\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2\mathrm{d}\theta=\delta\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(2-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\theta=\delta\sqrt{2}\left[\frac{3\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=3\pi\delta\sqrt{2}$$

$$M_{xy}=\iint_S\delta\,z\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\int_1^2\delta r\sqrt{2}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\delta\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^2 r^2\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\delta\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2\mathrm{d}\theta=\delta\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\frac{7}{3}\,\mathrm{d}\theta=\frac{14}{3}\pi\delta\sqrt{2}$$

$$\bar{z}=\frac{M_{xy}}{M}=\frac{14\pi\delta\sqrt{2}}{3(3\pi\delta\sqrt{2})}=\frac{14}{9}$$

薄壳的质心在点(0,0,14/9). ■

## 习题 14.6

在习题 1 ~ 8 中，求给定函数在给定曲面上的积分.

1. **抛物柱面** 函数 $G(x,y,z)=x$，在抛物柱面 $y=x^2$，$0\leqslant x\leqslant 2$，$0\leqslant z\leqslant 3$ 上.
2. **圆柱面** 函数 $G(x,y,z)=z$，在圆柱面 $y^2+z^2=4$，$z\geqslant 0$，$1\leqslant x\leqslant 4$ 上.
3. **球面** 函数 $G(x,y,z)=x^2$，在单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上.
4. **半球面** 函数 $G(x,y,z)=z^2$，在半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$z\geqslant 0$ 上.
5. **平面的部分** 函数 $F(x,y,z)=z$，在平面 $x+y+z=4$ 内位于 $xy$ 平面的正方形 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 之上的部分上.
6. **圆锥面** 函数 $F(x,y,z)=z-x$，在圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$0\leqslant z\leqslant 1$ 上.
7. **抛物面拱顶** 函数 $H(x,y,z)=x^2\sqrt{5-4z}$，在抛物面拱顶 $z=1-x^2-y^2$，$z\geqslant 0$ 上.
8. **球形盖** 函数 $H(x,y,z)=yz$，在球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 位于圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 之上的区域上.
9. 求 $G(x,y,z)=x+y+z$ 在由平面 $x=a$，$y=a$ 和 $z=a$ 从第一卦限切割的立方体表面上的积分.
10. 求 $G(x,y,z)=y+z$ 在第一卦限内以坐标平面以及平面 $x=2$ 和 $y+z=1$ 为界的楔形区域表面上的积分.
11. 求 $G(x,y,z)=xyz$ 在由平面 $x=a$，$y=b$ 和 $z=c$ 从第一卦限切割的长方体表面上的积分.
12. 求 $G(x,y,z)=xyz$ 在以平面 $x=\pm a$，$y=\pm b$ 和 $z=\pm c$ 为界的长方体表面上的积分.
13. 求 $G(x,y,z)=x+y+z$ 在平面 $2x+2y+z=2$ 位于第一卦限的部分上的积分.
14. 求 $G(x,y,z)=x\sqrt{y^2+4}$ 在由平面 $x=0$，$x=1$ 和 $z=0$ 从抛物柱面 $y^2+4z=16$ 切割的曲面上的积分.

在习题 15 ~ 24 中，利用参数表示求在给定方向穿过曲面的通量 $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$.

15. **抛物柱面** $\boldsymbol{F}=z^2\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}-3z\boldsymbol{k}$ 向外(离开 $x$ 轴的法线方向)穿过由平面 $x=0$，$x=1$ 和 $z=0$ 从抛物柱面 $z=4-y^2$ 切割的曲面.
16. **抛物柱面** $\boldsymbol{F}=x^2\boldsymbol{j}-xz\boldsymbol{k}$ 向外(离开 $yz$ 平面的法线方向)穿过由平面 $z=0$ 和 $z=2$ 从抛物柱面 $y=x^2$，$-1\leqslant x\leqslant 1$ 切割的曲面.
17. **球面** $\boldsymbol{F}=z\boldsymbol{k}$ 在离开原点方向穿过第一卦限内球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的部分.
18. **球面** $\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 在离原点方向穿过球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$.
19. **平面** $\boldsymbol{F}=2xy\boldsymbol{i}+2yz\boldsymbol{j}+2xz\boldsymbol{k}$ 向上穿过平面 $x+y+z=2a$ 内位于 $xy$ 平面的正方形 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant a$ 之上的部分.
20. **圆柱面** $\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{k}$ 向外穿过由平面 $z=0$ 和 $z=a$ 从圆柱面 $x^2+y^2=1$ 切割的部分.
21. **圆锥面** $\boldsymbol{F}=xy\boldsymbol{i}-z\boldsymbol{k}$ 向外(离开 $z$ 轴的法线方向)穿过圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$0\leqslant z\leqslant 1$.
22. **圆锥面** $\boldsymbol{F}=y^2\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 向外(离开 $z$ 轴的法线方向)穿过圆锥面 $z=2\sqrt{x^2+y^2}$，$0\leqslant z\leqslant 2$.
23. **圆锥平截头** $\boldsymbol{F}=-x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$ 向外(离开 $z$ 轴的法线方向)穿过圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于平面 $z=1$ 和 $z=2$ 之间的部分.
24. **抛物面** $\boldsymbol{F}=4x\boldsymbol{i}+4y\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 向外(离开 $z$ 轴的法线方向)穿过由平面 $z=1$ 从抛物面 $z=x^2+y^2$ 底部切割的曲面.

在习题 25 和 26 中，求场 $\boldsymbol{F}$ 在指定方向穿过给定区域表面 $S$ 的通量.

25. $\boldsymbol{F}(x,y,z)=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$；$S$：长方体 $z=0$，$0\leqslant x\leqslant 2$，$0\leqslant y\leqslant 3$ 表面；方向 $\boldsymbol{k}$.
26. $\boldsymbol{F}(x,y,z)=yx^2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$；$S$：长方体 $y=0$，

$-1\leqslant x\leqslant 2$，$2\leqslant z\leqslant 7$ 表面；方向 $-\boldsymbol{j}$.

在习题 27～32 中，求场 $\boldsymbol{F}$ 在离开原点的方向穿过球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在第一卦限的部分的通量.

**27.** $\boldsymbol{F}(x,y,z)=z\boldsymbol{k}$.　**28.** $\boldsymbol{F}(x,y,z)=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$.

**29.** $\boldsymbol{F}(x,y,z)=y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

**30.** $\boldsymbol{F}(x,y,z)=zx\boldsymbol{i}+zy\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$.

**31.** $\boldsymbol{F}(x,y,z)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

**32.** $\boldsymbol{F}(x,y,z)=\dfrac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

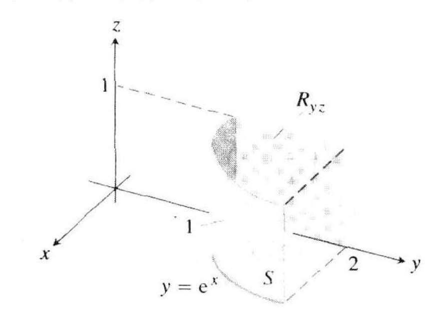
**33.** 求场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=z^2\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}-3z\boldsymbol{k}$ 向外穿过由平面 $x=0$，$x=1$ 和 $z=0$ 从抛物柱面 $z=4-y^2$ 切割部分的通量.

**34.** 求场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=4x\boldsymbol{i}+4y\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 向外(离开 $z$ 轴)穿过由平面从抛物面 $z=x^2+y^2$ 底部切割曲面的通量.

**35.** 令 $S$ 是柱面 $y=\mathrm{e}^x$ 在第一卦限的部分，它平行于 $x$ 轴投影到 $yz$ 平面内的矩形区域 $R_{yz}$：$1\leqslant y\leqslant 2$，$0\leqslant z\leqslant 1$(参见附图). 令 $\boldsymbol{n}$ 是同 $S$ 正交的单位向量，指向离开 $yz$ 平面的方面. 求场

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=-2\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

在 $\boldsymbol{n}$ 方向穿过 $S$ 的通量.




**36.** 令 $S$ 是柱面 $y=\ln x$ 在一卦限的部分，它平行于 $y$ 轴对 $xz$ 平面的投影是矩形区域 $R_{xz}$：$1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}$，$0\leqslant z\leqslant 1$. 令 $\boldsymbol{n}$ 是同 $S$ 正交的单位向量，指向离开 $xz$ 平面的方向. 求场 $\boldsymbol{F}=2y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 方向穿过 $S$ 的通量.

**37.** 求场 $\boldsymbol{F}=2xy\boldsymbol{i}+2yz\boldsymbol{j}+2xz\boldsymbol{k}$ 穿过由平面 $x=a$，$y=a$ 和 $z=a$ 从第一卦限切割的立方体表面的向外通量.

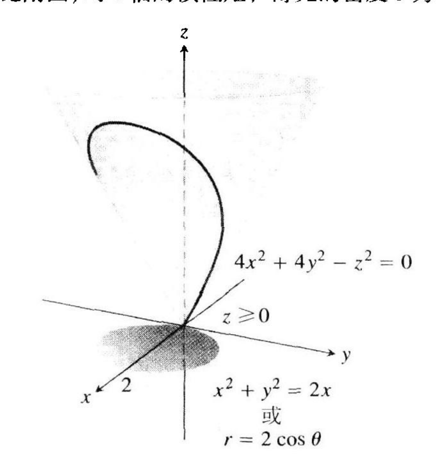
**38.** 求场 $\boldsymbol{F}=xz\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 穿过由平面 $z=3$ 从球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 25$ 切割的上方球盖曲面的向外通量.

**39. 形心**　求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在第一卦限部分的形心.

**40. 形心**　求由平面 $x=0$ 和 $x=3$ 从圆柱面 $y^2+z^2=9$，$z\geqslant 0$ 切割的曲面(类似于例 4 中的曲面)的形心.

**41. 密度为常数的薄壳**　求由平面 $z=1$ 和 $z=2$ 从圆锥面 $x^2+y^2-z^2=0$ 切割的薄壳的质心和对 $z$ 轴的惯性矩，壳体的密度 $\delta$ 为常数.

**42. 密度为常数的圆锥面**　求由圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 从圆锥面 $4x^2+4y^2-z^2=0$，$z\geqslant 0$ 切割的薄壳(参见附图)对 $z$ 轴的惯性矩，薄壳的密度 $\delta$ 为常数.




**43. 球壳**

**(a)** 求半径为 $a$ 的球壳对一条直径的惯性矩，设壳体的密度 $\delta$ 为常数.（求半球壳体的惯性矩，再把结果加倍.）

**(b)** 利用平行轴定理(见习题 13.6)和(a)中的结果，求对球壳一条切线的惯性矩.

**44. 圆锥曲面**　求底半径为 $a$ 和高为 $h$ 的圆锥体侧面(圆锥曲面除去底面)的形心.

## 14.7　斯托克斯定理

正如我们在 14.4 节见到的那样，二维场 $\boldsymbol{F}=M\boldsymbol{i}+N\boldsymbol{j}$ 在点$(x,y)$的环流密度或者旋度分量由纯量$(\partial N/\partial x-\partial M/\partial y)$描述. 在三维场中，围绕平面内一点 $P$ 的环流用向量描述. 这个向量同环流平面是正交的(见图 14.50)，并且指向和环流线构成右旋关系的方向. 向量长度给出流体旋转的速率，这个速率通常随围绕 $P$ 的环流平面的倾斜度变化. 结果表明，速度场 $\boldsymbol{F}=M\boldsymbol{i}+N\boldsymbol{j}+P\boldsymbol{k}$ 在流动中的最大环流向量是**旋度向量**

$$\text{curl}\ \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \tag{1}$$

我们从斯托克斯定理获得这个结论，斯托克斯定理是格林定理的环流-旋度形式在空间中的推广.

请注意，当 $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ 时，$(\text{curl}\ \boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{k} = (\partial N/\partial x - \partial M/\partial y)$ 同 14.4 节的定义一致. 式(1)中旋度向量 curl $\boldsymbol{F}$ 的公式通常用算符

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2}$$

表示. (符号$\nabla$读作"del") $\boldsymbol{F}$ 的旋度是 $\nabla\times\boldsymbol{F}$：

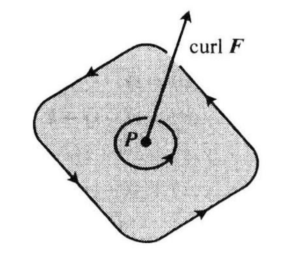



图 14.50　在三维流体流动平面内一点 $P$ 的环流向量；注意它同环流线的右旋关系

$$\nabla\times\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$
$$= \text{curl}\ \boldsymbol{F}$$

$$\text{curl}\ \boldsymbol{F} = \nabla\times\boldsymbol{F} \tag{3}$$

**例 1**　求 $\boldsymbol{F} = (x^2 - y)\boldsymbol{i} + 4z\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$ 的旋度.

**解**　curl $\boldsymbol{F} = \nabla\times\boldsymbol{F}$　(公式(3))

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - y & 4z & x^2 \end{vmatrix}$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(x^2) - \frac{\partial}{\partial z}(4z)\right)\boldsymbol{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2 - y)\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(4z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y)\right)\boldsymbol{k}$$
$$= (0-4)\boldsymbol{i} - (2x - 0)\boldsymbol{j} + (0+1)\boldsymbol{k} = -4\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$ ■

我们将会见到，算符$\nabla$有一些其他应用. 例如，当用于纯量函数 $f(x,y,z)$ 时，它给出 $f$ 的梯度：

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

有时读作"del $f$"，也读作"grad $f$".

### 14.7.1　斯托克斯定理

斯托克斯定理表明，向量场围绕空间中有向曲面的边界在相对于曲面单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 的反时针方向的环流(见图 14.51)，等于向量场的旋度的法分量在曲面上的积分. 我们要求曲面是**分片光滑的**，这意味着曲面是由有限片光滑曲面沿光滑曲线连接而成的.

**定理 6 (斯托克斯定理)**　令 $S$ 是分片光滑的有向曲面，具有分段光滑的边界曲线 $C$. 令 $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$ 是向量场，它的分量在包含 $S$ 的开区域上具有连续的一阶偏导数. 那么，$\boldsymbol{F}$ 围绕 $C$ 在相对于曲面单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 的反时针方向的环流，等于 $\nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$ 在 $S$ 上的积分：

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma \tag{4}$$

(反时针方向的环流)　(旋度积分)

注意，从公式(4)可知，如果两个不同的有向曲面 $S_1$ 和 $S_2$ 具有相同的边界 $C$，那么它们的旋度积分相等：

$$\iint_{S_1} \nabla\times \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_1 \mathrm{d}\sigma = \iint_{S_2} \nabla\times \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_2 \mathrm{d}\sigma$$

两个旋度积分等于等式(4)左端的反时针方向的环流积分，只要单位法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 完全定向两个曲面.

如果 $C$ 是 $xy$ 平面内取反时针方向的曲线，$R$ 是 $xy$ 平面内以 $C$ 为界的区域，那么 $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$，并且

$$(\nabla\times \boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n} = (\nabla\times \boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{k} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

在这些条件下，斯托克斯定理的公式变成

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

这是格林定理公式的环流-旋度形式. 反之，把这些计算步骤颠倒过来，我们可以把二维向量场格林定理的环流-旋度形式重写成倒三角符号的形式

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_R \nabla\times \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{k}\ \mathrm{d}A \qquad (5)$$

参见图 14.52.

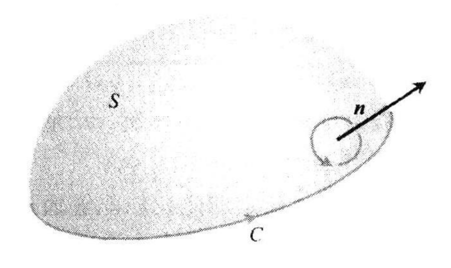



图 14.51 边界曲线 $C$ 的方向给出曲线同法向量场 $\boldsymbol{n}$ 的右旋关系：如果右手姆指指向 $\boldsymbol{n}$，其他手指卷向 $C$ 的方向

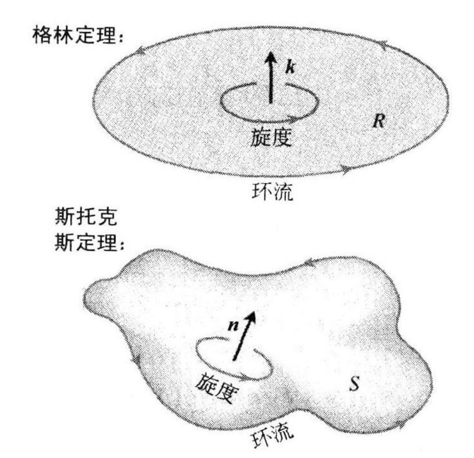



图 14.52 格林定理和斯托克斯定理的比较

**例 2** 对于以圆 $C$：$x^2+y^2=9$，$z=0$ 为边界的半球面 $S$：$x^2+y^2+z^2=9$，$z\geqslant 0$ 和向量场 $\boldsymbol{F}=y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}$，求公式(4)中的环流和旋度积分.

**解** 我们利用参数表示：

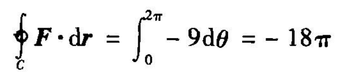
$$\boldsymbol{r}(\theta) = (3\cos\theta)\boldsymbol{i} + (3\sin\theta)\boldsymbol{j},\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

计算向量场依反时针方向围绕 $C$(从上面看)的环流：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (-3\sin\theta\ \mathrm{d}\theta)\boldsymbol{i} + (3\cos\theta\ \mathrm{d}\theta)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} = (3\sin\theta)\boldsymbol{i} - (3\cos\theta)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -9\sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta - 9\cos^2\theta\ \mathrm{d}\theta = -9\ \mathrm{d}\theta$$



$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} -9\mathrm{d}\theta = -18\pi$$

对于 $\boldsymbol{F}$ 的旋度积分，有

$$\nabla\times\boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$= (0-0)\boldsymbol{i} + (0-0)\boldsymbol{j} + (-1-1)\boldsymbol{k} = -2\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{3} \quad \text{(外单位法向量)}$$

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{3}{z}\mathrm{d}A \quad \text{(在 14.6 节例 5 中取 } a = 3\text{)}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\ \mathrm{d}\sigma = -\frac{2z}{3}\frac{3}{z}\mathrm{d}A = -2\ \mathrm{d}A$$

和

$$\iint_S \nabla\times \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{x^2+y^2\leq 9} -2\,\mathrm{d}A = -18\pi$$

正如应有的结果一样，围绕边界圆的环流同半球面上的旋度积分相等. ■

**例 3** 求向量场 $\boldsymbol{F}=(x^2-y)\boldsymbol{i}+4z\boldsymbol{j}+x^2\boldsymbol{k}$ 围绕曲线 $C$ 从上方看沿反时针方向的环流，$C$ 是平面 $z=2$ 同圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的交线(见图 14.53).

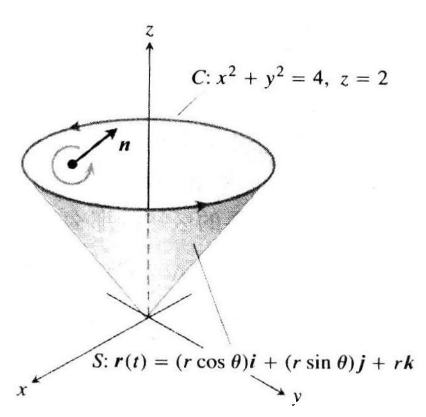



图 14.53 例 3 中的曲线 $C$ 和圆锥面 $S$

**解** 斯托克斯定理使我们能够通过计算向量场在圆锥面上的积分求环流. 从上方看沿反时针方向遍历 $C$ 对应于取圆锥面的内法向量 $\boldsymbol{n}$，即具有正 $z$ 轴分量的法向量.

我们把圆锥面表示成参数形式

$$\boldsymbol{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\boldsymbol{i}+(r\sin\theta)\boldsymbol{j}+r\boldsymbol{k},$$
$$0\leq r\leq 2,\quad 0\leq\theta\leq 2\pi$$

于是有

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_r\times\boldsymbol{r}_\theta}{|\boldsymbol{r}_r\times\boldsymbol{r}_\theta|}=\frac{-(r\cos\theta)\boldsymbol{i}-(r\sin\theta)\boldsymbol{j}+r\boldsymbol{k}}{r\sqrt{2}}\qquad(14.5\text{ 节例}4)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(-(\cos\theta)\boldsymbol{i}-(\sin\theta)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$$

$$\mathrm{d}\sigma=r\sqrt{2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\qquad(14.5\text{ 节例}4)$$
$$\nabla\times\boldsymbol{F}=-4\boldsymbol{i}-2x\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\qquad(\text{例}1)$$
$$=-4\boldsymbol{i}-2r\cos\theta\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\qquad(x=r\cos\theta)$$

因此，

$$\nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(4\cos\theta+2r\cos\theta\sin\theta+1)=\frac{1}{\sqrt{2}}(4\cos\theta+r\sin 2\theta+1)$$

而环流为

$$\oint_C\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_S\nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma\qquad(\text{斯托克斯定理,公式}(4))$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2\frac{1}{\sqrt{2}}(4\cos\theta+r\sin 2\theta+1)(r\sqrt{2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta)=4\pi$$ ■

### 14.7.2 以叶片轮解释 $\nabla\times\boldsymbol{F}$

假定 $\boldsymbol{v}(x,y,z)$ 是流体流动的速度向量，流体在点 $(x,y,z)$ 的密度为 $\delta(x,y,z)$，并且令 $\boldsymbol{F}=\delta\boldsymbol{v}$. 于是

$$\oint_C\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

是流体围绕闭曲线 $C$ 的环流. 根据斯托克斯定理，这个环流等于 $\nabla\times\boldsymbol{F}$ 穿过跨越 $C$ 的曲面 $S$ 的通量：

$$\oint_C\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_S\nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

假定我们在 $\boldsymbol{F}$ 的定义域中固定一点 $Q$ 和在 $Q$ 的一个方向 $\boldsymbol{u}$. 令 $C$ 是圆心在 $Q$ 半径为 $\rho$ 的圆，它所在的平面同 $\boldsymbol{u}$ 正交. 如果 $\nabla\times\boldsymbol{F}$ 在 $Q$ 是连续的，$\nabla\times\boldsymbol{F}$ 的 $\boldsymbol{u}$ 分量在以 $C$ 为界的圆盘上的平均值当 $\rho\to 0$ 时趋近 $\nabla\times\boldsymbol{F}$ 在 $Q$ 的 $\boldsymbol{u}$ 分量：

$$(\nabla\times \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u})_Q = \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint_S \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}\sigma$$

如果在上面这个等式中用环流代替面积分，得到

$$(\nabla\times \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u})_Q = \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{6}$$

等式(6)的左端当 $\boldsymbol{u}$ 取 $\nabla\times\boldsymbol{F}$ 的方向时达到它的最大值. 当 $\rho$ 很小时，等式(6)的右端的极限近似等于

$$\frac{1}{\pi\rho^2}\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

这是围绕 $C$ 的环流除以圆盘的面积(即环流密度). 假定把半径为 $\rho$ 的小叶片轮置于在点 $Q$ 的流体中，使轮轴取 $\boldsymbol{u}$ 的方向. 流体围绕 $C$ 的环流将影响叶片轮转动的速率. 叶片轮当环流积分达到最大值时的转动最快；因此，叶片轮在它的轴指向 $\nabla\times\boldsymbol{F}$ 的方向时转动最快(见图 14.54).

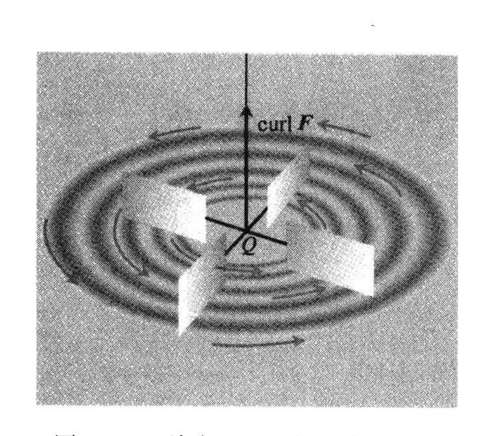



图 14.54　旋度 curl $\boldsymbol{F}$ 的叶片轮解释

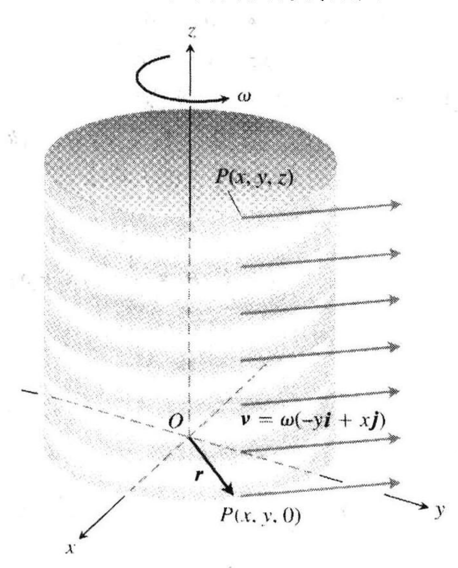



图 14.55　一种同 $xy$ 平面平行的稳定旋转流，在正方向(反时针方向)具有恒定角速度 $\omega$(例 4)

**例 4**　一种密度为常数的流体围绕 $z$ 轴以速度 $\boldsymbol{v}=\omega(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j})$ 旋转，其中 $\omega$ 是一个正常数，称为旋转的角速度(见图 14.55). 如果 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{v}$，求 $\nabla\times\boldsymbol{F}$ 以及它同环流密度的关系.

**解**　取 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{v}=-\omega y\boldsymbol{i}+\omega x\boldsymbol{j}$,

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{F} &= \left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\\ &= (0-0)\boldsymbol{i}+(0-0)\boldsymbol{j}-(\omega-(-\omega))\boldsymbol{k} = 2\omega\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

由斯托克斯定理，在同 $\nabla\times\boldsymbol{F}$ 正交的平面内，例如在 $xy$ 平面内，$\boldsymbol{F}$ 围绕限定圆盘 $S$ 边界的半径为 $\rho$ 的圆 $C$ 的环流为

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iint_S 2\omega\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = (2\omega)(\pi\rho^2)$$

因此，

$$(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{k} = 2\omega = \frac{1}{\pi\rho^2}\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

同取 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{k}$ 时的等式(6)一致. ■

**例 5** 利用斯托克斯定理求环流 $\int_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$,如果 $\boldsymbol{F} = xz\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + 3xz\boldsymbol{k}$,$C$ 是平面 $2x+y+z=2$ 在第一卦限部分的边界,当从上方看时按反时针方向遍历(见图 14.56).

**解** 平面是函数 $f(x, y, z) = 2x+y+z$ 的层曲面 $f(x, y, z) = 2$. 单位法向量

$$\boldsymbol{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})}{|2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$$

同按反时针方向围绕 $C$ 运动一致. 为了应用斯托克斯定理, 我们求

$$\text{curl}\,\boldsymbol{F} = \nabla\times\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & xy & 3xz \end{vmatrix} = (x-3z)\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$$

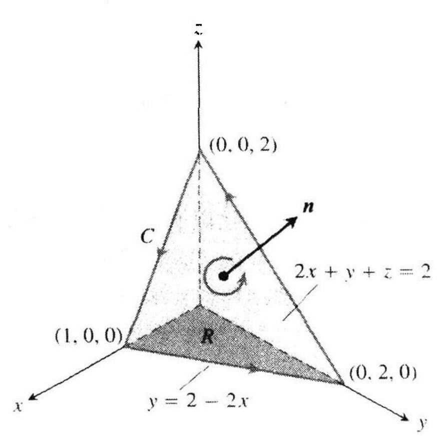



图 14.56 例 5 中的平面曲面

在平面上, $z$ 等于 $2-2x-y$, 所以

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{F} &= (x-3(2-2x-y))\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k} \\ &= (7x+3y-6)\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

和

$$\nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(7x+3y-6+y) = \frac{1}{\sqrt{6}}(7x+4y-6)$$

曲面元是

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot\boldsymbol{k}|}\mathrm{d}A = \frac{\sqrt{6}}{1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

环流为

$$\begin{aligned}\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \iint_S \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma \quad \text{(斯托克斯定理,等式(4))} \\ &= \int_0^1\int_0^{2-2x}\frac{1}{\sqrt{6}}(7x+4y-6)\sqrt{6}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1\int_0^{2-2x}(7x+4y-6)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = -1\end{aligned}$$

■

### 14.7.3 对多面曲面的斯托克斯定理的证明

令 $S$ 是由有限个平面区域组成的多面曲面. (多面曲面的例子参见图 14.57.) 对 $S$ 每个单独的面应用格林定理. 存在两种类型的面:

(1) 一种面的所有边被其他面包围;

(2) 另一种面有一边或者多边不同其他面邻接.

$S$ 的边界 $\Delta$ 包含不同其他边邻接的第二种面的边. 在图 14.57 中, 三角形 $EAB$, $BCE$ 和 $CDE$ 代表 $S$ 的一部分, $ABCD$ 是边界 $\Delta$ 的一部分. 把格林定理推广的切向形式依次应用到三个三角形, 然后对结果求和, 得到

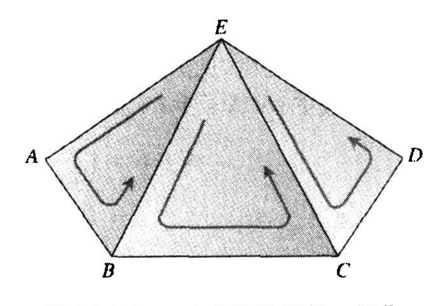



图 14.57 一个多面曲面的一部分

$$\left(\oint_{EAB} + \oint_{BCE} + \oint_{CDE}\right)\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \left(\iint_{EAB} + \iint_{BCE} + \iint_{CDE}\right)\nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma \tag{7}$$

在这种推广的形式中, $\boldsymbol{F}$ 围绕包围同 $\boldsymbol{n}$ 正交的平面区域 $R$ 的曲线的线积分, 等于 $(\text{curl}\,\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}$ 在 $R$ 上的二重积分.

等式(7)左端的三个线积分组合成一个围绕边界 $ABCDE$ 的积分, 因为沿内部线段的积分成

对消去. 例如沿三角形 $ABE$ 的线段 $BE$ 的积分和沿三角形 $EBC$ 的同一线段的积分具有相反的符号. 对于线段 $CE$ 有同样结果. 因此，等式(7)简化成

$$\oint_{ABCDE} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_{ABCDE} \nabla\times \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

当把格林定理的推广形式应用到所有面并且对结果求和，我们得到

$$\oint_{\Delta} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_{S} \nabla\times \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

这是对于多面曲面 $S$ 的斯托克斯定理. 在高等微积分教科书中可以找到定理对于更一般曲面的证明. (更一般曲面是多面曲面的极限而证明可以扩充.)

### 14.7.4 带空洞曲面的斯托克斯定理

斯托克斯定理对于带有一个或者多个空洞的有向曲面(见图 14.58)成立. $\nabla\times\boldsymbol{F}$ 的法向分量在 $S$ 上的线积分，等于 $\boldsymbol{F}$ 的切向分量围绕所有边界曲线的线积分之和，其中各边界曲线按照 $S$ 的定向引出的方向描绘.

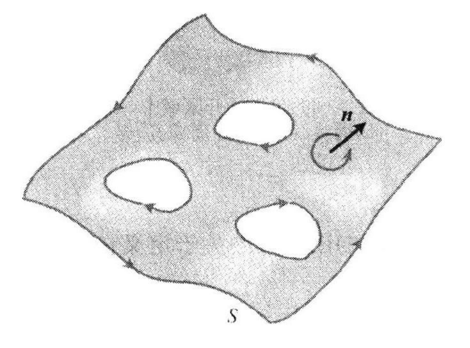



图 14.58 斯托克斯定理对于带空洞的有向曲面也成立

### 14.7.5 一个重要恒等式

下述恒等式经常出现在数学和自然科学中.

$$\text{curl grad} f=\boldsymbol{0} \quad 或 \quad \nabla\times\nabla f=\boldsymbol{0} \tag{8}$$

这个恒等式对于二阶偏导数连续的任何函数 $f(x,y,z)$ 成立. 证明如下:

$$\nabla\times\nabla f = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = (f_{zy}-f_{yz})\boldsymbol{i} - (f_{zx}-f_{xz})\boldsymbol{j} + (f_{yx}-f_{xy})\boldsymbol{k}$$

如果函数的二阶偏导数连续，括号中的混合二阶导数相等(12.3 节定理 2)，所以向量为零向量.

### 14.7.6 守恒场与斯托克斯定理

我们在 14.3 节中发现，一个场 $\boldsymbol{F}$ 在空间中的开区域 $D$ 上是守恒的，等价于 $\boldsymbol{F}$ 围绕 $D$ 中每个闭环的积分为零. 这本身又等价于说在单连通的开区域内 $\nabla\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$.

**定理 7 (关于闭环上 curl $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$ 的性质)** 若在空间中单连通开区域 $D$ 上每个点 $\nabla\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$，则在 $D$ 中任何分段光滑的闭路径 $C$ 上，

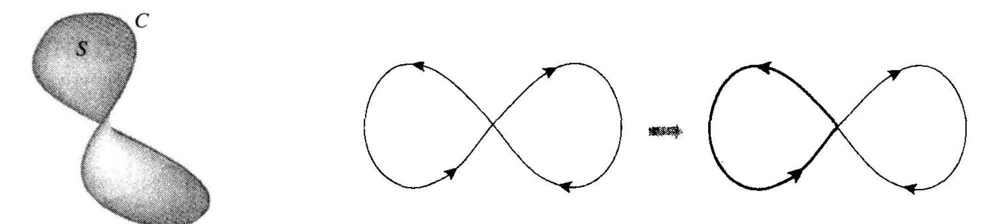
$$\oint_{C} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

**证明概略** 定理 7 通常分为两步证明. 第一步是对简单闭曲线(不自交叉的闭环)证明定理，像对图 14.59a 的曲线. 在高等数学的拓扑学分支中，有一个定理指出，在单连通开区域 $D$ 内每条光滑的简单闭曲线 $C$ 也是位于 $D$ 内一个光滑的双侧曲面 $S$ 的边界. 因此，由斯托克斯定理，

$$\oint_{C} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_{S} \nabla\times \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = 0$$

第二步是对自交叉的曲线证明定理，像对图 14.59b 的曲线. 证明的思想是把这些由有向曲

面产生的曲线断开成单环，一次对一个环应用斯托克斯定理，然后对结果求和. ■

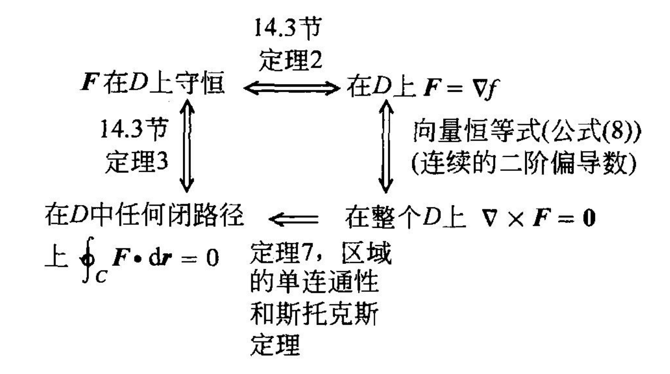



a) 在空间的单连通开区域中，简单闭曲线$C$是光滑曲面$S$的边界

b) 对于自交叉的光滑曲线可以切割成适用斯托克斯定理的环

图 14.59

下面的图解归纳关于定义在连通开区域和单连通开区域上的守恒场的结果.




## 习题 14.7

在习题 1 ~ 6 中，利用斯托克斯定理中的面积分，计算场 $\boldsymbol{F}$ 围绕曲线 $C$ 在指定方向的环流.

**1.** $\boldsymbol{F}=x^2\boldsymbol{i}+2x\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$；$C$：$xy$ 平面内的椭圆 $4x^2+y^2=4$，从上方看沿反时针方向.

**2.** $\boldsymbol{F}=2y\boldsymbol{i}+3x\boldsymbol{j}-z^2\boldsymbol{k}$；$C$：$xy$ 平面内的圆 $x^2+y^2=9$，从上方看沿反时针方向.

**3.** $\boldsymbol{F}=y\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+x^2\boldsymbol{k}$；$C$：由平面 $x+y+z=1$ 从第一卦限切割的三角形的边界，从上方看沿反时针方向.

**4.** $\boldsymbol{F}=(y^2+z^2)\boldsymbol{i}+(x^2+z^2)\boldsymbol{j}+(x^2+y^2)\boldsymbol{k}$；$C$：由平面 $x+y+z=1$ 从第一卦限切割的三角形的边界，从上方看沿反时针方向.

**5.** $\boldsymbol{F}=(y^2+z^2)\boldsymbol{i}+(x^2+z^2)\boldsymbol{j}+(x^2+y^2)\boldsymbol{k}$；$C$：$xy$ 平面内以直线 $x=\pm1$ 和 $y=\pm1$ 为界的正方形，从上面看沿反时针方向.

**6.** $\boldsymbol{F}=x^2y^3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$；$C$：圆柱面 $x^2+y^2=4$ 和半球面 $x^2+y^2+z^2=16$，$z\geqslant0$ 的交线，从上方看沿反时针方向.

**7.** 令 $\boldsymbol{n}$ 是椭球壳

$$S:\quad 4x^2+9y^2+36z^2=36,\quad z\geqslant0$$

的单位外法向量，并且令

$$\boldsymbol{F}=y\boldsymbol{i}+x^2\boldsymbol{j}+(x^2+y^4)^{3/2}\sin e^{\sqrt{xyz}}\boldsymbol{k}$$

求

$$\iint_S \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma$$

的值.（提示：椭球壳底部椭圆的一种参数表示为 $x=3\cos t$，$y=2\sin t$，$0\leqslant t\leqslant2\pi$.）

**8.** 令 $\boldsymbol{n}$ 是抛物面壳

$$S:\quad 4x^2+y+z^2=4,\quad y\geqslant0$$

的单位外法向量(离开原点的法向量)，并且令

$$\boldsymbol{F}=\left(-z+\frac{1}{2+x}\right)\boldsymbol{i}+(\tan^{-1}y)\boldsymbol{j}+\left(x+\frac{1}{4+z}\right)\boldsymbol{k}$$

求

$$\iint_S \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma$$

的值.

**9.** 设 $S$ 包含圆柱面 $x^2+y^2=a^2$，$0\leqslant z\leqslant h$ 及其顶面 $x^2+y^2\leqslant a^2$，$z=h$. 令 $\boldsymbol{F}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+x^2\boldsymbol{k}$. 利用斯托克斯定理求 $\nabla\times\boldsymbol{F}$ 向外穿过 $S$ 的通量.

**10.** 求

$$\iint_S \nabla\times(y\boldsymbol{i})\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma$$

的值，其中 $S$ 是半球面 $x^2+y^2+z^2=1$，$z\geqslant 0$.

**11. 旋度 $F$ 的通量** 证明

$$\iint_S \nabla\times \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

对于跨越 $C$ 并且在 $C$ 上导致同样正方向的所有有向曲面 $S$ 具有相同的值.

**12.** 令 $\boldsymbol{F}$ 是定义在包含光滑闭有向曲面 $S$ 及其内部的区域上的可微向量场. 令 $\boldsymbol{n}$ 是 $S$ 上的单位法向量场. 假定 $S$ 是由两个曲面 $S_1$ 和 $S_2$ 沿一条光滑的简单闭曲线 $C$ 连接成的并集. 关于

$$\iint_S \nabla\times \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

能够得出什么结论？提出答案的理由.

在习题 13 ~ 18 中，利用斯托克斯定理中的面积分，计算向量场 $\boldsymbol{F}$ 的旋度在向外单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向穿过 $S$ 的通量.

**13.** $\boldsymbol{F}=2z\boldsymbol{i}+3x\boldsymbol{j}+5y\boldsymbol{k}$;
$S$: $\boldsymbol{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\boldsymbol{i}+(r\sin\theta)\boldsymbol{j}+(4-r^2)\boldsymbol{k}$,
$0\leqslant r\leqslant 2$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

**14.** $\boldsymbol{F}=(y-z)\boldsymbol{i}+(z-x)\boldsymbol{j}+(x+z)\boldsymbol{k}$;
$S$: $\boldsymbol{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\boldsymbol{i}+(r\sin\theta)\boldsymbol{j}+(9-r^2)\boldsymbol{k}$,
$0\leqslant r\leqslant 3$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

**15.** $\boldsymbol{F}=x^2y\boldsymbol{i}+2y^3z\boldsymbol{j}+3z\boldsymbol{k}$;
$S$: $\boldsymbol{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\boldsymbol{i}+(r\sin\theta)\boldsymbol{j}+r\boldsymbol{k}$,
$0\leqslant r\leqslant 1$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

**16.** $\boldsymbol{F}=(x-y)\boldsymbol{i}+(y-z)\boldsymbol{j}+(z-x)\boldsymbol{k}$;
$S$: $\boldsymbol{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\boldsymbol{i}+(r\sin\theta)\boldsymbol{j}+(5-r)\boldsymbol{k}$,
$0\leqslant r\leqslant 5$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

**17.** $\boldsymbol{F}=3y\boldsymbol{i}+(5-2x)\boldsymbol{j}+(z^2-2)\boldsymbol{k}$;
$S$: $\boldsymbol{r}(\phi,\theta)=(\sqrt{3}\sin\phi\cos\theta)\boldsymbol{i}+(\sqrt{3}\sin\phi\sin\theta)\boldsymbol{j}+(\sqrt{3}\cos\phi)\boldsymbol{k}$, $0\leqslant\phi\leqslant\pi/2$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

**18.** $\boldsymbol{F}=y^2\boldsymbol{i}+z^2\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k}$;
$S$: $\boldsymbol{r}(\phi,\theta)=(2\sin\phi\cos\theta)\boldsymbol{i}+(2\sin\phi\sin\theta)\boldsymbol{j}+(2\cos\phi)\boldsymbol{k}$,
$0\leqslant\phi\leqslant\pi/2$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

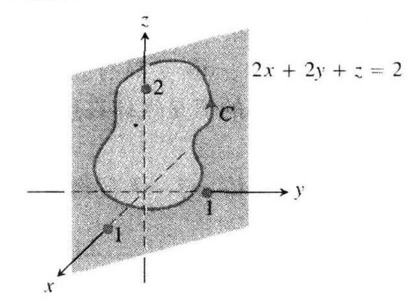
**19. 零环流** 利用恒等式 $\nabla\times\nabla f=\boldsymbol{0}$（正文中的公式(8)）和斯托克斯定理，证明下列场围绕空间中任何光滑的可定向曲面边界的环流为零.
(a) $\boldsymbol{F}=2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}$.　(b) $\boldsymbol{F}=\nabla(xy^2z^3)$.
(c) $\boldsymbol{F}=\nabla\times(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$.　(d) $\boldsymbol{F}=\nabla f$.

**20. 零环流** 令 $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$. 证明场 $\boldsymbol{F}=\nabla f$ 围绕 $xy$ 平面内的圆 $x^2+y^2=a^2$ 沿顺时针方向的环流为零.
(a) 通过取 $\boldsymbol{r}=(a\cos t)\boldsymbol{i}+(a\sin t)\boldsymbol{j}$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$，并且求 $\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 在圆上的积分.
(b) 通过应用斯托克斯定理.

**21.** 令 $C$ 是平面 $2x+2y+z=2$ 内的简单闭光滑曲线，取附图所示的方向. 证明

$$\oint_C 2y\,\mathrm{d}x+3z\,\mathrm{d}y-x\,\mathrm{d}z$$

仅随 $C$ 包围区域的面积而定，同 $C$ 的位置或者形状无关.




**22.** 证明：若 $\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，则 $\nabla\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$.

**23.** 求一个具有二次可微分量的向量场，它的旋度是 $x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，或者证明不存在这样的场.

**24.** 斯托克斯定理关于旋度为零的场中的环流有什么特别的结论？提出答案的理由.

**25.** 令 $R$ 是 $xy$ 平面内以分段光滑的简单闭曲线 $C$ 为界的区域，并且假定已知 $R$ 对 $x$ 轴和 $y$ 轴的惯性矩为 $I_x$ 和 $I_y$. 求用 $I_x$ 和 $I_y$ 表示的积分

$$\oint_C \nabla(r^4)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

**26. 旋度为零但是不守恒的场** 证明

$$\boldsymbol{F}=\frac{-y}{x^2+y^2}\boldsymbol{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

的旋度为零，但是如果 $C$ 是 $xy$ 平面内的圆 $x^2+y^2=1$,

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

不等于零.（这里不能应用定理 7，因为 $\boldsymbol{F}$ 的定义域不是单连通的. 场 $\boldsymbol{F}$ 沿 $z$ 轴没有定义，所以无法使 $C$ 在不脱离 $\boldsymbol{F}$ 的定义域的前提下收缩到一点.）

## 14.8 散度定理与统一理论

平面内格林定理的散度形式指出，向量场穿过简单闭曲线的向外净通量，可以通过在由曲线包围区域上求场的散度积分来计算. 在三维向量场中，对应的定理称为散度定理，说明向量场

穿过空间闭曲面的向外净通量，可以通过在由曲面包围的区域上求场的散度积分来计算. 我们在这一节证明散度定理，并且说明如何用它简化通量的计算. 此外，还要推导电场中通量的高斯定律，以及流体动力学中的连续性方程. 最后，我们把本章讨论的向量积分定理统一成一个基本定理.

### 14.8.1 三维向量场中的散度

向量场

$$\boldsymbol{F} = M(x,y,z)\boldsymbol{i} + N(x,y,z)\boldsymbol{j} + P(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

的**散度**是纯量函数

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \nabla\cdot\boldsymbol{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \tag{1}$$

符号“div $\boldsymbol{F}$”读作“$\boldsymbol{F}$ 的散度”. 记号$\nabla\cdot\boldsymbol{F}$ 读作“del dot $\boldsymbol{F}$”.

在三维向量场中，div $\boldsymbol{F}$ 具有和二维向量场同样的物理解释. 如果 $\boldsymbol{F}$ 是流动气体的速度场，div $\boldsymbol{F}$ 在一点$(x,y,z)$的值是气体在$(x,y,z)$压缩或者膨胀的速率. 这个散度是单位体积的通量或者在点的通量密度.

**例 1** 求 $\boldsymbol{F}=2xz\boldsymbol{i}-xy\boldsymbol{j}-z\boldsymbol{k}$ 的散度.

**解** $\boldsymbol{F}$ 的散度为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2xz) + \frac{\partial}{\partial y}(-xy) + \frac{\partial}{\partial z}(-z) = 2z - x - 1$$ ■

### 14.8.2 散度定理

散度定理表明，在适当条件下，向量场穿过(外向)闭曲面的向外通量，等于向量场的散度在由曲面包围的区域上的三重积分.

**定理 8（散度定理）** 令 $\boldsymbol{F}$ 是分量具有连续一阶偏导数的向量场，并且令 $S$ 是分片光滑的有向闭曲面. $\boldsymbol{F}$ 在曲面 $S$ 的单位外法向量场 $\boldsymbol{n}$ 的方向穿过曲面的通量，等于$\nabla\cdot\boldsymbol{F}$ 在由曲面包围的区域 $D$ 上的积分：

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma = \iiint_D \nabla\cdot\boldsymbol{F}\, dV \tag{2}$$

（向外通量） （散度积分）

**例 2** 求等式(2)两端对于向量场 $\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上的积分.

**解** 从$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2$ 的梯度，计算出 $S$ 的单位外法向量为

$$\boldsymbol{n} = \frac{2(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})}{\sqrt{4(x^2+y^2+z^2)}} = \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{a}$$

因此，

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma = \frac{x^2+y^2+z^2}{a}\, d\sigma = \frac{a^2}{a}\, d\sigma = a\, d\sigma$$

因为 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在球面上. 所以

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma = \iint_S a\, d\sigma = a\iint_S d\sigma = a(4\pi a^2) = 4\pi a^3$$

$\boldsymbol{F}$ 的散度为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3$$

故有

$$\iiint\limits_D \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_D 3\,\mathrm{d}V = 3\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) = 4\pi a^3 \qquad \blacksquare$$

**例 3** 求 $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$ 向外穿过由平面 $x=1$，$y=1$ 和 $z=1$ 从第一卦限切割的立方体的表面的通量.

**解** 我们可以通过求散度

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(xz) = y + z + x$$

在立方体内部区域上的积分计算这个通量，而不用计算穿过立方体每个面的通量并且对六个单独的积分求和. 这样得到：

$$\text{通量} = \iint\limits_{\text{立方体表面}} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_{\text{立方体内部}} \nabla\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}V \quad (\text{散度定理})$$

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{3}{2} \quad (\text{常规积分}) \qquad \blacksquare$$

### 14.8.3 对特殊区域的散度定理的证明

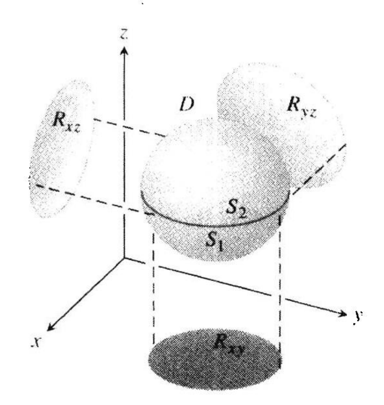
为了证明散度定理，我们假定 $\boldsymbol{F}$ 的分量具有连续的一阶偏导数. 另外，假定 $D$ 是没有空洞或者“气泡”的凸区域，如球体、立方体或椭球体，并且 $S$ 是分片光滑的曲面. 同时，对于 $D$ 在 $xy$ 平面上的投影区域 $R_{xy}$，假定在其内点垂直于 $xy$ 平面的任何直线同 $S$ 恰好交于两点，产生满足 $f_1(x,\ y) \leqslant f_2(x,\ y)$ 的曲面

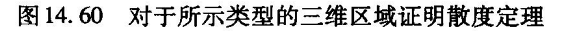
$$S_1:\quad z = f_1(x,y),\quad (x,y)\in R_{xy}$$
$$S_2:\quad z = f_2(x,y),\quad (x,y)\in R_{xy}$$

关于 $D$ 在其他坐标平面上的投影，我们作同样的假定. 参见图 14.60.

单位法向量 $\boldsymbol{n} = n_1\boldsymbol{i} + n_2\boldsymbol{j} + n_3\boldsymbol{k}$ 的分量是 $\boldsymbol{n}$ 同 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 的夹角 $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ 的余弦(见图 14.61). 这是因为涉及的所有向量都是单位向量. 我们有

$$n_1 = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i} = |\boldsymbol{n}||\boldsymbol{i}|\cos\alpha = \cos\alpha$$
$$n_2 = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j} = |\boldsymbol{n}||\boldsymbol{j}|\cos\beta = \cos\beta$$
$$n_3 = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k} = |\boldsymbol{n}||\boldsymbol{k}|\cos\gamma = \cos\gamma$$





图 14.60 对于所示类型的三维区域证明散度定理

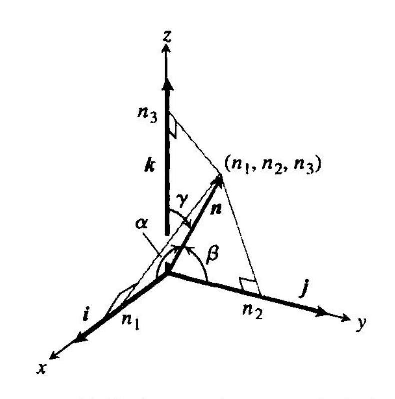



图 14.61 $\boldsymbol{n}$ 的分量是 $\boldsymbol{n}$ 同 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 的夹角的余弦

因此，

$$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha)\boldsymbol{i} + (\cos\beta)\boldsymbol{j} + (\cos\gamma)\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} = M\cos\alpha + N\cos\beta + P\cos\gamma$$

用分量形式，散度定理表示成

$$\iint_S (M\cos\alpha + N\cos\beta + P\cos\gamma)\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

通过证明下列三个等式来证明定理：

$$\iint_S M\cos\alpha\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_D \frac{\partial M}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{3}$$

$$\iint_S N\cos\beta\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_D \frac{\partial N}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{4}$$

$$\iint_S P\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{5}$$

**等式(5)的证明** 对于等式(5)，我们通过把左端的面积分转换成 $D$ 在 $xy$ 平面的投影区域 $R_{xy}$ 上的二重积分来证明(见图 14.62)．曲面 $S$ 由两部分组成，上半部分的方程是 $z=f_2(x,y)$，下半部分的方程是 $z=f_1(x,y)$．在 $S_2$ 上，外法向量 $\boldsymbol{n}$ 具有正的 $\boldsymbol{k}$ 分量，并且

$$\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad 因为 \quad \mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}A}{|\cos\gamma|} = \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\cos\gamma}$$

(参见图 14.63)．在 $S_1$ 上，外法向量 $\boldsymbol{n}$ 具有负的 $\boldsymbol{k}$ 分量，并且

$$\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma = -\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

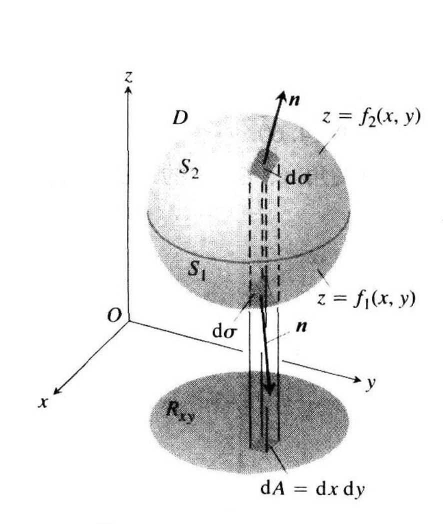



图 14.62 由曲面 $S_1$ 和 $S_2$ 包围的区域 $D$ 垂直投影到 $xy$ 平面内的 $R_{xy}$

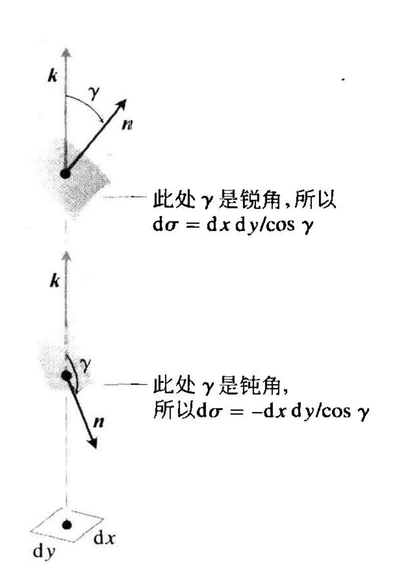



图 14.63 图 14.62 中面积元放大的图形；关系式 $\mathrm{d}\sigma = \pm\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y/\cos\gamma$ 是从 14.5 节公式(5)推出的

因此，

$$\iint_S P\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{S_2} P\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{S_1} P\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{R_{xy}} P(x,y,f_2(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{R_{xy}} P(x,y,f_1(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{R_{xy}} [P(x,y,f_2(x,y)) - P(x,y,f_1(x,y))]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{R_{xy}} \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

这就证明等式(5). ■

用同样的方式证明等式(3)和(4)；或者依次置换 $x,y,z$；$M,N,P$ 和 $\alpha,\beta,\gamma$ 从等式(5)得到等式(3)和(4)中的结果.

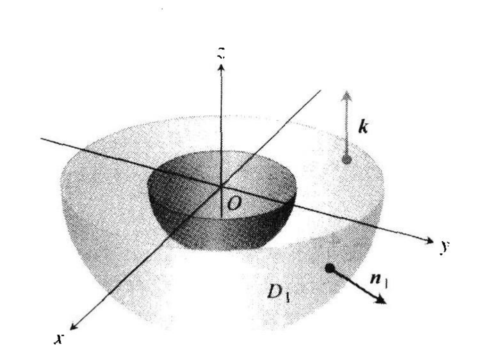
### 14.8.4 其他区域的散度定理

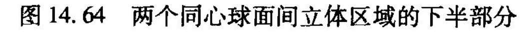
散度定理可以扩大到能够划分成有限个刚讨论的简单区域类型的区域，以及能够以某种方式定义成更简单区域的极限的区域. 作为这样的划分过程中的一步的例子，假定 $D$ 是介于两个同心球面之间的区域，并且 $\boldsymbol{F}$ 在整个区域 $D$ 和边界曲面上有连续可微的分量. 用赤道平面把 $D$ 分成两半，并且对单独的每一半应用散度定理. 下面一半 $D_1$ 显示在图 14.64 中. 限定 $D_1$ 的曲面 $S_1$ 包含外侧半球面、垫圈形顶面和内侧半球面. 散度定理表明

$$\iint_{S_1} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_1 \mathrm{d}\sigma_1 = \iiint_{D_1} \nabla\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}V_1 \tag{6}$$

从 $D_1$ 指向外部的单位法向量 $\boldsymbol{n}_1$，在外侧曲面指向离开原点的方向，在内侧曲面指向到达原点的方向，而在顶面等于 $\boldsymbol{k}$. 接着对 $D_2$ 及其限定曲面 $S_2$ 应用散度定理(见图 14.65)：

$$\iint_{S_2} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_2 \mathrm{d}\sigma_2 = \iiint_{D_2} \nabla\cdot\boldsymbol{F}\ \mathrm{d}V_2 \tag{7}$$





图 14.64 两个同心球面间立体区域的下半部分

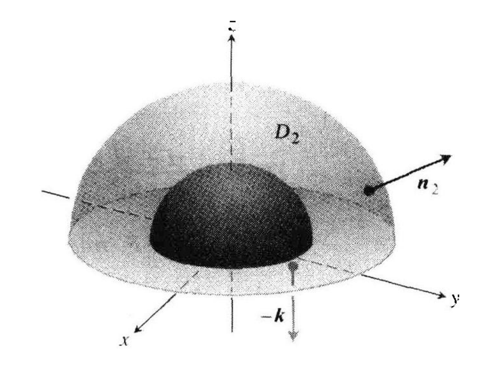



图 14.65 两个同心球面间立体区域的上半部分

当我们从 $D_2$ 追索 $\boldsymbol{n}_2$ 在 $S_2$ 上的指向时看出，$\boldsymbol{n}_2$ 在 $xy$ 平面内沿垫圈形底面等于 $-\boldsymbol{k}$，在外侧球面上指向离开原点的方向，在内侧球面上指向到达原点的方向. 当对等式(6)和(7)求和时消去顶面和底面上的积分，因为 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 在垫圈形平面上的符号相反. 因此，获得结果

$$\iint_{S} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\ \mathrm{d}\sigma = \iiint_{D} \nabla\cdot\boldsymbol{F}\ \mathrm{d}V$$

其中 $D$ 是两个球面之间的区域，$D$ 的边界 $S$ 包含这两个球面，$S$ 上的单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 从 $D$ 指向外部.

**例 4** 求场

$$\boldsymbol{F} = \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{\rho^3},\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

穿过区域 $D$：$0 < a^2 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant b^2$ 的边界的向外净通量.

**解** 可以通过求 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}$ 在 $D$ 上的积分计算这个净通量. 我们有

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}(2x) = \frac{x}{\rho}$$

和

$$\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x\rho^{-3})=\rho^{-3}-3x\rho^{-4}\frac{\partial\rho}{\partial x}=\frac{1}{\rho^3}-\frac{3x^2}{\rho^5}$$

同样，

$$\frac{\partial N}{\partial y}=\frac{1}{\rho^3}-\frac{3y^2}{\rho^5}\quad 和 \quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{1}{\rho^3}-\frac{3z^2}{\rho^5}$$

因此，

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=\frac{3}{\rho^3}-\frac{3}{\rho^5}(x^2+y^2+z^2)=\frac{3}{\rho^3}-\frac{3\rho^2}{\rho^5}=0$$

$$\iiint_D \nabla\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}V=0 \qquad (\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\operatorname{div}\boldsymbol{F})$$

所以$\nabla\cdot\boldsymbol{F}$在$D$上的积分为零和穿过$D$的边界的向外净通量为零. 然而，从这个例子可以了解其他结果. 穿过内侧球面$S_a$离开区域$D$的通量，是穿过外侧球面$S_b$离开$D$的通量的负值(因为这两个通量之和为零). 因此，$\boldsymbol{F}$在离开原点方向穿过$S_a$的通量同$\boldsymbol{F}$在离开原点方向穿过$S_b$的通量相等. 所以，$\boldsymbol{F}$穿过以原点为中心的球面的通量同球面的半径无关. 那么，这个通量的值是什么？

为了求出它的值，我们直接求通量积分. 在半径为$a$的球面上，单位外法向量为

$$\boldsymbol{n}=\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{a}$$

因此，在球面上，

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{a^3}\cdot\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{a}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^4}=\frac{a^2}{a^4}=\frac{1}{a^2}$$

$$\iint_{S_a}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{a^2}\iint_{S_a}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{a^2}(4\pi a^2)=4\pi$$

$\boldsymbol{F}$向外穿过以原点为中心的任何球面的通量是$4\pi$. ■

### 14.8.5 高斯定律：电磁理论四大定律之一

从例 4 还可以获得其他结果. 在电磁理论中，由位于原点的点电荷$q$产生的电场为

$$\boldsymbol{E}(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\boldsymbol{r}|^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\rho^3}$$

其中$\varepsilon_0$是物理常数，$\boldsymbol{r}$是点$(x,y,z)$的位置向量，$\rho=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 采用例 4 的记号，

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{F}$$

从例 4 的计算显示，$\boldsymbol{E}$穿过中心在原点的任何球面的向外通量是$q/\varepsilon_0$，但是这个结果不限于球面. $\boldsymbol{E}$穿过包围原点的任何闭曲面$S$(对它适用散度定理)的向外通量也是$q/\varepsilon_0$. 为了弄清原因，我们只需设想一个以原点为中心并且包围曲面$S$的很大的球面$S_a$. 由于

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\nabla\cdot\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{F}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\cdot\boldsymbol{F}=0$$

当$\rho>0$时，$\nabla\cdot\boldsymbol{E}$在$S$和$S_a$之间的区域$D$上的积分为零. 因此，由散度定理，

$$\iint_{D的边界}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma=0$$

并且$\boldsymbol{E}$在离开原点的方向穿过$S$的通量，同$\boldsymbol{E}$在离开原点的方向穿过$S_a$的通量必定相等，这个通量为$q/\varepsilon_0$. 这个结论称为*高斯定律*，也适用于比这里所作假定更为一般的电荷分布，正如几乎在任何物理学教科书中看到的一样.

> **高斯定律**
>
> $$\iint_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

### 14.8.6 流体动力学的连续性方程

令 $D$ 是空间中以闭有向曲面 $S$ 为界的区域. 如果$\boldsymbol{v}(x,y,z)$是平稳流过 $D$ 的流体的速度场, $\delta=\delta(t,x,y,z)$是在时间 $t$ 流体在点$(x,y,z)$的密度, 并且 $\boldsymbol{F}=\delta\boldsymbol{v}$, 那么流体动力学的**连续性方程**表述为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}+\frac{\partial\delta}{\partial t}=0$$

如果涉及的函数具有连续的一阶偏导数, 那么如下面所见, 这个方程由散度定理自然地导出.

首先, 积分

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma$$

是流体在那里穿过 $S$ 离开 $D$ 的速率(流体离开是因为 $\boldsymbol{n}$ 为外法向量). 为了弄清原因, 考虑曲面上面积为 $\Delta\sigma$ 的拼片(见图 14.66). 在很短时间间隔 $\Delta t$ 内, 流体流动穿过拼片的体积 $\Delta V$ 近似等于底面积为 $\Delta\sigma$ 和高为$(\boldsymbol{v}\,\delta t)\cdot\boldsymbol{n}$ 的柱面的体积, 即

$$\Delta V\approx\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\Delta\sigma\Delta t$$

其中$\boldsymbol{v}$是位于拼片上一点的速度向量. 在这个体积内流体的质量约为

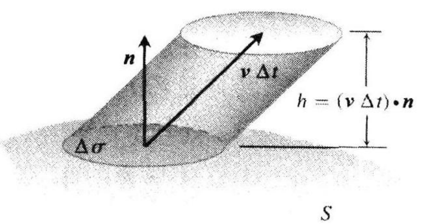



图 14.66 在短时间 $\Delta t$ 内流体穿过拼片 $\Delta\sigma$ 向上流动注满体积近似等于

底 × 高 $=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\Delta\sigma\Delta t$

的"柱体"

$$\Delta m\approx\delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\Delta\sigma\Delta t$$

所以在那里流体质量穿过拼片流出区域 $D$ 的速率约为

$$\frac{\Delta m}{\Delta t}\approx\delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\Delta\sigma$$

这就产生作为在那里流体质量穿过 $S$ 流动的平均速率估计的逼近

$$\frac{\sum\Delta m}{\Delta t}\approx\sum\delta\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\Delta\sigma$$

最后, 令 $\Delta\sigma\to0$ 和 $\Delta t\to0$, 得到在那里流体质量穿过 $S$ 离开 $D$ 的瞬时速率

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\iint_S\delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

对于我们讨论的特殊流动, 这个值为

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\iint_S\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma$$

现在令 $B$ 是中心在流动中一点 $Q$ 的球体. $\Delta\cdot\boldsymbol{F}$ 在 $B$ 上的平均值为

$$\frac{1}{B\text{ 的体积}}\iiint_B\nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V$$

这是$\nabla\cdot\boldsymbol{F}$ 在 $B$ 中某点 $P$ 实际出现这个值的散度连续性的推论. 因此,

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{F})_P=\frac{1}{B\text{ 的体积}}\iiint_B\nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V=\frac{\iint_S\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma}{B\text{ 的体积}}$$

$$=\frac{\text{流体质量在那里穿过曲面 }S\text{ 离开 }B\text{ 的速率}}{B\text{ 的体积}}\qquad(8)$$

上式右端的分式描述每单位体积中流体质量的减少.

现在令 $B$ 的半径趋近零而中心 $Q$ 保持固定. 等式(8)的左端收敛于$(\nabla\cdot\boldsymbol{F})_Q$，右端收敛于$(-\partial\delta/\partial t)_Q$. 这两个极限的等式就是连续性方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=-\frac{\partial\delta}{\partial t}$$

这个连续性方程"解释"$\nabla\cdot\boldsymbol{F}$ 如下：$\boldsymbol{F}$ 在一点的散度是流体的密度在那里减少的速率.

散度定理

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma=\iiint_D \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V$$

现在表明，在区域 $D$ 中流体密度的净减少量是按穿过曲面 $S$ 流出的流体质量来计算的. 所以这个定理是关于质量守恒的一种陈述(习题31).

### 14.8.7 统一不同积分定理

我们如果把二维向量场 $\boldsymbol{F}=M(x,y)\boldsymbol{i}+N(x,y)\boldsymbol{j}$ 看成 $\boldsymbol{k}$ 分量为零的三维向量场，那么$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=(\partial M/\partial x)+(\partial N/\partial y)$，并且格林定理的法向形式可以写成

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s=\iint_R\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_R \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}A$$

同样，$\nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{k}=(\partial N/\partial x)-(\partial M/\partial y)$，所以格林定理的切向形可以写成

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_R\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_R \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{k}\mathrm{d}A$$

由格林定理现在用倒三角记号的等式，我们可以看出格林定理这两个等式同斯托克斯定理和散度定理的等式的关系.

**格林定理及其在三维向量场的推广**

| | |
|---|---|
| 格林定理的法向形式 | $\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s=\iint_R \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}A$ |
| 散度定理 | $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma=\iiint_D \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V$ |
| 格林定理的切向形式 | $\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_R \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{k}\,\mathrm{d}A$ |
| 斯托克斯定量 | $\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_S \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$ |

注意斯托克斯定理是如何把格林定理的切向(旋度)形式从平面内的平面曲面推广到三维空间中的曲面的. 在每一种情况下，curl $\boldsymbol{F}$ 的法向分量在曲面内部上的积分等于 $\boldsymbol{F}$ 围绕曲面边界的环流.

同样，散度定理把格林定理的法向(通量)形式从平面内的二维区域推广到空间中的三维区域. 在每一种情况下，$\nabla\cdot\boldsymbol{F}$ 在区域内部上的积分等于场穿过区域边界的总通量.

这里还有进一步的结果. 可以把这些等式全部看成一个单一的基本定理的不同形式. 回想一下5.4节中的微积分基本定理. 基本定理表明，若$f(x)$在区间$(a,b)$上是可微的而在$[a,b]$上是连续的，则有

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$$

如果在整个区间$[a,b]$上令$\boldsymbol{F}=f(x)\boldsymbol{i}$，那么$(\mathrm{d}f/\mathrm{d}x)=\nabla\cdot\boldsymbol{F}$. 如果把在$[a,b]$的边界$a$和$b$同边界正交的单位向量$\boldsymbol{n}$分别定义为$-\boldsymbol{i}$和$\boldsymbol{i}$(见图 14.67)，那么

$$\begin{aligned} f(b)-f(a) &= f(b)\boldsymbol{i}\cdot(\boldsymbol{i})+f(a)\boldsymbol{i}\cdot(-\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{F}(b)\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{F}(a)\cdot\boldsymbol{n} \\ &= \boldsymbol{F}\text{ 穿过}[a,b]\text{ 边界的向外总通量} \end{aligned}$$

基本定理现在表述为

$$\boldsymbol{F}(b)\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{F}(a)\cdot\boldsymbol{n}=\int_{[a,b]}\nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}x$$

图 14.67 在一维空间的$[a,b]$边界的单位外法向量

微积分基本定理、格林定理的法向形式以及散度定理都说明，作用于一个区域上的向量场$\boldsymbol{F}$的微分算子$\nabla\cdot$的积分，等于$\boldsymbol{F}$在区域边界的法向量场分量之和.（我们在这里把格林定理中的线积分和散度定理中的面积分解释成在区域边界上的"和".）

斯托克斯定理和格林定理的切向形式表明，只要曲面是完全定向的，作用于一个场上的旋度的法向分量的积分等于曲面边界上的切向量场分量之和. 这些解释的美妙之处在于，它们都遵循可以陈述如下的单一统一原理.

> 作用于一个区域上的向量场的微分算子的积分，等于算子在区域边界上相应的场分量之和.

## 习题 14.8

在习题 1 ~ 4 中，求场的散度.

1. 图 14.13 中的旋转场.
2. 图 14.12 中的径向场.
3. 图 14.8 中的重力场和 14.3 节习题 38(a) 的重力场.
4. 图 14.11 中的速度场.

在习题 5 ~ 16 中，利用散度定理求$\boldsymbol{F}$穿过区域$D$的边界的向外通量.

5. $\boldsymbol{F}=(y-x)\boldsymbol{i}+(z-y)\boldsymbol{j}+(y-x)\boldsymbol{k}$;
   **立方体** $D$: 以平面$x=\pm1$，$y=\pm1$和$z=\pm1$为界的立方体.
6. $\boldsymbol{F}=x^2\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$;
   (a) **立方体** $D$: 由平面$x=1$，$y=1$和$z=1$从第一卦限切割的立方体.
   (b) **立方体** $D$: 以平面$x=\pm1$，$y=\pm1$和$z=\pm1$为界的立方体.
   (c) **圆柱体容器** $D$: 由平面$z=0$和$z=1$从圆柱体$x^2+y^2\leqslant4$切割的区域.
7. $\boldsymbol{F}=y\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}-z\boldsymbol{k}$;
   **圆柱体和抛物面** $D$: 圆柱体$x^2+y^2\leqslant4$内介于平面$z=0$和抛物面$z=x^2+y^2$之间的区域.
8. $\boldsymbol{F}=x^2\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+3z\boldsymbol{k}$;
   **球体** $D$: 球体$x^2+y^2+z^2\leqslant4$.
9. $\boldsymbol{F}=x^2\boldsymbol{i}-2xy\boldsymbol{j}+3xz\boldsymbol{k}$;
   **球体的一部分** $D$: 由球面$x^2+y^2+z^2=4$从第一卦限切割的区域.
10. $\boldsymbol{F}=(6x^2+2xy)\boldsymbol{i}+(2y+x^2z)\boldsymbol{j}+4x^2y^3\boldsymbol{k}$;
    **圆柱体容器** $D$: 由圆柱面$x^2+y^2=4$和平面$z=3$从第一卦限切割的区域.
11. $\boldsymbol{F}=2xz\boldsymbol{i}-xy\boldsymbol{j}-z^2\boldsymbol{k}$;
    **楔形块** 由平面$y+z=4$和椭圆柱面$4x^2+y^2=16$从第一卦限切割的楔形块区域.
12. $\boldsymbol{F}=x^3\boldsymbol{i}+y^3\boldsymbol{j}+z^3\boldsymbol{k}$;
    **球体** $D$: 球体$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$.
13. $\boldsymbol{F}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$;
    **厚层球面** $D$: 区域$1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant2$.
14. $\boldsymbol{F}=(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;
    **厚层球面** $D$: 区域$1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant4$.
15. $\boldsymbol{F}=(5x^3+12xy^2)\boldsymbol{i}+(y^3+\mathrm{e}^y\sin z)\boldsymbol{j}+(5z^3+\mathrm{e}^y\cos z)\boldsymbol{k}$;
    **厚层球面** $D$: 介于球面$x^2+y^2+z^2=1$和$x^2+y^2+z^2=2$之间的区域.
16. $\boldsymbol{F}=\ln(x^2+y^2)\boldsymbol{i}-\left(\dfrac{2z}{x}\tan^{-1}\dfrac{y}{x}\right)\boldsymbol{j}+z\sqrt{x^2+y^2}\boldsymbol{k}$;
    **厚层圆柱面** $D$: 厚壁圆柱面$1\leqslant x^2+y^2\leqslant2$，$-1\leqslant z\leqslant2$.
17. **div (curl $\boldsymbol{G}$) 为零**
    (a) 证明：若场$\boldsymbol{G}=M\boldsymbol{i}+N\boldsymbol{j}+P\boldsymbol{k}$的分量所需的偏导数是连续的，则$\nabla\cdot\Delta\times\boldsymbol{G}=0$.
    (b) 关于场$\nabla\times\boldsymbol{G}$穿过闭曲面的通量可以得出什么结论(如果存在)？提出答案的理由.
18. 令$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$是可微向量场，并且令$a$和$b$是任意实常数. 证实下列恒等式.
    (a) $\nabla\cdot(a\boldsymbol{F}_1+b\boldsymbol{F}_2)=a\,\nabla\cdot\boldsymbol{F}_1+b\,\nabla\cdot\boldsymbol{F}_2$.
    (b) $\nabla\times(a\boldsymbol{F}_1+b\boldsymbol{F}_2)=a\,\nabla\times\boldsymbol{F}_1+b\,\nabla\times\boldsymbol{F}_2$.
    (c) $\nabla\cdot(\boldsymbol{F}_1\times\boldsymbol{F}_2)=\boldsymbol{F}_2\cdot\nabla\times\boldsymbol{F}_1-\boldsymbol{F}_1\cdot\nabla\times\boldsymbol{F}_2$.

**19.** 令 $\boldsymbol{F}$ 是可微向量场，并且令 $g(x,y,z)$ 是可微纯量函数. 证实下列恒等式.

(a) $\nabla\cdot(g\boldsymbol{F}) = g\nabla\cdot\boldsymbol{F} + \nabla g\cdot\boldsymbol{F}$.

(b) $\nabla\times(g\boldsymbol{F}) = g\nabla\times\boldsymbol{F} + \nabla g\times\boldsymbol{F}$.

**20.** 如果 $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$ 是可微向量场，把记号 $\boldsymbol{F}\cdot\nabla$ 的含义定义为

$$M\frac{\partial}{\partial x} + N\frac{\partial}{\partial y} + P\frac{\partial}{\partial z}$$

对于可微向量场 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 证实下列恒等式.

(a) $\nabla\times(\boldsymbol{F}_1\times\boldsymbol{F}_2) = (\boldsymbol{F}_2\cdot\nabla)\boldsymbol{F}_1 - (\boldsymbol{F}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{F}_2 + (\nabla\cdot\boldsymbol{F}_2)\boldsymbol{F}_1 - (\nabla\cdot\boldsymbol{F}_1)\boldsymbol{F}_2$.

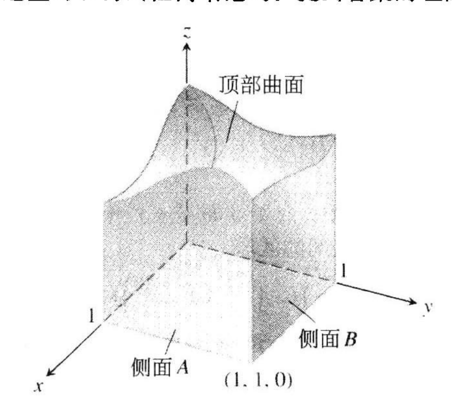
(b) $\nabla(\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{F}_2) = (\boldsymbol{F}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{F}_2 + (\boldsymbol{F}_2\cdot\nabla)\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_1\times(\nabla\times\boldsymbol{F}_2) + \boldsymbol{F}_2\times(\nabla\times\boldsymbol{F}_1)$.

**21.** 令 $\boldsymbol{F}$ 是一个场，它的分量在整个包含以闭光滑曲面 $S$ 为界的区域 $D$ 的空间区域内有连续一阶偏导数. 如果 $|\boldsymbol{F}|\leqslant 1$，三重积分

$$\iiint_D \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V$$

的值可能存在任何界限吗？提出答案的理由.

**22.** 附图所示类似立方体的闭曲面的底部是 $xy$ 平面内的单位正方形. 四个侧面位于平面 $x=0$，$x=1$，$y=0$ 和 $y=1$ 内. 顶部是单位元为未知的任意光滑曲面. 令 $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j} + (z+3)\boldsymbol{k}$，并且假定 $\boldsymbol{F}$ 穿过侧面 $A$ 的向外通量是 1 而穿过侧面 $B$ 的向外通量是 $-3$. 关于穿过顶部曲面的向外通量可以得出任何结论吗？提出答案的理由.




**23.** (a) 证明：位置向量场 $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 向外穿过光滑闭曲面 $S$ 的通量，等于由曲面包围区域的体积的 3 倍.

(b) 令 $\boldsymbol{n}$ 是 $S$ 上的向外单位法向量场. 证明：在 $S$ 上的每个点 $\boldsymbol{F}$ 不可能同 $\boldsymbol{n}$ 正交.

**24. 最大通量** 在由不等式 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant b$，$0\leqslant z\leqslant 1$ 定义的所有长方体中找出一个长方体，场 $\boldsymbol{F} = (-x^2-4xy)\boldsymbol{i} - 6yz\boldsymbol{j} + 12z\boldsymbol{k}$ 向外穿过它的 6 个面的总通量达到最大值. 这个最大通量是多少？

**25. 立体区域的体积** 令 $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，并且假定曲面 $S$ 和区域 $D$ 满足散度定理的假设. 证明：$D$ 的体积由下述公式给出：

$$D \text{ 的体积} = \frac{1}{3}\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

**26. 常向量场的通量** 证明：常向量场 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{C}$ 穿过适用散度定理的任何闭曲面的向外通量为零.

**27. 调和函数** 函数 $f(x,y,z)$ 称为空间区域 $D$ 中的调和函数，是指它在整个区域 $D$ 上满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 f = \nabla\cdot\nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

(a) 假定 $f$ 在由光滑曲面 $S$ 包围的整个有界区域 $D$ 是调和函数，并且 $\boldsymbol{n}$ 是在 $S$ 上选定的单位法向量. 证明：$f$ 在 $\boldsymbol{n}$ 方向的导数 $\nabla f\cdot\boldsymbol{n}$ 在 $S$ 上的积分为零.

(b) 证明：若 $f$ 是 $D$ 上的调和函数，则

$$\iint_S f\nabla f\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_D |\nabla f|^2\,\mathrm{d}V$$

**28. 梯度场的通量** 令 $S$ 是球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$ 在第一卦限部分的表面，并且令 $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 计算积分

$$\iint_S \nabla f\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

($\nabla f\cdot\boldsymbol{n}$ 是 $f$ 在 $\boldsymbol{n}$ 的方向的导数.)

**29. 格林第一公式** 假定 $f$ 和 $g$ 是在以分片光滑的闭曲面 $S$ 为界的整个区域 $D$ 上具有连续的一阶和二阶偏导数的纯量函数. 证明：

$$\iint_S f\nabla g\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_D (f\nabla^2 g + \nabla f\cdot\nabla g)\,\mathrm{d}V \qquad (9)$$

等式(9)是**格林第一公式**.（提示：对场 $\boldsymbol{F} = f\nabla g$ 应用散度定理.）

**30. 格林第二公式**（练习题 29）在等式(9)中交换 $f$ 和 $g$ 得到一个类似的等式. 然后从等式(9)的两端减这个等式的两端. 证明：

$$\iint_S (f\nabla g - g\nabla f)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_D (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,\mathrm{d}V \qquad (10)$$

这个等式是**格林第二公式**.

**31. 质量守恒** 令 $\boldsymbol{v}(t,x,y,z)$ 是空间区域 $D$ 上的连续可微向量场，$p(t,x,y,z)$ 是连续可微的纯量函数. 变量 $t$ 代表时间域. 质量守恒定律断言

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_D p(t,x,y,z)\,\mathrm{d}V = -\iint_S p\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

其中 $S$ 是包围区域 $D$ 的曲面.

(a) 如果 $\boldsymbol{v}$ 是流体流动的速度场，$p$ 代表流体在点 $(x,y,z)$ 在时间 $t$ 的密度，试给出质量守

恒定律的物理解释.

(b) 利用散度定理和莱布尼茨法则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_D p(t,x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iiint_D \frac{\partial p}{\partial t}\,\mathrm{d}V$$

证明：质量守恒定律等价于连续性方程

$$\nabla\cdot p\boldsymbol{v} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

(在第一项$\nabla\cdot p\boldsymbol{v}$中变量$t$保持不变，而在第二项$\frac{\partial p}{\partial t}$中假定$D$中的点$(x,y,z)$是固定的.)

**32. 热扩散方程** 令$T(t,x,y,z)$是具有连续二阶偏导数的函数，给出占据空间区域$D$的物体在点$(x,y,z)$在时间$t$的温度. 如果物体的热容量和质量密度分别用常数$c$和$\rho$表示，$c\rho T$称为物体的**每单位体积的热能**.

(a) 解释$-\nabla T$为什么指向热流的方向.

(b) 令$-k\Delta T$表示**能量通量向量**. (其中常数$k$称为**传导率**.) 假定在习题31中的质量守恒定律取$-k\Delta T=\boldsymbol{v}$和$c\rho T=p$，推导热扩散方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K\nabla^2 T$$

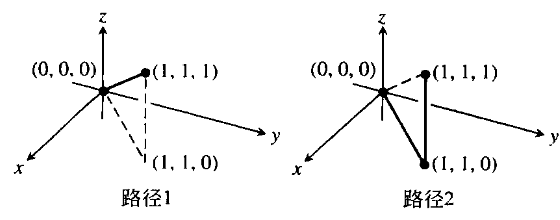
其中$K=k/(c\rho)>0$是*扩散率常数*. (请注意，如果$T(t,x)$代表在时间$t$一根两端完全绝热的均匀导热的杆在位置$x$的温度，那么$\nabla^2 T=\partial^2 T/\partial x^2$) 和热扩散方程导出第12章补充和提高习题中的一维热扩散方程.)

## 第14章复习指导问题

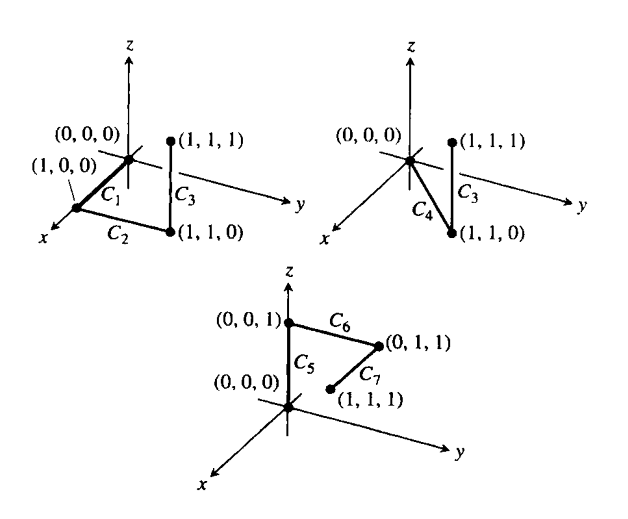
1. 什么是线积分？如何计算线积分？举出一些例子.
2. 你能够利用线积分求弹簧的质心吗？作出解释.
3. 什么是向量场？什么是梯度场？举出一些例子.
4. 如何计算由力沿曲线移动质点所作的功？举一个例子.
5. 什么是流、环流和通量？
6. 关于路径独立的场有什么特性？
7. 对于一个守恒的场你能作什么描述？
8. 什么是势函数？举例说明如何求守恒场的势函数？
9. 什么是微分形式？微分形式是恰当的含义是什么？如何检验微分形式的恰当性？举出一些例子.
10. 什么是向量场的散度？对于散度你能作出什么解释？
11. 什么是向量场的旋度？对于旋度你能作出什么解释？
12. 什么是格林定理？对于这个定理你能作出什么解释？
13. 如何计算弯曲曲面的面积？举一个例子.
14. 什么是有向曲面？如何计算三维向量场穿过有向曲面的通量？举一个例子.
15. 什么是面积分？用面积分能够计算什么？举一个例子.
16. 什么是参数化曲面？如何求这样一个曲面的面积？举出一些例子.
17. 如何求函数在用参数表示的曲面上的积分？举一个例子.
18. 什么是斯托克斯定理？你对这个定理能够作出什么解释？
19. 概述本章关于守恒场的结果.
20. 什么是散度定理？你对这个定理能够作出什么解释？
21. 散度定理如何推广格林定理？
22. 斯托克斯定理如何推广格林定理？
23. 怎样把格林定理、斯托克斯定理和散度定理看成一个单一基本定理的不同形式？

## 第14章实习习题

1. 附图显示空间中连接原点和点$(1,1,1)$的两条折线路径. 求$f(x,y,z)=2x-3y^2-2z+3$在每条路径上的积分.




2. 附图显示连接原点和点$(1,1,1)$的三条折线路径. 求$f(x,y,z)=x^2+y-z$在每条路径上的积分.



3. 求$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+z^2}$在圆

$$\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t)\boldsymbol{j}+(a\sin t)\boldsymbol{k},\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

上的积分.

4. 求$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$在螺形线

$$\boldsymbol{r}(t)=(\cos t+t\sin t)\boldsymbol{i}+(\sin t-t\cos t)\boldsymbol{j},$$
$$0\leqslant t\leqslant\sqrt{3}$$

上的积分.

求习题 5 和 6 中的积分.

5. $\int_{(-1,1,1)}^{(4,-3,0)}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z}{\sqrt{x+y+z}}$.

6. $\int_{(1,1,1)}^{(10,3,3)}\mathrm{d}x-\sqrt{\frac{z}{y}}\,\mathrm{d}y-\sqrt{\frac{y}{z}}\,\mathrm{d}z$.

7. 求$\boldsymbol{F}=-(y\sin z)\boldsymbol{i}+(x\sin z)\boldsymbol{j}+(xy\cos z)\boldsymbol{k}$围绕由平面$z=-1$从球面$x^2+y^2+z^2=5$切割的圆从上方看按顺时针方向的积分.

8. 求$\boldsymbol{F}=3x^2y\boldsymbol{i}+(x^3+1)\boldsymbol{j}+9z^2\boldsymbol{k}$围绕由平面$x=2$从球面$x^2+y^2+z^2=9$切割的圆的积分.

求习题 9 和 10 中的积分.

9. $\int_C 8x\sin y\,\mathrm{d}x-8y\cos x\,\mathrm{d}y$;

$C$是由直线$x=\pi/2$和$y=\pi/2$从第一象限切割的正方形.

10. $\int_C y^2\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$;

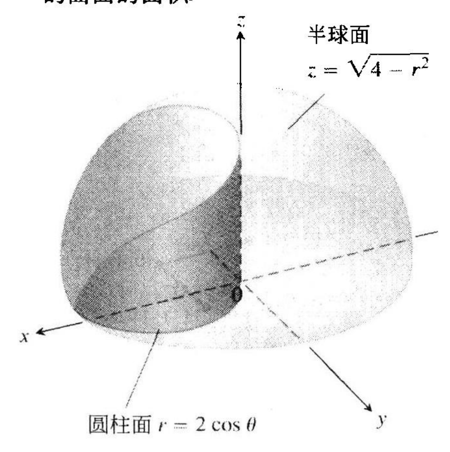
$C$是圆$x^2+y^2=4$.

11. **椭圆区域的面积** 求由圆柱面$x^2+y^2=1$从平面$x+y+z=1$切割的椭圆区域的面积.

12. **抛物面顶盖的面积** 求由平面$x=1$从抛物面$y^2+z^3=3x$切割的顶盖的面积.

13. **球面顶盖的面积** 求由平面$z=\sqrt{2}/2$从球面$x^2+y^2+z^2=1$顶部切割的顶盖的面积.

14. (a) **用圆柱面切割半球面** 求由圆柱面$x^2+y^2=2x$从半球面$x^2+y^2+z^2=4$，$z\geqslant0$切割的曲面的面积.




(b) 求圆柱面位于半球面内部部分的面积(提示：投影到$xz$平面. 或者求积分$\int h\,\mathrm{d}s$，其中$h$是圆柱面的高度，$\mathrm{d}s$是$xy$平面内圆$x^2+y^2=2x$上的弧元的长度.)

15. **三角形的面积** 求平面$(x/a)+(y/b)+(z/c)=1(a,\ b,\ c>0)$同第一卦限相交的三角形的面积. 用相应的向量计算验证答案.

16. **用平面切割抛物柱面** 在由平面$x=0$，$x=3$和$z=0$从抛物柱面$y^2-z=1$切割的曲面上求下列积分：

(a) $g(x,y,z)=\frac{yz}{\sqrt{4y^2+1}}$;

(b) $g(x,y,z)=\frac{z}{\sqrt{4y^2+1}}$.

17. **用平面切割圆柱面** 在圆柱面$y^2+z^2=25$位于第一卦限内的平面$x=0$和$x=1$之间以及在平面$z=3$之上的区域上，求$g(x,y,z)=x^4y(y^2+z^2)$的积分.

18. **怀俄明州的面积** 怀俄明州东西以西经111°3′和104°3′的子午线为界，南北以北纬41°和45°的圆为界. 假定地球是半径$R=3\ 959$英里的球面，求怀俄明州的面积.

在习题 19 ~ 24 中，求曲面的参数表示.（存在多种参数表示，所以你的答案可能和本书的答案不同.）

19. **球面带** 球面$x^2+y^2+z^2=36$介于平面$z=-3$和$z=3\sqrt{3}$之间的部分.

20. **抛物面顶盖** 抛物面$z=-(x^2+y^2)/2$在平面$z=-2$之上的部分.

21. **圆锥面** 圆锥面$z=1+\sqrt{x^2+y^2}$，$z\leqslant3$.

22. **正方形之上的平面** 平面$4x+2y+4z=12$位于第一象限内的正方形$0\leqslant x\leqslant2$，$0\leqslant y\leqslant2$之上的部分.

23. **抛物面的部分** 抛物面$y=2(x^2+z^2)$，$y\leqslant2$位于$xy$平面之上的部分.

24. **半球的部分** 半球$x^2+y^2+z^2=10$，$y\geqslant0$在第一卦限的部分.

25. **曲面面积** 求曲面

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(u+v)\boldsymbol{i}+(u-v)\boldsymbol{j}+v\boldsymbol{k},$$
$$0\leqslant u\leqslant1,\quad 0\leqslant v\leqslant1$$

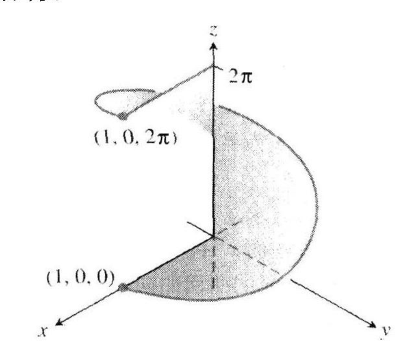
的面积.

26. **面积分** 求$f(x,y,z)=xy-z^2$在习题 25 的曲面上的积分.

27. **螺旋面的面积** 求附图中螺旋面

$$r(r,\theta) = (r\cos\theta)i + (r\sin\theta)j + \theta k,$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1$$

的面积.




**28. 面积分** 求积分

$$\iint_S \sqrt{x^2+y^2+1}\,\mathrm{d}\sigma$$

其中 $S$ 是习题 27 中的螺旋面.

在习题 29 ~ 32 中，哪些场是守恒的，哪些场不是守恒的?

**29.** $F = xi + yj + zk$.

**30.** $F = (xi + yj + zk)/(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$.

**31.** $F = xe^y i + ye^z j + ze^x k$.

**32.** $F = (i + zj + yk)/(x + yz)$.

在习题 33 和 34 中，求场的势函数.

**33.** $F = 2i + (2y+z)j + (y+1)k$.

**34.** $F = (z\cos xz)i + e^y j + (x\cos xz)k$.

在习题 35 和 36 中，求由每个场沿习题 1 中从点(0,0,0)到(1,1,1)的两条路径所作的功.

**35.** $F = 2xyi + j + x^2k$.

**36.** $F = 2xyi + x^2j + k$.

**37. 用两种方式求功** 按下面两种方式求由

$$F = \frac{xi + yj}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

在平面曲线 $r(t) = (e^t\cos t)i + (e^t\sin t)j$ 上从点(1,0)到($e^{2\pi}$,0)所做的功:

(a) 利用曲线的参数表示计算功积分;

(b) 通过计算 $F$ 的势函数.

**38. 沿不同路径的流量** 求场 $F = \nabla(x^2ze^y)$ 的流量:

(a) 围绕平面 $x+y+z=1$ 和圆柱面 $x^2+z^2=25$ 的椭圆交线 $C$，按照从正 $y$ 轴看的顺时针方向.

(b) 沿着习题 27 中从点(1,0,0)到(1,0,2π)的螺旋面的弯曲边界.

在习题 39 和 40 中，利用斯托克斯定理中的面积分求场 $F$ 按照指定方向围绕曲线 $C$ 的环流.

**39. 围绕椭圆的环流**

$$F = y^2i - yj + 3z^2k$$

$C$: 平面 $2x+6y-3z=6$ 同圆柱面相交的椭圆，按照从上方看的反时针方向.

**40. 围绕圆的环流**

$$F = (x^2+y)i + (x+y)j + (4y^2-z)k$$

$C$: 平面 $z=-y$ 同球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 相交的圆，按照从上方看的反时针方向.

**41. 具有不同密度的金属线** 求沿曲线

$$r(t) = \sqrt{2}ti + \sqrt{2}tj + (4-t^2)k, 0 \leqslant t \leqslant 1$$

置放的细金属线的质量，假定它在 $t$ 的密度为 (a) $\delta = 3t$，(b) $\delta = 1$.

**42. 具有可变密度的金属线** 求沿曲线

$$r(t) = ti + 2tj + (2/3)t^{3/2}k, 0 \leqslant t \leqslant 2$$

置放的细金属线的质心，假定它在 $t$ 的密度为 $\delta = 3\sqrt{5+t}$.

**43. 具有可变密度的金属线** 求沿曲线

$$r(t) = ti + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}j + \frac{t^2}{2}k, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2$$

置放的细金属线的质心和对坐标轴的惯性矩，假定它在 $t$ 的密度为 $\delta = 1/(t+1)$.

**44. 金属弓的质心** 一把细长的金属弓位于 $xy$ 平面内的半圆 $y = \sqrt{a^2-x^2}$ 上. 弓在点($x,y$)的密度为 $\delta(x, y) = 2a - y$. 求弓的质心.

**45. 具有常数密度的金属线** 位于曲线

$$r(t) = (e^t\cos t)i + (e^t\sin t)j + e^tk,$$
$$0 \leqslant t \leqslant \ln 2$$

上的金属线的密度为常数 $\delta = 1$. 求 $\bar{z}$ 和 $I_z$.

**46. 具有常数密度的金属线** 求位于螺旋线

$$r(t) = (2\sin t)i + (2\cos t)j + 3tk, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

上的密度 $\delta$ 为常数的金属线的质心.

**47. 薄壳的惯性矩和质心** 求由平面 $z=3$ 从球面 $x^2+y^2+z^2=25$ 的上面部分切割的薄壳的 $I_z$ 和质心，假设薄壳的密度 $\delta(x,y,z) = z$.

**48. 立方体表面的惯性矩** 求由平面 $x=1$，$y=1$ 和 $z=1$ 从第一卦限切割的立方体表面对 $z$ 轴的惯性矩，假设立方体表面的密度为 $\delta = 1$.

在习题 49 和 50 中，利用格林定理求场依反时针方向围绕曲线的环流和向外通量.

**49. 正方形** $F = (2xy+x)i + (xy-y)j$

$C$: 以直线 $x=0$，$x=1$，$y=0$ 和 $y=1$ 为界的正方形的边界.

**50. 三角形** $F = (y-6x^2)i + (x+y^2)j$

$C$: 以直线 $y=0$，$y=x$ 和 $x=1$ 构成的三角形的边界.

**51. 零线积分** 证明:

$$\oint_C \ln x\sin y\,\mathrm{d}y - \frac{\cos y}{x}\,\mathrm{d}x = 0$$

对于格林定理适用的任何闭曲线 $C$ 成立.

**52.** (**a**) **向外通量与面积** 证明：位置向量场 $\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$ 穿过格林定理适用的任何闭曲线 $C$ 的向外通量，等于由 $C$ 包围的区域面积的两倍.

(**b**) 令 $\boldsymbol{n}$ 是格林定理适用的闭曲线 $C$ 的向外单位法向量. 证明：$\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$ 不可能在 $C$ 的每个点同 $\boldsymbol{n}$ 正交.

在习题 53 ~ 56 中，求场 $\boldsymbol{F}$ 穿过区域 $D$ 的边界的向外通量.

**53. 立方体** $\boldsymbol{F}=2xy\boldsymbol{i}+2yz\boldsymbol{j}+2xz\boldsymbol{k}$

$D$：由平面 $x=1$，$y=1$ 和 $z=1$ 从第一卦限切割的立方体.

**54. 球盖** $\boldsymbol{F}=xz\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

$D$：由平面 $z=3$ 从球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 25$ 切割的上方区域.

**55. 球盖** $\boldsymbol{F}=-2x\boldsymbol{i}-3y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$

$D$：由抛物面 $z=x^2+y^2$ 从球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2$ 切割的上方区域.

**56. 圆锥面和圆柱面**

$$\boldsymbol{F}=(6x+y)\boldsymbol{i}-(x+z)\boldsymbol{j}+4yz\boldsymbol{k}$$

$D$：第一卦限内以圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和圆柱面 $x^2+y^2=1$ 以及坐标平面为界的区域.

**57. 半球面、圆柱面和平面** 令 $S$ 是左边以半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$y\leqslant 0$ 为界，中间以圆柱面 $x^2+z^2=a^2$，$0\leqslant y\leqslant a$ 为界，以及右边以平面 $y=a$ 为界的曲面. 求 $\boldsymbol{F}=y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k}$ 向外穿过 $S$ 的通量.

**58. 圆柱面和平面** 求场 $\boldsymbol{F}=3xz^2\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}-z^3\boldsymbol{k}$ 穿过第一卦限内以圆柱面 $x^2+4y^2=16$ 以及平面 $y=2z$，$x=0$ 和 $z=0$ 为界的曲面的向外通量.

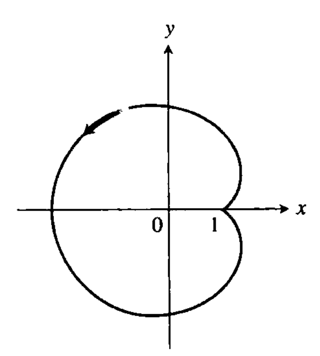
**59. 圆柱面容器** 利用散度定理求 $\boldsymbol{F}=xy^2\boldsymbol{i}+x^2y\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k}$ 向外穿过由圆柱面 $x^2+y^2=1$ 以及平面 $z=1$ 和 $z=-1$ 所包围区域表面的通量.

**60. 半球面** 用两种方法求 $\boldsymbol{F}=(3z+1)\boldsymbol{k}$ 向上穿过半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$z\geqslant 0$ 的通量：(**a**) 利用散度定理；(**b**) 通过直接计算通量积分.

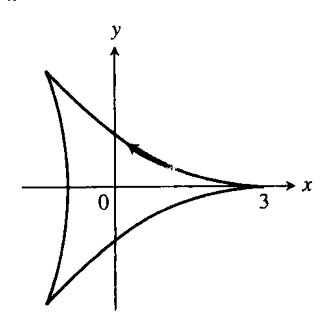
## 第 14 章补充和提高习题

在习题 1 ~ 4 中，利用格林定理面积公式，即 14.4 节习题中的公式(8)，求由曲线包围的区域的面积.

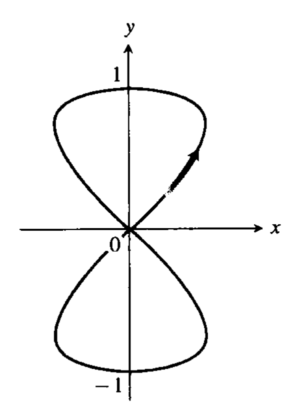
**1.** 蚶线 $x=2\cos t-\cos 2t$，$y=2\sin t-\sin 2t$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$.



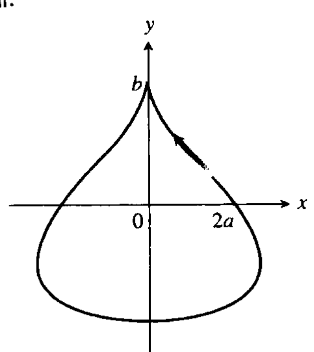

**2.** 三角形曲线 $x=2\cos t+\cos 2t$，$y=2\sin t-\sin 2t$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$.




**3.** 8 字形曲线 $x=(1/2)\sin 2t$，$y=\sin t$，$0\leqslant t\leqslant \pi$（一个环）.




**4.** 泪珠形曲线 $x=2a\cos t-a\sin 2t$，$y=b\sin t$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$.



5. (a) 举出一个向量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 的例子，它仅在一点的值为 $\boldsymbol{0}$ 而其旋度 curl $\boldsymbol{F}$ 处处不为零. 确定这个点并且计算旋度.
   (b) 举出一个向量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 的例子，它恰好在一条直线上的值为 $\boldsymbol{0}$ 而其旋度 curl $\boldsymbol{F}$ 处处不为零. 确定这条直线并且计算旋度.
   (c) 举出一个向量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 的例子，它在一个曲面上的值为 $\boldsymbol{0}$ 而其旋度 curl $\boldsymbol{F}$ 处处不为零. 确定这个曲面并且计算旋度.
6. 求出球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 上的所有点 $(a,b,c)$，在这些点向量场 $\boldsymbol{F}=yz^2\boldsymbol{i}+xz^2\boldsymbol{j}+2xyz\boldsymbol{k}$ 同球面正交，并且 $\boldsymbol{F}(a,b,c)\neq\boldsymbol{0}$.
7. 求半径为 $R$ 的球壳的质量，在球壳上每个点 $(x,y,z)$ 的质量密度 $\delta(x,y,z)$ 是从点到球壳某个固定点 $(a,b,c)$ 的距离.
8. 求螺旋线

$$\boldsymbol{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\boldsymbol{i}+(r\sin\theta)\boldsymbol{j}+\theta\boldsymbol{k},$$
$$0\leqslant r\leqslant 1,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

   的质量，假定曲线的密度函数 $\delta(x,y,z)=2\sqrt{x^2+y^2}$. 曲线的图形参见实习习题 27 的附图.
9. 在所有的矩形区域 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant b$ 中寻找一个矩形，场 $\boldsymbol{F}=(x^2+4xy)\boldsymbol{i}-6y\boldsymbol{j}$ 穿过它的四条边的向外总通量达到最小值. 这个最小通量是多少?
10. 求一个经过原点的平面的方程，流场 $\boldsymbol{F}=z\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k}$ 围绕这个平面同球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 相交的圆的环流达到最大值.
11. 一条绳子位于第一象限内从点 $(2,0)$ 到 $(0,2)$ 的圆 $x^2+y^2=4$ 上. 绳子的密度为 $\rho(x,y)=xy$.
   (a) 把绳子划分成有限段子弧，证明由重力把绳子垂直向下移动到 $x$ 轴所作的功由

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}g\,x_ky_k^2\Delta s_k=\int_C g\,xy^2\,\mathrm{d}s$$

   给出，其中 $g$ 为重力常数.
   (b) 通过计算(a)中的线积分求所作的总功.
   (c) 证明：所作的总功等于把绳子的质心 $(\bar{x},\bar{y})$ 垂直向下移动到 $x$ 轴所需的功.
12. 一块薄板位于平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限内的部分. 薄板的密度为 $\delta(x,y,z)=xy$.
   (a) 把薄板划分成有限个子块，证明由重力把薄板垂直向下移动到 $xy$ 平面所作的功由

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}g\,x_ky_kz_k\Delta\sigma_k=\iint_S g\,xyz\,\mathrm{d}\sigma$$

   给出，其中 $g$ 是重力常数.
   (b) 通过计算(a)中的面积分求所作的总功.
   (c) 证明：所作的总功等于把薄板的质心 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 垂直向下移动到 $xy$ 平面所需的功.
13. **阿基米德原理** 如果把一个像球体那样的物体放进液体中，它将沉入底部或者浮在上面，或者沉到某个深度而悬浮在液体中. 假定液体的重量密度 $w$ 为常数，并且液面同平面 $z=4$ 重合. 一个球体悬浮在液体中并且占据区域 $x^2+y^2+(z-2)^2\leqslant 1$.
   (a) 证明：给出由液体压力对球体产生总作用力的面积分为

$$力=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}w(4-z_k)\Delta\sigma_k=\iint_S w(4-z)\,\mathrm{d}\sigma$$

   (b) 球体不移动是由于液体浮力的支撑. 证明：液体对球体的浮力为

$$浮力=\iint_S w(z-4)\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

   其中 $\boldsymbol{n}$ 是在点 $(x,y,z)$ 的单位外法向量. 这说明阿基米德原理：液体对淹没物体的浮力等于物体排出液体的重量.
   (c) 利用散度定理求(b)中浮力的值.
14. **液体对曲面的力** 在形如曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\leqslant z\leqslant 2)$ 的圆锥形容器中注满重量密度 $w$ 为常数的液体. 假定 $xy$ 平面是“地平面”. 证明：由于液体压力对从 $z=1$ 到 $z=2$ 的锥面区域产生的总压力等于面积分

$$F=\iint_S w(2-z)\,\mathrm{d}\sigma$$

   求这个积分.
15. **法拉第定律** 如果 $\boldsymbol{E}(t,x,y,z)$ 和 $\boldsymbol{B}(t,x,y,z)$ 代表在点 $(x,y,z)$ 在时间 $t$ 的电场和磁场，电磁理论的一个基本原理说明 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$. 在这个表达式中 $\nabla\times\boldsymbol{E}$ 是在保持 $t$ 固定时计算的而 $\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ 是在保持 $(x,y,z)$ 固定时计算的. 利用斯托克斯定理推导法拉第定律

$$\oint_C\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\frac{\partial}{\partial t}\iint_S\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

   其中 $C$ 代表一个金属环，电流通过它时按照相对于曲面单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 的反时针方向流动，产生环绕 $C$ 的电压

$$\oint_C\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

   等式右端的面积分称为*磁通量*，$S$ 是以 $C$ 为边界的任意有向曲面.

**16.** 令

$$F=-\frac{GmM}{|r|^3}r$$

是对于 $r\neq 0$ 定义的重力场. 利用 14.8 节的高斯定律证明：不存在连续可微的向量场 $H$ 满足 $F=\nabla\times H$.

**17.** 如果 $f(x,y,z)$ 和 $g(x,y,z)$ 是定义在边界曲线为 $C$ 的有向曲面上的连续可微的纯量函数，证明

$$\iint_S(\nabla f\times\nabla g)\cdot n\,\mathrm{d}\sigma=\oint_C f\nabla g\cdot \mathrm{d}r$$

**18.** 假定在由具有单位外法向量 $n$ 的有向曲面 $S$ 包围的区域 $D$ 上，$\nabla\cdot F_1=\nabla\cdot F_2$ 和 $\nabla\times F_1=\nabla\times F_2$，并且在 $S$ 上 $F_1\cdot n=F_2\cdot n$. 证明：在整个区域 $D$ 上 $F_1=F_2$.

**19.** 证明：若 $\nabla\cdot F=0$ 和 $\nabla\times F=\mathbf{0}$，则 $F=\mathbf{0}$. 或者证明这个结论不成立.

**20.** 令 $S$ 是用参数形式 $r(u,v)$ 表示的有向曲面. 定义记号 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=r_u\mathrm{d}u\times r_v\mathrm{d}v$，所以 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 是同曲面正交的向量. 此外，量 $\mathrm{d}\sigma=|\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}|$ 是曲面元面积(由 14.5 节的公式(5)). 推导恒等式

$$\mathrm{d}\sigma=(EG-F^2)^{1/2}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

其中

$$E=|r_u|^2,\quad F=r_u\cdot r_v,\quad G=|r_v|^2$$

**21.** 证明：空间中由具有外法向量 $n$ 的有向曲面 $S$ 包围的区域 $D$ 的体积 $V$，满足恒等式

$$V=\frac{1}{3}\iint_S r\cdot n\,\mathrm{d}\sigma$$

其中 $r$ 是 $D$ 中点 $(x,y,z)$ 的位置向量.

# 附 录 A

## A.1 实数与实线

本节复习实数、不等式、区间和绝对值.

### A.1.1 实数

微积分的大部分论述是以实数系的性质为基础的. **实数**是可以表示成小数的数，像

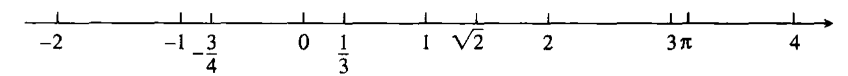
$$-\frac{3}{4}=-0.75000\cdots$$

$$\frac{1}{3}=0.33333\cdots$$

$$\sqrt{2}=1.4142\cdots$$

省略点…表示在每一种情况下小数数字序列一直延续下去. 每一个可能的小数展式代表一个实数. 不过，有些数有两种表示. 例如无穷小数0.999…和1.000…代表相同的实数1. 类似的陈述适用于尾数为无限个9的任何数.

实数在几何上可以表示成称为**实线**的一条数直线上的点.




用符号ℝ 表示实数系或者等价的实线.

实数系的性质分为三类：代数性质、有序性质和完备性性质.

**代数性质**说明，可以按通常的算术运算规则对实数作加、减、乘、除(除开用0作除数)运算，产生其他实数. *绝对不能用0作除数.*

实数的**有序性质**在附录A.7中给出. 下面的表列出可以从有序性质推出的很有用的一些法则，其中符号⇒表示“蕴涵”.

**不等式的法测**

| 若$a$, $b$, $c$为实数，则 | |
|---|---|
| (1) $a<b \Rightarrow a+c<b+c$ | (2) $a<b \Rightarrow a-c<b-c$ |
| (3) $a<b$ 和 $c>0 \Rightarrow ac<bc$ | (4) $a<b$ 和 $c<0 \Rightarrow bc<ac$ （特例：$a<b \Rightarrow -b<-a$） |
| (5) $a>0 \Rightarrow \frac{1}{a}>0$ | (6) $a$ 和 $b$ 同时为正数或负数，且 $a<b \Rightarrow \frac{1}{b}<\frac{1}{a}$ |

请注意用数乘不等式的法则. 用正数乘不等式，保持不等式；用负数乘不等式，使不等式颠倒. 此外，同符号数的不等式在数反号或者取倒数时，不等式颠倒. 例如$2<5$，但是$-2>-5$和$1/2>1/5$.

实数系的**完备性性质**是更深奥的和更难精确定义的性质. 然而这个性质是极限概念(第2章)的基础. 粗略地讲，完备性表明存在充足的实数，使实数线在不存在“孔眼”或者“空隙”的意义下是“完备的”. 倘若实数系不是完备的，微积分的许多定理将不复成立. 最好把这个题材留给高级微积分学教程去讲述，但是在附录A.7中将提示完备性涉及的问题以及如何构造实数系.

我们区分实数系的三个特殊子集：

(1) **自然数**，即1，2，3，4，…；

(2)**整数**，即0，±1，±2，±3，…；

(3)**有理数**，即可以表示成分式形式 $m/n$ 的数，其中 $m$ 和 $n$ 是整数并且 $n\neq0$，例如

$$\frac{1}{3},\quad -\frac{4}{9}=\frac{-4}{9}=\frac{4}{-9},\quad \frac{200}{13},\quad 57=\frac{57}{1}$$

有理数恰好是带有小数展式的实数，它们取下面两种形式之一：

(a)终结形式(以无穷个零结束)，例如

$$\frac{3}{4}=0.75000\cdots=0.75$$

(b)无限重复形式(以不断重复的一串数字结束)，例如

$$\frac{23}{11}=2.090909\cdots=2.\overline{09}\quad\text{(上横线表示重复的数字串)}$$

终结形式的小数展式是一种特殊类型的重复小数，因为它是以零的数字串重复的.

有理数集合具有实数系的代数性和有序性性质，但是没有完备性性质. 例如，不存在这样一个有理数，它的平方等于2；在由有理数联结成的直线中，$\sqrt{2}$ 一定是一个"孔眼".

不是有理数的实数称为**无理数**. 无理数以不终结的和不重复的小数展式为特征. 例如 $\pi$，$\sqrt{2}$，$3\sqrt{5}$ 和 $\log_{10}3$ 都是无理数.

由于每个小数展式代表一个实数，显然存在无穷多无理数. 在实线上对于任何点能找到同它任意接近的有理数和无理数.

集合记号对于描述实数的特定子集是很有用的. 一个**集合**是某些对象的组合. 这些对象是集合的**元素**. 如果 $S$ 是一个集合，记号 $a\in S$ 指 $a$ 是 $S$ 的元素，而 $a\notin S$ 指 $a$ 不是 $S$ 的元素. 如果 $S$ 和 $T$ 是集合，那么 $S\cup T$ 是它们的**并集**，其中包含属于 $S$ 或 $T$ 或者同时属于 $S$ 和 $T$ 的全部元素. $S\cap T$ 是两个集合的**交集**，其中包含同时属于 $S$ 和 $T$ 的全部元素. **空集** $\varnothing$ 是不含元素的集合. 例如，无理数集合同有理数集合的交集是空集.

有些集合可以通过在大括号中列出它们的元素的方式描述. 例如包含小于6的自然数(或正整数)的集合可以表示成

$$A=\{1,2,3,4,5\}$$

全部整数的集合可以写成

$$\{0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\cdots\}$$

描述集合的另外一种方法是在大括号中写出产生集合的所有元素的规则. 例如，集合

$$A=\{x\mid x\text{ 是一个整数且 }0<x<6\}$$

是小于6的正整数的集合.

### A.1.2 区间

实线的一个子集称为区间，如果它包含至少两个数并且包含介于它的任何两个元素之间的所有实数. 例如，满足 $x>6$ 的所有实数 $x$ 的集合是一个区间，正如满足 $-2\leqslant x\leqslant5$ 的所有 $x$ 的集合是区间一样. 所有非零实数的集合不是区间；由于集合中没有0，它不包含(例如) $-1$ 和1之间的每个实数.

在几何上，区间对应于实线上的射线、线段或实线本身. 对应于线段的实数区间是**有限区间**；对应于射线和实线的区间是**无限区间**.

如果有限区间包含它的两个端点，就说区间是**闭的**；如果区间包含一个端点而不含另外一个端点，就说它是**半开的**；如果区间不包含任何一个端点，就说它是**开的**. 区间的端点也称为**边**

**界点**；两个边界点构成区间的**边界**．区间的其余点是**内点**，并且一起构成区间的**内部**．无限区间是**闭的**，如果它包含一个有限端点；否则，它是开的．整个实线$\mathbb{R}$是一个既是开的又是闭的无限区间．表 A.1 概括各种区间的类型．

**表 A.1　区间的类型**

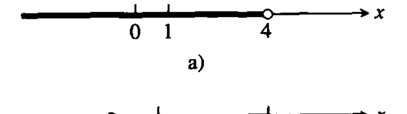
| 记　号 | 集合描述 | 类　型 | 图　形 |
|---|---|---|---|
| $(a, b)$ | $\{x \mid a<x<b\}$ | 开区间 | |
| $[a, b]$ | $\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ | 闭区间 | |
| $[a, b)$ | $\{x \mid a\leqslant x<b\}$ | 半开区间 | |
| $(a, b]$ | $\{x \mid a<x\leqslant b\}$ | 半开区间 | |
| $(a, \infty)$ | $\{x \mid x>a\}$ | 开区间 | |
| $[a, \infty)$ | $\{x \mid x\geqslant a\}$ | 闭区间 | |
| $(-\infty, b)$ | $\{x \mid x<b\}$ | 开区间 | |
| $(-\infty, b]$ | $\{x \mid x\leqslant b\}$ | 闭区间 | |
| $(-\infty, \infty)$ | $\mathbb{R}$（全部实数的集合） | 既是开区间又是闭区间 | |

### A.1.3　求解不等式

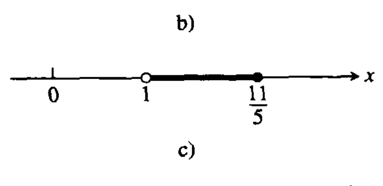
求满足 $x$ 的不等式的数的一个区间或者一些区间的过程称为**求解**不等式．

**例 1**　求解下列不等式并且显示它们在实线上的解集合．

(**a**) $2x-1<x+3$；　(**b**) $-\dfrac{x}{3}<2x+1$；　(**c**) $\dfrac{6}{x-1}\geqslant 5$.




a)




b)

c)

图 A.1　例 1 中不等式的解集合

**解**

(**a**)
$$2x-1<x+3;$$
$$2x<x+4 \quad (\text{对两端加 } 1)$$
$$x<4 \quad (\text{从两端减 } x)$$

解集合是开区间$(-\infty, 4)$（见图 A.1a）．

(**b**)
$$-\frac{x}{3}<2x+1$$
$$-x<6x+3 \quad (\text{在两端乘 } x)$$
$$0<7x+3 \quad (\text{在两端加 } x)$$
$$-3<7x \quad (\text{从两端减 } 3)$$
$$-\frac{3}{7}<x \quad (\text{在两端除以 } 7)$$

解集合是开区间$(-3/7, \infty)$（见图 A.1b）．

(**c**) 不等式$6/(x-1)\geqslant 5$仅当$x>1$时可能成立，因为在相反的情况下$6/(x-1)$是无定义的或者取负值．因此，$(x-1)$是正值，并且如果在两端乘$(x-1)$，不等式将保持，故有

$$\frac{6}{x-1}\geqslant 5$$
$$6\geqslant 5x-5 \quad (\text{在两端乘}(x-1))$$
$$11\geqslant 5x \quad (\text{对两端加 } 5)$$
$$\frac{11}{5}\geqslant x \quad \left(\text{或 } x\leqslant\frac{11}{5}\right)$$

解集合是半开区间(1,11/5](见图 A.1c). ■

### A.1.4　绝对值

数 $x$ 的**绝对值**用 $|x|$ 表示，是用公式

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

定义的.

**例 2**　$|3|=3$，$|0|=0$，$|-5|=-(-5)=5$，$|-|a||=|a|$. ■

在几何上，$x$ 的绝对值是实数线上从 $x$ 到 0 的距离. 由于距离总是取正值或者为 0，可知对于每个实数 $x$ 都有 $|x|\geqslant 0$，并且 $|x|=0$ 当且仅当 $x=0$. 此外，

$$|x-y| = \text{实线上 } x \text{ 和 } y \text{ 之间的距离}$$

(见图 A.2).

图 A.2　绝对值给出实线上点之间的距离

由于符号 $\sqrt{a}$ 总是表示 $a$ 的非负平方根，$|x|$ 的一个替代定义是

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

记住 $\sqrt{a^2}=|a|$ 是重要的. 不要写成 $\sqrt{a^2}=a$，除非已经知道 $a\geqslant 0$.

绝对值具有下面列出的性质.（要求读者在习题中证明这些性质.）

> **绝对值的性质**
>
> **(1)** $|-a|=|a|$　一个数和它的加性逆元或者负数具有相同的值.
>
> **(2)** $|ab|=|a||b|$　积的绝对值等于绝对值的积.
>
> **(3)** $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$　商的绝对值等于绝对值的商.
>
> **(4)** $|a+b|\leqslant|a|+|b|$　**三角不等式**，表明两数之和的绝对值小于或等于它们的绝对值之和.

请注意，$|-a|\neq-|a|$，例如，$|-3|=3$，而 $-|3|=-3$. 如果 $a$ 和 $b$ 的符号不同，那么 $|a+b|$ 小于 $|a|+|b|$. 在所有其他情形，$|a+b|=|a|+|b|$. 像在 $|-3+5|$ 这样的表达式中，绝对值竖线符号的作用同括号相似：在取绝对值前进行内部的算术运算.

**例 3**

$$|-3+5|=|2|=2<|-3|+|5|=8$$
$$|3+5|=|8|=|3|+|5|$$
$$|-3-5|=|-8|=8=|-3|+|-5|$$
■

不等式 $|x|<a$ 表明从 $x$ 到 0 的距离小于正数 $a$. 这意味着 $x$ 必须处于 $-a$ 和 $a$ 之间，像可以从图 A.3 看出的那样.

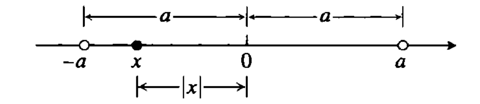



图 A.3　$|x|<a$ 表示 $x$ 位于 $-a$ 和 $a$ 之间

下面表中列出的命题在求解包含绝对值的方程或不等式时经常是很有用的，它们全部是绝对值定义的推论.

**绝对值与区间**

若 $a$ 是任意正数，则有

(5) $|x|=a \Leftrightarrow x=\pm a$　(6) $|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$　(7) $|x|>a \Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$

(8) $|x|\leqslant a \Leftrightarrow -a\leqslant x\leqslant a$　(9) $|x|\geqslant a \Leftrightarrow x\geqslant a$ 或 $x\leqslant -a$

符号⇔通常被数学家用来表示“当且仅当”的逻辑关系．这个符号也具有“蕴涵和被蕴涵”的含义．

**例 4**　求解方程 $|2x-3|=7$.

**解**　由性质(5)，$2x-3=\pm 7$，所以存在两种可能性：

$$2x-3=7 \qquad 2x-3=-7 \quad \text{(不带绝对值的两个等价方程)}$$
$$2x=10 \qquad 2x=-4 \quad \text{(像通常那样求解)}$$
$$x=5 \qquad x=2$$

方程 $|2x-3|=7$ 的解是 $x=5$ 和 $x=-2$. ■

**例 5**　求解不等式 $\left|5-\frac{2}{x}\right|<1$.

**解**　我们有

$$\left|5-\frac{2}{x}\right|<1 \Leftrightarrow -1<5-\frac{2}{x}<1 \quad \text{(性质6)}$$
$$\Leftrightarrow -6<-\frac{2}{x}<-4 \quad \text{(减5)}$$
$$\Leftrightarrow 3>\frac{1}{x}>2 \quad \text{(乘以} -\tfrac{1}{2}\text{)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}<x<\frac{1}{2} \quad \text{(取倒数)}$$

注意这里对不等式是如何应用不同法则的．不等式用负数相乘使不等式颠倒．对于两端为正值的不等式取倒数也是如此．原来不等式成立当且仅当 $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$. 解集合是开区间 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$. ■

## 习题 A. 1

1. 把 $\frac{1}{9}$ 表示成重复的小数，用上横线表示重复的数字串．$\frac{2}{9}$，$\frac{3}{9}$，$\frac{8}{9}$，$\frac{9}{9}$ 的小数表示是什么？

2. 如果 $2<x<6$，下列关于 $x$ 的命题哪些必定成立，哪些不是必定成立？

   (a) $0<x<4$.　(b) $0<x-2<4$.

   (c) $1<\frac{x}{2}<3$.　(d) $\frac{1}{6}<\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$.

   (e) $1<\frac{6}{x}<3$.　(f) $|x-4|<2$.

   (g) $-6<-x<2$.　(h) $-6<-x<-2$.

在习题 3 ~ 6 中，求解不等式并且在实线上显示解集合．

3. $-2x>4$.　4. $5x-3\leqslant 7-3x$.

5. $2x-\frac{1}{2}\geqslant 7x+\frac{7}{6}$.　6. $\frac{4}{5}(x-2)<\frac{1}{3}(x-6)$.

在习题 7 ~ 9 中，求解方程．

7. $|y|=3$.　8. $|2t+5|=4$.

9. $|8-3s|=\frac{9}{2}$.

在习题 10 ~ 17 中，求解不等式，把解集合表示成区间或者区间的并集．此外，在实线上显示每个解集合．

10. $|x|<2$.　11. $|t-1|\leqslant 3$.

12. $|3y-7|<4$.　13. $\left|\frac{z}{5}-1\right|\leqslant 1$.

14. $\left|3-\frac{1}{x}\right|<\frac{1}{2}$.　15. $|2s|\geqslant 4$.

16. $|1-x|>1$.　17. $\left|\frac{r+2}{2}\right|\geqslant 1$.

在习题 18 ~ 21 中，求解不等式. 把解集合表示成区间或者区间的并集，并且在实线上显示它们. 在适合的时候利用结果$\sqrt{a^2}=|a|$.

**18.** $x^2<2$.

**19.** $4<x^2<9$.

**20.** $(x-1)^2<4$.

**21.** $x^2-x<0$.

**22.** 不要陷入$|-a|=a$的圈套. 这个等式对于什么样的$a$成立? 它对于什么样的实数是不成立的?

**23.** 求解方程$|x-1|=1-x$.

**24.** **三角不等式的证明** 在三角不等式的下述证明中，对于带编号的每一步给出论证正确的理由：

$$
\begin{aligned}
|a+b|^2 &= (a+b)^2 && (1)\\
&= a^2+2ab+b^2\\
&\leqslant a^2+2|a||b|+b^2 && (2)\\
&= |a|^2+2|a||b|+|b|^2 && (3)\\
&= (|a|+|b|)^2\\
|a+b| &\leqslant |a|+|b| && (4)
\end{aligned}
$$

**25.** 证明：$|ab|=|a||b|$对于任何数$a$和$b$成立.

**26.** 如果$|x|\leqslant 3$和$x>-1/2$，对于$x$可以得出什么结论?

**27.** 画出不等式$|x|+|y|\leqslant 1$的图形.

**28.** 对于任何数$a$，证明$|-a|=|a|$.

**29.** 令$a$是任何正数. 证明：$|x|>a$当且仅当$x>a$或者$x<-a$.

**30.** (a)如果$b$是任意非零实数，证明$|1/b|=1/|b|$.

(b)证明：$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$对于任何数$a$和$b\neq 0$成立.

## A.2 数学归纳法

### A.2.1 数学归纳法原理

许多公式，像

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

通过应用一个称为*数学归纳法原理*的公理，可以证明对于每个正整数$n$成立. 利用这个公理作出的证明称为*用数学归纳法证明*或者*用归纳法证明*.

用归纳法证明公式的步骤如下：

(1)检验公式对于$n=1$成立.

(2)证明：若公式对于任何正整数$n=k$成立，则它对于随后的整数$n=k+1$也成立.

归纳法公理表明，一旦完成这两个步骤，公式对于所有正整数成立. 由第一步，它对于$n=1$成立. 由第二步，它对于$n=2$成立，因此，由第二步，对于$n=3$也成立，再由第二步，对于$n=4$同样成立，等等. 只要第一张多米诺骨牌倒下，结果总是当第$k$张骨牌倒下时推倒第$k+1$张骨牌，最终全部骨牌倒下.

从另外一个角度看，假定我们有一序列命题$S_1$，$S_2$，…，$S_n$，…，每个命题对应于一个整数. 假定可以证明，任何一个命题成立蕴涵其次的命题成立. 再假定可以证明第一个命题$S_1$成立. 那么，我们可以作出结论，从$S_1$起的全部命题成立.

**例 1** 利用数学归纳法证明：对于每个正整$n$，

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

**解** 我们用数学归纳法的两个步骤来完成这个证明.

(1)公式对于$n=1$成立，因为

$$1=\frac{1(1+1)}{2}$$

(2)如果公式对于$n=k$成立，那么它对于$n=k+1$也成立吗? 答案是肯定的，请看证明. 如果

$$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

那么

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k^2+k+2k+2}{2}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

上面等式序列中的最后一个表达式就是对于 $n=(k+1)$ 的 $n(n+1)/2$.

数学归纳法原理在此保证原来的公式对于所有正整数 $n$ 成立. ■

在5.2节的例4中，对于前 $n$ 个整数求和的这个公式曾经给出另外一种证明. 但是，用数学归纳法证明是更为一般的证明. 它可以用来求前 $n$ 个整数的平方和以及立方和(习题9和10). 下面举出另外一个例子.

**例2** 用数学归纳法证明：对于所有正整数 $n$,

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

**解** 我们用数学归纳法的两个步骤完成这个证明.

**(1)**公式对于 $n=1$ 成立，因为

$$\frac{1}{2^1}=1-\frac{1}{2^1}$$

**(2)**如果

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^k}$$

那么

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=1-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=1-\frac{1\cdot 2}{2^k\cdot 2}+\frac{1}{2^{k+1}}=1-\frac{2}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}=1-\frac{1}{2^{k+1}}$$

因此，原来公式对于 $n=(k+1)$ 成立，只要它对于 $n=k$ 成立.

根据这两步证实的结果，数学归纳法原理在此保证公式对于每个正整数 $n$ 成立. ■

### A.2.2 从其他整数开始

某些归纳法论证不是从 $n=1$ 开始而是从另外一个整数开始. 对于这样的论证，归纳法的步骤如下：

**(1)**检验公式对于 $n=n_1$(第一个适用的整数)成立.

**(2)**证明：若公式对于 $n=k\geqslant n_1$ 任何整数成立，则它对于 $n=(k+1)$ 也成立.

只要完成这两步论证，数学归纳法原理保证公式对于所有 $n\geqslant n_1$ 成立.

**例3** 证明：若 $n$ 是充分大的整数，则 $n!>3^n$.

**解** 多么大的 $n$ 才算是充分大的? 我们从试验着手：

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n!$ | 1 | 2 | 6 | 24 | 120 | 720 | 5040 |
| $3^n$ | 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | 2187 |

看来当 $n\geqslant 7$ 时 $n!>3^n$. 为了证实这一点，利用数学归纳法. 在第一步中取 $n_1=7$，再完成第二步.

假定 $k!>3^k$ 对于某个 $k\geqslant 7$ 成立. 于是

$$(k+1)!=(k+1)(k!)>(k+1)3^k>7\cdot 3^k>3^{k+1}$$

因此，对于 $k\geqslant 7$,

$$k!>3^k \quad 蕴涵 \quad (k+1)!>3^{k+1}$$

数学归纳法原理在此保证 $n!>3^n$ 对于所有 $n\geqslant 7$ 成立. ■

### 习题 A.2

1. 假定三角不等式 $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ 对于任意两个数 $a$ 和 $b$ 成立. 证明
$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$
对于任何 $n$ 个数成立.
2. 证明：若 $r \neq 1$，则
$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$
对于每个正整数 $n$ 成立.
3. 利用积法则 $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ 和 $\frac{d}{dx}(x) = 1$ 这个事实，证明 $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ 对于每个正整数 $n$ 成立.
4. 假定函数 $f(x)$ 具有这样的性质，对于任何两个正数 $x_1$ 和 $x_2$ 有 $f(x_1x_2) = f(x_1) + f(x_2)$. 证明
$$f(x_1x_2\cdots x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$$
对于任何 $n$ 个正数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的乘积成立.
5. 证明
$$\frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n}$$
对于全部正整数 $n$ 成立.
6. 证明：若 $n$ 是充分大的正整数，则 $n! > n^3$.
7. 证明：若 $n$ 是充分大的正整数，则 $2^n > n^2$.
8. 证明 $2^n \geqslant 1/8$ 对于 $n \geqslant -3$ 成立.
9. **平方和** 证明：前 $n$ 个正整数的平方和为
$$\frac{n\left(n + \frac{1}{2}\right)(n+1)}{3}$$
10. **立方和** 证明：前 $n$ 个正整数的立方和为
$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$
11. **有限和法则** 证明下列有限和法则对于每个正整数 $n$ 成立(参见 5.2 节)：
   (a) $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$.
   (b) $\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$.
   (c) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$ （$c$ 是任意数).
   (d) $\sum_{k=1}^{n} a_k = n \cdot c$ （如果 $a_k$ 取常数值 $c$).
12. 证明 $|x^n| = |x|^n$ 对于每个正整数 $n$ 和每个实数 $x$ 成立.

## A.3 直线、圆和抛物线

这一节复习平面内的坐标、直线、距离、圆和抛物线. 此外，讨论增量的概念.

### A.3.1 平面内的笛卡儿坐标

在附录 A.1 中，我们用实数指定点坐标的方式确定实线上点的位置. 在平面内可以用有序实数偶确定点的位置. 开始，在平面内作两条垂直的坐标线，它们在每条线的 0 点处相交. 这两条线称为平面内的**坐标轴**. 在水平方向的 $x$ 轴上，数字用 $x$ 表示并且向右增加. 在垂直方向的 $y$ 轴上，数字用 $y$ 表示并且向上增加(见图 A.4). 因此“向上”和“向右”是正方向，而“向下”和“向左”是负方向. 坐标系的**原点** $O$(也标记为 0)是平面内 $x$ 和 $y$ 都是 0 的点.

如果 $P$ 是平面内的任意点，它可以由一对有序实数按下述方式完全定位. 通过 $P$ 作两条垂直于坐标轴的直线. 这两条直线同坐标轴交于坐标为 $a$ 和 $b$ 的点(见图 A.4). 有序实数偶 $(a, b)$ 确定点 $P$，并且称为它的**坐标偶**. 第一个数 $a$ 是 $P$ 的 **$x$ 坐标**(或**横坐标**)；第二个数 $b$ 是 $P$ 的 **$y$ 坐标**(或**纵坐标**). 在 $y$ 轴上每个点的 $x$ 坐标为 0. 在 $x$ 轴上每个点的 $y$ 坐标为 0. 原点是两个坐标为 0 的点 $(0, 0)$.

人物传记

勒内·笛卡儿
(René Descartes, 1596—1650)

从有序偶 $(a,b)$ 开始，我们可以逆转这个过程达到平面内对应的点 $P$. 通常用有序偶 $(a,b)$ 确定 $P$ 并且写成 $P(a,b)$. 有时我们也谈到“点 $(a,b)$”，并且当 $(a,b)$ 是指平面内的一点而不是实线上的开区间时，从上下文看是清楚的. 用坐标标记的几个点显示在图 A.5 中.

这个坐标系称为**直角坐标系**或者**笛卡儿坐标系**(以 16 世纪法国数学家勒内·笛卡儿的名字命名). 这个坐标平面或者笛卡儿平面的坐标轴把平面分成称为**象限**的四个区域，象限按图 A.5 所示的反时针方向的顺序编号.

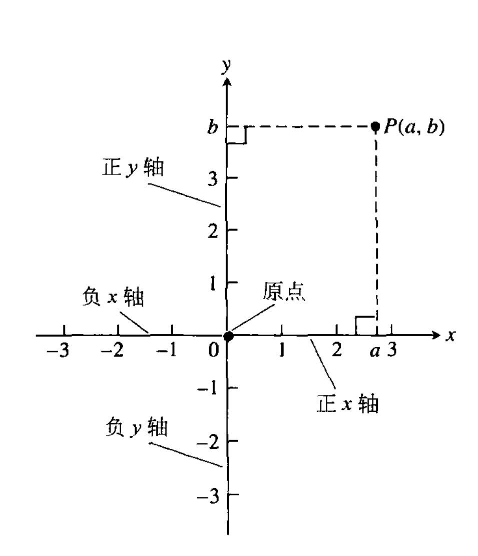



图 A.4 平面内基于在原点相交的两条垂直轴的笛卡儿坐标

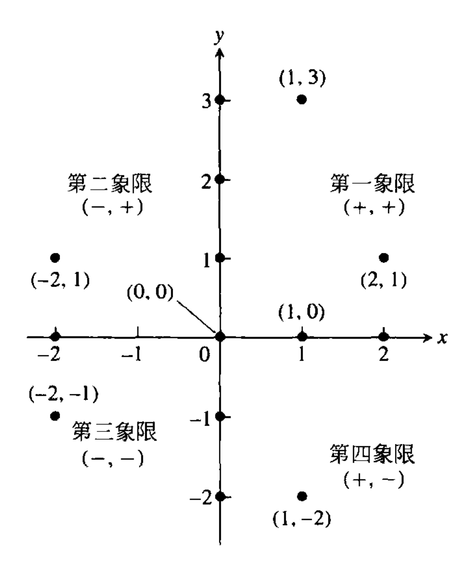



图 A.5 在 $xy$ 坐标平面或者笛卡儿平面内标出的点：在坐标轴上的点全部具有坐标偶，但是通常用一个实数标记（所以在 $x$ 轴上的点(1,0)标记为 1）；注意象限的坐标符号模式

包含变量 $x$ 和 $y$ 的方程或者不等式的**图形**是坐标平面内坐标满足方程或者不等式的全部点 $P(x, y)$ 的集合．当我们在坐标平面内绘制数据的图形或者画出变量具有不同度量单位的公式的图形时，不必在两个坐标轴上采用同样的尺度．例如，如果我们绘制火箭发动机的时间与推力的图形，没有理由把时间轴上指示 1 秒的刻度和推力轴上指示 1 磅的刻度设置成离原点同样的距离．

通常，当我们画那些变量不代表物理度量的函数图形或者在坐标平面内绘制用于研究几何或三角学性质的图形时，尽量在坐标轴上采用同等尺度．这样，垂直方向的单位距离看起来和水平方向的单位距离相同．像在一张测绘员地图或者比例图上，被认为具有同样长度的线段看起来是相等的，被认为全等的角看起来是相同的．

计算机显示器和计算器显示器是另外一种情况．在计算机产生图形上，垂直方向和水平方向的尺度通常是不同的，因而在距离、倾斜度和角度上存在相应的畸变．圆的形状看起来可能像椭圆，矩形可能像正方形，直角可能显现为锐角或者钝角，等等．我们在 1.6 节很详细地讨论过这些显示器和畸变．

### A.3.2 增量与直线

当质点从平面内一点移动到另外一点时，它的坐标的净改变量称为**增量**．增量是通过从终点坐标减去起点坐标来计算的．如果 $x$ 从 $x_1$ 变化到 $x_2$，$x$ 的增量是

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

**例 1** 从点 $A(4, -3)$ 到点 $B(2,5)$，$x$ 坐标和 $y$ 坐标的增量是

$$\Delta x = 2 - 4 = -2, \quad \Delta y = 5 - (-3) = 8$$

从点 $C(5,6)$ 到 $D(5,1)$，坐标的增量是

$$\Delta x = 5 - 5 = 0, \quad \Delta y = 1 - 6 = -5$$

参见图 A.6. ■

在 $xy$ 平面内给出两点 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$，我们把增量 $\Delta x = x_2 - x_1$ 和 $\Delta y = y_2 - y_1$ 分别称为 $P_1$ 和 $P_2$ 之间的**游程**和**升程**. 两个这样的点总是决定一条通过它们的唯一的直线. 这条直线称为 $P_1P_2$.

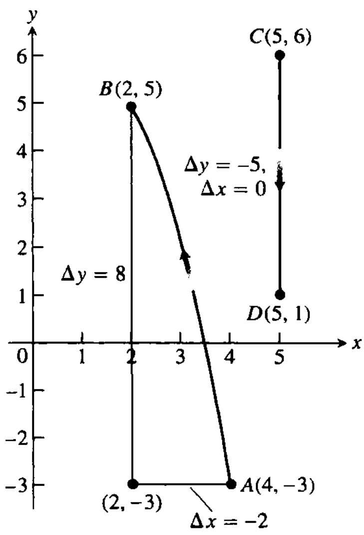



图 A.6 坐标的增量可能是正的或负的，也可能为零(例 1)

$xy$ 平面内的任何非垂直的直线具有如下性质：升程和游程的比

$$m = \frac{\text{升程}}{\text{游程}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

对于在直线上每次选择的两点 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$ 具有相同的值(见图 A.7). 这是因为相似三角形对应边的比相等.

> **定义(斜率)**
> 常数
> $$m = \frac{\text{升程}}{\text{游程}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
> 是非垂直直线 $P_1P_2$ 的**斜率**.

斜率说明直线的方向(向上或向下)和陡峭度. 具有正斜率的直线向右上方上升；具有负斜率的直线向右下方下降(见图 A.8). 斜率的绝对值越大，上升或者下降越快. 垂直直线的斜率是*无定义的*. 由于垂直直线的游程 $\Delta x$ 为零，不能构成斜率比 $m$.

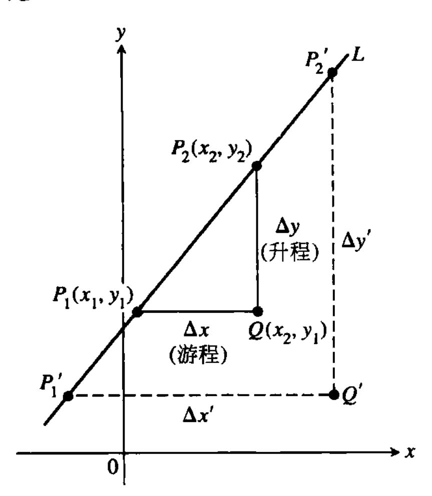



图 A.7 $\Delta P_1QP_2$ 和 $\Delta P_1'Q'P_2'$ 是相似三角形，所以对于直线上任意两点，它们的边的比具有相同的值，这个共同值是直线的斜率

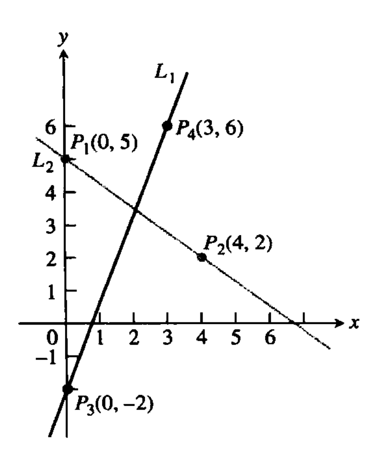



图 A.8 $L_1$ 的斜率为 $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-(-2)}{3-0} = \frac{8}{3}$，就是说，当 $x$ 每次增加 3 个单位时 $y$ 增加 8 个单位；$L_2$ 的斜率为 $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-5}{4-0} = \frac{-3}{4}$，就是说，当 $x$ 每次增加 4 个单位时 $y$ 减少 3 个单位

一条直线的方向和陡峭度也可以用角度量. 穿过 $x$ 轴的直线的**倾角**是从 $x$ 轴依反时针反向到直线的最小角(见图 A.9). 水平直线的倾角为 0°; 垂直直线的倾角为 90°. 如果 $\phi$(希腊字母 phi)是直线的倾角, 那么 $0 \leqslant \phi \leqslant 180°$.

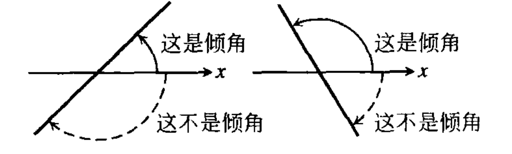



图 A.9 倾角依反时针方向从 $x$ 轴起度量

非垂直直线的斜率 $m$ 同直线的倾角 $\phi$ 之间的关系

$$m = \tan \phi$$

显示在图 A.10 中.

直线具有很简单的方程. 通过 $x$ 轴上一点 $a$ 的垂直直线的所有点的 $x$ 坐标等于 $a$. 因此, $x = a$ 是垂直直线的方程. 同样, $y = b$ 是同 $y$ 轴在 $b$ 相交的水平直线的方程(参见图 A.11).

如果知道非垂直直线 $L$ 的斜率 $m$ 和直线上一点 $P_1(x_1, y_1)$ 的坐标, 我们可以写出它的方程. 如果 $P(x, y)$ 是 $L$ 上另外任意的一点, 那么可以用这两点 $P_1$ 和 $P$ 计算斜率

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

所以

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad 或 \quad y = y_1 + m(x - x_1)$$

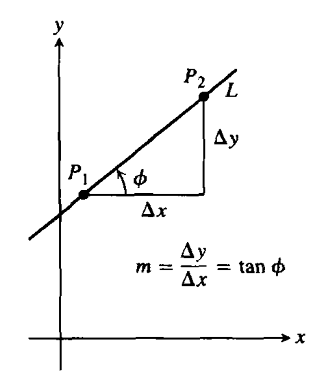



图 A.10 非垂直直线的斜率等于它的倾角的正切

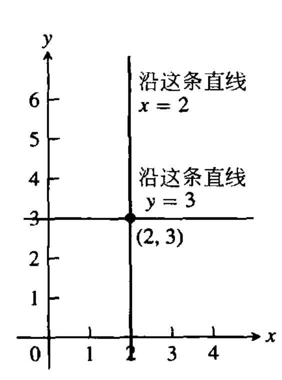



图 A.11 通过点(2,3)的水平直线和垂直直线的标准方程是 $x = 2$ 和 $y = 3$

**点斜式方程** 方程

$$y = y_1 + m(x - x_1)$$

是通过点 $(x_1, y_1)$ 和斜率为 $m$ 的直线的点斜式方程.

**例 2** 写出通过点(2,3)和斜率为 $-3/2$ 的直线的方程.

**解** 在点斜式方程中代入 $x_1 = 2$, $y = 3$ 和 $m = -3/2$, 得到

$$y = 3 - \frac{3}{2}(x - 2) \quad 或 \quad y = -\frac{3}{2}x + 6$$

当 $x = 0$ 时 $y = 6$, 所以直线同 $y$ 轴在 $y = 6$ 相交. ■

**例 3** 写出通过点 $(-2, -1)$ 和 $(3, 4)$ 的直线的方程.

**解** 直线的斜率为

$$m = \frac{-1 - 4}{-2 - 3} = \frac{-5}{-5} = 1$$

我们可以在点斜式方程中，利用这个斜率和给出的两点中的任何一点：

| 取$(x_1,y_1) = (-2, -1)$ | 取$(x_1,y_1) = (3,4)$ |
|---|---|
| $y = -1 + 1\cdot(x-(-2))$ | $y = 4 + 1\cdot(x-3)$ |
| $y = -1 + x + 2$ | $y = 4 + x - 3$ |
| $y = x + 1$ | $y = x + 1$ |

结果相同

在两种情况下，直线的方程都是$y = x + 1$(见图 A.12). ■

非垂直直线同$y$轴的交点的$y$坐标称为直线的**$y$截距**. 同样，非水平直线穿过$x$轴的点的$x$坐标称为**$x$截距**(见图 A.13). 斜率为$m$和$y$截距为$b$的直线通过点$(0, b)$，所以它具有方程

$$y = b + m(x - 0) \quad \text{或更简单的形式} \quad y = mx + b$$

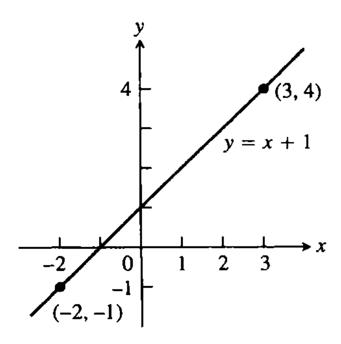



图 A.12 例 3 中的直线

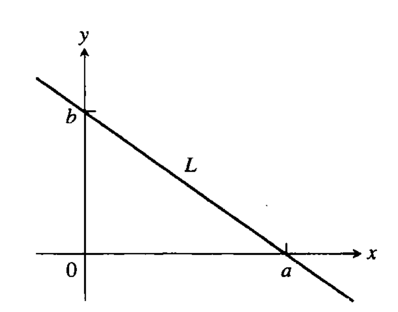



图 A.13 直线$L$具有$x$截距$a$和$y$截距$b$

> **斜截式方程** 方程
> $$y = mx + b$$
> 称为斜率为$m$和$y$截距为$b$的直线的斜截式方程.

方程形式为$y = mx$的直线的$y$截距为 0，所以它通过原点.

直线的方称称为**线性**方程. 方程

$$Ax + By = C \quad (A \text{ 和 } B \text{ 不同时为 } 0)$$

称为$x$和$y$的**一般线性方程**，因为它的图形总是描绘一条直线，并且每条直线具有这种形式的方程(其中包括斜率无定义的直线).

### A.3.3 平行直线与垂直直线

平行直线具有相等的倾角，所以它们具有相同的斜率(只要它们不是垂直的). 反过来，斜率相同的直线具有相等的倾角，所以它们是平行的.

如果两条非垂直直线$L_1$和$L_2$是正交的，它们的斜率$m_1$和$m_2$满足$m_1m_2 = -1$，所以每条直线的斜率是另外一条直线的斜率的负倒数：

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \text{或} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

为看出这个结果，注意观察图 A.14 中的两个相似三角形，其中$m_1 = a/h$，$m_2 = -h/a$. 因此，$m_1m_2 = (a/h)(-h/a) = -1$.

### A.3.4 平面内的距离和圆

平面内两点之间的距离是用来源于勾股定理的一个公式计算的(见图 A.15).

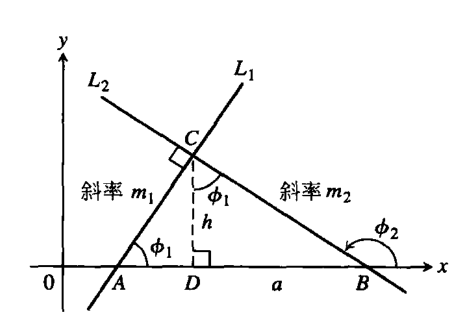



图 A.14 $\triangle ADC$ 同 $\triangle CDB$ 相似，因此 $\phi_1$ 也是 $\triangle CDB$ 中的上方角；从 $\triangle CDB$ 的边可知 $\phi_1 = a/h$

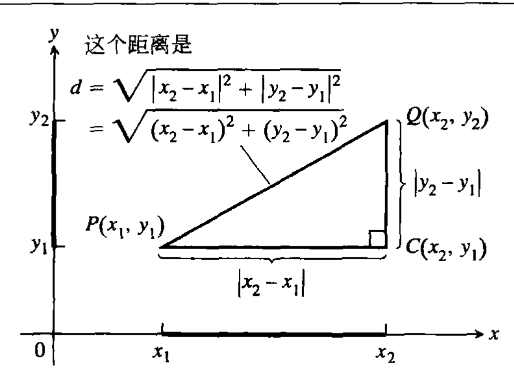



图 A.15 为了计算 $P(x_1, y_1)$ 和 $Q(x_2, y_2)$ 之间的距离，对 $\triangle PCQ$ 应用勾股定理

> **平面内两点间的距离公式**
>
> 两点 $P(x_1, y_1)$ 和 $Q(x_2, y_2)$ 间的距离为
>
> $$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

**例 4**

**(a)** 点 $P(-1,2)$ 和 $Q(3,4)$ 间的距离为

$$\sqrt{(3-(-1))^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

**(b)** 从原点到点 $P(x,y)$ 的距离为

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$ ■

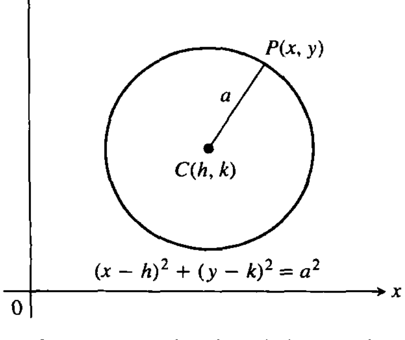



图 A.16 $xy$ 平面内以点 $(h, k)$ 为圆心和半径为 $a$ 的圆

按照定义，半径为 $a$ 的圆是到某个中心 $C(h,k)$ 的距离为 $a$ 的所有点 $P(x,y)$ 的集合（见图 A.16）. 由距离公式，$P$ 位于圆上当且仅当

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = a$$

所以

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2 \qquad (1)$$

方程(1)称为以 $(h,k)$ 为圆心和半径为 $a$ 的圆的**标准方程**. 圆心在原点和半径 $a=1$ 的圆是具有方程

$$x^2 + y^2 = 1$$

的**单位圆**.

**例 5**

**(a)** 以 $(3,4)$ 为圆心和半径为 2 的圆的标准方程是

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 2^2 = 4$$

**(b)** 圆

$$(x-1)^2 + (y+5)^2 = 3$$

具有 $h=1$，$k=-5$ 和 $a=\sqrt{3}$，这个圆的圆心在点 $(h,k)=(1,-5)$，半径为 $a=\sqrt{3}$. ■

如果一个圆的方程不是标准形式，我们可以首先把它转换成标准形式来求圆心和半径. 这样做的代数方法称为**配方**.

**例 6** 求圆

$$x^2+y^2+4x-6y-3=0$$

的圆心和半径.

**解** 通过对 $x$ 和 $y$ 的配方把方程转换成标准形式：

$$x^2+y^2+4x-6y-3=0 \quad \text{（从给出的方程开始）}$$

$$(x^2+4x)+(y^2-6y)=3 \quad \text{（合并项,把常数移到右端）}$$

$$\left(x^2+4x+\left(\frac{4}{2}\right)^2\right)+\left(y^2-6y+\left(\frac{-6}{2}\right)^2\right)=3+\left(\frac{4}{2}\right)^2+\left(\frac{-6}{2}\right)^2$$

（在方程两端加 $x$ 系数的一半的平方,对 $y$ 做同样运算,左端两个括号内的表达式成为完全平方）

$$(x^2+4x+4)+(y^2-6y+9)=3+4+9$$

$$(x+2)^2+(y-3)^2=16 \quad \text{（把每个二次式写成线性表达式的平方）}$$

圆心在$(-2,3)$，半径为 $a=4$. ■

满足不等式

$$(x-h)^2+(y-k)^2<a^2$$

的点$(x,y)$构成以点$(k,k)$为圆心和半径为 $a$ 的圆的**内部**区域(见图 A. 17). 圆的**外部**区域由满足不等式

$$(x-h)^2+(y-k)^2>a^2$$

的点$(x,y)$组成.

## A. 3. 5 抛物线

一般抛物线的几何定义和性质在 9. 4 节复习. 这里我们考察以 $y=ax^2+bx+c$ 这种方程的图形出现的抛物线.

**例 7** 考虑方程 $y=x^2$. 坐标满足这个方程的一些点有$(0,0)$，$(1,1)$，$\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$，$(-1,1)$，$(2,4)$，$(-2,4)$. 这些点(以及满足方程的所有其他点)构成一条称为抛物线的光滑曲线(见图 A. 18). ■

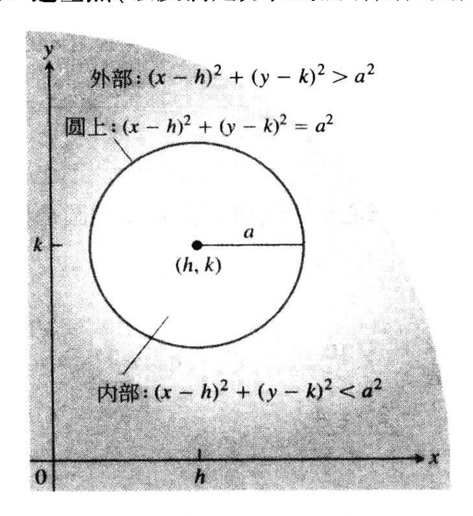



图 A. 17 圆$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ 的内部和外部

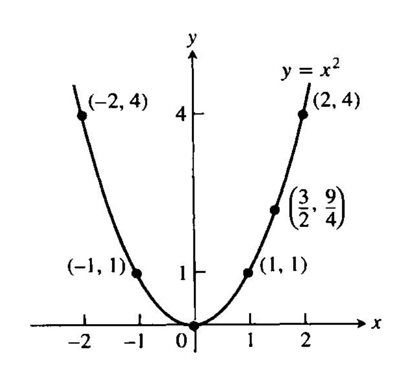



图 A. 18 抛物线 $y=x^2$(例 7)

形式为

$$y = ax^2$$

的方程的图形是以 $y$ 轴为**轴**(对称轴)的**抛物线**. 抛物线的**顶点**(抛物线和轴的交点)位于原点. 抛物线在 $a>0$ 时向上张开, 在 $a<0$ 时向下张开. $|a|$ 的值越大, 抛物线越窄(见图 A.19).

一般说来, $y=ax^2+bx+c$ 的图形是从抛物线 $y=x^2$ 的图形移位和改变尺度得到的. 我们在 1.2 节更详尽地讨论过图形的移位和改变尺度.

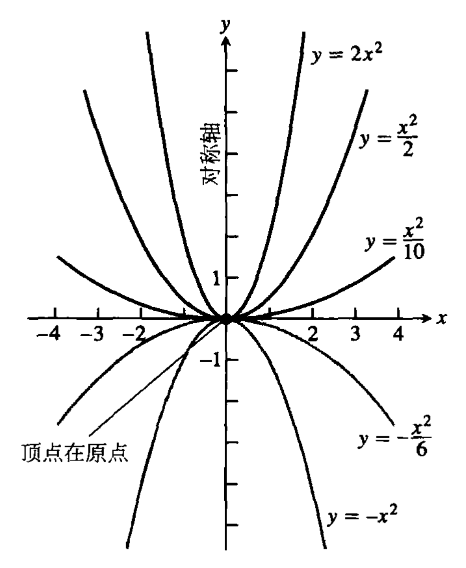



图 A.19 抛物线 $y=ax^2$ 中的数 $a$ 除开决定图形张开的方向以外, 也是比例因子; 当 $a$ 接近零时抛物线图形变宽, 当 $|a|$ 增大时图形变窄

> **$y=ax^2+bx+c\,(a\neq0)$ 的图形**
>
> 方程 $y=ax^2+bx+c$, $a\neq0$ 的图形是抛物线. 抛物线在 $a>0$ 时向上张开, 在 $a<0$ 时向下张开. 抛物线的**轴**是直线
>
> $$x = -\frac{b}{2a} \tag{2}$$
>
> **顶点**是轴和抛物线的交点. 它的 $x$ 坐标是 $x=-b/2a$; 它的 $y$ 坐标通过在抛物线方程中代入 $x=-b/2a$ 求得.

请注意, 如果 $a=0$, 我们得到 $y=bx+c$ 是一条直线的方程. 由方程(2)给出的轴可以通过配方或者利用在 4.1 节学习的方法求得.

**例 8** 画出方程 $y=-\frac{1}{2}x^2-x+4$ 的图形.

**解** 把这个方程同 $y=ax^2+bx+c$ 比较, 看出

$$a=-\frac{1}{2},\quad b=-1,\quad c=4$$

由于 $a<0$, 抛物线向下张开. 从方程(2), 抛物线的轴是垂直直线

$$x=-\frac{b}{2a}=\frac{(-1)}{2(-1/2)}=-1$$

当 $x=-1$ 时, 有

$$y=-\frac{1}{2}(-1)^2-(-1)+4=\frac{9}{2}$$

顶点是 $(-1,9/2)$.

$x$ 截距在 $y=0$ 处:

$$-\frac{1}{2}x^2-x+4=0$$

$$x^2+2x-8=0$$

$$(x-2)(x+4)=0$$

$$x=2,\quad x=-4$$

我们描绘几个点和对称轴, 并且利用曲线张开的方向画出图 A.20 中的图形. ■

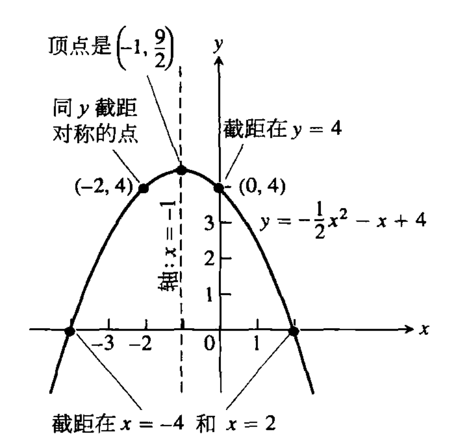



图 A.20 例 8 中的抛物线

## 习题 A.3

在习题 1 和 2 中，质点从坐标平面中的点 $A$ 移动到 $B$. 求质点坐标中的增量 $\Delta x$ 和 $\Delta y$. 此外，求从点 $A$ 到 $B$ 的距离.

1. $A(-3,2)$，$B(-1,-2)$.
2. $A(-3.2,-2)$，$B(-8.1,-2)$.

在习题 3 和 4 中，描绘方程的图形.

3. $x^2+y^2=1$.
4. $x^2+y^2\leqslant 3$.

在习题 5 和 6 中，描绘给出的点 $A$ 和 $B$，并且求它们所决定的直线的斜率(如果存在). 此外，求同直线 $AB$ 垂直的直线的共同斜率(如果存在).

5. $A(-1,2)$，$B(-2,-1)$.
6. $A(2,3)$，$B(-1,3)$.

在习题 7 和 8 中，求通过给定点的(**a**)垂直直线和(**b**)水平直线的方程.

7. $(-1,4/3)$.
8. $(0,-\sqrt{2})$.

在习题 9～15 中，写出所描述的每条直线的方程.

9. 通过点$(-1,1)$，斜率为 $-1$.
10. 通过点$(3,4)$和$(-2,5)$.
11. 具有斜率 $-5/4$ 和 $y$ 截距 6.
12. 通过点$(-12,-9)$并且具有斜率 0.
13. 具有 $y$ 截距 4 和 $x$ 截距 $-1$.
14. 通过点$(5,-1)$并且平行于直线 $2x+5y=15$.
15. 通过点$(4,10)$并且垂直于直线 $6x-3y=5$.

在习题 16 和 17 中，求直线的 $x$ 截距和 $y$ 截距，并且利用这两个截距画出直线的图形.

16. $3x+4y=12$.
17. $\sqrt{2}x-\sqrt{3}y=\sqrt{6}$.
18. 在直线 $Ax+By=C_1$ 和 $Bx-Ay=C_2$ $(A\neq 0,\ B\neq 0)$之间存在任何特殊关系吗？提出答案的理由.
19. 质点从点 $A(-2,3)$ 开始，它的坐标按增量 $\Delta x=5$，$\Delta y=-6$ 改变. 求质点的新位置.
20. 质点在从点 $A(x,y)$ 移动到 $B(3,-3)$ 时的坐标按增量 $\Delta x=5$ 和 $\Delta y=6$ 改变. 求 $x$ 和 $y$.

在习题 21～23 中，求具有给定圆心 $C(h,k)$ 和半径 $a$ 的圆的方程，然后在 $xy$ 平面内画出圆的草图. 在图中包含圆心. 此外，用坐标偶标出圆的 $x$ 截距和 $y$ 截距(如果存在).

21. $C(0,2)$，$a=2$.
22. $C(-1,5)$，$a=\sqrt{10}$.
23. $C(-\sqrt{3},-2)$，$a=2$.

在习题 24～26 中，画出给定方程的圆的图形. 用坐标偶标出圆心以及 $x$ 截距和 $y$ 截距(如果存在).

24. $x^2+y^2+4x-4y+4=0$.
25. $x^2+y^2-3y-4=0$.
26. $x^2+y^2-4x+4y=0$.

在习题 27～30 中，画出抛物线的图形. 在每种情形标出抛物线的顶点、对称轴以及 $x$ 截距和 $y$ 截距.

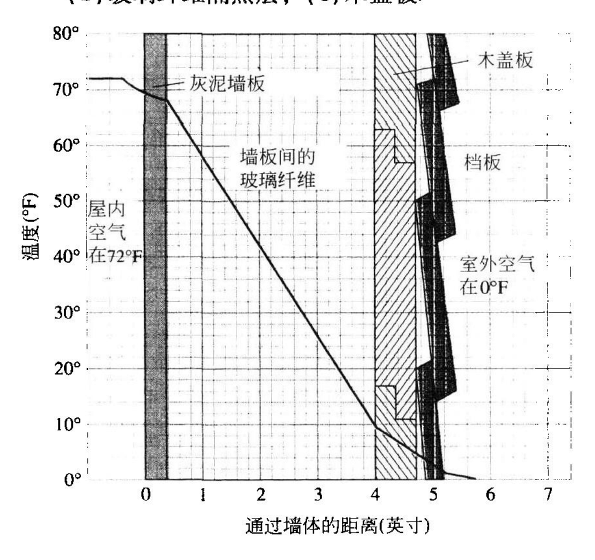
27. $y=x^2-2x-3$.
28. $y=-x^2+4x$.
29. $y=-x^2-6x-5$.
30. $y=\frac{1}{2}x^2+x+4$.

在习题 31～36 中，描绘由一个不等式或者两个不等式所定义的区域.

31. $x^2+y^2>7$.
32. $(x-1)^2+y^2\leqslant 4$.
33. $x^2+y^2>1$，$x^2+y^2<4$.
34. $x^2+y^2+6y<0$，$y>-3$.
35. 写出一个不等式，描述位于以$(-2,1)$为圆心和半径为$\sqrt{6}$的圆的内部点.
36. 写出两个不等式，描述位于以$(0,0)$为圆心和半径为$\sqrt{2}$的圆的内部或者圆上的点，以及位于通过$(1,0)$的垂直直线上或者直线右边的点.

在习题 37～40 中，画出两个方程的图形，并且求图形的交点.

37. $y=2x$，$x^2+y^2=1$.
38. $y-x=1$，$y=x^2$.
39. $y=-x^2$，$y=2x^2-1$.
40. $x^2+y^2=1$，$(x-1)^2+y^2=1$.
41. **隔热** 通过测定附图中温度曲线的斜率估计墙体的温度变化(华氏度/英寸)：(**a**)灰泥墙板；(**b**)玻璃纤维隔热层；(**c**)木盖板.

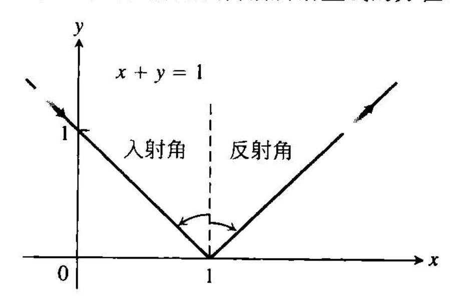



习题 41 和 42 中墙体的温度变化

42. **隔热** 根据习题 41 中的图形，哪一种材料是最好的隔热材料？哪一种材料是最差的隔热材料？作出解释.
43. **水下压力** 潜水员在水下经受的压力 $p$ 同潜水

员所处深度 $d$ 的关系由公式 $p = kd + 1$（$k$ 为常数）确定. 在水面上的压力为 1 大气压；在 100 米深处的压力约为 10.94 大气压. 求水下 50 米深处的压力.

**44. 反射光** 光线沿直线 $x + y = 1$ 从第二象限射入并且经 $x$ 轴反射（参见附图）. 入射角同反射角相等. 写出反射光线传播所沿直线的方程.




习题 44 中的光线传播路径
（入射角和反射角从垂直直线度量）

**45. 华氏温度与摄氏温度** 在 $FC$ 平面内画出华氏温度与摄氏温度联系方程

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

的草图. 在同一幅图上画出直线 $C = F$ 的图形. 在摄氏温度计中存在给出华氏温度计中同一读出数值的温度吗？如果存在，求出这个温度.

**46. 华盛顿山的齿轨铁道** 土木工程师在计算路基的坡度时采用它上升或者下降的距离同它在水平方向延伸的距离的比，他们把这个比称为路基的**坡度**，通常用一个百分数表示. 沿海岸线的商用铁路的坡度一般小于 2%. 在山区，这种铁路坡度可高达 4%，公路干线的坡度通常小于 5%.

在新罕布什尔州华盛顿山的齿轨铁道最陡路段的坡度达到异常高的 37.1%. 沿这段轨道，车厢前端的座位高出尾部座位 14 英尺. 前排座位和后排座位大约相距多远？

**47.** 对于以 $A(1,2)$，$B(5,5)$，$C(4,-2)$ 为顶点的三角形，通过计算它的边长证明它是等腰三角形但不是等边三角形.

**48.** 证明：以 $A(0,0)$，$B(1,\sqrt{3})$，$C(2,0)$ 为顶点的三角形是等边三角形.

**49.** 证明点 $A(2,-1)$，$B(1,3)$ 和 $C(-3,2)$ 是一个正方形的顶点，并且求它的第四个顶点.

**50.** 三个不同的平行四边形具有在 $(-1,1)$，$(2,0)$ 和 $(2,3)$ 的顶点. 画出它们的图形，并且求每个平行四边形的第四个顶点.

**51.** 直线 $2x + ky = 3$ 在 $k$ 取什么值时同直线 $4x + y = 1$ 垂直？这两条直线在 $k$ 取什么值时是平行的？

**52. 线段中点** 证明：坐标为

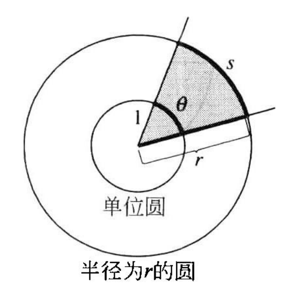
$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

的点是联结点 $P(x_1, y_1)$ 和 $Q(x_2, y_2)$ 的线段的中点.

## A.4 三角公式

### A.4.1 三角函数

**弧度度量**




半径为$r$的圆

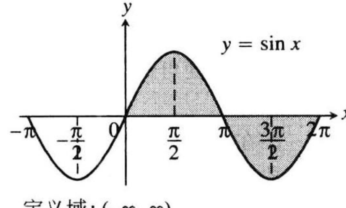
$$\frac{s}{r} = \frac{\theta}{1} = \theta \quad \text{或} \quad \theta = \frac{s}{r}$$

$$180° = \pi \text{ 弧度}$$

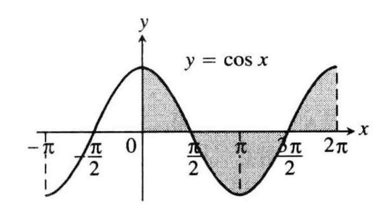
**两个常见三角形的角的度和弧度**

| 度 | 弧度 |
|---|---|
| 三角形：边 $\sqrt{2}$，1，1；角 45，45，90 | 三角形：边 $\sqrt{2}$，1，1；角 $\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{2}$ |
| 三角形：边 2，$\sqrt{3}$，1；角 30，60，90 | 三角形：边 2，$\sqrt{3}$，1；角 $\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$ |

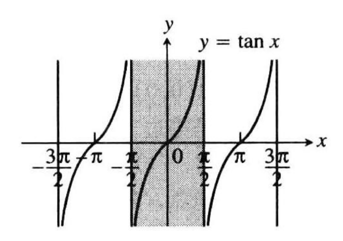
**三角函数**



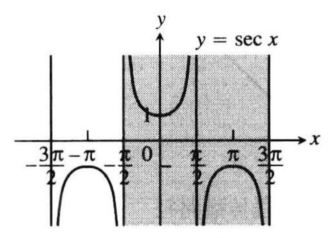

定义域：$(-\infty, \infty)$
值域： $[-1, 1]$



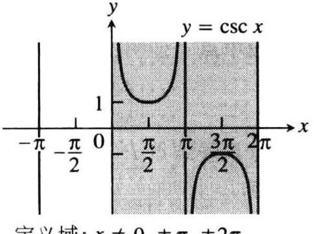

定义域：$(-\infty, \infty)$
值域： $[-1, 1]$



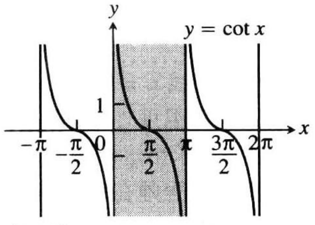

定义域：除开 $\pm\pi/2$ 的奇整数倍以外的全部实数
值域： $(-\infty, \infty)$




定义域：$x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
值域： $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



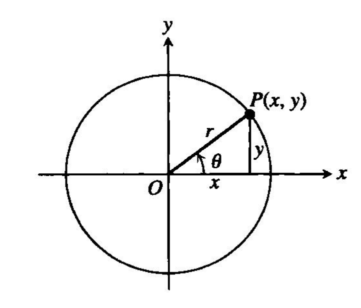

定义域：$x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
值域： $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$




定义域：$x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
值域： $(-\infty, \infty)$

## A.4.2 三角公式

**定义和基本恒等式**




正弦： $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\csc\theta}$

余弦： $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sec\theta}$

正切： $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{\cot\theta}$

**恒等式**

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta, \quad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta, \quad \csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad \sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$
$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$
$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$
$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B},\quad \tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$
$$\sin\left(A-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos A,\quad \cos\left(A-\frac{\pi}{2}\right)=\sin A$$
$$\sin\left(A+\frac{\pi}{2}\right)=\cos A,\quad \cos\left(A+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin A$$
$$\sin A\sin B=\frac{1}{2}\cos(A-B)-\frac{1}{2}\cos(A+B)$$
$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}\cos(A-B)+\frac{1}{2}\cos(A+B)$$
$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}\sin(A-B)+\frac{1}{2}\sin(A+B)$$
$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$$
$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$$
$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$$
$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$$

## A.5 极限定理的证明

这个附录证明2.2节定理1第(2)至第(5)部分以及2.2节定理4.

**定理1(极限法则)** 如果$L$, $M$, $c$和$k$是实数，并且

$$\lim_{x\to c}f(x)=L,\quad \lim_{x\to c}g(x)=M$$

那么存在下列法则:

**(1)和法则** $$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x))=L+M$$

**(2)差法则** $$\lim_{x\to c}(f(x)-g(x))=L-M$$

**(3)积法则** $$\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x))=L\cdot M$$

**(4)常数倍法则** $$\lim_{x\to c}(kf(x))=kL\quad(\text{任意数 }k)$$

**(5)商法则** $$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M},\quad \text{若 }M\neq 0$$

**(6)幂法则** 若$r$和$s$是无公因数的整数，且$s\neq0$，只要$L^{r/s}$是实数，则有

$$\lim_{x\to c}(f(x))^{r/s}=L^{r/s}$$

(如果$s$是偶数，我们假定$L>0$.)

我们已在2.3节证明了和法则. 幂法则需要在高等微积分教程中证明. 差法则通过在和法则

中用 $-g(x)$ 代替 $g(x)$ 和用 $-M$ 代替 $M$ 得到. 常数倍法则是积法则取 $g(x)=k$ 的特例. 这样只留下积法则和商法则有待证明.

**极限积法则的证明** 我们证明，对于任意 $\varepsilon>0$，存在这样一个 $\delta>0$，使得对于 $f$ 和 $g$ 的定义域的交集 $D$ 中的所有 $x$，

$$0<|x-c|<\delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)g(x)-LM|<\varepsilon$$

然后假定 $\varepsilon$ 是一个正整，并且把 $f(x)$ 和 $g(x)$ 写成

$$f(x)=L+(f(x)-L), \quad g(x)=M+(g(x)-M)$$

将这两个表达式相乘再减去 $LM$：

$$\begin{aligned} f(x)\cdot g(x)-LM &= (L+(f(x)-L))(M+(g(x)-M))-LM \\ &= LM+L(g(x)-M)+M(f(x)-L)+(f(x)-L)(g(x)-M)-LM \\ &= L(g(x)-M)+M(f(x)-L)+(f(x)-L)(g(x)-M) \end{aligned} \tag{1}$$

由于 $f$ 和 $g$ 当 $x\to c$ 时具有极限 $L$ 和 $M$，所以存在这样的正数 $\delta_1$，$\delta_2$，$\delta_3$，$\delta_4$，对于在 $D$ 中的所有 $x$ 有

$$\begin{aligned} 0<|x-c|<\delta_1 &\quad\Rightarrow\quad |f(x)-L|<\sqrt{\varepsilon/3} \\ 0<|x-c|<\delta_2 &\quad\Rightarrow\quad |g(x)-M|<\sqrt{\varepsilon/3} \\ 0<|x-c|<\delta_3 &\quad\Rightarrow\quad |f(x)-L|<\varepsilon\big/(3(1+|M|)) \\ 0<|x-c|<\delta_4 &\quad\Rightarrow\quad |g(x)-M|<\varepsilon\big/(3(1+|L|)) \end{aligned} \tag{2}$$

如果取数 $\delta_1$，$\delta_2$，$\delta_3$，$\delta_4$ 中最小的数作为 $\delta$，那么蕴涵式(2)右端的不等式对于 $0<|x-c|<\delta$ 将同时成立. 因此，对于 $D$ 中的所有 $x$，$0<|x-c|<\delta$ 蕴涵

$$\begin{aligned} &|f(x)\cdot g(x)-LM| \qquad \text{(对式(1) 应用三角不等式)} \\ &\leqslant |L||g(x)-M|+|M||f(x)-L|+|f(x)-L||g(x)-M| \\ &\leqslant (1+|L|)|g(x)-M|+(1+|M|)|f(x)-L|+|f(x)-L||g(x)-M| \\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}=\varepsilon \quad \text{(式(2) 中的值)} \end{aligned}$$

这就完成极限积法则的证明. ■

**极限商法则的证明** 我们证明，$\lim\limits_{x\to c}(1/g(x))=1/M$. 然后，由极限积法则可以推断

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)=\lim_{x\to c}f(x)\cdot\lim_{x\to c}\frac{1}{g(x)}=L\cdot\frac{1}{M}=\frac{L}{M}$$

令 $\varepsilon>0$ 是给定的数. 为了证明 $\lim\limits_{x\to c}(1/g(x))=1/M$，我们需要证明，存在这样的 $\delta>0$，对于所有 $x$ 有

$$0<|x-c|<\delta \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{M}\right|<\varepsilon$$

由于 $|M|>0$，存在这样一个正数 $\delta_1$，对于所有 $x$ 有

$$0<|x-c|<\delta_1 \quad\Rightarrow\quad |g(x)-M|<\frac{M}{2} \tag{3}$$

对于任何数 $A$ 和 $B$，可以证明 $|A|-|B|\leqslant|A-B|$ 和 $|B|-|A|\leqslant|A-B|$，由此推出 $||A|-|B||\leqslant|A-B|$. 取 $A=g(x)$ 和 $B=M$，这个不等式变成

$$||g(x)|-|M||\leqslant|g(x)-M|$$

可以把此式同蕴涵式(3)右端的不等式结合，又得到

$$||g(x)|-|M||<\frac{|M|}{2}$$

$$-\frac{|M|}{2} < |g(x)| - |M| < \frac{|M|}{2}$$

$$\frac{|M|}{2} < |g(x)| < \frac{3|M|}{2}$$

$$|M| < 2|g(x)| < 3|M|$$

$$\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|} < \frac{3}{|g(x)|} \tag{4}$$

因此，$0 < |x-c| < \delta_1$ 蕴涵

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{M-g(x)}{Mg(x)}\right| \leqslant \frac{1}{|M|} \cdot \frac{1}{|g(x)|} \cdot |M-g(x)|$$

$$< \frac{1}{|M|} \cdot \frac{2}{|M|} \cdot |M-g(x)| \quad (\text{不等式}(4)) \tag{5}$$

由于$(1/2)|M|^2\varepsilon > 0$，存在这样一个数 $\delta_2 > 0$，对于所有 $x$ 有

$$0 < |x-c| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |M-g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}|M|^2 \tag{6}$$

如果取 $\delta_1$ 和 $\delta_2$ 中较小的一个作为 $\delta$，(5)和(6)中的结论对于满足 $0 < |x-c| < \delta$ 的所有 $x$ 同时成立. 结合这两个结论给出

$$0 < |x-c| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \varepsilon$$

这就完成极限商法则的证明. ■

> **定理 4（夹层定理）** 假定对于在包含 $c$ 的某个开区间 $I$ 内的所有 $x$，除开可能在 $x=c$ 本身以外，$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$. 此外，假定$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$. 那么，$\lim_{x\to c} f(x) = L$.

**对右极限的证明** 假定$\lim_{x\to c^+} g(x) = \lim_{x\to c^+} h(x) = L$. 那么，对于任意 $\varepsilon > 0$ 存在这样一个 $\delta > 0$，使得对于所有 $x$，区间 $c < x < c+\delta$ 包含在 $I$ 内，并且这个不等式蕴涵

$$L-\varepsilon < g(x) < L+\varepsilon \quad \text{和} \quad L-\varepsilon < h(x) < L+\varepsilon$$

把这两个不等式同不等式 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ 结合起来，给出

$$L-\varepsilon < g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) < L+\varepsilon$$

$$L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$$

$$-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$$

因此，对于所有 $x$，不等式 $c < x < c+\delta$ 蕴涵 $|f(x)-L| < \varepsilon$.

**对左极限的证明** 假定$\lim_{x\to c^-} g(x) = \lim_{x\to c^-} h(x) = L$. 那么，对于任意 $\varepsilon > 0$ 存在这样一个 $\delta > 0$，使得对于所有 $x$，区间 $c-\delta < x < c$ 包含在 $I$ 内，并且这个不等式蕴涵

$$L-\varepsilon < g(x) < L+\varepsilon \quad \text{和} \quad L-\varepsilon < h(x) < L+\varepsilon$$

我们像前面一样推断，对于所有 $x$，$c-\delta < x < c$ 蕴涵 $|f(x)-L| < \varepsilon$.

**对双侧极限的证明** 如果$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$，那么，当 $x\to c^+$ 和 $x\to c^-$ 时 $g(x)$ 和 $h(x)$ 同时趋近 $L$；所以$\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ 和$\lim_{x\to c^-} f(x) = L$. 因此，$\lim_{x\to c} f(x)$存在并且等于 $L$. ■

## 习题 A.5

1. 假定当 $x\to c$ 时函数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$ 分别具有极限 $L_1$，$L_2$，$L_3$. 证明：$f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$ 具有极限 $L_1+L_2+L_3$. 利用数学归纳法（附录 A.2）把这个结果推广到任意有限个函数的和.

2. 利用数学归纳法和定理 1 的极限积法则证明：若 $f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_n(x)$ 具有极限 $L_1$，$L_2$，…，$L_n$，则

$$\lim_{x\to c} f_1(x)f_2(x)\cdot\cdots\cdot f_n(x) = L_1\cdot L_2\cdot\cdots\cdot L_n$$

3. 利用 $\lim\limits_{x\to c} x = c$ 这个事实和习题 2 的结果证明：对于任意整数 $n>1$，$\lim\limits_{x\to c} x^n = c^n$.

4. **多项式的极限** 利用 $\lim\limits_{x\to c}(k) = k$ 对于任何数 $k$ 成立这个事实以及习题 1 和习题 3 的结果证明：对于任何多项式函数

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

有 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$.

5. **有理函数的极限** 利用定理 1 和习题 4 的结果证明：若 $g(c)\neq 0$，则

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}$$

6. **连续函数的复合函数** 图 A.21 给出证明两个连续函数的复合函数为连续函数的图解. 从这个图解重新建立证明. 需要证明的命题如下：若 $f$ 在 $x=c$ 连续和 $g$ 在 $f(c)$ 连续，则 $g\circ f$ 在 $c$ 连续.

假定 $c$ 是 $f$ 的定义域的内点，$f(c)$ 是 $g$ 的定义域的内点，这将使极限涉及双侧极限.（对于涉及单侧极限的情形，论证是相似的.）

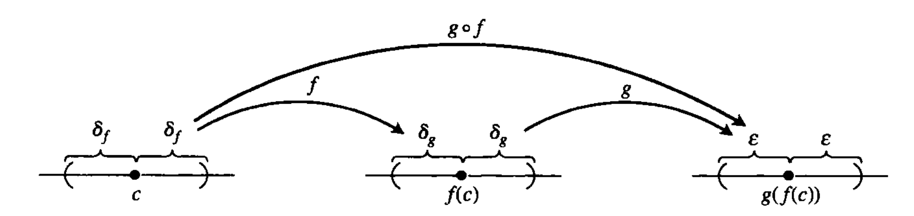



图 A.21 证明两个连续函数的复合函数为连续函数的图解

## A.6 常见的极限

这个附录证明 8.1 节定理 5 中的极限(4) ~ (6).

**极限(4)：如果 $|x|<1$，$\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$** 我们需要证明，对于给定每个 $\varepsilon>0$，存在一个相应的大整数 $N$，对于所有大于 $N$ 的 $n$ 有 $|x^n|<\varepsilon$. 由于 $\varepsilon^{1/n}\to 1$，当 $|x|<1$ 时，存在一个整数 $N$ 使得 $\varepsilon^{1/N}>|x|$. 换句话说，

$$|x^N| = |x|^N < \varepsilon \tag{1}$$

这就是我们寻求的整数，因为如果 $|x|<1$，那么对于所有 $n>N$，

$$|x^n| < |x^N| \tag{2}$$

结合式(1)和(2)得到，对于所有 $n>N$ 有 $|x^n|<\varepsilon$. 证明完毕. ■

**极限(5)：对于任意数 $x$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$** 令

$$a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

那么

$$\ln a_n = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\to x$$

因为我们可以从下面应用洛必达法则对 $n$ 求微分看出：

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x/n)}{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{1+x/n}\right)\cdot\left(-\dfrac{x}{n^2}\right)}{-1/n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+x/n} = x$$

取 $f(x)=e^x$，应用 8.1 节定理 3，推出

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = a_n = e^{\ln a_n}\to e^x$$ ■

**极限(6)：对于任何数 $x$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{n!}=0$** 由于

$$-\frac{|x|^n}{n!}\leqslant\frac{x^n}{n!}\leqslant\frac{|x|^n}{n!}$$

我们所需的全部证明就是 $|x|^n/n!\to 0$. 然后可以应用序列的夹层定理(8.1 节定理 2)推出 $x^n/n!\to 0$.

证明 $|x|^n/n!\to 0$ 的第一步是选取一个整数 $M>|x|$，所以 $(|x|/M)<1$. 由刚证明的极限(4)，于是有 $(|x|/M)^n\to 0$. 然后我们把注意力限制在 $n>M$ 的值. 对于这些 $n$ 值，可以写出

$$\frac{|x|^n}{n!}=\frac{|x|^n}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot M\cdot\underbrace{(M+1)(M+2)\cdot\cdots\cdot n}_{(n-M)\text{个因式}}}$$

$$\leqslant\frac{|x|^n}{M!M^{n-M}}=\frac{|x|^nM^M}{M!M^n}=\frac{M^M}{M!}\left(\frac{|x|}{M}\right)^n$$

因此，

$$0\leqslant\frac{|x|^n}{n!}\leqslant\frac{M^M}{M!}\left(\frac{|x|}{M}\right)^n$$

上式中的常数 $M^M/M!$ 现在不随 $n$ 的增加而改变. 于是夹层定理表明 $|x|^n/n!\to 0$，因为 $(|x|/M)^n\to 0$. ■

## A.7 实数理论

微积分的严密推理是以实数的性质为基础的. 如果我们讨论的函数仅仅定义在有理数集上，那么有关函数、导数和积分的许多结果不复存在. 在这一节，我们简要地考察实数理论的某些基本概念，这些概念暗示在微积分更深入和理论性更强的研究中可能学习到的知识.

有三类性质使实数集成为如此重要的数集. 那就是**代数性质**、**有序性质**和**完备性性质**. 代数性质涉及加、减、乘、除运算. 它们既适用于有理数或者复数，也适用于实数.

数的结构是围绕一个数集同加法和乘法这两种运算建立的. 下列代数性质是数的加法和乘法必需具备的：

**A1** $a+(b+c)=(a+b)+c$ 对于所有数 $a$，$b$，$c$ 成立.

**A2** $a+b=b+a$ 对于所有数 $a$，$b$ 成立.

**A3** 存在这样一个称为“0”的数，对于所有 $a$ 有 $a+0=a$.

**A4** 对于每个数 $a$，存在这样一个数 $b$，使 $a+b=0$.

**M1** $a(bc)=(ab)c$ 对于所有数 $a$，$b$，$c$ 成立.

**M2** $ab=ba$ 对于所有数 $a$，$b$ 成立.

**M3** 存在这样一个称为“1”的数，对于所有 $a$ 有 $a\cdot 1=a$.

**M4** 对于每个非零的数 $a$，存在这样一个数 $b$，使 $ab=1$.

**D** $a(b+c)=ab+bc$ 对于所有数 $a$，$b$，$c$ 成立.

A1 和 M1 是两种结合律；A2 和 M2 是两种交换律；A3 和 M3 是两种同一律；D 是分配律. **域**是具备这些代数性质的集合的例子，在称为抽象代数的理论数学分支中对域作深入研究.

**有序**性质使我们能够对任意两个数的大小进行比较. 有序性质包括：

**O1** 对于任何数 $a$ 或 $b$，$a\leqslant b$ 或 $b\leqslant a$ 中的一个成立，或者两者同时成立.

**O2** 若 $a\leqslant b$ 和 $b\leqslant a$，则 $a=b$.

**O3** 若 $a\leqslant b$ 和 $b\leqslant c$，则 $a\leqslant c$.

**O4** 若 $a \leqslant b$，则 $a+c \leqslant b+c$.

**O5** 若 $a \leqslant b$ 和 $0 \leqslant c$，则 $ac \leqslant bc$.

O3 是传递律，O4 和 O5 涉及加法和乘法中的排序.

我们可以对实数、整数和有理数排序，但是无法对复数排序. 对于像 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 这样的数.找不到一种合理方法决定它是大于零还是小于零. 对于任何两个元素可以比较大小的域称为**有序域**. 有理数域和实数域都是有序域，还有许多其他的有序域.

在几何上我们可以把实数域想象成排列在一条直线上的点. **完备性性质**说明实数域同直线上的全部点对应，直线上没有"孔眼"或者"空隙". 相反，有理数域遗漏像$\sqrt{2}$和 $\pi$ 这样的点，而整数域甚至把像 1/2 这样的分数也排除在外. 实数域具有完备性性质，不丢失任何点.

我们提到丢失孔眼这种含糊的概念的确切含义是什么？为了回答这个问题，必须对完备性给出更精确的描述. 一个数 $M$ 是一个数集的**上界**，是指集合中的所有数都小于或者等于 $M$. $M$ 是**上确界**，是指它是最小的上界. 例如，$M=2$ 是负数集的一个上界. $M=1$ 也是负数集的上界，这说明 2 不是上确界. 负数集的上确界是 $M=0$. 我们定义一个**完备**的有序域，那是指其中每个有上界的非空集合具有上确界.

如果我们只讨论有理数集，小于$\sqrt{2}$的数集合是有界的，但是它没有一个有理数的上确界，因为任何有理数上界 $M$ 可以用一个稍小的有理数代替，而这个有理数依然大于$\sqrt{2}$，所以有理数集不是完备的. 在实数集中，一个有上界的集合总是具有上确界. 实数集是完备的有序域.

在微积分中，实数的完备性性质是许多结果的核心所在. 一个例子是 4.1 节中求一个函数在闭区间$[a,b]$上的最大值. 函数 $y=x-x^3$ 在区间$[0,1]$上满足 $1-3x^2=0$ 的点或者在 $x=\sqrt{1/3}$ 取最大值. 如果，我们把讨论限制在仅定义在有理数集的函数上，那么只能得出函数无最大值的结论，因为 $\sqrt{1/3}$ 是无理数(见图 A.22). 极值定理(4.1 节)蕴涵闭区间$[a,b]$上的连续函数具有最大值，对于仅在有理数集上有定义的函数不成立.

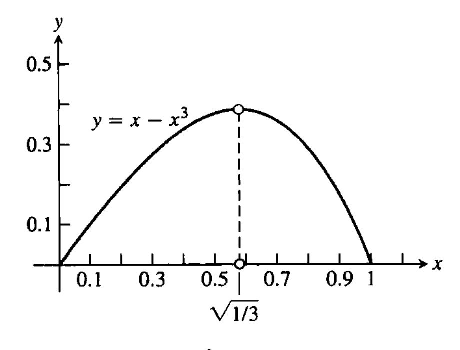



图 A.22 $y=x-x^3$ 在$[0,1]$上的最大值出现在无理数 $x=\sqrt{1/3}$处

介值定理蕴涵在闭区间$[a,b]$上满足$f(a)<0$ 和 $f(b)>0$ 的函数$f$必定在$[a,b]$内的某处为零. 函数$f$的值不可能从负数跳变到正数而不$[a,b]$内的某点 $x$ 取$f(x)=0$. 介值定理也依赖于实数集的完备性，对于仅定义在有理数集上的函数不成立. 函数 $f(x)=3x^2-1$ 具有 $f(0)=-1$ 和 $f(1)=2$，但是如果仅在有理数集上考察$f$，它不可能等于 0. 使 $f(x)=0$ 的唯一 $x$ 值是 $x=\sqrt{1/3}$，这是一个无理数.

通过论述实数集是完备的有序域抓住了我们希望得到的实数集的性质. 但是事情并非就此终结. 毕达哥拉斯学派的希腊数学家们曾经试图把另外一种性质强加给实线上的数，那就是所有的数都是整数之比这个条件. 当他们发现像$\sqrt{2}$这样的无理数时才认识到他们的努力陷入绝境. 那么，如今我们怎样知道在确定实数的努力中是否由于某种尚未察觉的原因而存在漏洞呢？艺术家埃斯切尔绘画过螺旋形楼梯的光线幻影图，楼梯盘旋上升再上升，直到在底部重新自相连结. 试图建造这种楼梯的工程师将会发现，不存在足以实现艺术家已经作出这种设计的结构. 在我们对于实数所作的设计中，是否也隐含某种难以捉摸的矛盾以致不存在可以建立这样一个数系的结构？

我们凭借给出实数的具体描述并且证实在这个模型中实数满足代数性质、有序性质和完备性性质来解决这个问题. 这种方法称为实数的**构造**，正如楼梯可以用木料、石头或者钢材建造一样. 存在几种构造实数的方法. 一种构造是把实数当作全部无穷小数

$$a.\,d_1d_2d_3d_4\cdots$$

用这种方法，一个实数是一个整数 $a$ 后面跟随一个十进制数字 $d_1$，$d_2$，$d_3$，…的序列，每个数字是 0 至 9 中一个数. 这个序列可能终止或者以一个周期模式重复，也可能无穷尽地延续下去而不出现重复的模式. 在这种构造形式中，2.00，0.3333333…和 3.1415926535898…代表三个大家熟悉的实数. 为了了解这些数字后面的点"…"的真实含义，需要建立像在第 8 章讲述的序列和级数的理论. 每个实数是作为它的有穷小数逼近给出的有理数序列的极限构造的. 于是一个无穷小数和一个级数

$$a+\frac{d_1}{10}+\frac{d_2}{100}+\cdots$$

相同.

实数的这种小数构造并不是完全显而易见的. 很容易检验，它给出的实数满足完备性性质和有序性质，但是要证实代数性质颇费周折. 即使是两个数的相加或者相乘，需要作无限次运算. 为了使除法有意义，需要涉及用有理数逼近无穷小数的极限的详细论证.

德国数学家理查德·戴德金(1831—1916)采用一种不同的方法，他在 1872 年给出第一个严格的实数构造. 给定任意一个实数 $x$，我们可以把有理数分成两个集合：一个是小于或者等于 $x$ 的有理数集合，另一个是大于 $x$ 的有理数集合. 戴德金巧妙地把这种推理方法颠倒过来. 把一个实数定义为分别属于这样两个集合的有理数相除的值. 看起来这似乎是一种奇怪的方法. 但是这样一种由旧结构构造新结构的间接方法在理论数学中是常见的.

这些方法以及其他的方法可以用来构造我们希望具备的代数性质、有序性质和完备性性质的数系. 最后要提出的问题是所有的构造是否给出同一个数系？或者说，不同的构造是否产生满足全部所需性质的不同数系？如果是这样，那么这些数系中哪一个是实数系？幸好最终的答案不是那样. 实数集是满足代数性质、有序性质和完备性性质的唯一数系.

在建立微积分的初期，关于数的性质以及关于极限概念存在的混乱，曾经引发严重的争论. 发明微积分的先驱人物如牛顿和莱布尼茨，以及他们之后的继承者们，在考察差商

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

当 $\Delta y$ 和 $\Delta x$ 都趋近零时会产生什么结果时，谈到所得导数是两个无穷小量的商. 他们把记为 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 的这些"无穷小"想象成比任何固定数小而又不是零的某种新的数. 同样，把定积分想象成当 $x$ 在一个闭区间上变化时无限个无穷小量

$$f(x)\cdot \mathrm{d}x$$

之和. 虽然对逼近差商 $\Delta y/\Delta x$ 的理解同今天的理解相近，但是把它们看成是无穷小量的商而不是带有导数含义的极限. 这种思考方式，在试图对无穷小进行定义和运算时陷入矛盾和不相容性这种逻辑上的困境. 更加具体的和可计算的差商不会引起这样的麻烦，但是它们仅被当作有用的计算工具. 把差商用于求导数的值以及推导一般计算公式，而不是把它们置于导数实际是什么这样一个问题的核心位置. 今天我们认识到，通过把导数定义成它们的逼近差商的极限，可以避免同无穷小有关的逻辑问题. 这样，旧方法中的含糊性不复存在，并且在微积分的规范理论中，既不需要无穷小，也不使用无穷小.

## A.8 向量积的分配律

在这个附录中，我们证明向量积的分配律

$$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w}$$

这是 10.4 节中向量积的性质(2).

**证明** 为了推导这个分配律，我们用一种新方法构建 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$：从公共点 $O$ 画出 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，并且在 $O$ 建立同 $\boldsymbol{u}$ 垂直的平面 $M$(见图 A.23). 然后把 $\boldsymbol{u}$ 正交投影到 $M$ 上，产生长度为 $|\boldsymbol{v}|\sin\theta$ 的向量 $\boldsymbol{v}'$. 对 $\boldsymbol{v}'$ 绕 $\boldsymbol{u}$ 按正方向旋转 90°，产生向量 $\boldsymbol{v}''$. 最后，用 $\boldsymbol{u}$ 的长度乘 $\boldsymbol{v}''$. 得到的向量 $|\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}''$ 等于 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$，因为按照 $\boldsymbol{v}''$ 的构造，它具有和 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ 相同的方向(见图 A.23)，并且

$$|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}''|=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}'|$$
$$=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\theta=|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|$$

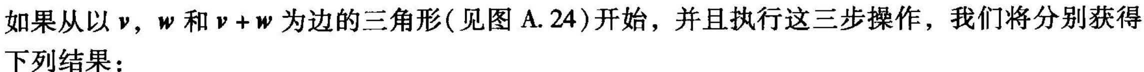
图 A.23 如在正文中的解释，$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}''$

现在，当我们对于所在平面同 $\boldsymbol{u}$ 不平行的一个三角形执行下列三个操作中的一个操作时，都将产生另外一个三角形：

(1)对 $M$ 投影，

(2)绕 $\boldsymbol{u}$ 旋转 90°，

(3)用纯量 $|\boldsymbol{u}|$ 相乘.



如果从以 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 为边的三角形(见图 A.24)开始，并且执行这三步操作，我们将分别获得下列结果：

(1)以 $\boldsymbol{v}'$，$\boldsymbol{w}'$ 和 $(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})'$ 为边的三角形，满足向量方程

$$\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{w}'=(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})'$$

(2)以 $\boldsymbol{v}''$，$\boldsymbol{w}''$ 和 $(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})''$ 为边的三角形，满足向量方程

$$\boldsymbol{v}''+\boldsymbol{w}''=(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}'')$$

(每个向量上的双撇号″的含义同图 A.23 相同.)

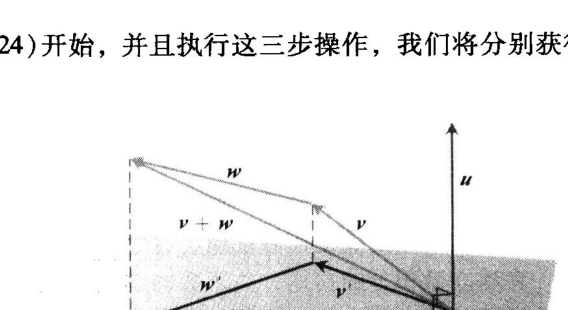



图 A.24 向量 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 和它们在垂直于 $\boldsymbol{u}$ 的平面上的投影

(3)以 $|\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}''$，$|\boldsymbol{u}|\boldsymbol{w}''$ 和 $|\boldsymbol{u}|(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})''$ 为边的三角形，满足向量方程

$$|\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}''+|\boldsymbol{u}|\boldsymbol{w}''=|\boldsymbol{u}|(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})''$$

把 $|\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}''=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$，$|\boldsymbol{u}|\boldsymbol{w}''=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w}$ 和 $|\boldsymbol{u}|(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})''=\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ 代入上面讨论中的最后一个等式，得到

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$$

这就是我们要证明的分配律. ■

## A.9 混合导数定理与增量定理

这个附录推导混合导数定理(12.3 节定理 2)和二元函数的增量定理(12.3 节定理 3). 欧拉于 1734 年在他撰写的关于流体动力学的一系列论文中首次发表混合导数定理.

> **定理 2（混合导数定理）**　若函数 $f(x,y)$ 及其偏导数 $f_x$，$f_y$，$f_{xy}$ 和 $f_{yx}$ 在整个包含点 $(a,b)$ 的某个开区间上有定义，并且在点 $(a,b)$ 都是连续的，则 $f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$.

**证明**　通过四次应用中值定理(4.2 节定理 4)，可以证实两个混合偏导数 $f_{xy}(a,b)$ 和 $f_{yx}(a,b)$ 相等.

根据假设，点 $(a,b)$ 位于 $xy$ 平面内一个矩形 $R$ 的内部，在 $R$ 上 $f$，$f_x$，$f_y$，$f_{xy}$ 和 $f_{yx}$ 都有定义. 令 $h$ 和 $k$ 是使点 $(a+h,b+k)$ 也位于 $R$ 内的数，我们考虑差

$$\Delta = F(a+h) - F(a) \tag{1}$$

其中

$$F(x) = f(x,b+k) - f(x,b) \tag{2}$$

首先对 $F$ 应用中值定理，$F$ 是连续函数，因为它是可微的. 于是式(1)变成

$$\Delta = hF'(c_1) \tag{3}$$

其中 $c_1$ 位于 $a$ 和 $a+h$ 之间. 由式(2)，

$$F'(x) = f_x(x,b+k) - f_x(x,b)$$

所以式(3)变成

$$\Delta = h[f_x(c_1,b+k) - f_x(c_1,b)] \tag{4}$$

此时对函数 $g(y)=f_x(c_1,y)$ 应用中值定理，对于在 $b$ 和 $b+k$ 之间的某个值 $d_1$，有

$$g(b+k) - g(b) = kg'(d_1)$$

或

$$f_x(c_1,\ b+k) - f_x(c_1,\ b) = kf_{xy}(c_1,d_1)$$

把这个结果代入式(4)，得到

$$\Delta = hkf_{xy}(c_1,d_1) \tag{5}$$

其中点 $(c_1,d_1)$ 是以点 $(a,b)$，$(a+h,b)$，$(a+h,b+k)$ 和 $(a,b+k)$ 为顶点的矩形 $R'$ 内的某个点(参见图 A.25).

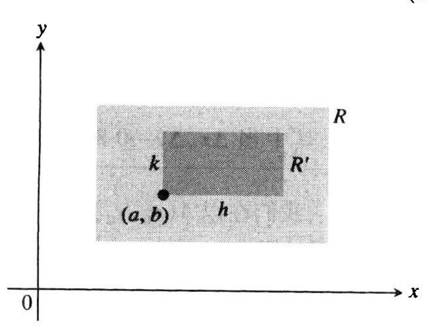



图 A.25　证明 $f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$ 的关键在于，无论 $R'$ 多么小，$f_{xy}$ 和 $f_{yx}$ 在 $R'$ 内某处取相等的值(不过不必在同一点)

把式(2)代入式(1)，我们也可以写成

$$\begin{aligned}\Delta &= f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b)\\ &= [f(a+h,b+k) - f(a,b+k)] - [f(a+h,b) - f(a,b)]\\ &= \phi(b+k) - \phi(b)\end{aligned} \tag{6}$$

其中

$$\phi(y) = f(a+h,y) - f(a,y) \tag{7}$$

现在把中值定理应用到式(6)，给出

$$\Delta = k\phi'(d_2) \tag{8}$$

$d_2$ 是 $b$ 和 $b+k$ 之间的某个值. 由式(7)，

$$\phi'(y) = f_y(a+h,y) - f_y(a,y) \tag{9}$$

把式(9)代入式(8)，给出

$$\Delta = k[f_y(a+h,d_2) - f_y(a,d_2)]$$

最后，把中值定理应用到上式方括号中的表达式，得到

$$\Delta = khf_{yx}(c_2,d_2) \tag{10}$$

其中 $c_2$ 是在 $a$ 和 $a+h$ 之间的某个值.

式(5)和式(10)一起证明

$$f_{xy}(c_1,d_1) = f_{yx}(c_2,d_2) \tag{11}$$

其中点$(c_1,d_1)$和$(c_2,d_2)$都在矩形$R'$内(见图 A.25). 式(11)和我们想要的结果不完全相同，因为它只是表明$f_{xy}$在$(c_1,d_1)$的值同$f_{yx}$在$(c_2,d_2)$的值相等. 然而，在我们的讨论中，可以取$h$和$k$为随意小的数. 偏导数$f_{xy}$和$f_{yx}$同时在$(a,b)$连续的假设意味着

$$f_{xy}(c_1,d_1) = f_{xy}(a,b) + \varepsilon_1,\quad f_{yx}(c_2,d_2) = f_{yx}(a,b) + \varepsilon_2$$

其中当$h$和$k\to 0$时$\varepsilon_1$和$\varepsilon_2\to 0$. 因此，如果令$h,k\to 0$，我们有

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$ ■

可以在比定理2更弱的假设下证明$f_{xy}(a,b)$等于$f_{yx}(a,b)$. 例如，假设$f$, $f_x$和$f_y$在$R$内存在以及$f_{xy}$在$(a,b)$连续就足够了. 在这种情况下，$f_{yx}$将会在点$(a,b)$存在并且在这个点等于$f_{xy}$.

**定理3(二元函数的增量定理)** 假定函数$z=f(x,y)$的一阶偏导数$f_x$和$f_y$在整个包含点$(x_0,y_0)$的某个开区域$R$上有定义，并且在$(x_0,y_0)$连续. 那么，$f$值在$R$内从点$(x_0,y_0)$移动到另外一点$(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$产生的改变量$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$，满足形如

$$\Delta z = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

的等式，其中当$\Delta x,\Delta y\to 0$时，$\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0$.

**证明** 我们在以$A(x_0,y_0)$为中心并且处于$R$内部的矩形$T$内来证明定理，同时假定$\Delta x$和$\Delta y$已经是很小的增量，使得联结$A$和$B(x_0+\Delta x, y_0)$的线段以及联结$B$和$C(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$的线段都在$T$的内部(见图 A.26).

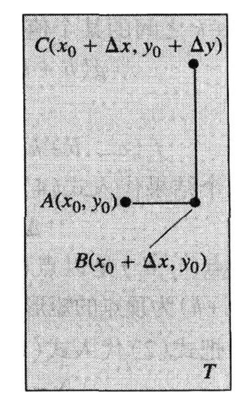


图 A.26 增量定理证明中的矩形区域$T$，图形是用正值增量$\Delta x$和$\Delta y$画出的，但是增量可以取零或者负值

我们可以把$\Delta z$看成两个增量的和，即$\Delta z=\Delta z_1+\Delta z_2$，其中

$$\Delta z_1 = f(x_0+\Delta x,y_0) - f(x_0,y_0)$$

是$f$值从$A$到$B$的改变量，而

$$\Delta z_2 = f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x,y_0)$$

是$f$值从$B$到$C$的改变量(见图 A.27).

在联结$x_0$和$x_0+\Delta x$的$x$值的闭区间上，函数$F(x)=f(x, y_0)$是$x$的可微函数(因而是连续的)，具有导数

$$F'(x) = f_x(x,y_0)$$

由中值定理(4.2节定理4)，存在某个介于$x_0$和$x_0+\Delta x$之间一个$x$值$c$，在那里

$$F(x_0+\Delta x) - F(x_0) = F'(c)\Delta x$$

或者

$$f(x_0+\Delta x,y_0) - f(x_0,y_0) = f_x(c,y_0)\Delta x$$

或者

$$\Delta z_1 = f_x(c,y_0)\Delta x \tag{12}$$

同样，$G(y)=f(x_0+\Delta x,y)$在连接$y_0$和$y_0+\Delta y$的$y$值的闭区间上是可微函数(因而是连续的)，具有导数

$$G'(y) = f_y(x_0+\Delta x,y)$$

因此，存在某个介于$y_0$和$y_0+\Delta y$之间的$y$值$d$，在那里

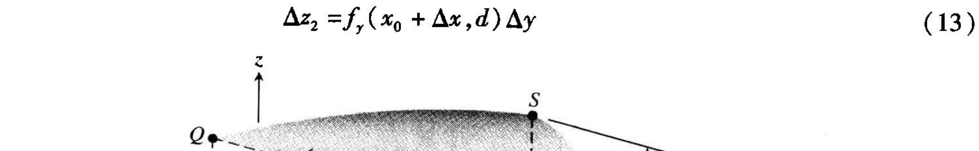
$$G(y_0+\Delta y) - G(y_0) = G'(d)\Delta y$$

或者

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y)=f_y(x_0+\Delta x,d)\Delta y$$

或者

$$\Delta z_2=f_y(x_0+\Delta x,d)\Delta y \tag{13}$$



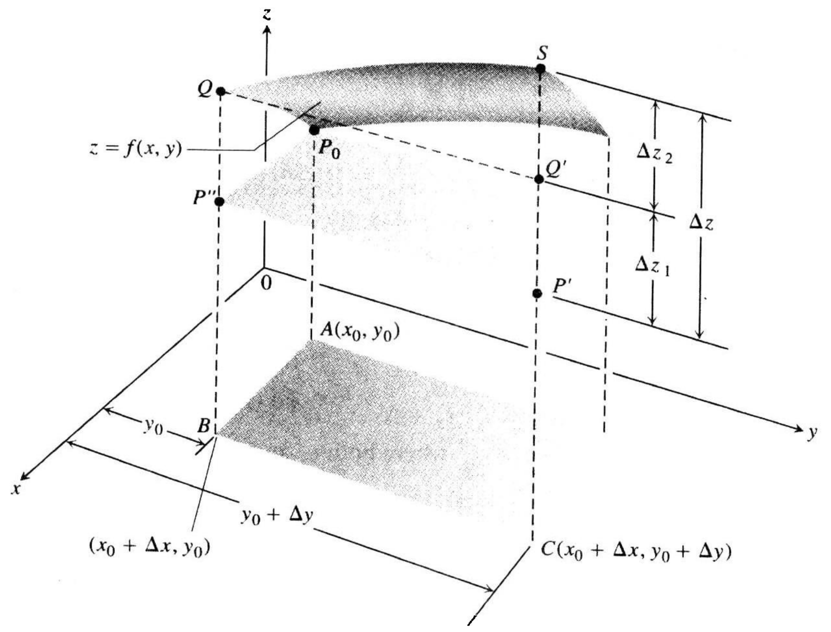



图 A.27　曲面 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0,f(x_0,\ y_0))$ 附近的图形. 点 $P_0$，$P'$ 和 $P''$ 具有在 $xy$ 平面之上的相同高度 $z_0=f(x_0,\ y_0)$. $z$ 的改变为 $\Delta z=P'S$. 表示为 $P''Q=P'Q'$ 的改变

$$\Delta z_1=f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)$$

是由 $x$ 从 $x_0$ 变化到 $x_0+\Delta x$ 而保持 $y$ 等于 $y_0$ 引起的. 这时，保持 $x$ 等于 $x_0+\Delta x$，$z$ 的改变

$$\Delta z_2=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)$$

是由 $y$ 从 $y_0$ 变化到 $y_0+\Delta y$ 引起的，这个改变是用 $Q'S$ 表示的吗？$z$ 的总改变是 $\Delta z_1$ 和 $\Delta z_2$ 之和

现在，我们知道当 $\Delta x$ 和 $\Delta y\to 0$ 时，$c\to x_0$ 和 $d\to y_0$. 因此，由于 $f_x$ 和 $f_y$ 在点 $(x_0,y_0)$ 是连续的，两个量

$$\begin{aligned}\varepsilon_1&=f_x(c,y_0)-f_x(x_0,y_0)\\ \varepsilon_2&=f_y(x_0+\Delta x,d)-f_y(x_0,y_0)\end{aligned} \tag{14}$$

当 $\Delta x$ 和 $\Delta y\to 0$ 时同时趋近零.

最后，

$$\begin{aligned}\Delta z&=\Delta z_1+\Delta z_2\\ &=f_x(c,y_0)\Delta x+f_y(x_0+\Delta x,d)\Delta y\quad(\text{由式(12)和(13)})\\ &=[f_x(x_0,y_0)+\varepsilon_1]\Delta x+[f_y(x_0,y_0)+\varepsilon_2]\Delta y\quad(\text{由式(14)})\\ &=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y\end{aligned}$$

其中当 $\Delta x$ 和 $\Delta y\to 0$ 时 $\varepsilon_1$ 和 $\varepsilon_2\to 0$，这就是我们要证明的结果. ■

类似的结果对于任意有限个自变量的函数成立. 假定 $w=f(x,y,z)$ 的一阶偏导数 $f_x$, $f_y$ 和 $f_z$ 在整个包含点 $(x_0,y_0,z_0)$ 的某个开区域上有定义, 并且在 $(x_0,y_0,z_0)$ 是连续的. 那么

$$\begin{aligned}\Delta w &= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0,y_0,z_0) \\ &= f_x\Delta x + f_y\Delta y + f_z\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z \end{aligned} \tag{15}$$

其中当 $\Delta x, \Delta y$ 和 $\Delta z \to 0$ 时, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 和 $\varepsilon_3 \to 0$.

式(15)中的偏导数 $f_x$, $f_y$, $f_z$ 是在点 $(x_0,y_0,z_0)$ 求值.

式(15)的证明可以通过把 $\Delta w$ 作为三个增量

$$\Delta w_1 = f(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - f(x_0,y_0,z_0) \tag{16}$$

$$\Delta w_2 = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0) - f(x_0+\Delta x, y_0, z_0) \tag{17}$$

$$\Delta w_3 = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0) \tag{18}$$

之和来处理, 并且对每个增量分别应用中值定理. 在这三个部分增量 $\Delta w_1, \Delta w_2, \Delta w_3$ 的每一个中, 两个坐标保持为常数而只有一个坐标改变. 例如, 在式(17)中只有 $y$ 变化, 因为 $x$ 保持等于 $x_0+\Delta x$ 和 $z$ 保持等于 $z_0$. 由于 $f(x_0+\Delta x, y, z_0)$ 是 $y$ 的连续函数和具有偏导数 $f_y$, 它服从中值定理, 而对于在 $y_0$ 和 $y_0+\Delta y$ 之间的某个值 $y_1$, 我们有

$$\Delta w_2 = f_y(x_0+\Delta x, y_1, z_0)\Delta y$$

# 附　录　B

## B.1　基本代数公式

**算术运算**

$$a(b+c)=ab+ac,\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},\quad \frac{a/b}{c/d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

**符号定律**

$$-(-a)=a,\quad \frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}=\frac{a}{-b}$$

**数字 0 的运算**

0 不能做除数.

如果 $a\neq 0$,

$$\frac{0}{a}=0,\quad a^0=1,\quad 0^a=0$$

对于任何数 $a$,

$$a\cdot 0=0\cdot a=0$$

**指数定律**

$$a^m a^n=a^{m+n},\quad (ab)^m=a^m b^m,\quad (a^m)^n=a^{mn},\quad a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$$

如果 $a\neq 0$,

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n},\quad a^0=1,\quad a^{-m}=\frac{1}{a^m}$$

**二项式定理**

对于任何正整数 $n$,

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3+\cdots+nab^{n-1}+b^n$$

例如,

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\quad (a-b)^3=a^2-3a^2b+3ab^2-b^3$$

**整数幂之差的因式分解($n>1$)**

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

例如,

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$$

**配完全平方**

如果 $a\neq 0$,

$$ax^2 + bx + c = au^2 + C \quad \left(u = x + (b/2a), C = c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

**二次公式**

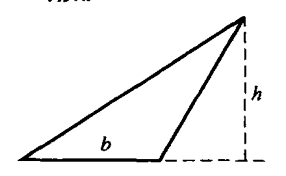
若 $a \neq 0$ 且 $ax^2 + bx + c = 0$，则

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## B.2 几何公式

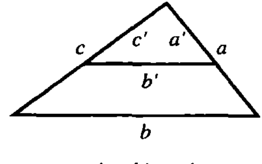
$A$ = 面积，$B$ = 底面积，$C$ = 周长，$S$ = 侧面积或表面积，$V$ = 体积

**三角形**



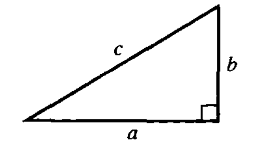

$A = \frac{1}{2}bh$

**相似三角形**



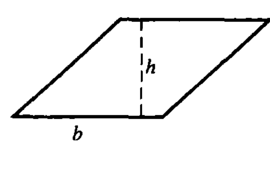

$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$

**勾股定理**



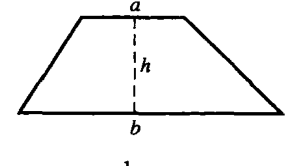

$a^2 + b^2 = c^2$

**平行四边形**



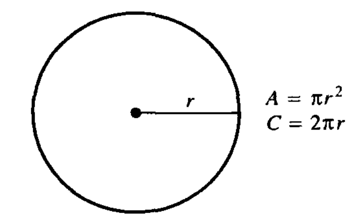

$A = bh$

**梯形**



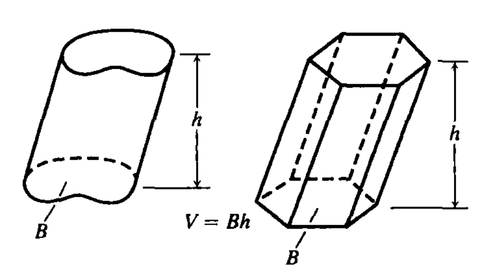

$A = \frac{1}{2}(a + b)h$

**圆**



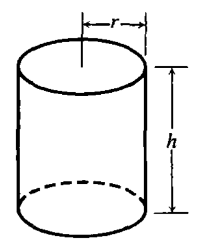

$A = \pi r^2$
$C = 2\pi r$

**底面平行的任意柱体或棱柱体**



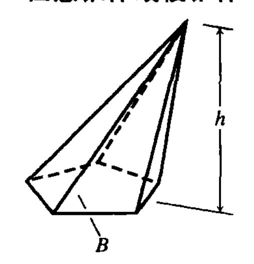

$V = Bh$

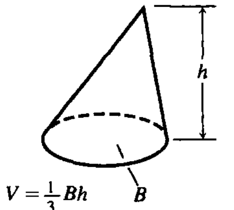
**直立圆柱**




$V = \pi r^2 h$
$S = 2\pi rh$ = 侧面积

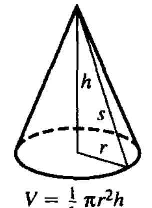
**任意锥体或棱锥体**



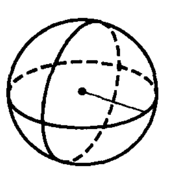

$V = \frac{1}{3}Bh$

**直立圆锥**




$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
$S = \pi rs$ = 侧面积

**球体**



$V = \frac{4}{3}\pi r^3, S = 4\pi r^2$

## B.3 积分简表

1. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

2. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C, a \neq 1, a > 0$

3. $\int \cos u\,du = \sin u + C$

4. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$

5. $\int (ax+b)^n dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, n \neq -1$

6. $\int (ax+b)^{-1} dx = \dfrac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

7. $\int x(ax+b)^n dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a^2}\left[\dfrac{ax+b}{n+2} - \dfrac{b}{n+1}\right] + C, n \neq -1, -2$

8. $\int x(ax+b)^{-1} dx = \dfrac{x}{a} - \dfrac{b}{a^2}\ln|ax+b| + C$

9. $\int x(ax+b)^{-2} dx = \dfrac{1}{a^2}\left[\ln|ax+b| + \dfrac{b}{ax+b}\right] + C$

10. $\int \dfrac{dx}{x(ax+b)} = \dfrac{1}{b}\ln\left|\dfrac{x}{ax+b}\right| + C$

11. $\int (\sqrt{ax+b})^n dx = \dfrac{2}{a}\dfrac{(\sqrt{ax+b})^{n+2}}{n+2} + C, n \neq -2$

12. $\int \dfrac{\sqrt{ax+b}}{x} dx = 2\sqrt{ax+b} + b\int \dfrac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$

13. (a) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{ax-b}} = \dfrac{2}{\sqrt{b}}\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{ax-b}{b}} + C$ (b) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \dfrac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right| + C$

14. $\int \dfrac{\sqrt{ax+b}}{x^2} dx = -\dfrac{\sqrt{ax+b}}{x} + \dfrac{a}{2}\int \dfrac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$

15. $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\dfrac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \dfrac{a}{2b}\int \dfrac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$

16. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a} + C$

17. $\int \dfrac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \dfrac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \dfrac{1}{2a^3}\tan^{-1}\dfrac{x}{a} + C$

18. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x+a}{x-a}\right| + C$

19. $\int \dfrac{dx}{(a^2-x^2)^2} = \dfrac{x}{2a^2(a^2-x^2)} + \dfrac{1}{4a^3}\ln\left|\dfrac{x+a}{x-a}\right| + C$

20. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sinh^{-1}\dfrac{x}{a} + C = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C$

21. $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C$

22. $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \dfrac{x}{8}(a^2+2x^2)\sqrt{a^2+x^2} - \dfrac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C$

23. $\int \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2+x^2} - a\ln\left|\dfrac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right| + C$

24. $\int \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2} dx = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) - \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} + C$

25. $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = -\dfrac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + \dfrac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + C$

26. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right| + C$

27. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x} + C$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$

29. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + C$

30. $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^4}{8}\sin^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{8}x\sqrt{a^2-x^2}(a^2-2x^2) + C$

31. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx = \sqrt{a^2-x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C$

32. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx = -\sin^{-1}\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C$

33. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C$

34. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C$

35. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C$

36. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{x}{a} + C = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$

37. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$

38. $\int (\sqrt{x^2-a^2})^n dx = \frac{x(\sqrt{x^2-a^2})^n}{n+1} - \frac{na^2}{n+1}\int (\sqrt{x^2-a^2})^{n-2}dx,\ n \neq -1$

39. $\int \frac{dx}{(\sqrt{x^2-a^2})^n} = \frac{x(\sqrt{x^2-a^2})^{2-n}}{(2-n)a^2} - \frac{n-3}{(n-2)a^2}\int \frac{dx}{(\sqrt{x^2-a^2})^{n-2}},\ n \neq 2$

40. $\int x(\sqrt{x^2-a^2})^n dx = \frac{(\sqrt{x^2-a^2})^{n+2}}{n+2} + C,\ n \neq -2$

41. $\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$

42. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C$

43. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}dx = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| - \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + C$

44. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + C$

45. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C = \frac{1}{a}\cos^{-1}\left|\frac{a}{x}\right| + C$

46. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x} + C$

47. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$

48. $\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx = \frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$

49. $\int (\sqrt{2ax-x^2})^n dx = \frac{(x-a)(\sqrt{2ax-x^2})^n}{n+1} + \frac{na^2}{n+1}\int (\sqrt{2ax-x^2})^{n-2}dx$

50. $\int \frac{dx}{(\sqrt{2ax-x^2})^n} = \frac{(x-a)(\sqrt{2ax-x^2})^{2-n}}{(n-2)a^2} + \frac{n-3}{(n-2)a^2}\int \frac{dx}{(\sqrt{2ax-x^2})^{n-2}}$

51. $\int x\sqrt{2ax-x^2}\,dx = \frac{(x+a)(2x-3a)\sqrt{2ax-x^2}}{6} + \frac{a^3}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right)+C$

52. $\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}dx = \sqrt{2ax-x^2} + a\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right)+C$

53. $\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^2}dx = -2\sqrt{\frac{2a-x}{x}} - \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right)+C$

54. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = a\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) - \sqrt{2ax-x^2}+C$

55. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-x}{x}}+C$

56. $\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$

57. $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$

58. $\int \sin^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} + C$

59. $\int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} + C$

60. $\int \sin^n ax\,dx = \frac{\sin^{n-1}ax\cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}ax\,dx$

61. $\int \cos^n ax\,dx = \frac{\cos^{n-1}ax\sin ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}ax\,dx$

62. (a) $\int \sin ax\cos bx\,dx = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + C,\ a^2\neq b^2$

(b) $\int \sin ax\sin bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C,\ a^2\neq b^2$

(c) $\int \cos ax\cos bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C,\ a^2\neq b^2$

63. $\int \sin ax\cos ax\,dx = -\frac{\cos 2ax}{4a} + C$

64. $\int \sin^n ax\cos ax\,dx = \frac{\sin^{n+1}ax}{(n+1)a} + C,\ n\neq -1$

65. $\int \frac{\cos ax}{\sin ax}dx = \frac{1}{a}\ln|\sin ax| + C$

66. $\int \cos^n ax\sin ax\,dx = -\frac{\cos^{n+1}ax}{(n+1)a} + C,\ n\neq -1$

67. $\int \frac{\sin ax}{\cos ax}dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos ax| + C$

68. $\int \sin^n ax\cos^m ax\,dx = -\frac{\sin^{n-1}ax\cos^{m+1}ax}{a(m+n)} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^{n-2}ax\cos^m ax\,dx,\ n\neq -m$ （缩减 $\sin^n ax$）

69. $\int \sin^n ax\cos^m ax\,dx = \frac{\sin^{n+1}ax\cos^{m-1}ax}{a(m+n)} + \frac{m-1}{m+1}\int \sin^n ax\cos^{m-2}ax\,dx,\ m\neq -n$ （缩减 $\cos^m ax$）

70. $\int \frac{dx}{b + c\sin ax} = \frac{-2}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)\right] + C,\ b^2 > c^2$

71. $\int \frac{dx}{b + c\sin ax} = \frac{-1}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \ln\left|\frac{c + b\sin ax + \sqrt{c^2 - b^2}\cos ax}{b + c\sin ax}\right| + C,\ b^2 < c^2$

72. $\int \frac{dx}{1 + \sin ax} = -\frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + C$

73. $\int \frac{dx}{1 - \sin ax} = \frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) + C$

74. $\int \frac{dx}{b + c\cos ax} = \frac{2}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}} \tan\frac{ax}{2}\right] + C,\ b^2 > c^2$

75. $\int \frac{dx}{b + c\cos ax} = \frac{2}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \ln\left|\frac{c + b\cos ax + \sqrt{c^2 - b^2}\sin ax}{b + c\cos ax}\right| + C,\ b^2 < c^2$

76. $\int \frac{dx}{1 + \cos ax} = \frac{1}{a}\tan\frac{ax}{2} + C$

77. $\int \frac{dx}{1 - \cos ax} = -\frac{1}{a}\cot\frac{ax}{2} + C$

78. $\int x\sin ax\, dx = \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{x}{a}\cos ax + C$

79. $\int x\cos ax\, dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax + C$

80. $\int x^n\sin ax\, dx = -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\, dx$

81. $\int x^n\cos ax\, dx = \frac{x^n}{a}\sin ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\, dx$

82. $\int \tan ax\, dx = \frac{1}{a}\ln|\sec ax| + C$

83. $\int \cot ax\, dx = \frac{1}{a}\ln|\sin ax| + C$

84. $\int \tan^2 ax\, dx = \frac{1}{a}\tan ax - x + C$

85. $\int \cot^2 ax\, dx = -\frac{1}{a}\cot ax - x + C$

86. $\int \tan^n ax\, dx = \frac{\tan^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \tan^{n-2} ax\, dx,\ n \neq 1$

87. $\int \cot^n ax\, dx = \frac{\cot^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \cot^{n-2} ax\, dx,\ n \neq 1$

88. $\int \sec ax\, dx = \frac{1}{a}\ln|\sec ax + \tan ax| + C$

89. $\int \csc ax\, dx = -\frac{1}{a}\ln|\csc ax + \cot ax| + C$

90. $\int \sec^2 ax\, dx = \frac{1}{a}\tan ax + C$

91. $\int \csc^2 ax\, dx = -\frac{1}{a}\cot ax + C$

92. $\int \sec^n ax\, dx = \frac{\sec^{n-2} ax\tan ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} ax\, dx,\ n \neq 1$

93. $\int \csc^n ax\, dx = -\frac{\csc^{n-2} ax\cot ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} ax\, dx,\ n \neq 1$

94. $\int \sec^n ax\tan ax\, dx = \frac{\sec^n ax}{na} + C,\ n \neq 0$

95. $\int \csc^n ax\cot ax\, dx = -\frac{\csc^n ax}{na} + C,\ n \neq 0$

96. $\int \sin^{-1} ax\, dx = x\sin^{-1} ax + \frac{1}{a}\sqrt{1 - a^2x^2} + C$

97. $\int \cos^{-1} ax\, dx = x\cos^{-1} ax - \frac{1}{a}\sqrt{1 - a^2x^2} + C$

98. $\int \tan^{-1} ax\, dx = x\tan^{-1} ax - \frac{1}{2a}\ln(1 + a^2x^2) + C$

99. $\int x^n\sin^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sin^{-1} ax - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\, dx}{\sqrt{1 - a^2x^2}},\ n \neq -1$

100. $\int x^n \cos^{-1} ax \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cos^{-1} ax + \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1-a^2x^2}}, \; n \neq -1$

101. $\int x^n \tan^{-1} ax \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \tan^{-1} ax - \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{1+a^2x^2}, \; n \neq -1$

102. $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$

103. $\int b^{ax} dx = \frac{1}{a} \frac{b^{ax}}{\ln b} + C, \; b > 0, \; b \neq 1$

104. $\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1) + C$

105. $\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx$

106. $\int x^n b^{ax} dx = \frac{x^n b^{ax}}{a \ln b} - \frac{n}{a \ln b} \int x^{n-1} b^{ax} dx, \; b > 0, \; b \neq 1$

107. $\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C$

108. $\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C$

109. $\int \ln ax \, dx = x \ln ax - x + C$

110. $\int x^n (\ln ax)^m dx = \frac{x^{n+1} (\ln ax)^m}{n+1} - \frac{m}{n+1} \int x^n (\ln ax)^{m-1} dx, \; n \neq -1$

111. $\int x^{-1} (\ln ax)^m dx = \frac{(\ln ax)^{m+1}}{m+1} + C, m \neq -1$

112. $\int \frac{dx}{x \ln ax} = \ln | \ln ax | + C$

113. $\int \sinh ax \, dx = \frac{1}{a} \cosh ax + C$

114. $\int \cosh ax \, dx = \frac{1}{a} \sinh ax + C$

115. $\int \sinh^2 ax \, dx = \frac{\sinh 2ax}{4a} - \frac{x}{2} + C$

116. $\int \cosh^2 ax \, dx = \frac{\sinh 2ax}{4a} + \frac{x}{2} + C$

117. $\int \sinh^n ax \, dx = \frac{\sinh^{n-1} ax \cosh ax}{na} - \frac{n-1}{n} \int \sinh^{n-2} ax \, dx, \; n \neq 0$

118. $\int \cosh^n ax \, dx = \frac{\cosh^{n-1} ax \sinh ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cosh^{n-2} ax \, dx, \; n \neq 0$

119. $\int x \sinh ax \, dx = \frac{x}{a} \cosh ax - \frac{1}{a^2} \sinh ax + C$

120. $\int x \cosh ax \, dx = \frac{x}{a} \sinh ax - \frac{1}{a^2} \cosh ax + C$

121. $\int x^n \sinh ax \, dx = \frac{x^n}{a} \cosh ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cosh ax \, dx$

122. $\int x^n \cosh ax \, dx = \frac{x^n}{a} \sinh ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sinh ax \, dx$

123. $\int \tanh ax \, dx = \frac{1}{a} \ln (\cosh ax) + C$

124. $\int \coth ax \, dx = \frac{1}{a} \ln | \sinh ax | + C$

125. $\int \tanh^2 ax \, dx = x - \frac{1}{a} \tanh ax + C$

126. $\int \coth^2 ax \, dx = x - \frac{1}{a} \coth ax + C$

127. $\int \tanh^n ax \, dx = \frac{\tanh^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \tanh^{n-2} ax \, dx, \; n \neq 1$

128. $\int \coth^n ax \, dx = -\frac{\coth^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \coth^{n-2} ax \, dx, \; n \neq 1$

129. $\int \operatorname{sech} ax\,dx = \frac{1}{a}\sin^{-1}(\tanh ax) + C$

130. $\int \operatorname{csch} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\left|\tanh\frac{ax}{2}\right| + C$

131. $\int \operatorname{sech}^2 ax\,dx = \frac{1}{a}\tanh ax + C$

132. $\int \operatorname{csch}^2 ax\,dx = -\frac{1}{a}\coth ax + C$

133. $\int \operatorname{sech}^n ax\,dx = \frac{\operatorname{sech}^{n-2} ax \tanh ax}{(n-1)a} + \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{sech}^{n-2} ax\,dx,\ n \neq 1$

134. $\int \operatorname{csch}^n ax\,dx = -\frac{\operatorname{csch}^{n-2} ax \coth ax}{(n-1)a} - \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{csch}^{n-2} ax\,dx,\ n \neq 1$

135. $\int \operatorname{sech}^n ax \tanh ax\,dx = -\frac{\operatorname{sech}^n ax}{na} + C,\ n \neq 0$

136. $\int \operatorname{csch}^n ax \coth ax\,dx = -\frac{\operatorname{csch}^n ax}{na} + C,\ n \neq 0$

137. $\int e^{ax}\sinh bx\,dx = \frac{e^{ax}}{2}\left[\frac{e^{bx}}{a+b} - \frac{e^{-bx}}{a-b}\right] + C,\ a^2 \neq b^2$

138. $\int e^{ax}\cosh bx\,dx = \frac{e^{ax}}{2}\left[\frac{e^{bx}}{a+b} + \frac{e^{-bx}}{a-b}\right] + C,\ a^2 \neq b^2$

139. $\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx = \Gamma(n) = (n-1)!, n > 0$

140. $\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},\ a > 0$

141. $\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx = \begin{cases} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot n}\cdot\frac{\pi}{2}, & \text{如果 } n \text{ 是大于或等于 2 的偶整数} \\ \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot n}, & \text{如果 } n \text{ 是大于或等于 3 的奇整数} \end{cases}$

## B.4 级数

**泰勒级数**

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \quad |x| < 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \quad |x| < \infty$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |x| < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad |x| < \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}, \quad -1 < x \leqslant 1$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\tanh^{-1}x = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1$$

$$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leqslant 1$$

### 二项式级数

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!} + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)x^k}{k!} + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k, \quad |x| < 1$$

其中

$$\binom{m}{1} = m, \quad \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2!}, \quad \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}, \quad k \geqslant 3$$

## B.5 向量运算符公式(笛卡儿坐标形式)

### 梯度、散度、旋度和拉普拉斯方程的公式

**区间的类型**

| | 笛卡儿坐标 $(x, y, z)$ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 是在 $x, y, z$ 增加方向的单位向量；$M, N, P$ 是 $F(x, y, z)$ 在这三个方向的纯量分量. |
|---|---|
| 梯度 | $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$ |
| 散度 | $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$ |
| 旋度 | $\nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$ |
| 拉普拉斯方程 | $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ |

### 向量三重积

$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v}$

$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$

**线积分基本定理**

(1) 令 $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$ 是一个向量场，它的分量在空间中一个开连通区域 $D$ 上连续. 那么存在这样一个可微函数 $f$，使得

$$\boldsymbol{F} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

当且仅当对于 $D$ 中的所有点 $A$ 和 $B$，$\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ 的值同连接 $D$ 中 $A$ 和 $B$ 的路径无关.

(2) 如果积分同从 $A$ 到 $B$ 的路径无关，那么它的值为

$$\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = f(B) - f(A)$$

**格林定理及其在三维空间的推广**

| | |
|---|---|
| 格林定理的法向形式 | $\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\, ds = \iint_R \nabla\cdot\boldsymbol{F}\, dA$ |
| 散度定理 | $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma = \iiint_D \nabla\cdot\boldsymbol{F}\, dV$ |
| 格林定理的切向形式 | $\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_R \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{k}\, dA$ |
| 斯托克斯定理 | $\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma$ |

### 向量恒等式

在下面的恒等式中，$f$ 和 $g$ 是可微的纯量函数，$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 和 $\boldsymbol{F}_3$ 是可微的向量函数，$a$ 和 $b$ 是实常数.

$\nabla\times(\nabla f) = \boldsymbol{0}$

$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

$\nabla\cdot(g\boldsymbol{F}) = g\nabla\cdot\boldsymbol{F} + \nabla g\cdot\boldsymbol{F}$

$\nabla\times(g\boldsymbol{F}) = g\nabla\times\boldsymbol{F} + \nabla g\times\boldsymbol{F}$

$\nabla\cdot(a\boldsymbol{F}_1 + b\boldsymbol{F}_2) = a\nabla\cdot\boldsymbol{F}_1 + b\nabla\cdot\boldsymbol{F}_2$

$\nabla\times(a\boldsymbol{F}_1 + b\boldsymbol{F}_2) = a\nabla\times\boldsymbol{F}_1 + b\nabla\times\boldsymbol{F}_2$

$\nabla(\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{F}_2) = (\boldsymbol{F}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{F}_2 + (\boldsymbol{F}_2\cdot\nabla)\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_1\times(\nabla\times\boldsymbol{F}_2) + \boldsymbol{F}_2\times(\nabla\times\boldsymbol{F}_1)$

$\nabla\cdot(\boldsymbol{F}_1\times\boldsymbol{F}_2) = \boldsymbol{F}_2\cdot\nabla\times\boldsymbol{F}_1 - \boldsymbol{F}_1\cdot\nabla\times\boldsymbol{F}_2$

$\nabla\times(\boldsymbol{F}_1\times\boldsymbol{F}_2) = (\boldsymbol{F}_2\cdot\nabla)\boldsymbol{F}_1 - (\boldsymbol{F}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{F}_2 + (\nabla\cdot\boldsymbol{F}_2)\boldsymbol{F}_1 - (\nabla\cdot\boldsymbol{F}_1)\boldsymbol{F}_2$

$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{F}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F}) - (\nabla\cdot\nabla)\boldsymbol{F} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F}) - \nabla^2\boldsymbol{F}$

$(\nabla\times\boldsymbol{F})\times\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{F}\cdot\nabla)\boldsymbol{F} - \frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F})$

## B.6 极限

**一般法则**

如果$L$，$M$，$C$和$R$是实数，并且$\lim_{x\to c} f(x)=L$和$\lim_{x\to c} g(x)=M$，那么有

和法则 $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x))=L+M$

差法则 $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x))=L-M$

积法则 $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x))=L\cdot M$

常数倍法则 $\lim_{x\to c}(k\cdot f(x))=k\cdot L$

商法则 $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M}$，$M\neq 0$

**夹层定理**

如果$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$在包含$c$的一个开区间内可能除开$x=c$之外成立，并且如果

$$\lim_{x\to c} g(x)=\lim_{x\to c} h(x)=L$$

那么

$$\lim_{x\to c} f(x)=L$$

**不等式**

如果$f(x)\leqslant g(x)$在包含$c$的一个开区间内可能除开$x=c$之外成立，并且两个函数在$x=c$的极限存在，那么

$$\lim_{x\to c} f(x)\leqslant \lim_{x\to c} g(x)$$

**连续性**

如果$g$在$L$连续，并且$\lim_{x\to c} f(x)=L$，那么

$$\lim_{x\to c} g(f(x))=g(L)$$

**特殊公式**

如果$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$，那么

$$\lim_{x\to c} P(x)=P(c)=a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}+\cdots+a_0$$

如果$P(x)$和$Q(x)$是多项式，并且$Q(c)\neq 0$，那么

$$\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(c)}{Q(c)}$$

如果$f(x)$在$x=c$连续，那么

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad 和 \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

**洛必达法则**

如果$f(a)=g(a)=0$，$f'$和$g'$在包含$a$的一个开区间$I$内同时存在，并且当$x\neq a$时在$I$上$g'(x)\neq 0$，那么

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

假定右端的极限存在.

## B.7 微分法则

**一般公式**

假设$u$和$v$是$x$的可微函数.

常数 $\frac{d}{dx}(c)=0$

和 $\frac{d}{dx}(u+v)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$

差 $\frac{d}{dx}(u-v)=\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}$

常数倍 $\frac{d}{dx}(cu)=c\frac{du}{dx}$

积 $\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$

商 $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

幂 $\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$

链式法则 $\frac{d}{dx}(f(g(x)))=f'(g(x))\cdot g'(x)$

**三角函数**

$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$　　$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$

$\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$　　$\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$

$\frac{d}{dx}(\cot x)=-\csc^2 x$　　$\frac{d}{dx}(\csc x)=-\csc x\cot x$

**指数函数和对数函数**

$\frac{d}{dx}e^x=e^x$　　$\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a \qquad \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x\ln a}$$

**反三角函数**

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\csc^{-1}x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

**双曲函数**

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x \qquad \frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \mathrm{sech}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{sech}\, x) = -\mathrm{sech}\, x \tanh x$$

$$\frac{d}{dx}(\coth x) = -\mathrm{csch}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{csch}\, x) = -\mathrm{csch}\, x \coth x$$

**反双曲函数**

$$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1}x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{sech}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\coth^{-1}x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{csch}^{-1}x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$$

**参数方程**

如果 $x=f(t)$ 和 $y=g(t)$ 是可微的，那么

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \quad 和 \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}$$

## B.8 积分法则

**一般公式**

零值 $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

积分次序 $$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

常数倍 $$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \quad (任意数\ k)$$

$$\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \quad (k=-1)$$

和与差 $$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

可加性 $$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

最大最小不等式 如果 $\max f$ 和 $\min f$ 是 $f$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值，那么

$$\min f\cdot(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \max f\cdot(b-a)$$

优势 $$f(x) \geqslant g(x), x\in[a,b] \quad\Rightarrow\quad \int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

$$f(x) \geqslant 0, x\in[a,b] \quad\Rightarrow\quad \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$$

**微积分基本定理**

**第1部分** 如果$f$在$[a, b]$上连续，那么$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$在$[a, b]$上连续和可微，并且它的导数为$f(x)$，即

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

**第2部分** 如果$f$在$[a, b]$上每个点连续，并且$F$是$f$在$[a, b]$上的任意反导数，那么

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

**定积分中的代换**

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

**分部积分法**

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

# 华章数学译丛

## 微积分

高等微积分（Fitzpatrick，中、英）
微积分及其应用（Bittinger，中）
大学微积分（Hass，中）

## 数学分析

数学分析原理（Rudin，中、英）
数学分析（Apostol，中、英）
纯数学教程（Hardy，英）
泛函分析（Rudin，中、英）
实分析与复分析（Rudin，中、英）
实分析（Royden，中、英）
实分析和概率论（Dudley，中、英）
复分析（Ahlfors，中、英）
复变函数及应用（Brown，中、英）
复分析基础及工程应用（Saff，中、英）
三角级数（Zygmund，英）

## 代数

线性代数（Jain，英）
线性代数（Leon，中、英）
线性代数及其应用（Lay，中）
代数（Isaacs，英）
代数（Artin，中、英）
抽象代数基础教程（Rotman，中、英）
高等近世代数（Rotman，中）
矩阵分析（Horn，中）
同调代数导论（Weibel，英）

## 数学建模

数学建模方法与分析（Meerschaert，中、英）
数学建模（Giordano，中、英）

## 微分方程

实用偏微分方程（Haberman，中、英）
偏微分方程教程（Asmar，中、英）
微分方程与边界值问题（Zill，中、英）
动力系统导论（Robinson，中、英）
流体动力学导论（Batchelor，英）

## 概率统计

概率论基础教程（Ross，中）
概率统计（Stone，英）
概率论及其在投资、保险、工程中的应用（Bean，英）
概率与计算（Mitzenmacher，中）
贝叶斯方法（Leonard，英）
抽样理论与方法（Govindarajulu，英）
数理统计与数据分析（Rice，英）
应用回归分析和其他多元方法（Kleinbaum，英）
多元数据分析（Lattin，英）
预测与时间序列（Bowerman，英）
时间序列分析的小波方法（Percival，中、英）
随机过程导论（Kao，英）
试验者的统计学（Box，中）
理工科概率统计（Walpole，中）
统计学（Mendenhall，中）

## 数论

初等数论及其应用（Rosen，中、英）
数论概论（Silverman，中、英）

## 数理逻辑

应用逻辑（Nerode，中、英）

## 金融数学

金融数学（Stampfli，中、英）
数理金融初步（Ross，中、英）
金融时间序列分析（Tsay，中）

## 运筹学

数学规划导论（Walker，英）
线性规划导论（Vaserstein，中、英）

# 托马斯大学微积分

本书是广受赞誉的《Thomas' Calculus》（托马斯微积分）第11版的精编版本，这个精编版本根据当今大学微积分课程的目标取舍主题，浓缩题材，使其更适于教学和学习。同时，本书继承和发扬了原作的优点：坚持准确性和严谨性，突出应用，强调练习和技能训练，融入现代化技术手段，并且保持良好的可读性。

## 本 书 特 点

- 坚持微积分的如下教学目标：以最快的步伐使学生了解微积分的基本概念，掌握其分析方法和理论基础，获得实际应用能力，为他们尽早进入现代数学、科学技术和其他应用领域做好准备。
- 力求按照微积分学创建和形成的过程讲述微积分：运用大量富于启发性的实例引领读者进入讨论的主题，从中归纳出定义和定理，然后再把微积分形成的理论和方法付诸应用，展现其"来龙去脉"。
- 坚持严格性标准：对于重要的概念和定义给出形式化描述；对于大部分定理和推论给出严格证明，或者指出证明的步骤；对于少数未予证明的定理和推论留作习题让读者证明；只对少数超出本书范围的定理才留待高等微积分教程去证明。
- 为帮助学生掌握微积分方法和培养解决应用问题的能力，提供了丰富多彩的各类习题：每一节有围绕主题的习题，每一章有指导复习的问题、实习习题以及补充和提高习题。
- 注意使微积分同现代技术工具相结合：部分习题要求使用CAS（计算机代数系统）。

University
Calculus




www.pearsonhighered.com




上架指导：数学

ISBN 978-7-111-25134-7




投稿热线：(010) 88379604
购书热线：(010) 68995259, 68995264
读者信箱：hzjsj@hzbook.com



封面设计 · 杨宇梅

定价：118.00 元